DIE RANDWERTAUFGABEN DER LINEAREN INTEGRALGLEICHUNG

Von

Yosiro IKEDA

Vor einigen Jahren, habe ich gezeigt, dass zwei miteinander gekoppelte lineare Integralgleichung durch zwei lineare Differentialgleichungen konstruiert werden können, und dass die Lösung der einen Integralgleichung durch die andere Integralgleichung gegeben werden kann(1). Wenn die Anfangsbedingungen gegeben sind, kann die Volterrasche Integralgleichung bestimmt werden. Wenn die Randbedingungen durch lineare Kombination der Randwerte der gesuchten Funktion gegeben sind, kann die Volterrasche Integralgleichung in die Fredholmsche Integralgleichung übergeführt werden. Im Vorliegenden wird gezeigt, dass im allgemeinen die Inhomogenität und die Unbekannte der Integralgleichung den verschiedenen Randbedingungen genügen müssen, und die Lösung der einen Integralgleichung auch in diesem Falle durch die gekoppelte Integralgleichungen gegeben wird, und dass der Kern bestimmten anderen Randbedingungen genügt, wobei es auch eine Lösung der homogenen Integralgleichung geben kann.

I. Das erste Ergebnis der vorigen Arbeit

Es seien

$$(1) \qquad u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots\cdots + a_m u = 0\,,$$

$$(2) \qquad v^{(m)} + b_1 v^{(m-1)} + \cdots\cdots + b_m v = 0$$

lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung, deren Koeffizienten a und b keinen singulären Punkt zwischen α und x besitzen, und es

(1) Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, Bd. 1. (1928), S. 193–209. Journal of Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Ser. 1, Vol. 1, No. 2, 1931.

Jour. of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. X, No. 1, 1941.

seien u_1, u_2, ..., u_m die unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (1). Die Lösung der Differentialgleichung (2), deren Anfangswerte $v(a)$, $v^{(1)}(a)$, ..., $v^{(m-1)}(a)$ sind, genügt der Integralgleichung

$$v(x) = F_1(x, a) + \int_a^x D(x, \xi) F_3(\xi) d\xi , \tag{3}$$

wobei

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1^{(m-1)}(\xi), & \dots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(1)}(\xi), & \dots, & u_m^{(1)}(\xi) \\ u_1(\xi), & \dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$D(x, \xi) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_1(x), & \dots, & u_m(x) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), & \dots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(1)}(\xi), & \dots, & u_m^{(1)}(\xi) \\ u_1(\xi), & \dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$F_1(x, a) = - \begin{vmatrix} 0 & u_1(x), & \dots, & u_m(x) \\ v^{(m-1)}(a), & u_1^{(m-1)}(a), & \dots, & u_m^{(m-1)}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v^{(1)}(a), & u_1^{(1)}(a), & \dots, & u_m^{(1)}(a) \\ v(a), & u_1(a), & \dots, & u_m(a) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$F_3(\xi) = (a_1 - b_1) v^{(m-1)} + \dots + (a_m - b_m) v . \tag{7}$$

Nun setzen wir

$$A_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \dots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \dots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \dots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-n-2)}(\xi), & \dots, & u_m^{(m-n-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & u_1(\xi), & \dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}, \tag{8}$$

so erhalten wir aus (7)

$$F_1(x, a) = \frac{A_0(x, a)}{\Delta} v^{(m-1)}(a) - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{A_{m-1}(x, a)}{\Delta} v(a), \tag{9}$$

$$\frac{A_0(x, a)}{\Delta} = D(x, a).$$

Durch partielle Integrationen des letzten Integrals der Integralgleichung (3) erhalten wir eine Volterrasche Integralgleichung

$$v(x) = U(x, a) + \int_0^x K(x, \xi) v(\xi) d\xi, \tag{10}$$

wobei

$$\begin{aligned} K(x, \xi) = {} & D(x, \xi)\big(a_m(\xi) - b_m(\xi)\big) \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big\{D(x, \xi)\big(a_{m-1}(\xi) - b_{m-1}(\xi)\big)\Big\} \\ & + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}}\Big\{D(x, \xi)\big(a_1(\xi) - b_1(\xi)\big)\Big\}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} U(x, a) = {} & U_{m-1}(x, a) v^{(m-1)}(a) + U_{m-2}(x, a) v^{(m-2)}(a) \\ & + \cdots + U_0(x, a) v(a), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\left\{ \begin{aligned} U_{m-1}(x, a) &= \frac{A_0(x, a)}{\Delta(a)}; \\ U_{m-2}(x, a) &= -\frac{A_1(x, a)}{\Delta(a)} - D(x, a)\big(a_1(a) - b_1(a)\big), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ U_0(x, a) &= -D(x, a)\big\{a_{m-1}(a) - b_{m-1}(a)\big\} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial a}\Big\{D(x, a)\big(a_{m-2}(a) - b_{m-2}(a)\big)\Big\} \\ & \quad + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-2}}{\partial a^{m-2}}\Big\{D(x, a)\big(a_1(a) - b_1(a)\big)\Big\} \\ & \quad + (-1)^{m-1} \frac{A_{m-1}(x, a)}{\Delta(a)}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

II. Weitere Ergebnisse

Nach (3) und (9) schreiben wir

$$(14)\qquad v(x)=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{A_n(x,\,a)}{\Delta}v^{(m-1-n)}(a)+\int_a^x D(x,\,\xi)F_3(\xi)d\xi\,.$$

Differentiiert man (14) nach x, so kommt

$$v^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{A_n^{(1)}(x,\,a)}{\Delta}v^{(m-1-n)}(a)+D(x,\,\xi)F_3(\xi)\Big|_{\xi=x}$$
$$+\int_a^x\frac{\partial D(x,\,\xi)}{\partial x}F_3(\xi)d\xi\,,$$

Da

$$D(x\,,\,\xi)\Big|_{\xi=x}=0\,,$$

folgt

$$(15)\qquad v^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{A_n^{(1)}(x,\,a)}{\Delta}v^{(m-1-n)}(a)+\int_a^x\frac{\partial D(x,\,\xi)}{\partial x}F_3(\xi)d\xi\,.$$

Nach der Definition von $D(x\,,\,\xi)$ ergibt sich sogleich

$$\frac{\partial D(x,\,\xi)}{\partial x}\Bigg|_{\xi=x}=\cdots\cdots=\frac{\partial^{m-2}D(x,\,\xi)}{\partial x^{m-2}}\Bigg|_{\xi=x}=0\,.$$

Differentiiert man (15) mehrmals nach x, so erfolgt

$$(16)\qquad\left\{\begin{aligned}v^{(2)}(x)&=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{A_n^{(2)}(x,\,a)}{\Delta}v^{(m-1-n)}(a)+\int_a^x\frac{\partial^2 D(x,\,\xi)}{\partial x^2}F_3(\xi)d\xi\,,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\v^{(m-1)}(x)&=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{A_n^{(m-1)}(x,\,a)}{\Delta}v^{(m-1-n)}(a)\\&\qquad+\int_a^x\frac{\partial^{m-1}D(x,\,\xi)}{\partial x^{m-1}}F_3(\xi)d\xi\,.\end{aligned}\right.$$

Wir setzen zur Abkürzung;

$$(17)\qquad U^*(x,\,a)=U_{m-1}^*(x,\,a)v^{(m-1)}(a)+\cdots\cdots+U_0^*(x,\,a)v(a)\,,$$

$$(18)\quad \begin{cases} U^*_{m-1}(x,\, a) = 0\,, \quad U^*_{m-2}(x\,,\, a) = U_{m-2}(x\,,\, a) + \dfrac{A_1(x\,,\, a)}{\Delta(a)}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\,, \quad U_0^*(x,\, a) = U_0(x,\, a) - (-1)^{m-1}\dfrac{A_{m-1}(x\,,\, a)}{\Delta(a)}\,, \\ \dfrac{\partial^k U_i(x\,.\, a)}{\partial x^k} = U_i^{(k)}(x,\, a)\,, \quad \dfrac{\partial^k U_i^*(x,\, a)}{\partial x^k} = U_i^{*(k)}\,. \end{cases}$$

Durch partielle Integrationen der letzten Integrale in (14) (15) und (16) gewinnen wir also;

$$(19)\quad \begin{cases} v^{(1)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} U_i^{(1)}(x,\, a)v^{(i)}(a) - \sum\limits_{i=0}^{m-2} U_i^{*(1)}(x,\, x)v^{(i)}(x) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_a^x \frac{\partial K(x,\, \xi)}{\partial x} v(\xi)d\xi\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ v^{(m-1)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} U_i^{(m-1)}(x,\, a)v^{(i)}(a) - \sum\limits_{i=0}^{m-2} U_i^{*(m-1)}(x,\, x)v^{(i)}(x) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_a^x \frac{\partial K^{m-1}(x,\, \xi)}{\partial x^{m-1}} v(\xi)d\xi\,. \end{cases}$$

Schreiben wir

$$\frac{\partial^n A_k(x\,,\, \xi)}{\partial x^n} = A_k^{(n)}\,,$$

so kann man die folgende Tafel aus der Defintion (8) erhalten;

$$(20)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{A_0}{\Delta}\right|_{\xi=x} = \left.\dfrac{A_0^{(1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = \cdots\cdots = \left.\dfrac{A_0^{(m-2)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 0\,, \quad \left.\dfrac{A_0^{(m-1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 1\,, \\ \left.\dfrac{A_1}{\Delta}\right|_{\xi=1} = \left.\dfrac{A_1^{(1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = \cdots\cdots = \left.\dfrac{A_0^{(m-3)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 0\,, \quad \left.\dfrac{A_1^{(m-2)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = -1\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\dfrac{A_1^{(m-1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left.\dfrac{A_{m-2}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 0\,, \quad \dfrac{A_{m-2}^{(1)}}{\Delta} = (-1)^{m-2}, \quad \left.\dfrac{A_{m-2}^{(2)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = \cdots\cdots = \left.\dfrac{A_{m-2}^{(m-1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 0\,, \\ \left.\dfrac{A_{m-1}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = (-1)^{m-1}, \quad \left.\dfrac{A_{m-1}^{(1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = \cdots\cdots = \left.\dfrac{A_{m-1}^{(m-1)}}{\Delta}\right|_{\xi=x} = 0\,. \end{cases}$$

In der vorigen Arbeit wurde bewiesen, dass

$$
(21)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial A_0(x,\xi)}{\partial\xi} = A_1(x,\xi)\,, \\
\dfrac{\partial A_n(x,\xi)}{\partial\xi} = -a_{n+1}A_0(x,\xi)(-1)^{n+1} - a_1 A_n(x,\xi) + A_{n+1}(x,\xi) \\
\qquad\qquad [n \neq 0\,,\ n < m-1]\,, \\
\dfrac{\partial A_{m-1}(x,\xi)}{\partial\xi} = -a_m A_0(x,\xi) - a_1 A_{m-1}(x,\xi)\,, \quad \dfrac{\partial \Delta(\xi)}{\partial\xi} = -a_1\Delta(\xi).
\end{cases}
$$

Da

$$
(22)\quad \begin{cases}
D(x,\xi) = \dfrac{A_0}{\Delta}\,, \quad \dfrac{\partial D(x,\xi)}{\partial\xi} = \dfrac{a_1A_0 + A_1}{\Delta}\,, \\
\dfrac{\partial^2 D(x,\xi)}{\partial\xi^2} = \dfrac{(a_1^2 + a_1^{(1)} - a_2)A_0 + a_1A_1 + A_2}{\Delta}
\end{cases}
$$

gegeben ist, nehmen wir an, dass $\dfrac{\partial^n D(x,\xi)}{\partial\xi^n}$ durch eine lineare Kombination von A dargestellt werden kann. Also

$$
(23)\quad \frac{\partial^n D(x,\xi)}{\partial\xi^n} = \frac{l_{0n}A_0 + l_{1n}A_1 + \cdots\cdots + l_{n-1n}A_{n-1} + A_n}{\Delta}\,,
$$

Durch unmittelbare Differentiation gewinnen wir wegen (21)

$$
\frac{\partial^{n+1} D(x,\xi)}{\partial\xi^{n+1}} = \frac{l_{0n}^{(1)}A_0 + l_{1n}^{(1)}A_1 + \cdots\cdots + l_{n-1n}^{(1)}A_{n-1} + l_{0n}\dfrac{\partial A_0}{\partial\xi} + \cdots\cdots + \dfrac{\partial A_n}{\partial\xi}}{\Delta}
$$

$$
+ \frac{a_1}{\Delta}\{l_{0n}A_0 + l_{1n}A_1 + \cdots\cdots l_{n-1n}A_{n-1} + A_n\}
$$

$$
= \frac{1}{\Delta}\Big[\Big\{a_1 l_{01} + l_{01}^{(1)} - a_2 l_{1n} + \cdots\cdots + (-1)^n a_{n+1}\Big\}A_0
$$

$$
+ (l_{0n} + l_{1n}^{(1)})A_1 + \cdots\cdots + (l_{n-2n} + l_{n-1n}^{(1)})A_{n-1}
$$

$$
+ l_{n-1n}A_n + A_{n+1}\Big]\,.
$$

Das ist auch eine lineare Kombination von A und wir können es in der folgenden Form

$$\frac{l_{0n+1}A_0+l_{1n+1}A_1+\cdots\cdots+l_{n-1n}A_n+A_{n+1}}{\Delta}$$

schreiben. Für gegebenes n ist dabei

$$(24)\qquad \begin{cases} l_{n+1n+1}=l_{nn}, \quad l_{nn+1}=l_{n-1n}, \quad l_{in+1}=l_{i-1n}+l^{(1)}_{in-1}, \\ l_{0n+1}=a_1 l_{0n}+l^{(1)}_{0n}-(a_2 l_{1n}-a_3 l_{2n}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}a_{n+1}l_{nn}). \end{cases}$$

Daraus

$$\begin{aligned} l_{nn} &= l_{n-1n-1}=\cdots\cdots=l_{11}=l_{00}=1, \\ l_{n-1n} &= l_{n-2n-1}=\cdots\cdots=l_{12}=l_{01}=a_1, \\ l_{n-2n} &= l_{02}+l^{(1)}_{n-2n-1}=l_{02}+(n-2)l^{(1)}_{12}, \\ l_{n-3n} &= l_{03}+(n-3)l_{02}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}l^{(1)}_{12}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass

$$(25)\qquad l_{n-in}=l_{0i}+C_1^{n-i}l^{(1)}_{0i-1}+\cdots\cdots+C_{i-1}^{n-2}l^{(i-1)}_{01},$$

und benutzen wir $l_{n-in+1}=l_{n-i-1n}+l^{(1)}_{n-in}=l_{n-i-2n-1}+l^{(1)}_{n-i-1n-1}+l^{(1)}_{n-in}$,

was aus (24) folgt, so erhalten wir endlich

$$l_{n-in+1}=l_{0i+1}+(l^{(1)}_{n-in}+l^{(1)}_{n-i-1n-1}+\cdots\cdots+l^{(1)}_{1i+1}),$$

nach (25)

$$\begin{aligned} &= l_{0i+1}+(l^{(1)}_{0i}+C_1^{n-i}l^{(2)}_{0i-1}+\cdots\cdots+C_{i-1}^{n-2}l^{(i)}_{01}) \\ &\quad +(l^{(1)}_{0i}+C_1^{n-i-1}l^{(2)}_{0i-1}+\cdots\cdots+C_{i-1}^{n-3}l^{(i)}_{01}) \\ &\quad +(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots) \\ &\quad +(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots) \\ &\quad +(l^{(1)}_{0i}+C_1^1 l^{(2)}_{0i-1}+\cdots\cdots+C_{i-1}^{i-1}l^{(i)}_{01}). \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} &(1+x)^{n-i+k-2}+(1+x)^{n-i+k-3}+\cdots\cdots+(1+x)^{k-1} \\ &=\frac{\{(1+x)^{n-i}-1\}(1+x)^{k-1}}{x}, \end{aligned}$$

so müssen die Koeffizienten von x^{k-1} auf beiden Seiten miteinander gleich sein. Also

$$C_{k-1}^{n-i+k-2}+C_{k-1}^{n-i+k-3}+\cdots\cdots+C_{k-1}^{k-1}=C_k^{n-i+k-1}\,.$$

Wir gewinnen somit

$$l_{n-i\,n+1}=l_{0\,i+1}+C_1^{n-i}l_{0i}^{(1)}+\cdots\cdots+C_k^{n-i+k}l_{0\,i+k}^{(k)}+\cdots\cdots+C_i^{n-1}l_{01}^{(i)}\,.$$

Durch mathematische Induktion ist also obige Annahme bestätigt worden.

Nun um U_n^* zu berechnen, setzen wir

$$a_1-b_1=k_1\,,\quad \ldots\ldots,\quad a_n-b_n=k_n\,. \tag{26}$$

Nach dem Leibnizschen Satz gilt

$$\begin{aligned}
U_n^*(x,\,a) &= -D(x,\,a)k_{m-n-1}+\frac{\partial D(x,\,a)k_{m-n-2}}{\partial a}\\
&\qquad+\cdots\cdots+(-1)^{m-n-1}\frac{\partial^{m-n-2}D(x,\,a)k_1}{\partial a^{m-n-2}}\\
&= -D(x,\,a)k_{m-n-1}+D(x,\,a)k_{m-n-2}^{(1)}-D(x,\,a)k_{m-n-3}^{(2)}\\
&\qquad+\cdots\cdots+(-1)^{m-n-1}D(x,\,a)k_1^{(m-n-2)}\\
&\qquad+\frac{\partial D(x,\,a)}{\partial a}k_{m-n-2}-\frac{2\,\partial D(x,\,a)}{\partial a}k_{m-n-3}^{(1)}\\
&\qquad+\cdots\cdots+(-1)^{m-n-1}C_1^{m-n-2}\frac{\partial D(x,\,a)}{\partial a}k_1^{(m-n-3)}\\
&\qquad-\frac{\partial^2 D(x,\,a)}{\partial a^2}k_{m-n-3}+\cdots\cdots\\
&\qquad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad+(-1)^{m-n-1}\frac{\partial^{m-n-2}D(x,\,a)}{\partial a^{m-n-2}}k_1\,.
\end{aligned}$$

Wir ordnen die rechte Seite nach der Ordnung der Ableitung

$$\begin{aligned}
&= D(x,\,a)\left\{-k_{m-n-1}+k_{m-n-2}^{(1)}-\cdots\cdots+(-1)^{m-n-1}k_1^{(m-n-2)}\right\}\\
&+\frac{\partial D(x,\,a)}{\partial a}\left\{k_{m-n-2}-2k_{m+n-3}^{(1)}+\cdots\cdots+(-1)^{m-n-1}(m-n-2)k_1^{(m-n-3)}\right\}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial^i D(x,a)}{\partial a^i}\Big\{(-1)^{i+1}k_{m-n-i-1}+(-1)^{i+2}C_i^{m-p-i+1)}k^{(1)}_{m-n-i-2}$$
$$+\cdots\cdot+(-1)^{m-n}C_i^{m-n-3}\,k_2^{(m-n-i-3)}$$
$$+(-1)^{m-n-1}C_1^{m-n-i-2}k_i^{(m-n-i-2)}\Big\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{\partial^{m-n-2}D(x,a)}{\partial a^{m-n-2}}k_1(-1)^{m-n-1}.$$

Nach (23) ist $\dfrac{\partial^i D}{\partial a^i}$ eine lineare Funktion von A. Daher

$$\begin{aligned}(26)\quad \Delta(a)U_n^*(x,a) &= (-1)^{m-n-1}A_{m-n-2}k_1\\ &\quad+(-1)^{m-n-1}A_{m-n-3}\Big\{a_1k_1+(-k_2+C_1^{m-n-2}k_1^{(1)})\Big\}\\ &\quad+\cdots\cdot+(-1)^{m-n-1}A_{m-n-1-p}\Big\{l_{m-n-1-p\,m-n-2}k_1\\ &\quad+(-k_2+C_1^{m-n-2}k_1^{(1)})l_{m-n-1-p\,m-n-3}+(k_3-C_1^{m-n-3}k_2^{(1)}\\ &\quad+C_2^{m-n-2}k_1^{(2)})\,l_{m-n-1-p\,m-n-4}+\cdots\cdot\\ &\quad+(-1)^p(k_p-C_1^{m-n-p}k^{(1)}_{p-1}\\ &\qquad+\cdots\cdot+(-1)^p C_{p-1}^{m-n-2}k_1^{(p-1)})\,l_{m-n-1-p\,m-n-1-p}\Big\}\\ &\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad+(-1)^{m-n-1}A_0\Big\{l_{0\,m-n-2}k_1+(-k_2+C_1^{m-n-2}k_1^{(1)})l_{0\,m-n-3}\\ &\quad+\cdots\cdot+(-1)^{m-n-1}(k_{m-n-1}-k^{(1)}_{m-n-2}\\ &\qquad+\cdots\cdot+(-1)^{m-n-1}k_1^{(m-n-2)})\Big\}.\end{aligned}$$

Aus (20) folgt

$$\frac{A_k^{(l)}}{\Delta}\Bigg|_{a=x}=\begin{cases}0 & l+k\neq m-1\\ (-1)^k & l+k=m-1\,.\end{cases}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(27)\quad U_n^{*(l)}(x.\,x)&=(-1)^{l-n}\Big\{l_{m-l-1,\,m-n-2}k_1+l_{m-l-1,m-n-3}(-k_2+C_1^{m-n-2}k_1)\\ &\quad+\cdots\cdot+(-1)^{l-n}\,l_{m-l-1,\,m-l-1}(k_{l-n}-C_1^{m-l}k^{(1)}_{l-n-1}\\ &\qquad+\cdots\cdot+(-1)^{l-n}C_{l-n-1}^{m-n-2}k_1^{(l-n-1)})\Big\}.\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Definition der l_{ik} (23) und (24), so ergibt sich immer

$$i \leqq k .$$

Wegen der Ungleichung

$$m-l-1 \leqq m-n-2 \qquad \text{oder} \qquad l \geqq n+1$$

kann nur in diesem Falle eine von Null verschiedenen Funktion $U_n^{*(l)}(x, x)$ existieren. Sonst gilt immer

$$U_n^{*(l)}(x, x) = 0 , \qquad l < n+1$$

Nun stellen wir die Funktion $U_n^{*(l)}(x, x)$ in der folgenden Tafel zusammen ;

$$(28) \quad \begin{cases} U_0^{*(1)}(x, x) \neq 0 , \quad U_1^{*(1)}(x, x) = 0 , \quad \ldots\ldots , \quad U_{m-1}^{*(1)}(x, x) = 0 , \\ U_0^{*(2)}(x, x) \neq 0 , \quad U_1^{*(2)}(x, x) \neq 0 , \quad U_2^{*(2)}(x, x) = 0 , \quad \ldots\ldots , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U_{m-1}^{*(2)}(x, x) = 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ U_0^{*(m-1)}(x, x) \neq 0 , \quad \ldots\ldots , \quad U_{m-2}^{*(m-1)}(x, x) \neq 0 , \quad U_{m-1}^{*(m-1)}(x, x) = 0 . \end{cases}$$

Somit können wir die Integralgleichungen (15) und (19) in der Gestalt schreiben,

$$(29) \quad \begin{aligned} v(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} U_i(x, \alpha) v^{(i)}(\alpha) + \int_\alpha^x K(x, \xi) v(\xi) d\xi , \\ v(\beta) &= \sum_{i=0}^{m-1} U_i(\beta, \alpha) v^{(i)}(\alpha) + \int_\alpha^\beta K(\beta, \xi) v(\xi) d\xi , \\ v^{(1)}(\beta) &= \sum_{i=0}^{m-1} U_i^{(1)}(\beta, \alpha) v^{(i)}(\alpha) - U_0^{*(1)}(\beta, \beta) v(\beta) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial K(\beta, \xi)}{\partial \beta} v(\xi) d\xi , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ v^{(m-1)}(\beta) &= \sum_{i=0}^{m-1} U_i^{(m-1)}(\beta, \alpha) v^{(i)}(\alpha) - \sum_{i=0}^{m-2} U_i^{*(m-1)}(\beta, \beta) v^{(i)}(\beta) \\ &\quad + \int_\alpha^\beta \frac{\partial^{m-1} K(\beta, \xi)}{\partial \beta^{m-1}} v(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

III. Allgemeine lineare Randbedingungen und Überführung der Volterraschen Integralgleichung in die Fredholmsche Integralgleichung

Wenn die linearen Randbedingungen, welchen $v(x)$ genügen muss, folgendermassen gegeben sind,

$$
\begin{aligned}
&\nu_{01}v(\alpha)+\nu_{11}v^{(1)}(\alpha)+\cdots\cdots+\nu_{m-11}v^{(m-1)}(\alpha)\\
&+\mu_{01}v(\beta)+\mu_{11}v^{(1)}(\beta)+\cdots\cdots+\mu_{m-11}v^{(m-1)}(\beta)=c_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\nu_{0m}v(\alpha)+\nu_{1m}v^{(1)}(\alpha)+\cdots\cdots+\nu_{m-1m}v^{(m-1)}(\alpha)\\
&+\mu_{0m}v(\beta)+\mu_{1m}v^{(1)}(\beta)+\cdots\cdots+\mu_{m-1m}v^{(m-1)}(\beta)=c_m
\end{aligned}
\tag{30}
$$

und wenn man $v(\alpha)$, $v^{(1)}(\alpha)$, ... , $v^{(m-1)}(\alpha)$ und $v(\beta)$, $v^{(1)}(\beta)$, ... $v^{(m-1)}(\beta)$ zwischen (29) und (30) eliminiert, so ergibt sich

(31)

$$
\left|\begin{array}{l}
v(x)-\int_\alpha^x K(x,\xi)v(\xi)d\xi,\ U_0(x,\alpha),\ \ldots,\ U_{m-1}(x,\alpha),\ \ 0\ \ ,\ \ldots,\ 0\\
\quad -\int_\alpha^\beta K(\beta,\xi)v(\xi)d\xi,\ U_0(\beta,\alpha),\ \ldots,\ U_{m-1}(\beta,\alpha),\ -1,\ 0\ \ldots,\ 0\\
\quad -\int_\alpha^\beta \frac{\partial K(\beta,\xi)}{\partial\beta}v(\xi)d\xi,\ U_0^{(1)}(\beta,\alpha),\ \ldots,\ U_{m-1}^{(1)}(\beta,\alpha),\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -U_0^{*(1)}(\beta,\beta),\ -1,\ 0\ldots,\ 0\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\quad -\int_\alpha^\beta \frac{\partial^{m-1}K(\beta,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}v(\xi)d\xi,\ U_{m-1}^{(m-1)}(\beta,\alpha),\ \ldots,\\
\qquad\qquad U_{m-1}^{(m-1)}(\beta,\alpha),\ -U_0^{*(m-1)}(\beta,\beta),\ \ldots,\ -1\\
\qquad c_1\qquad\qquad ,\quad \nu_{01},\quad \ldots,\\
\qquad\qquad\qquad\quad \nu_{m-11},\quad \mu_{01},\quad \ldots,\ \mu_{m-11}\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad c_m\qquad\qquad ,\quad \nu_{0m},\quad \ldots,\\
\qquad\qquad\qquad\quad \nu_{m-1m},\quad \mu_{0m},\quad \ldots,\ \mu_{m-1m}
\end{array}\right|=0.
$$

Wir setzen zur Abkürzung

(32)

$$D=\begin{vmatrix} U_0(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(\beta,\alpha), & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ U_0^{(1)}(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}^{(1)}(\beta,\alpha), & -U_0^{*(1)}(\beta,\beta), & -1, & 0\ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_0^{(m-1)}(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}^{(m-1)}(\beta,\alpha), & -U_0^{*(m-1)}(\beta,\beta), & & \ldots, & -1 \\ \nu_{01}, & \ldots, & \nu_{m-11}, & \mu_{01}, & & \ldots, & \mu_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{0m}, & \ldots, & \nu_{m-1m}, & \mu_{0m}, & & \ldots, & \mu_{m-1m} \end{vmatrix},$$

(33) $U(x)=\frac{1}{D}$

$$\begin{vmatrix} 0, & U_0(x,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(x,\alpha), & 0 & \ldots, & 0 \\ 0, & U_0(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(\beta,\alpha), & -1, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & U_0^{(m-1)}(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}^{(m-1)}(B,\alpha), & U_0^{*(m-1)}(\beta,\beta), & \ldots, & -1 \\ c_1, & \nu_{01}, & \ldots, & \nu_{m-11}, & \mu_{01}, & \ldots, & \mu_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n, & \nu_{0m}, & \ldots, & \nu_{m-1m}, & \mu_{0m}, & \ldots, & \mu_{m-1m} \end{vmatrix},$$

(34) $\underset{x>\xi}{G(x,\xi)}=K(x,\xi)+\frac{1}{D}\times$

$$\begin{vmatrix} 0, & U_0(x,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(x,\alpha), & 0,\ 0 & \ldots, & 0 \\ K(\beta,\xi), & U_0(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(\beta,\alpha), & -1,\ 0, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{m-1}K(\beta,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}, & U_0^{(m-1)}(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}^{(m-1)}(\beta,\alpha), & & & \\ & & & & -U_0^{*(m-1)}(\beta,\beta), & \ldots, & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0, & \nu_{01}, & \ldots, & \nu_{m-11}, & \mu_{0m}, & \ldots, & \mu_{m-11} \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0, & \nu_{0m}, & \ldots, & \nu_{m-1n}, & \mu_{0m}, & \ldots, & \mu_{m-1m} \end{vmatrix}$$

(35) $$\underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = \underset{x>\xi}{G(x,\xi)} - K(x,\xi)\,.$$

Dadurch gelangt man zu einer Fredholmsche Integralgleichung, unter der Voraussetzung $D \neq 0$;

(36) $$v(x) = U(x) + \int_\alpha^\beta G(x,\xi)v(\xi)d\xi$$

IV. Das zweite Ergebnis der vorigen Arbeit

In dem speziellen Falle, wo mindestens $a_1-b_1 = a_2-b_2 = \cdots = a_p-b_p = 0$ und in den Randbedingungen $v^{(p+1)}(\beta), \ldots, v^{(m-1)}(\beta)$ nicht auftreten, haben wir

(37) $$U_n^{*(l)}(\beta,\beta) = 0\,, \qquad p < l-n\,,$$

(38) $$\mu_{qn} = 0\,,\quad q = p+1\,,\ \ldots,\ m-1\,,\quad n = 1\,,\ \ldots,\ m\,.$$

Danach können wir die Determinante (31) in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} v(x) - \int_\alpha^x K(x,\xi)v(\xi)d\xi\,, & U_0(x,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(x,\alpha), & 0, & \ldots, & 0 \\ -\int_\alpha^\beta K(\beta,\xi)v(\xi)d\xi\,, & U_0(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(\beta,\alpha), & -1, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ -\int_\alpha^\beta \frac{\partial^p K(\beta,\xi)}{\partial\beta^p}v(\xi)d\xi\,, & U_0^{(p)}(\beta,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}^{(p)}(\beta,\alpha), & 0, & \ldots, & -1 \\ c_1, & \nu_{01}, & \ldots, & \nu_{m-11}, & \mu_{01}, & \ldots, & \mu_{m-11} \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ c_m, & \nu_{0m}, & \ldots, & \nu_{m-1m}, & \mu_{0m}, & \ldots, & \mu_{m-1m} \end{vmatrix} = 0$$

schreiben.

Multiplizieren wir die $p+2$ te Zeile mit $\mu_{p-11}, \ldots . \mu_{p-1m}$ und addieren wir dazu die $p+3$ te, ... $p+2+m$ te Zeile, so verschwinden die Elemente der letzten Kolonne mit Ausnahme der $p+2$ ten Zeile, und wir können die $p+2$ te Zeile und die letzte Kolonne wegnehmen. Wiederholen wir diese Methode, so gelangen wir zu der Form:

$$\tag{39} \begin{vmatrix} v-\int_\alpha^x K(x, \xi)v(\xi)d\xi\,, & U_0(x, a)\,, & \ldots\,, & U_{m-1}(x, a) \\ c_1-K_1(\beta, \xi)\,, & E_{01}\,, & \ldots\,, & E_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m-K_m(\beta, \xi)\,, & E_{0m}\,, & \ldots\,, & E_{m-1m} \end{vmatrix} = 0\,,$$

wobei

$$\tag{40} E_{ik} = \nu_{ik}+\mu_{0k}U_i(\beta, a)+\cdots+\mu_{pk}\frac{\partial^p U_i(\beta, a)}{\partial \beta^p}\,,$$

$$i = 0\,, 1\,, \ldots\,, m-1\,,\ k = 1\,, 2\,, \ldots\,, m\,,$$

$$\tag{41} K_k(\beta, \xi) = \mu_{0k}K(\beta, \xi)+\cdots+\mu_{pk}\frac{\partial^p K(\beta, \xi)}{\partial \beta^p}$$

gesetzt sind.

Aus der Determinante folgt sogleich

$$\tag{42} v(x) = U(x) + \int_\alpha^\beta G(x, \xi)v(\xi)d\xi\,,$$

wobei

$$\tag{43} D = \begin{vmatrix} E_{01}\,, & E_{11}\,, & \ldots\,, & E_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{0m}\,, & E_{1m}\,, & \ldots\,, & E_{m-1m} \end{vmatrix}\,,$$

$$\tag{44} U(x) = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0\,, & U_0(x, a)\,, & \ldots\,, & U_{m-1}(x, a) \\ c_1\,, & E_{01}\,, & \ldots\,, & E_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m\,, & E_{0m}\,, & \ldots\,, & E_{m-1m} \end{vmatrix}$$

und

$$(45)\quad \underset{x>\xi}{G(x,\xi)}=K(x,\xi)+\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0, & U_0(x,a), & \ldots, & U_{m-1}(x,a) \\ K_1(\beta,\xi), & E_{01}, & \ldots, & E_{m-11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_m(\beta,\xi), & E_{0m}, & \ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix},$$

$$\underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = \underset{x>\xi}{G(x,\xi)} - K(x,\xi),$$

Dies ist das zweite Ergebnis der vorigen Arbeit, aber der Beweis ist nicht vollständig. Tatsächlich ist das Ergebnis nur dann benutzbar, wenn mindesten $a_1-b_1=\cdots=a_p-b_p=0$ und wenn $\mu_{qn}=0$, $q=p+1,\ldots,m-1$, $n=1,2,\ldots,m$. Doch gehören die dort gegebenen Beispiele alle zu diesem speziellen Falle und deswegen bleiben alle Resultat der Beispiele richtig.

V. Allgemeiner Fall

Im allgemeinen multipliziert man die $m+1$ te Zeile in der Gleichung (31) mit $\mu_{m-11}, \mu_{m-12}, \ldots, \mu_{m-1m}$ und addiert dazu die $m+2$ te, $m+3$ te, ... $2m+1$ te Zeile, so sind die Elemente in der letzte Kolonne alle Null mit Ausnahme der Elemente der $m+1$ ten Zeile. Daher kann man die letzte Kolonne und die $m+1$ te Zeile wegnehmen. Die Elemente der $m+k$ ten Zeile in der neuen Determinante sind

$$c_k+\mu_{m-1k}\int_a^\beta \frac{\partial^{m-1}K(\beta,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}v(\xi)d\xi, \quad \nu_{0k}+\mu_{m-1k}U_0^{(m-1)}(\beta,a), \quad \ldots,$$

$$\mu_{0k}-\mu_{m-1k}U_0^{*(m-1)}(\beta,\beta), \quad \ldots, \quad \mu_{m-2k}-\mu_{m-1k}U_{m-2}^{*(m-1)}(\beta,\beta).$$

Wir setzen

$$\mu_{m-2k}-\mu_{m-1k}U_{m-2}^{*(m-1)}(\beta,\beta)=\mu'_{m-2k},$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

Multipliziert man die m te Zeile mit $\mu'_{m-2,1}, \mu'_{m-22} \ldots \mu'_{m-2m}$ und addiert dazu die $m+1$ te, ..., $2m$ te Zeile, so werden die Elemente in der letzten Kolonne alle Null mit Ausnahme der Elemente der m ten Zeile. Daher nehmen wir die letzte Kolonne und die m te Zeile wieder weg.

Die Elemente der $m+k-1$ ten Zeile sind

$$c_k + \mu_{m-1k} \int_\alpha^\beta \frac{\partial^{m-1} K(\beta, \xi)}{\partial \beta^{m-1}} v(\xi) d\xi + \mu'_{m-2k} \int_\alpha^\beta \frac{\partial^{m-2} K(\beta, \xi)}{\partial \beta^{m-2}} v(\xi) d\xi$$

$$\nu_{0k} + \mu_{m-1k} U_0^{(m-1)}(\beta, \alpha) + \mu'_{m-2k} U_0^{(m-2)}(\beta, \alpha), \quad \ldots\ldots$$

$$\mu_{0k} - \mu_{m-1k} U_0^{*(m-1)}(\beta, \beta) - \mu'_{m-2k} U_2^{*(m-2)}(\beta, \beta), \quad \ldots\ldots$$

$$\mu_{m-3k} - \mu_{m-1k} U_{m-3}^{*(m-1)}(\beta, \beta) - \mu'_{m-2k} U_{m-3}^{*(m-2)}(\beta, \beta).$$

Setzen wir

$$\mu'_{m-3k} = \mu_{m-3k} - \mu_{m-1k} U_{m-3}^{*(m-1)}(\beta, \beta) - \mu'_{m-2k} U_{m-3}^{*(m-2)}(\beta, \beta)$$

und berechnen weiter in gleicher Weise, so gelangen wir endlich wegen der Abkürzung

$$\text{(46)} \qquad \mu'_{m-ik} = \mu_{m-ik} - \mu_{m-1k} U_{m-i}^{*(m-1)} - \mu'_{m-2k} U_{m-3}^{*(m-2)} + \cdots\cdots + \mu_{m-i+1k} U_{m-i}^{*(m-i+1)}$$

zu derselben Form wie im speziellen Falle abgesehen von dem Strisch,

$$\text{(47)} \qquad E'_{ik} = \nu_{ik} + \mu'_{0k} U_i(\beta, \alpha) + \cdots\cdots + \mu'_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} U_i(\beta, \alpha)}{\partial \beta^{m-1}},$$

$$i = 0, 1, \ldots\ldots, m-1, \quad k = 1, 2, \ldots\ldots, m$$

$$\text{(48)} \qquad K'_k(\beta, \xi) = \mu'_{0k} K(\beta, \xi) + \cdots\cdots + \mu'_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} K(\beta, \xi)}{\partial \beta^{m-1}}.$$

und zur Fredholmschen Integralgleichung

$$v(x) = U(x) + \int_\alpha^\beta G(x, \xi) v(\xi) d\xi,$$

wobei

$$\text{49)} \qquad D = \begin{vmatrix} E'_{01}, & E'_{11}, & \ldots\ldots, & E'_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E'_{0m}, & E'_{1m}, & \ldots\ldots, & E'_{m-1m} \end{vmatrix},$$

$$(50)\qquad U(x) = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0\,, & U_0(x,\,a)\,, & \ldots\ldots, & U_{m-1}(x,\,a) \\ c_1\,, & E'_{01}\,, & \ldots\ldots, & E'_{m-11} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ c_m\,, & E'_{0m}\,, & \ldots\ldots, & E'_{m-1m} \end{vmatrix},$$

$$(51)\qquad \underset{x>\xi}{G(x,\,\xi)} = K(x,\,\xi) + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0\,, & U_0(x,\,a)\,, & \ldots\ldots, & U_{m-1}(x,\,a) \\ K'_1(\beta,\,\xi), & E'_{01}\,, & \ldots\ldots, & E'_{m-11} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ K'_m(\beta,\,\xi) & E'_{0m}\,, & \ldots\ldots, & E'_{m-1m} \end{vmatrix},$$

$$\underset{x>\xi}{G(x,\,\xi)} = \underset{x<\xi}{G(x,\,\xi)} - K(x,\,\xi)$$

gesetzt sind.

VI. Die Randbedingungen, welchen die Funktion $U(x)$ genügt

$U(x)$ ist eine lineare Kombination von unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (1). Daher genügt $U(x)$ der Differentialgleichung (1), aber die Randbedingungen, welchen $U(x)$ genügt, sind nicht dieselben, denen $v(x)$ genügt.

Die Randbedingungen, welchen $U(x)$ genügt, seien

$$(52)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad\nu'_{01}U(a) + \cdots\cdots\cdots + \nu'_{m-11}U^{(m-1)}(a) \\ +\,\mu'_{01}U(\beta) + \cdots\cdots\cdots + \mu'_{m-11}U^{(m-1)}(\beta) = c_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad\nu'_{0m}U(a) + \cdots\cdots\cdots + \nu'_{m-1m}U^{(m-1)}(a) \\ +\,\mu'_{0m}U(\beta) + \cdots\cdots\cdots + \mu'_{m-1m}U^{(m-1)}(\beta) = c_m\,. \end{array}\right.$$

Substituieren wir (50) in der linken Seite von (52), so erhalten wir

$$(53)\qquad \begin{vmatrix} 0\,, & \sum_1 & \ldots\ldots, & \sum_m \\ c_1\,, & E'_{01}\,, & \ldots\ldots, & E'_{m-11} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ c_m\,, & E'_{0m}\,, & \ldots\ldots, & E'_{m-1m} \end{vmatrix},$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\sum_n &= \nu'_{0k} U_n(\alpha) + \cdots\cdots + \nu'_{m-1k} U_n^{(m-1)}(\alpha) \\ &\quad + \mu'_{0k} U_n(\beta) + \cdots\cdots + \mu'_{m-1k} U_n^{(m-1)}(\beta), \\ &k = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots, m-1\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Wenn die Werte $\nu'_{0k}, \ldots, \nu'_{m-1k}$ so gewählt werden, dass

$$\nu'_{0k} U_n(\alpha, \alpha) + \nu'_{1k} U_n^{(1)}(\alpha, \alpha) + \cdots + \nu'_{m-1k} U_n^{(m-1)}(\alpha, \alpha) = \nu_{nk}, \tag{54}$$
$$n = 0, 1, \ldots, m-1, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

so hat die Determinante (53) den Wert c_k. Aus (13), (18), (20) und (28), folgt

$$\left\{\begin{array}{llll} U_0(\alpha, \alpha) = 1, & U_1(\alpha, \alpha) = 0, & \ldots, & U_{m-1}(\alpha, \alpha) = 0, \\ U_0^{(1)}(\alpha, \alpha) \neq 0, & U_1^{(1)}(\alpha, \alpha) = 1, & \ldots, & U_{m-1}^{(1)}(\alpha, \alpha) = 0, \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,} \\ U_0^{(m-1)}(\alpha, \alpha) \neq 0, & \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots,} & U_{m-1}^{(m-1)}(\alpha, \alpha) = 1. \end{array}\right. \tag{55}$$

Damit können wir die Gleichung (54) in der Form

$$\begin{aligned} \nu'_{m-1n} &= \nu_{m-1n}, \\ \nu'_{m-2n} + \nu'_{m-1n} U_{m-2}^{(m-1)} &= \nu_{m-2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &, \\ \nu'_{0n} + \nu'_{1n} U_0^{(1)} + \cdots + \nu'_{m-1n} U_0^{(m-1)} &= \nu_{0n} \end{aligned} \tag{56}$$

schreiben.

Offenbar ist

$$\nu'_{m-1n} = \nu_{m-1n}$$

$$\nu'_{qn} = \begin{vmatrix} 1 & 0, & \cdots\cdots, & \nu_{m-1n}, & 0 \;\cdots & 1 \\ U_{m-2}^{(m-1)}(\alpha, \alpha), & 1, & 0, \;\ldots, & \nu_{m-2n}, & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_0^{(m-1)}(\alpha, \alpha), & \ldots, & U_0^{q+1}(\alpha, \alpha), & \nu_{0n}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}, \tag{57}$$

Für μ'_{ik} gelten die folgenden algebraischen Gleichungen, wie schon in (48) gezeigt

$$(58)\quad \begin{cases} \mu_{m-1n} = \mu'_{m-1n}, \\ \mu_{m-2n} = \mu'_{m-2n} + \mu'_{m-1n} U^{*(m-1)}_{m-2}(\beta, \beta), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mu_{0n} = \mu'_{0n} + \mu'_{1n} U_0^{*(1)}(\beta, \beta) + \cdots\cdots + \mu'_{m-1n} U_0^{*(m-1)}(\beta, \beta), \end{cases}$$

Daraus gewinnen wir die Lösung

$$(59)\quad \mu'_{qn} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots\ldots, & \mu_{m-1n}, & 0, & \ldots\ldots, & 0 \\ U^{*(m-1)}_{m-2}(\beta, \beta), & 1, & 0 \ldots\ldots, & \mu_{m-2n}, & 0, & \ldots\ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_0^{*(m-1)}(\beta, \beta), & & \ldots\ldots\ldots, & \mu_{0n}, & & \ldots\ldots\ldots, & 1 \end{vmatrix},$$

Es ist ganz merkwürdig, dass die Determinanten (57) und (59) nicht nur in derselben Form dargestellt werden, sondern auch die dort auftretenden Funktionen wegen (18) und (20) den Relation genügen

$$(60)\qquad U_k^{(i)}(x, x) = U_k^{*(i)}(x, x), \quad i > k.$$

Im speziellen Falle, wo $k_1 = \cdots\cdots = k_p = 0$, $\mu_{p+1n} = \cdots\cdots = \mu_{m-1n} = 0$ und $\nu_{p+1n} = \cdots\cdots = \nu_{m-1n} = 0$, $n = 1, \cdots\cdots m$ wird die Determinante (59)

$$\mu'_{qn} = \mu_{qn}, \quad q = 1, 2, \ldots\ldots, p, \quad n = 1, 2, \ldots\ldots, m,$$

In gleicher Weise wird aus (57)

$$\nu'_{qn} = \nu_{qn}.$$

VII. Reziprozität

Wenn man a in b und u in v zyklich substituiert, so erhält man

$$\varDelta \to \varDelta_1, \ D \to D_1, \ K \to S, \ A \to S, \ U \to V, \ G \to -\varGamma, \ E' \to H'$$

wo

$$(61)\qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} v_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots, & v_m^{(m-1)}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1(\xi), & \ldots\ldots, & v_m(\xi) \end{vmatrix},$$

$$(62)\quad D_1(x,\xi)=\frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} v(x)\,, & \cdots\cdots, & v_m(x) \\ v_1^{(m-2)}(\xi)\,, & \cdots\cdots, & v_m^{(m-2)}(\xi) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_1(\xi)\,, & \cdots\cdots, & v_m(\xi) \end{vmatrix},$$

$$(63)\quad S(x,\xi)=D_1(x,\xi)(b_1-a_1)-\frac{\partial D_1(x,\xi)(b_2-a_2)}{\partial\xi}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^m\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\left\{D_1(x,\xi)(b_m-a_m)\right\},$$

$$(64)\quad B_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0\,, & v_1(x)\,, & \cdots\cdots, & v_m(x) \\ 0\,, & v_1^{(m-1)}(\xi)\,, & \cdots\cdots, & v_m^{(m-1)}(\xi) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1\,, & v_1^{(m-n-1)}(\xi)\,, & \cdots\cdots, & v_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0\,, & v_1^{(m-n-2)}(\xi)\,, & \cdots\cdots, & v_m^{(m-n-2)}(\xi) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0\,, & v_1(\xi)\,, & \cdots\cdots, & v_m(\xi) \end{vmatrix},$$

$$(65)\quad \begin{cases} V_{m-1}(x,a)=D_1(x,a)\,, \\ V_{m-2}(x,a)=-D_1(x,a)\big(b_1(a)-a_1(a)\big)-\dfrac{B_1(x,a)}{\Delta_1(a)}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ V_0(x,a)=-D_1(x,a)\big(b_{m-1}(a)-a_{m-1}(a)\big) \\ \qquad -\dfrac{\partial}{\partial a}\left\{D_1(x,a)\big(b_{m-2}(a)-a_{m-2}(a)\big)\right\} \\ \qquad +\cdots\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{\partial^{m-2}}{\partial a^{m-2}}\left\{D(x,a)\big(b_1(a)-a_1(a)\big)\right\} \\ \qquad +(-1)^{m-1}\dfrac{B_{m-1}(x,a)}{\Delta_1}\,, \end{cases}$$

$$(66)\quad V(x,a)=V_{m-1}U^{(m-1)}(a)+\cdots\cdots+V_0U(a)\,,$$

$$(67)\quad H'_{ik}=\nu'_{ik}+\mu''_{0k}V_i(\beta,a)+\cdots\cdots+\mu''_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}U(\beta,a)}{\partial\beta^{m-1}}$$

$$S'_k(\beta,\xi) = \mu''_{0k} S(\beta,\xi) + \cdots\cdots + \mu''_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}S(\beta,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}, \tag{68}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} H'_{01}, & \ldots, & H'_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H'_{0m}, & \ldots, & H'_{m-1m} \end{vmatrix}, \tag{69}$$

$$V(x) = -\frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} 0, & V_0(x,\alpha), & \ldots, & V_{m-1}(x,\alpha) \\ c_1, & H'_{01}, & \ldots, & H'_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m, & H'_{0m}, & \ldots, & H'_{m-1m} \end{vmatrix}, \tag{70}$$

$$-\Gamma_{x>\xi}(x,\xi) = S(x,\xi) + \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} 0, & V_0(x,\alpha), & \ldots, & V_{m-1}(x,\alpha) \\ S'_1(\beta,\xi), & H'_{01}, & \ldots, & H'_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, \\ S'_m(\beta,\xi), & H'_{0m}, & \ldots, & H'_{m-1m} \end{vmatrix}, \tag{71}$$

$$-\Gamma_{x<\xi}(x,\xi) = -\Gamma_{x<\xi}(x,\xi) - S(x,\xi).$$

Durch diese zykliche Transformation gelangen wir zu einer Fredholmschen Integralgleichung

$$U(x) = V(x) - \int_\alpha^\beta \Gamma(x,\xi)U(\xi)d\xi. \tag{72}$$

Die Randbedingungen, welchen $V(x)$ genügt, sind

$$\begin{aligned} &\nu''_{01}V(\alpha) + \cdots\cdots + \nu''_{m-11}V^{(m-1)}(\alpha) \\ &+\mu''_{01}V(\beta) + \cdots\cdots + \mu''_{m-11}V^{(m-1)}(\beta) = c_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &\nu''_{0m}V(\alpha) + \cdots\cdots + \nu''_{m-1m}V^{(m-1)}(\alpha) \\ &+\mu''_{0m}V(\beta) + \cdots\cdots + \mu''_{m-1m}V^{(m-1)}(\beta) = c_m. \end{aligned} \tag{73}$$

Nehmen wir an, dass $V(x)$ den Randbedingungen (73) genügt, so müssen die folgenden Gleichungen bestehen in gleicher Weise wie (56) und (58)

$$(74)\quad \begin{cases} \nu''_{m-1n} = \nu'_{m-1n}\,, \\ \nu''_{m-2n} + \nu''_{m-1n} V^{(m-1)}_{m-2}(\alpha,\alpha) = \nu'_{m-2n}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ \nu''_{0n} + \nu''_{1n} V_0(\alpha,\alpha) + \cdots + \nu''_{m-1n} V^{(m-1)}_0(\alpha,\alpha) = \nu'_{0n}\,. \end{cases}$$

und

$$(75)\quad \begin{cases} \mu''_{m-1n} = \mu'_{m-1n}\,, \\ \mu''_{m-2n} + \mu''_{m-1n} V^{*(m-1)}_{m-2}(\beta,\beta) = \mu'_{m-2n}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ \mu''_{0n} + \mu''_{1n} V^*_0(\beta,\beta) + \cdots + \mu''_{m-1n} V^{*(m-1)}_0(\beta,\beta) = \mu'_{0n}\,. \end{cases}$$

Wenn $\nu''_{ik} = \nu_{ki}$ und $\mu''_{ik} = \mu_{ik}$, $i = 0, \ldots, m-1$, $k = 1, \ldots m$ sind, so sind die Randbedingungen, welchen v and V genügen, miteinander gleich. Da v und V beide die Lösungen der Differentialgleichung (2) sind und denselben Randbedingungen genügen, so ergibt sich offenbar

$$(76)\qquad v = V\,.$$

Wenn $v = V$, folgt unmittelbar, dass (72) die Lösung der Integralgleichung

$$v(x) = U(x) + \int_\alpha^\beta G(x,\xi)v(\xi)d\xi$$

ist.

VII. Beweis des Erscheinens der Koeffizienten der Randbedingungen von v in denen von V

In der Tat ist $\nu''_{ik} = \nu_{ik}$, $\mu''_{ik} = \mu_{ik}$, was wir beweisen wollen. Aus (59) haben wir

$$(77)\quad \mu'_{m-ik} = (-1)^i \mu_{m-1k} \begin{vmatrix} U^{*(m-1)}_{m-2}, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U^{*(m-1)}_{m-i+1}, & & \cdots\cdots, & & 1 \\ U^{*(m-1)}_{m-i}, & & \cdots\cdots, & & U^{*(m-i+1)}_{m-i} \end{vmatrix},$$

$$+ (-1)^{i+1}\mu_{m-2k} \begin{vmatrix} U^{*(m-2)}_{m-3}, & 1 & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U^{*(m-2)}_{m-i}, & & \cdots\cdots, & & U^{*(m-i+1)}_{m-i} \end{vmatrix}.$$

$$+ \cdots\cdots + \mu_{m-ik}\,.$$

Wenn man die Relation

$$(78)\qquad V_{m-i}^{*(m-p)} = (-1)^{i-p-1}\begin{vmatrix} U_{m-p-1}^{*(m-p)}, & 1, & 0, & \dots, & \dots 0 \\ U_{m-p-1}^{*(m-p)}, & U_{m-p-2}^{*(m-p-1)}, & 1, & & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{m-i}^{*(m-p)}, & \dots & \dots & \dots, & U_{m-i}^{*(m-i+1)} \end{vmatrix}$$

für willkürliche p und i beweisen kann, so wird (77)

$$(79)\qquad \mu'_{m-ik} = \mu_{m-1k} V_{m-i}^{*(m-1)} + \dots + \mu_{m-i+1k} V_{m-i}^{*(m-i+1)} + \mu_{m-ik}$$

Substrahieren wir (79) von (75), so gewinnen wir

$$0 = (\mu_{m-1k} - \mu''_{m-1k}) V_{m-i}^{*(m-1)} + \dots + (\mu_{m-i+1k} - \mu''_{m-i+1k}) V_{m-i}^{*(m-i+1)}$$

$$+ (\mu_{m-ik} - \mu''_{m-ik}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Daraus folgt

$$\mu_{m-pk} = \mu''_{m-pk}.$$

Wenn (78) bestehen kann, so folgt gleichzeitig, wie schon bemerkt am Ende des vorigen Paragraphen VI,

$$\nu_{m-ik} = \nu''_{m-ik}.$$

Wenn (78) bewiesen worden ist, so wird unsere Aufgabe vollständig erledigt. Um es zu beweisen, betrachten wir zunächst

$$(80)\qquad X_{n-in} = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ l_{n-in-i+2}, & a_1, & 1, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots, & 1 \\ l_{n-in}, & l_{n-i+1n}, & & \dots, & a_1 \end{vmatrix},$$

wobei l_{ik} in (24) gegeben ist.

Also

$$X_{n-1n} = a_1, \quad X_{n-2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ l_{n-2n} & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - l_{n-2n}.$$

Nach (25) und (24) ist

$$X_{n-2n} = a_1^2 - a_1 l_{01} - l_{01}^{(1)} + a_2 - (n-2) l_{01}^{(1)} = a_2 - (n-1) a_1^{(1)}.$$

Nun setzen wir voraus, dass

$$(81)\qquad X_{n-i+1n} = a_{i-1} - C_1^{n-i+2} a_{i-2}^{(1)} + \cdots\cdots + (-1)^{i-2} C_{i-2}^{n-1} a_1^{(i-2)} .$$

Aus (80) folgt

$$(82)\qquad X_{n-in} = (-1)^{i-1}\Big\{ l_{n-in} - l_{n-i+1n} a_1 + l_{n-i+2n} X_{n-in-i+2} - \\ + (-1)^{i-2} l_{n-2n} X_{n-in-2} + (-1)^{i-1} X_{n-in-1} a_1 \Big\} .$$

Nach (25) gilt

$$l_{n-in} = l_{0i} + C_1^{n-i} l_{0i-1}^{(1)} + \cdots\cdots + C_{i-1}^{n-i+i-1} l_0^{(i-1)} .$$

Nach (24) ist

$$l_{0i} = l_{0i-1}^{(1)} + a_1 l_{0i-1} - a_2 l_{1i-1} + \cdots\cdots + (-1)^{i-1} a_i l_{i-1i-1} ,$$

$$l_{0i-1}^{(1)} = l_{0i-2}^{(2)} + (a_1 l_{0i-2} - a_2 l_{1i-2} + \cdots\cdots + (-1)^{i-2} a_{i-1} l_{i-2i-2})^{(1)} .$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$l_{01}^{(i-1)} = (a_1 l_{00})^{(i-1)} .$$

Multiplizieren wir jede Zeile mit 1, $(C_1^{n-i} + C_0^{n-i}) = C_1^{n-i+1}$, ..., $(C_{i-2}^{n-3} + C_{i-3}^{n-3}) = C_{i-2}^{n-2}$, bzw. und addieren, so erhalten wir

$$(83)\qquad l_{n-in} = (a_1 l_{0i-1} - a_2 l_{1i-1} + \cdots\cdots + (-1)^{i-1} a_i) . \\ + C_1^{n-i+1}(a_1 l_{0i-2} - a_2 l_{1i-2} + \cdots\cdots + (-1)^{i-2} a_{i-1})^{(1)} \\ + C_2^{n-i+2}(a_1 l_{0i-2} - \cdots\cdots + (-1)^{i-3} a_{i-2})^{(2)} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + C_{i-2}^{n-2}(a_1 l_{01} - a_2 l_{11})^{(i-2)} + C_{i-1}^{n-1} a_1^{(i-1)}) ,$$

Wenn man die letzten Glieder in jeder Klammer addiert, so erhält man

$$(84)\qquad (-1)^{i-1}(a_i - C_1^{n-i+1} a_{i-1}^{(1)} + \cdots\cdots + C_{i-2}^{n-2} a_2^{i-2} + (-1)^{i-1} C_{i-1}^{n-1} a_1^{(i-1)}) ,$$

Schreiben wir die Summe $(-1)^{i-1} X_{n-in}^0$, so erhalten wir

$$(85)\qquad (l_{n-in} - (-1)^{i-1} X_{n-in}^0) = (a_1 l_{0i-1} + \cdots\cdots + (-1)^{i-2} a_{i-1} l_{i-2i-1}) \\ + C_1^{n-i+1}(a_1 l_{0i-2} + \cdots\cdots + (-1)^{i-4} a_{i-2} l_{i-3i-2})^{(1)} \\ + C_2^{n-i+2}(a_1 l_{0i-3} + \cdots\cdots + (-1)^{i-6} a_{i-3} l_{i-4i-3})^{(2)} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + C_{i-2}^{n-2}(a_1 l_{01})^{(i-2)} .$$

Die Summe des ersten Gliedes in jeder Klammer auf der rechten Seite von (85) ist

$$\begin{aligned}
&= a_1 l_{0\,i-1} + (a_1 l_{0\,i-2})^{(1)} C_1^{n-i+1} + \cdots\cdots\cdots + (a_1 l_{01})^{(1-2)} C_{i-2}^{n-2} \\
&= a_{1\,i-1} + a_1 l_{0\,i-2}^{(1)} C_1^{n-i+1} + a_1 l_{0\,i-3}^{(2)} C_2^{n-i+2} + \cdots + a_1 l_{01}^{(i-2)} C_{i-2}^{n-2} \\
&\quad + a_1^{(1)} l_{i-2} C_1^{n-i+1} + 2 a_1^{(1)} l_{0\,i-3}^{(1)} C_2^{n-i+2} + \cdots + C_1^{i-2} a_i^{(1)} l_{01}^{(1-3)} C_{i-2}^{n-2} \\
&\quad + a_1^{(2)} l_{0\,i-3} C_2^{n-i+2} + \cdots + C_2^{i-2} a_1^{(2)} l_{01}^{(i-4)} C_{i-2}^{n-2} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + C_{i-2}^{i-2} a_1^{(i-2)} l_{01} C_{i-2}^{n-2}\,.
\end{aligned}$$

Die erste Zeile ist nach (25)

$$a_1 l_{n-i+1\,n} \tag{86}$$

Die zweite Zeile ist

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)} \Big\{ &(n-i+1) l_{0\,i-2} + 2 \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2} l_{0\,i-2}^{(1)} \\
&+ \cdots + C_1^{i-2} C_{i-2}^{n-2} l_{01}^{(i-3)} \Big\} = a_1^{(1)} (n-i+1) l_{n-i+2\,n}\,,
\end{aligned} \tag{87}$$

denn $$C_k^{n-i+k} k = (n-i+1) C_{k-1}^{n-i+k}\,.$$

Die $p-1$ te Zeile ist

$$\begin{aligned}
&a_1^{(p)} l_{0\,i-p-1} C_p^{n-i+p} + a_1^{(p)} l_{0\,i-p-2} C_{p+1}^{n-i+p+1} C_p^{p+1} \\
&+ \cdots + a_1^{p} l_{0\,i-p-q} C_{p+q}^{n-i+p+q} C_p^{p+q} + \cdots + a_1^{(p)} a_1^{(i-2-p)} C_{i-2}^{n-2} C_p^{i-2}\,.
\end{aligned} \tag{88}$$

Da $C_{p+q}^{n-i+p+q} C_p^{p+q} = C_p^{n-i+p} C_q^{n-i+p+q}$, so ist obiges

$$\begin{aligned}
&= a_1^{(p)} C_p^{n-i+p} \Big\{ l_{0,\,i-p-1} + C_1^{n-i+p+1} l_{0,\,i-p-2}^{(1)} + \cdots + C_q^{n-i+p+q} l_{0,\,i-p-q}^{(q)} \\
&\quad + \cdots + a_1^{(i-p-2)} C_{i-p-2}^{n-2} \Big\} = a_1^{(p)} C_p^{n-i+p} l_{n-i+p+1\,n}\,,
\end{aligned}$$

In gleicher Weise, kann man die Summe des p ten Gliedes in jeder Klammer auf der rechten Seite von (85) berechnen; also

$$\begin{aligned}
&(-1)^{p-1} \Big\{ a_p l_{p-1\,i-1} + (a_p l_{p-1\,i-2})^{(1)} C_1^{n-i+1} + \cdots + (a_p l_{p-1\,p})^{(i-p-1)} C_{i-p-1}^{n-i+i-p-1} \\
&= (-1)^{p-1} \Big\{ a_p l_{p-1\,i-1} + a_p l_{p-1\,i-2}^{(1)} C_1^{n-i+1} + \cdots + a_p l_{p-1\,p}^{(i-p-1)} C_{i-p-1}^{n-p-1}
\end{aligned}$$

$$+a_p^{(1)}l_{p-1\,i-2}C_1^{n-i+1}+\cdots\cdots+a_p^{(1)}l_{p-1\,p}^{(i-p-2)}C_1^{i-p-1}C_{i-p-1}^{n-p-1}$$

$$\cdots\cdots+a_p^{(2)}l_{p-1\,p}^{(i-p-3)}C_2^{i-p-1}C_{i-p-1}^{n-p-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_p^{(i-p+1)}l_{p-1\,p}C_{i-p-1}^{n-p-1}\Big\}\,.$$

Die erste Zeile ist

$$(89)\quad (-1)^{p-1}a_p(l_{p-1\,i-1}+l_{p-1\,i-2}^{(1)}C_1^{n-i+1}+\cdots\cdots+l_{p-1\,p}^{(i-p-1)}C_{i-p-1}^{n-p-1})$$

$$=(-1)^{p-1}a_p\Big\{l_{0\,i-p}+C_1^{p-1}l_{0\,i-p-1}^{(1)}+C_2^{p}l_{0\,i-p-2}^{(2)}+\cdots\cdots+C_{i-p-1}^{i+3}l_{01}^{(i-p-1)}$$

$$+C_1^{n-i+1}l_{0\,i-p-1}^{(1)}+C_1^{n-i+1}C_1^{p-1}l_{0\,i-p-2}^{(2)}+\cdots\cdots+C_1^{n-i+1}C_{i-p-2}^{i-4}l_{01}^{(i-p-1)}$$

$$+\cdots\cdots+C_{i-p-1}^{n-p-1}l_{01}^{(i-p-1)}$$

$$=(-1)^{p-1}a_p\Big\{l_{0\,i-p}+l_{0\,i-p-1}^{(1)}(C_1^{p-1}+C_1^{n-i+1})$$

$$+l_{0\,i-p-2}^{(2)}(C_2^{p}+C_1^{p-1}C_1^{n-i+1}+C_2^{n-i+2})$$

$$+\cdots\cdots+a_1^{(i-p-1)}(C_{i-p-1}^{i-3}+C_{i-p-2}^{i-4}C_1^{n-i+1}+C_{i-p-3}^{i-5}C_2^{n-i+2}$$

$$+\cdots\cdots+C_{i-p-1}^{n-p-1})\Big\}$$

$$=(-1)^{p-1}a_p\Big\{l_{0\,i-p}+l_{0\,i-p-1}^{(1)}(n-i+p)+l_{0\,i-p-2}^{(2)}C_2^{n-i+p+1}$$

$$+\cdots\cdots+C_{i-p-1}^{n}\Big\}$$

$$=(-1)^{p-1}a_p\,l_{n-i+p\,n}\,.$$

Da $$(1-x)^{-(n-i+1)}(1-x)^{-p+1}=(1-x)^{-(n+p-i)}\,,$$

so müssen die Koeffizienten von x^{i-p} auf beiden Seiten gleich sein;

$$C_{i-p-1}^{i-3}+C_{i-p-2}^{i-4}C_1^{n-i+1}+\cdots\cdots C_{i-p-1}^{n-p-1}=C_{i-p}^{n}\,.$$

Die q te Zeile ist

$$(90)\quad (-1)^{p-1}a_p^{(q)}\Big\{C_q^{n-i+q}l_{p-1\,i-q-1}+C_{q+1}^{n-i+q+1}C_q^{q+1}l_{p-1\,i-q-2}^{(1)}$$

$$+\cdots\cdots+C_{q+r}^{n-i+q+r}C_r^{q+r}l_{p-1\,i-q-r}^{(r)}$$

$$+\cdots\cdots+a_1^{(i-p-1-q)}C_{i-p-1}^{n-p-1}C_q^{i-p-1}\Big\}$$

$$=(-1)^{p-1}a_p^{(q)}C_q^{n-i+q}\Big\{l_{p-1\,i-q-1}+C_1^{n-i+q+1}l_{p-1\,i-q-2}^{(1)}$$

$$+\cdots\cdots+C_r^{n-i+q-r}l_{p-1\,i-q-r}^{(r)}$$

$$+C_{i\,p-q-1}^{n-p-1}a_1^{(i-p-1-q)}\Big\}=(-1)^{p-1}a_p^{(q)}C_q^{n-i+q}l_{n-i-q+p\,n}\,.$$

Daraus und aus (85) 86) (87) (88) (89) und (90) folgt

$$l_{n-in}-X^0_{n-in}(-1)^{i-1}=a_1 l_{n-i+1n}+(-1)a_1^{(1)}C_1^{n-i+1}l_{n-i+2n}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{p-1}a_1^{(p)}C_p^{n-i+p}l_{n-i+p+1n}+\cdots\cdots+(-1)^{i-2}C_{i-2}^{n-2}a_1^{(i-2)}a_1$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{p-1}a_p l_{n-i+pn}+\cdots\cdots+(-1)^{p-1}a_p^{(q)}l_{n-i-q+pn}+\cdots\cdots$$
$$+a_p^{(i-p-1)}a_1(-1)^{i-p-1}C_{i-p+1}^{n-p+1}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{i-2}a_{i-1}a_1 C_1^{n-i+1}$$
$$=a_1 l_{n-i+1n}-X_{n-in-i+2}l_{n-i+2n}+\cdots\cdots+(-1)^i X_{n-in-1}a_1.$$

Vergleichen wir dies mit (82), so ergibt sich

$$X^0_{n-in}=X_{n-in}\,.$$

Nach (84)

$$X_{n-in}=a_i-C_1^{n-i+1}a_{i-1}^{(1)}+\cdots\cdots+(-1)^{i-1}C_{i-1}^{n-1}a_1^{(i-1)}$$

Damit wird die Voraussetzung (81) bestätigt.

Wenn man setzt

$$\text{(91)}\qquad Y_{n-in}(-1)^{i-1}=r_{n-in}-b_1 r_{n-i+1n}+Y_{n-in-i+2}r_{n-i+2n}+\cdots\cdots+(-1)^{i-1}Y_{n-in-i}b_1\,,$$

und

$$\frac{d_n D_1(x,\xi)}{d\xi^p}=\frac{r_{0n}B_0+r_{1n}B_1+\cdots\cdots+B_n}{\Delta}\,,$$

so ergibt sich in gleicher Weise

$$\text{(92)}\qquad Y_{n-in}=b_i-C_1^{n-i+1}b_{i-1}^{(1)}+\cdots\cdots+(-1)^{i-1}C_{i-1}^{n-1}b_1^{(i-1)}\,.$$

Um (78) unmittelbar zu beweisen, berechnen wir die folgende Determinante

$$\text{(93)}\qquad Z_{ni}=\begin{vmatrix} l_{n-in-i+1} & -r_{n-in-i+1}, & 1, & 0\ \ 0\ldots\ldots,0\\ l_{n-in-i+2} & -r_{n-in-i+1}, & a_1, & 1,\ 0\ldots\ldots,0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_{n-in-1} & -r_{n-in-1}, & l_{n-i+1n-1}, & \cdots\cdots\cdots,1\\ l_{n-in} & -r_{n-in}, & l_{n-i+1n}, & \cdots\cdots\cdots,a_1 \end{vmatrix}(-1)^{i-1},$$

oder

$$(94) \quad Z_{ni} = l_{n-in} - r_{n-in} - (l_{n-in-1} - r_{n-in-1})a_1 + (l_{n-in-2} - r_{n-ii-2})X_{n-2n} + \cdots + (-1)^{i-1}(l_{n-in-i+1} - r_{n-in-i+1})X_{n-i+1n} .$$

Nach (80) kann man schreiben

$$(-1)^{i-1}X_{n-in} = l_{n-in} - l_{n-in-1}a_1 + l_{n-in-2}X_{n-2n} \cdots + (-1)^{i-1}a_1X_{n-i+1n}$$

oder

$$(95) \quad l_{n-in} - l_{n-in-1}a_1 + l_{n-in-2n}X_{n-2n} - \cdots + (-1)^{i-1}a_1X_{n-i+1n} - (-1)^{i-1}X_{n-in} = 0 .$$

In gleicher Weise nach (91)

$$(96) \quad r_{n-in} - r_{n-in-1}b_1 + r_{n-in-2}Y_{n-2n} + \cdots + (-1)^{i-1}b_1Y_{n-i+1n} - (-1)^{i-1}Y_{n-iw} = 0 .$$

Aus (94) (95) und (96), gewinnen wir

$$(97) \quad Z_{ni} = r_{n-in-i}(a_1 - b_1) - r_{n-in-2}(X_{n-2n} - Y_{n-2n}) + \cdots - (-1)^{i-1}r_{n-in-i+1}(X_{n-i+1n} - Y_{n-i+1n}) + (-1)^{i-1}(X_{n-in} - Y_{n-in}) .$$

Nach (81) und (92) folgt

$$(98) \quad X_{n-in} - Y_{n-in} = k_i - C_1^{n-i+1}k_{i-1}^{(1)} + \cdots + (-1)^{i-1}C_{i-1}^{n-1}k_1^{(i-1)}$$

Substituieren wir (98) in (97) und vergleichen wir mit (27) wenn $r \to l$ und $k \to -k$, folgt $U \to V$, so haben wir

$$(99) \quad Z_{ni} = V_{m-n-1}^{*(m-n+i-1)}(\beta, \beta)(-1)^{i+1} .$$

Multiplizieren wir die erste Zeile mit $Y_{n-i+1n}(-1)^{i-1}$ die zweite mit $Y_{n-i+2n}(-1)^{i-2}$ und so weiter und addieren wir es zur letzten Zeile, so erhalten wir die letzten Zeile in der folgenden Gestalt

$$l_{n-in} - r_{n-in} - (l_{n-in-1} - r_{n-in-1})Y_{n-1n} + \cdots + (-1)^{i-1}(l_{n-in-i+1} - r_{n-in-i+1})Y_{n-i+1n} ,$$

$$l_{n-i+1n} - l_{n-i+1n-1}Y_{n-1n} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{i-1}Y_{n-i+1n} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$l_{n-i+sn}-l_{n-i+sn-1}Y_{n-1n}+\cdots+(-1)^{i-1-s1}Y_{n-i+1+s-1n}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$l_{n-1n}-Y_{n-1n}\,.$$

Wenn wir in (94) l anstatt r und X anstatt Y und in (99) U anstatt V zyklich substituieren, so wird die erste Zeile

$$(-1)^i U^{*(m-n+i-1)}_{m-n-1}\,.$$

Aus (95) wird die zweite Zeile geschrieben werden;

$$l_{n-i+1n-1}(X_{n-1n}-Y_{n-1n})\cdots-(-1)^{i-1}(X_{n-i+1n}-Y_{n-i+1n})\,.$$

Nach (27) gewinnen wir

$$(-1)^{i+1}U^{*(m-n+i-2)}_{m-n-1}\,.$$

Die ste Zeile ist in gleicher Weise

$$(-1)^{i+s}U^{*(m-n+i-s)}_{m-n-1}\,.$$

In solcher Weise können wir die Determinante (90) der folgenden Form ausschreiben,

$$Z_{ni}=(-1)^i\begin{vmatrix} U^{*(m-n+i-1)}_{m-n+i}\,, & 1\,, & 0\,, & \cdots\,, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,} \\ U^{*(m-n+i-1)}_{m-n}\,, & \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ U^{*(m-n+i-1)}_{m-n-1}\,, & U^{*(m-n+j-2)}_{m-n-1}\,, & \cdots\,, & & U^{*(m-n-2)}_{m-n-1} \end{vmatrix}.$$

Nach (99) ist

$$V^{*(m-n+i-1)}_{m-n-1}(\beta,\beta)=(-1)^{i+1}Z_{ni}\,.$$

Setzen wir i anstatt $n+1$ und p anstatt $n-i+1$, so gelangen wir zu

$$\text{(100)}\qquad V^{*(m-p)}_{m-i}(\beta,\beta)=-\begin{vmatrix} U^{*(m-p)}_{m-p-1}\,, & 1\,, & 0\,, & \cdots\,, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,} & 1 \\ U^{*(m-p)}_{m-i}\,, & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots,} & U^{*(m-i+1)}_{m-i} \end{vmatrix}.$$

Jetzt wird (78) bewiesen und die Wiederkehrung der Koeffizienten der Randbedingungen ist vollständig bewiesen.

Also sind

$$\mu''_{ik} = \mu_{ik}\,, \qquad \nu''_{ik} = \nu_{ik}\,.$$

IX. Homogene Integralgleichung und Randbedingungen, welchen der Kern genügt

Wenn $C_1 = C_2 = \cdots\cdots = C_m = 0$ und $D \neq 0$, so wird die Funktion

$$U = 0\,,$$

folglich

$$v(x) = \int_\alpha^\beta G(x,\,\xi)v(\xi)d\xi\,.$$

Wenn $D_1 \neq 0$, so ergibt sich

$$v(x) = V(x) = 0\,.$$

Wenn $D_1 = 0$, so kann $v(x)$ von Null verschiedenen sein.

Es ist ganz merkwürdig, dass $G(x,\,\xi)$ in allgemeinen nicht denselben Randbedingen wie $v(x)$ genügt.

Substituieren wir $G(x,\,\xi)$ in die folgende Randbedingung

$$\nu'''_{0k}G(\underset{\alpha>\xi}{\alpha,\,\xi}) + \nu'''_{1k}G^{(1)}(\underset{\beta<\xi}{\alpha,\,\xi}) + \cdots\cdots + \nu'''_{m-1k}G^{(m-1)}(\underset{\alpha<\xi}{\alpha,\,\xi})$$
$$+ \mu'''_{0k}G(\underset{\beta>\xi}{\beta,\,\xi}) + \mu'''_{1k}G^{(1)}(\underset{\beta>\xi}{\beta,\,\xi}) + \cdots\cdots + \mu'''_{m-1k}G^{(m-1)}(\underset{\beta>\xi}{\beta,\,\xi}) = c_k$$
$$k = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots\,,\ m\,,$$

Nach der Definition von $G(x,\,\xi)$ wird

$$\frac{1}{D}\begin{vmatrix} P\,, & P_0\,, & P_1\,, & \ldots\ldots\,, & P_{m-1} \\ K_1\,, & E'_{01}\,, & E'_{11}\,, & \ldots\ldots\,, & E'_{m-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_m\,, & E'_{0m}\,, & & \ldots\ldots\ldots\,, & E'_{m-1m} \end{vmatrix}\,,$$

wobei

$$P = \mu'''_{0k}K(\beta,\,\xi) + \mu'''_{1k}\frac{\partial K(\beta,\,\xi)}{\partial\beta} + \cdots\cdots + \mu'''_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}K(\beta,\,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}\,,$$

$$P_i = \nu'''_{0k}U_i(\alpha,\,\alpha) + \nu'''_{1k}U_i^{(1)}(\alpha,\,\alpha) + \cdots\cdots + \nu'''_{m-1k}U^{(m-1)}(\alpha,\,\alpha)$$
$$+ \mu'''_{0k}U_i(\beta,\,\alpha) + \mu'''_{1k}U_i^{(1)}(\beta,\,\alpha) + \cdots\cdots + \mu'''_{m-1k}U^{(m-1)}(\beta,\,\alpha)\,,$$
$$i = 0\,,\ \ldots\ldots\,,\ m-1\,,\quad k = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots\,,\ m$$

gesetzt sind.

Wenn $\mu''' = \mu'$, $\nu''' = \nu'$, so folgt

$$P = K_k , \qquad P_i = E'_{ik}$$

und die Determinante ist c_k. $G(x, \xi)$ genügt also nicht denselben Randbedingungen wie $v(x)$, sondern den homogenen Randbedingungen, welche dieselben Koeffizienten wie (52) haben.

X. Einige Beispeile

Zunächst wollen wir ein einfaches Beispiel nehmen

$$u'' + u' = 0 , \tag{101}$$

$$v'' + v = 0 . \tag{102}$$

Nach (1) und (2) ist in diesem Falle $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $m = 2$. Die Lösungen von (101) sind e^{-x} und 1 und die Lösungen von (102) sind sin x und cos x.

Nach (4), (5), (11) und (13) ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -e^{-\xi} \\ 1 & e^{-\xi} \end{vmatrix} = e^{-\xi}, \quad D(x, \xi) = e^{\xi} \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 1 & e^{-\xi} \end{vmatrix} = 1 - e^{-(x-\xi)} , \tag{103}$$

$$K(x, \xi) = -1 + 2e^{-(x-\xi)} , \tag{104}$$

$$U_1 = 1 - e^{-(x-\alpha)} , \qquad U_0 = e^{-(x-\alpha)} , \tag{105}$$

$$U(x, \alpha) = \{1 - e^{-(x-\alpha)}\} v^{(1)}(\alpha) + e^{-(x-\alpha)} v(\alpha) ,$$

$$v(x) = U(x, \alpha) + \int_\alpha^x K(x, \xi) v(\xi) d\xi . \tag{106}$$

Dagegen sind nach (61), (62), (63), (65) und (66)

$$\Delta_1 = 1 , \quad D_1(x, \xi) = \sin (x - \xi) , \tag{107}$$

$$S(x, \xi) = \sin (x - \xi) - \cos (x - \xi) , \tag{108}$$

$$V_1 = \sin (x - \alpha) , \quad V_0 = \sin (x - \alpha) + \cos (x - \alpha) , \tag{109}$$

$$V(x, \alpha) = \sin (x - \alpha) u^{(1)}(\alpha) + (\sin (x - \alpha) + \cos (x - \alpha)) u(\alpha) , \tag{110}$$

$$U(x, \alpha) = V(x, \alpha) + \int_\alpha^x S(x, \xi) U(\xi , \alpha) d\xi . \tag{111}$$

Nun nehmen wir $\alpha = 0, \beta = l$ und die folgenden Randbedingungen

(112) $$-v^{(1)}(0)+hv(0) = c_1\,, \quad v^{(1)}(l)+hv(l) = c_2\,.$$

Dann ist

(113) $$\nu_{04} = h\,, \quad \nu_{11} = -1\,, \quad \mu_{01} = \mu_{11} = 0\,, \quad \nu_{02} = \nu_{12} = 0\,,$$
$$\mu_{02} = h\,, \quad \mu_{12} = 1\,.$$

Nach (13) (18) und (46) folgt

$$U_1^*(l, l) = 0\,, \quad U_0^*(l, l) = 0\,, \quad \left.\frac{\partial^* U(l, \alpha)}{\partial l}\right|_{\alpha=l} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial U^*(l, \alpha)}{\partial l}\right|_{\alpha=l} = -1\,,$$
$$0 = \mu_{01} = \mu'_{01}+\mu_{11}U_0^{*(1)}\,, \quad \mu'_{11} = \mu_{11} = 0\,,$$
$$h = \mu_{02} = \mu'_{02}+\mu_{12}U_0^{*(1)} = \mu'_{02}-1\,, \quad \mu'_{12} = \mu_{12} = 1\,.$$

Nach (47) und (48) ist dann

$$E'_{01} = h\,, \quad E'_{11} = -1\,, \quad E'_{02} = he^{-l}\,, \quad E'_{12} = h(1-e^{-l})+1\,,$$
$$K'_1 = 0\,, \quad K'_2 = h(1-2e^{-(l-\xi)})+1\,.$$

Also

$$D = h\left(h+1+e^{-l}(1-h)\right),$$

(115) $$U(x) = \frac{1}{h(h+1+e^{-l}(1-h))}\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & 1-e^{-x} \\ c_1 & h\,, & -1 \\ c_2 & he^{-l} & h(1-e^{-l})+1 \end{vmatrix},$$

(116) $$G(x, \xi)_{x>\xi} = 2e^{-(x-\xi)}-1-\frac{\{h+1-2he^{-(l-\xi)}\}\{(h-1)e^{-x}-h\}}{h\{h+1+e^{-l}(1-h)\}}\,,$$

(117) $$G(x, \xi)_{x<\xi} = -\frac{\{h+1-2he^{-(l-\xi)}\}\{(h-1)e^{-x}-h\}}{h\{h+1+e^{-l}(1-h)\}}\,.$$

Aus (108), (109) und aus den Randbedingungen

(118) $$\nu'_{01}U(0)+\nu'_{11}U^{(1)}(0) = c_1\,, \quad \mu'_{02}U(l)+\mu'_{12}U^{(1)}(l) = c_2\,,$$

$$(119)\qquad \begin{cases} H'_{01} = \nu'_{01} + \mu''_{01} V_0(l\,,\,0) + \mu''_{11} V_0^{(1)}(l\,,\,0)\,, \\ H'_{11} = \nu'_{11} + \mu''_{01} V_1(l\,,\,0) + \mu''_{11} V_1^{(1)}(l\,,\,0)\,, \\ H'_{02} = \nu'_{02} + \mu''_{02} V_0(l\,,\,0) + \mu''_{12} V_0^{(1)}(l\,,\,0)\,, \\ H'_{12} = \nu'_{12} + \mu''_{02} V_1(l\,,\,0) + \mu_{12} V_1^{(1)}(l\,,\,0)\,, \end{cases}$$

wobei

$$\mu'_{12} = \mu_{12} = 1\,, \quad \mu''_{11} = \mu_{11} = 0\,, \quad \mu''_{01} = \mu_{01} = 0\,, \quad \mu''_{02} = h\,,$$

folgt nach (56)

$$\begin{aligned} &\nu'_{11} = \nu_{11}\,, \quad \nu'_{01} + \nu'_{11} U_0^{(1)}(0\,,\,0) = \nu_{01}\,, \quad \nu'_{12} U_1^{(1)}(0\,,\,0) = \nu_{12}\,, \\ &\nu'_{02} + \nu'_{12} U_0^{(1)}(0\,,\,0) = \nu_{02}\,, \quad U_1^{(1)}(0\,,\,0) = 1\,, \quad U_0^{(1)}(0\,,\,0) = -1\,, \\ &\nu_{01} = h\,, \qquad \nu_{11} = -1\,, \quad \nu_{02} = 0\,, \quad \nu_{12} = 0\,, \\ &\nu'_{01} = h-1\,, \quad \nu'_{11} = -1\,, \quad \nu'_{02} = 0\,, \quad \nu'_{12} = 0\,. \end{aligned}$$

Daraus wird (116)

$$\begin{aligned} &H'_{01} = h-1\,, \quad H'_{11} = -1\,, \quad H'_{02} = h(\sin l + \cos l) + \cos l - \sin l\,, \\ &H'_{12} = h \sin l + \cos l\,, \\ &D_1 = (h^2-1)\sin l + 2h\cos l\,, \end{aligned}$$

$$-\Gamma(x, \xi)_{x \geq \xi} = -\frac{\{(1+h)\sin(l-\xi) + (1-h)\cos(l-\xi)\}\{h\sin x + \cos x\}}{(h^2-1)\sin l + 2h\cos l}$$
$$+\sin(x-\xi) - \cos(x-\xi)\,,$$

$$-\Gamma(x, \xi)_{x > \xi} = -\frac{\{(1+h)\sin(l-\xi) + (1-h)\cos(l-\xi)\}\{h\sin x + \cos x\}}{(h^2-1)\sin l + 2\,h\cos l}\,.$$

Wenn $c_1 = c_2 = 0$, so gewinnen wir

$$v(x) = \int_0^l G(x\,,\,\xi)v(\xi)d\xi\,.$$

Wenn

$$(120)\qquad \tan l = -\frac{2h}{h^2-1}\,,$$

so erhalten wir eine von Null verschiedene Lösung

$$\varphi = h \sin x + \cos x \,.$$

Eine solche Eigenfunktion hängt von der Greenschen Funktion ab, aber wir können eine andere Greenche Funktion bilden, welcher dieselbe Eigenfunktion genügt. Z.B. nehmen wir die Differentialgleichungen

$$u'' = 0 \,, \quad v'' + v = 0 \,.$$

und die Randbedingungen

$$hv(0) - v^{(1)}(0) = 0 \,, \quad hv(l) + v^{(1)}(l) = 0 \,.$$

Dann haben wir durch dieselbe Methode

$$\underset{x>\xi}{G(x,\xi)} = \frac{l}{2h + h^2 l}\{h\xi + 1\}\{h(l-x)+1\} \,, \tag{121}$$

$$\underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = \frac{l}{2h + h^2 l}\{hx + 1\}\{h(l-\xi)+1\} \,, \tag{122}$$

$$-\underset{x>\xi}{\Gamma(x,\xi)} = -\frac{\{h \sin (l-x) + \cos (l-x)\}\{h \sin \xi + \cos \xi\}}{l\{(h^2-1)\sin l + 2h \cos l\}} \,,$$

$$-\underset{x<\xi}{\Gamma(x,\xi)} = -\frac{\{h \sin (l-\xi) + \cos (l-\xi)\}\{h \sin x + \cos x\}}{l\{(h^2-1)\sin l + 2h \cos l\}} \,.$$

Wenn

$$\tan l = \frac{-2h}{h^2 - 1} \,, \tag{123}$$

so ist die Eigenfunktion

$$\varphi = h \sin x + \cos x \,.$$

In der Tat können wir veschiedene Greensche Funktionen bilden vermittelst der zugeordneten Differentialgleichung (1). Aber die Eigenfunktion kann nur durch die Differentialgleichung (1) und die zugehörigen Randbedingungen bestimmt werden.