

JETS SEMI-HOLONOMES ET TENSEURS NON-SYMETRIQUES D'ORDRE SUPERIEUR II.

Par

Michiaki KAWAGUCHI

Introduction.

La notion des jets semi-holonomes, créée par Ch. Ehresmann [2]¹⁾ en 1954 est une généralisation de celle des jets infinitésimaux (voir, l'article [1]) et quelques applications géométriques de ce jet semi-holonyme sont considérées dans les articles [3]~[6], surtout, la définition générale des connexions d'ordre supérieur d'un espace fibré est bien connue. Mais, puisque la définition de ce jet semi-holonyme est très abstraite, nous ne pouvons pas comprendre la signification de cette notion et il est difficile de faire son calcul. Pour cela, d'abord, nous sommes arrivés aux questions : comment on peut définir la notion de jet semi-holonyme dans le calcul des tenseurs d'ordre supérieur et comment nous faisons le calcul des tenseurs qui correspond à celui des jets semi-holonomes. Le sommaire des études concernant le calcul des jets semi-holonomes se trouve à l'article [15] de l'auteur.

Dans la partie I²⁾ de cet article, l'auteur a étudié la définition de jet semi-holonyme et discuté les propriétés, particulièrement la loi de composition externe entre jets semi-holonomes. Et nous avons considéré le P-tenseur non symétrique d'ordre supérieur. Pour définir ce tenseur, nous avons supposé une forme généralisée de la transformation d'ordre supérieur de paramètres, de telle sorte que les coefficients de cette forme ne soient pas nécessairement symétriques par rapport aux indices inférieurs et nous avons discuté sur la structure des coefficients de cette transformation. La notion de ce P-tenseur non symétrique d'ordre supérieur correspond à celle d'un jet semi-holonyme lorsqu'on pense seulement les automorphismes des sources du jet semi-holonyme et les buts sont toujours fixées.

Dans cette partie II, en considérant en même temps les automorphismes de but et ceux de source du jet semi-holonyme nous arriverons au vecteur non-symétrique d'ordre supérieur. Désormais, nous appellerons *le produit symétrique d'ordre supérieur de* $U_{\beta(\mu)}^{\alpha}$ les coefficients $A_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ exprimés par

1) Les nombres entre crochets renvoient aux références à la fin de cet article.

2) Voir, M. KAWAGUCHI [13].

$$(3.5) \quad A_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{(+s_\lambda)}^{\mu} \frac{\mu!}{s_1!s_2!\cdots s_\lambda! \nu_1!\nu_2!\cdots \nu_{\mu-\lambda+1}!} U_{\beta(s_1)}^{\alpha_1} U_{\beta(s_2)}^{\alpha_2} \cdots U_{\beta(s_\lambda)}^{\alpha_\lambda}$$

à § 3 de la partie I, et au même paragraphe les coefficients $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ qui étaient définis par

$$(3.8) \quad \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\mu} u_{[\beta(\mu_1)}^{\alpha_1} u_{\beta(\mu_2)}^{\alpha_2} \cdots u_{\beta(\mu_\lambda)]}^{\alpha_\lambda}$$

ou

$$(3.9) \quad \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\lambda)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \sum_{[+\mu_\lambda]}^{\mu} u_{[\beta(\mu_1)}^{\alpha_1} u_{\beta(\mu_2)}^{\alpha_2} \cdots u_{\beta(\mu_\lambda)]}^{\alpha_\lambda},$$

s'appelleront *le produit semi-holonome d'ordre supérieur*. Il est déjà bien connu³⁾ que le produit symétrique d'ordre supérieur des coefficients $U_{\beta(\mu)}^{\alpha}$ du représentant tensoriel d'un jet infinitésimal (holonome) se transforme linéairement contre l'automorphisme de but du jet et celui de source. Dans cet article, le résultat principal est le théorème 10.1 à § 10, la réponse affirmative pour la question: contre l'automorphisme de but d'un jet semi-holonome et à la fois celui de source, la loi de changement du produit semi-holonome d'ordre supérieur des coefficients $u_{\beta(\mu)}^{\alpha}$ du représentant tensoriel du jet semi-holonome, est-elle une forme linéaire? Autrement dit, la forme du produit semi-holonome d'ordre supérieur de la forme (2.3), est-elle linéaire? En vertu de ce résultat important, le vecteur non-symétrique d'ordre supérieur (en d'autre terme, le vecteur semi-holonome d'ordre supérieur) peut être défini de telle sorte que le produit semi-holonome d'ordre supérieur des composantes de ce vecteur se transforment linéairement contre l'extention semi-holonome de transformation d'ordre supérieur et à la fois la paramètre-transformation non-symétrique d'ordre supérieur. (voir, § 11)

§ 6. Extension semi-holonome de la transformation d'ordre supérieur.

Étant donnée une r -variété V_n , nous désignons les coordonnées locales d'un ouvert de cette variété par (x^i) , $i=1, 2, \dots, n$. Lorsque une sous-variété de dimension p définie par $x^i = x^i(u^\alpha)$, $\alpha=1, 2, \dots, p$, dans l'ouvert est considéré, nous posons les dérivées partielles comme suit:

$$p_\alpha^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad p_{\alpha_1\alpha_2}^i \equiv \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}}, \quad \dots, \quad p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}^i \equiv \frac{\partial^r x^i}{\partial u^{\alpha_1}\partial u^{\alpha_2}\cdots\partial u^{\alpha_r}}.$$

Nous considérons la transformation r -fois différentiable de coordonnées, et

3) Voir, A. KAWAGUCHI [7] p. 276.

celle de paramètres qui sont respectivement désignés par $x^j = x^j(x^i)$, $u^\beta = u^\beta(u^\alpha)$, $j=1, 2, \dots, n$, $\beta=1, 2, \dots, p$. Contre ces deux transformations, les dérivées partielles $p_{\alpha_1}^i, p_{\alpha_1\alpha_2}^i, \dots, p_{\alpha_1\alpha_2\alpha_r}^i$ se transforment comme suit :

$$\begin{aligned} p_{\beta}^j &= X_{\beta}^j p_{\alpha}^i U_{\beta}^{\alpha}, \\ p_{\beta_1\beta_2}^j &= X_{\beta_1\beta_2}^j p_{\alpha_1}^i p_{\alpha_2}^i U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} + X_{\beta_1}^j (p_{\alpha_1\alpha_2}^i U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} + p_{\alpha_1}^i U_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1}), \\ (6.1) \quad &\dots\dots\dots, \\ p_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j &= X_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j p_{\alpha_1}^i p_{\alpha_2}^i \dots p_{\alpha_r}^i U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots U_{\beta_r}^{\alpha_r} + \dots \\ &+ X_{\beta_1}^j (p_{\alpha_1\alpha_2\alpha_r}^i U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots U_{\beta_r}^{\alpha_r} + \dots + p_{\alpha_1}^i U_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha_1}), \end{aligned}$$

où nous posons $X_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j \equiv \frac{\partial^j x^j}{\partial x^{\beta_1} \partial x^{\beta_2} \dots \partial x^{\beta_r}}$, $U_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha} \equiv \frac{\partial^{\alpha} u^{\alpha}}{\partial u^{\beta_1} \partial u^{\beta_2} \dots \partial u^{\beta_r}}$, $\lambda=1, 2, \dots, r$.

D'après l'article de A. Kawaguchi [7], en posant $p_{\alpha(\lambda)}^i \equiv p_{\alpha_1\alpha_2\alpha_r}^i$, $X_{\beta(\lambda)}^j \equiv X_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j$, $U_{\beta(\lambda)}^{\alpha} \equiv U_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha}$ la forme (6.1) devient

$$(6.2) \quad p_{\beta(\lambda)}^j = \sum_{u=1}^{\lambda} \sum_{t=1}^u X_{\beta(\lambda)}^j P_{\alpha(u)}^{i(t)} A_{\beta(\lambda)}^{\alpha(u)}, \quad 4)$$

où $P_{\alpha(u)}^{i(t)}$ signifie le produit symétrique d'ordre supérieur de $p_{\alpha(u)}^i$, c'est-à-dire,

$$(6.3) \quad P_{\alpha(u)}^{i(t)} = \sum_{(v_t)}^u \frac{u!}{v_1! v_2! \dots v_t! w_1! w_2! \dots w_{u-t+1}!} p_{\alpha(v_1)}^{i_1} p_{\alpha(v_2)}^{i_2} \dots p_{\alpha(v_t)}^{i_t} \quad 5).$$

Maintenant, pour considérer les transformations pas toujours symétriques, nous supposons que les quantités $p_{\alpha_1\alpha_2\alpha_r}^i$, $X_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j$ dans la forme (3.1) ne signifient pas des dérivées partielles $\frac{\partial^j x^j}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \dots \partial u^{\alpha_r}}$, $\frac{\partial^j x^j}{\partial x^{\beta_1} \partial x^{\beta_2} \dots \partial x^{\beta_r}}$ respectivement et ne soient pas toujours symétriques par rapport aux indices inférieurs. De même qu'à § 3, nous utilisons $u_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha}$ au lieu de $U_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha}$ ⁶⁾. Donc, la forme (6.1) devient une transformation qui n'est pas toujours symétriques par rapport aux indices inférieurs :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\beta}^j &= \bar{X}_{\beta}^j \bar{p}_{\alpha}^i u_{\beta}^{\alpha}, \\ \bar{p}_{\beta_1\beta_2}^j &= \bar{X}_{\beta_1\beta_2}^j \bar{p}_{\alpha_1}^i \bar{p}_{\alpha_2}^i u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} + \bar{X}_{\beta_1}^j (\bar{p}_{\alpha_1\alpha_2}^i u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} + \bar{p}_{\alpha_1}^i u_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1}), \\ (6.4) \quad &\dots\dots\dots, \\ \bar{p}_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j &= \bar{X}_{\beta_1\beta_2\beta_r}^j \bar{p}_{\alpha_1}^i \bar{p}_{\alpha_2}^i \dots \bar{p}_{\alpha_r}^i u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_r}^{\alpha_r} + \dots \\ &+ \bar{X}_{\beta_1}^j (\bar{p}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_r}^i u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_r}^{\alpha_r} + \dots + \bar{p}_{\alpha_1}^i u_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha_1}). \end{aligned}$$

Cette transformation sera appelée *l'extension semi-holonyme de la transforma-*

4) Voir, A. KAWAGUCHI [7]. p. 269 (2.13)bis. La définition de $A_{\beta(\lambda)}^{\alpha(u)}$ s'exprime dans la partie I, [13].

5) Voir, l'explication des symboles de la partie I, p. 201.

6) Quant à $u_{\beta_1\beta_2\beta_r}^{\alpha}$, on trouve la définition de la partie I, p. 202.

tion d'ordre supérieur.

Pour comprendre cette forme (6.4) plus concrètement en considérant d'abord seulement le changement de x^i (on ne change pas u^{β}), nous avons

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\beta}^j &= \bar{X}_{\beta}^j \bar{P}_{\beta}^i, \\ \bar{P}_{\beta_1 \beta_2}^j &= \bar{X}_{\beta_1 \beta_2}^j \bar{P}_{\beta_1}^{\beta_1} \bar{P}_{\beta_2}^{\beta_2} + \bar{X}_{\beta_1 \beta_2}^j \bar{P}_{\beta_1 \beta_2}^i, \\ &\dots\dots\dots, \\ \bar{P}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}^j &= \bar{X}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}^j \bar{P}_{\beta_1}^{\beta_1} \bar{P}_{\beta_2}^{\beta_2} \dots \bar{P}_{\beta_r}^{\beta_r} + \dots + \bar{X}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}^j \bar{P}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}^i.\end{aligned}$$

En désignant simplement $\bar{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lambda}}^i \equiv \bar{P}_{\alpha(\lambda)}^i$, $\bar{X}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{\lambda}}^j \equiv \bar{X}_{\beta(\lambda)}^j$, nous pouvons arranger cette forme précédente comme suit :

$$(6.4') \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^j = \bigcap_{\lambda=1}^{\omega} \bar{X}_{\beta(\lambda)}^j \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda})}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{\omega})} \sum_{(+\mu_{\lambda})}^{\omega} \bar{P}_{\beta(\mu_1)}^{\beta_1} \bar{P}_{\beta(\mu_2)}^{\beta_2} \dots \bar{P}_{\beta(\mu_{\lambda})}^{\beta_{\lambda}}), \quad \omega = 1, 2, \dots, r.$$

D'ailleurs, en considérant seulement le changement de u^{β} et en utilisant la forme (6.4), nous avons

$$(6.4'') \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^i = \sum_{\lambda=1}^{\omega} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\lambda)} \bar{P}_{\alpha(\lambda)}^i.$$

Par conséquent, la forme (6.4) s'écrit

$$\begin{aligned}(6.5) \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^j &= \bar{P}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{\omega}}^j = \sum_{\lambda=1}^{\omega} \bar{X}_{\beta(\lambda)}^j \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda})}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{\omega})} \sum_{(+\mu_{\lambda})}^{\omega} \\ &\times \sum_{\sigma_1=1}^{\mu_1} \bar{P}_{\alpha(\sigma_1)}^{\beta_1} \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\sigma_1)} \sum_{\sigma_2=1}^{\mu_2} \bar{P}_{\alpha(\sigma_2)}^{\beta_2} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \sum_{\sigma_{\lambda}=1}^{\mu_{\lambda}} \bar{P}_{\alpha(\sigma_{\lambda})}^{\beta_{\lambda}} \bar{A}_{\beta(\mu_{\lambda})}^{\alpha(\sigma_{\lambda})}.\end{aligned}$$

De plus, en considérant le produit semi-holonome d'ordre supérieur de $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^i$,

$$(6.6) \quad \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\beta(\lambda)} = \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda})}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu})} \sum_{(+\mu_{\lambda})}^{\mu} \bar{P}_{\alpha(\mu_1)}^{\beta_1} \bar{P}_{\alpha(\mu_2)}^{\beta_2} \dots \bar{P}_{\alpha(\mu_{\lambda})}^{\beta_{\lambda}})^7,$$

la forme (6.4) devient plus simple et le théorème suivant est obtenu.

Théorème 6.1. *L'extension semi-holonome de la transformation de $\bar{P}_{\beta(k)}^j$ d'ordre r peut s'exprimer par la forme suivante*

$$(6.7) \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^j = \sum_{\mu=1}^{\omega} \sum_{\lambda=1}^{\mu} \bar{X}_{\beta(\lambda)}^j \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\beta(\lambda)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}.$$

Nous trouvons la démonstration de ce théorème à § 9. Comme nous voyons immédiatement, la forme (6.9) n'est pas linéaire par rapport aux $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\beta}$. Néanmoins, lorsque nous considérons le produit semi-holonome d'ordre supérieur de $\bar{P}_{\beta(k)}^i$, il nous conduit au

7) L'explication de ce symbole peut être trouvée à p. 202 de la partie I.

Théorème 6.2. Nous avons l'expression linéaire par rapport aux $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ de l'extension semi-holonome de la transformation de $\bar{P}_{\beta(k)}^j$ d'ordre supérieur selon la loi :

$$\bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \sum_{\lambda=\sigma}^{\mu} \bar{X}_{i(\lambda)}^{j(\sigma)} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)},$$

en désignant le produit semi-holonome d'ordre supérieur de $\bar{X}_{i(\lambda)}^j$ par $\bar{X}_{i(\lambda)}^{j(\sigma)}$. La démonstration de ce théorème se trouve aussi à § 9.

§ 7. Quelques formules concernant les coefficients de paramètre-transformation non-symétrique (la suite).

Ce paragraphe est la suite de § 4 et nous énonçons les résultats obtenus après la publication de la partie I. Bien que nous avons déjà eu les théorèmes 4.4, 4.5, concernant la décomposition de $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$, les théorèmes suivants 7.1, 7.2 sont plus généraux, c'est-à-dire, le théorème 4.4 est le cas spécial de celui 7.1 et le théorème 4.5 est aussi de celui 7.2.

Théorème 7.1. Les coefficients de paramètre-transformation non-symétrique $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ peuvent être décomposés à quelques lui-mêmes d'ordre plus inférieur comme suit :

$$(7.1) \quad \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{\beta(\lambda+t)}^{\alpha(\lambda)} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\alpha(\lambda-l)}, \quad 1 \leq l < \lambda,$$

où le symbole $\langle \rangle$ a deux significations : a) en utilisant (3.8) on décompose $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ au produit de $u_{\beta(t)}^\alpha$, b) lorsque par le symbole $(| \ |)$ l'ordre des $u_{\beta(t)}^\alpha$ est changé, en résultat, les indices supérieurs s'écrivent comme

$$u_{\beta(t_1)}^{\alpha_1} u_{\beta(t_2)}^{\alpha_2} u_{\beta(t_3)}^{\alpha_3} \dots,$$

c'est-à-dire, l'ordre des indices inférieurs de chaque α est de même que l'ordre d'entiers.

Démonstration. En cas de $\lambda = \mu$, le terme à droite de (7.1) devient

$$(7.2) \quad \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{\beta(l)}^{\alpha(\lambda)} \bar{A}_{\beta(\lambda-l)}^{\alpha(\lambda-l)}.$$

Lorsque $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda)$ se décompose à $\beta(l)$ et $\beta(\lambda-l)$, β_1 appartient toujours à $\beta(l)$. Donc, $\beta(l)$ est déterminé en choisissant le reste, $l-1$ de β , dans $(\beta_2 \beta_3 \dots \beta_\lambda)$.

Par conséquent, la sommation $\sum_{(l, \lambda-l)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda)}$ devient celle de $\binom{\lambda-1}{l-1}$ termes qui sont tous de même valeur. Alors, (7.2) devient

$$(7.3) \quad u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots u_{\beta_l}^{\alpha_l} u_{\beta_{l+1}}^{\alpha_{l+1}} u_{\beta_{l+2}}^{\alpha_{l+2}} \cdots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda}$$

qui est égal à $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$. Lorsque $\lambda = \mu + 1$, (7.3) s'écrit

$$u_{\beta_1 \beta_{\lambda+1}}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2 \beta_{\lambda+1}}^{\alpha_2} u_{\beta_3}^{\alpha_3} \cdots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda} + \cdots + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots u_{\beta_{\lambda-1}}^{\alpha_{\lambda-1}} u_{\beta_\lambda \beta_{\lambda+1}}^{\alpha_\lambda},$$

la forme (7.1) est aussi établie. Ensuite, en supposant le cas de $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$, nous allons vérifier le cas de $\bar{A}_{\beta(\mu+1)}^{\alpha(\lambda)}$. En utilisant la formule récurrente (3.7), nous pouvons calculer comme suit :

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \bar{A}_{\beta(\mu+1)}^{\alpha(\lambda)} &= \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\mu+1}}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\mu+1}} = \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu} u_{\beta_{\mu+1}}^{\alpha_{\mu+1}} + \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu} u_{\beta_{\mu+1}}^{\alpha_{\mu+1}} \\ &= \left(\frac{\lambda-l}{\lambda-1} + \frac{l-1}{\lambda-1} \right) \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu} u_{\beta_{\mu+1}}^{\alpha_{\mu+1}} \\ &\quad + \left(\sum_{t=0}^{\mu-l} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+t)|)}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-t) \rangle} \right) / \beta_{\mu+1}. \end{aligned}$$

Puisque nous avons la relation $\frac{\lambda-1}{\lambda-l} \binom{\lambda-2}{l-1} = \binom{\lambda-1}{l-1}$, la forme (7.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\beta(\mu+1)}^{\alpha(\lambda)} &= \sum_{t=0}^{\mu-l-1} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+t)|)}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-t) \rangle} u_{\beta_{\mu+1}}^{\alpha_{\mu+1}} \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\mu-l-1} \sum_{(\lambda-1+t, \mu-l-1-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda-1+t)|)}^{\langle \alpha(\lambda-1) \rangle} u_{\beta_{\mu+1}}^{\alpha_{\mu+1}} \bar{A}_{\beta(\mu-l-1-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-1-t) \rangle} \\ &\quad + \left(\sum_{t=0}^{\mu-l} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+t)|)/\beta_{\mu+1}}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-t) \rangle} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{t=0}^{\mu-l} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+t)|)}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-t) \rangle} / \beta_{\mu+1} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la forme (7.4) peut être arrangée comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\beta(\mu+1)}^{\alpha(\lambda)} &= \sum_{t=0}^{\mu-l} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+t)|\beta_{\mu+1})}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-t) \rangle} \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\mu-l} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+t)|)}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\langle \alpha(\lambda-l-t) \rangle} / \beta_{\mu+1} \\ &= \sum_{s=0}^{\mu+1-l} \sum_{(\lambda+s, \mu+1-l-s)}^{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\mu+1})} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{A}_{(|\beta(\lambda+s)|)}^{\langle \alpha(\lambda) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu+1-l-s)}^{\langle \alpha(\lambda-s) \rangle} \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Ce théorème peut être généralisé et on peut énoncer comme suit :

Théorème 7.2. En utilisant le symbole $\langle \rangle$, $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ se décompose à la forme du produit de σ fois de la loi

$$(7.5) \quad \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{\substack{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\sigma) \\ \lambda_a \leq \mu_a}}^{\mu} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu)}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu} \left[\binom{\lambda-1}{\lambda_1-1} \binom{\lambda-\lambda_1-1}{\lambda_2-1} \dots \binom{\lambda-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{\sigma-2}-1}{\lambda_{\sigma-1}-1} \right]^{-1} \\ \times \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\lambda_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\lambda_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\sigma)}^{\alpha(\lambda_\sigma)},$$

où nous posons $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\sigma = \lambda$, $\lambda_a \leq \mu_a$, $a = 1, 2, \dots, \sigma$.

Démonstration. Lorsque $\sigma = 2$, ce théorème se réduit au théorème 7.1 dont la démonstration est déjà obtenue. D'abord, nous supposons que la forme (7.5), le cas de σ , soit obtenue et nous allons vérifier le cas de $\sigma + 1$. En général, on pense que λ_σ n'est pas égal à 1. (Si $\lambda_\sigma = 1$, on suppose $\lambda_{\sigma-1} \neq 1$. Puisque nous pouvons déduire de la même manière, nous abrégeons ce cas.) Par conséquent, d'après $\lambda_\sigma \leq \mu_\sigma$, μ_σ n'est pas égal à 1. Donc, en supposant $\lambda'_\sigma + \lambda'_{\sigma+1} = \lambda_\sigma$, $\mu'_\sigma + \mu'_{\sigma+1} = \mu_\sigma$ et en utilisant le théorème 7.1 on décompose le dernier $\bar{A}_{\beta(\mu_\sigma)}^{\alpha(\lambda_\sigma)}$, c'est-à-dire,

$$(7.5') \quad \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{(+\mu_\sigma)}^{\mu} \sum_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\sigma)}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu} \left[\binom{\lambda-1}{\lambda_1-1} \binom{\lambda-\lambda_1-1}{\lambda_2-1} \dots \binom{\lambda-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{\sigma-2}-1}{\lambda_{\sigma-1}-1} \right]^{-1} \\ \times \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\lambda_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\lambda_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_{\sigma-1})}^{\alpha(\lambda_{\sigma-1})} \\ \times \sum_{(\mu'_\sigma + \mu'_{\sigma+1})}^{\mu_\sigma} \sum_{(\mu'_\sigma, \mu'_{\sigma+1})}^{\beta_{\mu_\sigma}} \binom{\lambda_\sigma-1}{\lambda'_\sigma-1}^{-1} \bar{A}_{\beta(\mu'_\sigma)}^{\alpha(\lambda'_\sigma)} \bar{A}_{\beta(\mu'_{\sigma+1})}^{\alpha(\lambda'_{\sigma+1})}.$$

$\lambda'_\sigma \leq \mu'_\sigma, \lambda'_{\sigma+1} \leq \mu'_{\sigma+1}$

Ici, on a la relation

$$\binom{\lambda_\sigma-1}{\lambda'_\sigma-1} = \binom{\lambda-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{\sigma-1}-1}{\lambda'_\sigma-1}.$$

Et puisque $\beta_{\mu_\sigma}^1$ est égal à $\beta_{\mu'_\sigma}^1$ et l'indice inférieur de $\beta_{\mu'_{\sigma+1}}^1$ n'est pas plus grand que celui de $\beta_{\mu'_\sigma}^1$, par le symbole $(| |)$ extérieur les indices inférieurs de $\bar{A}_{\beta(\mu'_{\sigma+1})}^{\alpha(\lambda'_{\sigma+1})}$ sont immobiles. D'ailleurs, la relation

$$\sum_{(+\mu_\sigma)}^{\mu} \sum_{(\mu'_\sigma + \mu'_{\sigma+1})}^{\mu_\sigma} = \sum_{(+\mu_{\sigma+1})}^{\mu}, \quad b = 1, 2, \dots, \sigma, \sigma + 1,$$

$\lambda_a \leq \mu_a, \lambda'_\sigma \leq \mu'_\sigma, \lambda'_{\sigma+1} \leq \mu'_{\sigma+1}, \lambda_b \leq \mu_b$

est obtenue et nous avons aussi la relation

$$\sum_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\sigma)}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu} \sum_{(\mu'_\sigma, \mu'_{\sigma+1})}^{\beta_{\mu_\sigma}} = \sum_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\sigma+1})}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu}.$$

Par conséquent, la forme (7.5') devient

$$\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{\substack{\mu \\ \lambda_l \leq \mu_b}}^{\mu} \sum_{\substack{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu) \\ (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\sigma+1})}} \left[\binom{\lambda-1}{\lambda_1-1} \binom{\lambda-\lambda_1-1}{\lambda_2-1} \dots \binom{\lambda-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{\sigma-1}-1}{\lambda_\sigma-1} \right]^{-1} \\ \times \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\lambda_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\lambda_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\sigma)}^{\alpha(\lambda_\sigma)} \bar{A}_{\beta(\mu_{\sigma+1})}^{\alpha(\lambda_{\sigma+1})}.$$

C. Q. F. D.

De plus, on a le théorème concernant le symbole $\langle \quad \rangle$.

Théorème 7.3. *L'ordre des indices $\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma) \rangle$ de chaque terme dans*

$$\bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\lambda_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\lambda_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\sigma)}^{\alpha(\lambda_\sigma)}$$

n'est pas uniquement déterminé, lorsque $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ se décompose par (3.8), c'est-à-dire, l'ordre dépend de chaque terme. Mais, on a toujours la relation

$$(7.6) \quad \langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma) \rangle = (|\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma) \rangle|)$$

signifiant que l'ordre de $\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma) \rangle$ est le même que celui avec le symbole $(|\quad|)$.

Démonstration. Pour comprendre le premier fait de ce théorème 7.3, nous montrons l'exemple suivant :

$$\bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4 \beta_6}^{\alpha_3 \alpha_4} = (u_{\beta_1 \beta_5}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2 \beta_6}^{\alpha_3} u_{\beta_4}^{\alpha_4}) + (u_{\beta_1 \beta_5}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2}^{\alpha_3} u_{\beta_4 \beta_6}^{\alpha_4}) + (u_{\beta_1 \beta_5}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3} u_{\beta_6}^{\alpha_4}) \\ + (u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_3 \beta_5}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2 \beta_6}^{\alpha_3} u_{\beta_4}^{\alpha_4}) + (u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_3 \beta_5}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2}^{\alpha_3} u_{\beta_4 \beta_6}^{\alpha_4}) + (u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_3 \beta_5}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3} u_{\beta_6}^{\alpha_4}) \\ + (u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_5}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2 \beta_6}^{\alpha_3} u_{\beta_4}^{\alpha_4}) + (u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_5}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2}^{\alpha_3} u_{\beta_4 \beta_6}^{\alpha_4}) + (u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_5}^{\alpha_2}) (u_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3} u_{\beta_6}^{\alpha_4}).$$

Donc, aux termes $7^{\text{ème}}$, $8^{\text{ème}}$ on a $\langle \alpha_1(2) \alpha_2(2) \rangle = \alpha_1 \alpha_4 \alpha_2 \alpha_3$, mais aux autres termes on obtient $\langle \alpha_1(2) \alpha_2(2) \rangle = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_4$. Ensuite, nous allons démontrer la forme (7.6) en divisant deux marches. (i) Nous désignons le premier indice de chaque $\alpha(\lambda)$ dans $\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma) \rangle$ par $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_\sigma^1$ et le premier indice de chaque $\beta(\mu)$ dans $(|\beta(\mu_1) \beta(\mu_2) \dots \beta(\mu_\sigma)|)$ par $\beta_{\mu_1}^1, \beta_{\mu_2}^1, \dots, \beta_{\mu_\sigma}^1$. Et puisque nous avons $\beta_{\mu_1}^1 < \beta_{\mu_2}^1 < \dots < \beta_{\mu_\sigma}^1$ et l'ordre de $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_\sigma^1$ est de même que $\beta_{\mu_1}^1 < \beta_{\mu_2}^1 < \dots < \beta_{\mu_\sigma}^1$, la relation $\alpha_1^1 < \alpha_2^1 < \dots < \alpha_\sigma^1$ est obtenue. (ii) En posant $\alpha(\lambda_a) \equiv \alpha_a^1 \alpha_a^2 \dots \alpha_a^{\lambda_a}$, $1 \leq a < \sigma$, dans $\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma) \rangle$, $\beta(\mu_a) \equiv \beta_a^1 \beta_a^2 \dots \beta_a^{\mu_a}$, $1 \leq a \leq \sigma$ dans $(|\beta(\mu_1) \beta(\mu_2) \dots \beta(\mu_\sigma)|)$, l'ordre de $\alpha_a^1 \alpha_a^2 \dots \alpha_a^{\lambda_a}$ est de même que celui de $\beta_a^1 \beta_a^2 \dots \beta_a^{\mu_a}$, on a la relation $\beta_a^1 < \beta_a^2 < \dots < \beta_a^{\mu_a}$. Il en résulte que $\alpha_a^1 < \alpha_a^2 < \dots < \alpha_a^{\lambda_a}$. D'après (i) et (ii), la forme (7.6) est établie.

C. Q. F. D.

D'ailleurs, nous avons le théorème suivant plus effectif et plus utilisable que le théorème précédent et en ce cas nous adoptons l'autre symbole au lieu de celui $\langle \quad \rangle$.

Théorème 7.4. Les coefficients de paramètre-transformation non-symétrique $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ se décompose à deux lui-mêmes d'ordre plus inférieur comme la formule

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{>(\alpha(l)\alpha(\lambda-l))<} &= \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu}^{>(\alpha(l)\alpha(\lambda-l))<} \\ &= \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(l+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu)} \bar{A}_{(\beta(l+t)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t))}^{\alpha_{l+1} \dots \alpha_\lambda}, \quad 1 \leq l < \mu-t. \end{aligned}$$

Pour expliquer le symbole $><$, lorsque $\alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda}$ devient $\alpha_{b_1} \alpha_{b_2} \dots \alpha_{b_\lambda}$, nous désignons ce changement d'ordre de α 's par

$$\begin{pmatrix} \alpha_{a_1} & \alpha_{a_2} & \dots & \alpha_{a_\lambda} \\ \alpha_{b_1} & \alpha_{b_2} & \dots & \alpha_{b_\lambda} \end{pmatrix}.$$

Le symbole $><$ signifie le changement suivant de l'ordre de α :

$$\alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \longrightarrow >\alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda}< ,$$

de telle sorte que nous ayons la relation suivante

$$\begin{pmatrix} \alpha_{a_1} & \alpha_{a_2} & \dots & \alpha_{a_\lambda} \\ \alpha_{b_1} & \alpha_{b_2} & \dots & \alpha_{b_\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\lambda \\ >\alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda}< \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Tout d'abord, en cas de $\lambda = \mu$, la forme (7.7) devient

$$\begin{aligned} \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda}^{>(\alpha(l)\alpha(\lambda-l))<} &= \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda)} \overbrace{u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_l}^{\alpha_l}}^{>(\alpha(l))} \overbrace{u_{\beta_{l+1}}^{\alpha_{l+1}} \dots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda}}^{\alpha(\lambda-l)<} \\ &= \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda)} \underbrace{u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_l}^{\alpha_l}}_{(\beta(l))} \underbrace{u_{\beta_{l+1}}^{\alpha_{l+1}} \dots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda}}_{\beta(\lambda-l)} = \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda)} \bar{A}_{(\beta(l))}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \bar{A}_{\beta(\lambda-l)}^{\alpha_{l+1} \dots \alpha_\lambda} \end{aligned}$$

Prochainement, nous allons vérifier le cas de $\mu = \lambda + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda \beta_{\lambda+1}}^{>(\alpha(l)\alpha(\lambda-l))<} &= \sum_{(l, 1, \lambda-l)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda \beta_{\lambda+1})} \sum_{\alpha=1}^{\lambda} \underbrace{u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_\alpha}^{\alpha_\alpha}}_{(\beta(l))} \underbrace{u_{\beta_{\alpha+1}}^{\alpha_{\alpha+1}} \dots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda}}_{\beta(\lambda-l)} \\ &= \sum_{(l+1, \lambda-l)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda \beta_{\lambda+1})} \sum_{\alpha=1}^l \underbrace{u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_\alpha}^{\alpha_\alpha}}_{(\beta(l+1))} \underbrace{u_{\beta_{\alpha+1}}^{\alpha_{\alpha+1}} \dots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda}}_{\beta(\lambda-l)} \\ &+ \sum_{(l, \lambda-l+1)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda \beta_{\lambda+1})} \sum_{\alpha=l+1}^{\lambda} \underbrace{u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots u_{\beta_\alpha}^{\alpha_\alpha}}_{(\beta(l))} \underbrace{u_{\beta_{\alpha+1}}^{\alpha_{\alpha+1}} \dots u_{\beta_\lambda}^{\alpha_\lambda}}_{\beta(\lambda-l+1)} \\ &= \sum_{t=0}^1 \sum_{(l+t, \lambda+1-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda \beta_{\lambda+1})} \bar{A}_{(\beta(l+t))}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \bar{A}_{\beta(\lambda+1-l-t)}^{\alpha_{l+1} \dots \alpha_\lambda} \end{aligned}$$

Ensuite, par induction, en supposant que (7.7) soit établi en cas de $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$, nous allons le démontrer en cas de $\bar{A}_{\beta(\mu+1)}^{\alpha(\lambda)}$. D'après la formule récurrente (3.7) nous avons

$$(7.8) \quad \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta(\mu+1)}^{>(|\alpha(l)\alpha(\lambda-l)|)<} \\ = \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{>(|\alpha(l)\alpha(\lambda-l)|)<} u_{\beta_{\mu+1}}^\alpha + \sum_{(l, \lambda-l)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu / \beta_{\mu+1}}^{>(|\alpha(l)\alpha(\lambda-l)|)<}.$$

L'indice supérieur α de $u_{\beta_{\mu+1}}^\alpha$ dans le 1^{er} terme à droite est α_l ou α_λ , parce que α_λ est le dernier indice de $\alpha(l)$ ou de $\alpha(\lambda-l)$. Par exemple, si $l=3$, $\lambda=7$, on a

$$(i) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_7 \alpha_2 \alpha_4 \alpha_6 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \\ \alpha_1 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_6 \alpha_3 \alpha_7 \alpha_4 \end{pmatrix}$$

ou

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_2 \alpha_4 \alpha_7 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \\ \alpha_1 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_6 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_7 \end{pmatrix}.$$

De plus, en cas de α_l , on peut dire que si l'on adopte le symbole $>(| \quad |)<$ aux autres indices on obtient aussi le même résultat. Si l'on omet α_4 dans l'exemple précédent (i) et on pense que $\alpha_1 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_6 \alpha_3 \alpha_7$ est égal à $\alpha'_1 \alpha'_4 \alpha'_2 \alpha'_5 \alpha'_3 \alpha'_6$, on a

$$(i') \quad \begin{pmatrix} \alpha'_1 \alpha'_3 \alpha'_5 \alpha'_2 \alpha'_4 \alpha'_6 \\ \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \alpha'_4 \alpha'_5 \alpha'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \alpha'_4 \alpha'_5 \alpha'_6 \\ \alpha'_1 \alpha'_4 \alpha'_2 \alpha'_5 \alpha'_3 \alpha'_6 \end{pmatrix},$$

parce que l'ordre des indices de α supérieur à gauche de (i') est équivalent à celui de (i) lorsqu'on omet α_7 . Donc, nous avons

$$\sum_{(3,3)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_6)} >(|\alpha(3)\alpha(3)|)< = \sum_{(3,3)}^{(\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_6)} >(|\alpha'(3)\alpha'(3)|)<.$$

Par conséquent, le 1^{er} terme à droite de la forme (7.8) se décompose comme suit :

$$\sum_{(l-1, \lambda-l)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lambda-1})} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{>(|\alpha(l-1)\alpha(\lambda-l)|)<} u_{\beta_{\mu+1}}^\alpha + \sum_{(l, \lambda-l-1)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lambda-1})} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{>(|\alpha(l)\alpha(\lambda-l-1)|)<} u_{\beta_{\mu+1}}^\alpha \\ = \sum_{t=0}^{\mu-\lambda+1} \sum_{(l-1+t, \mu-l+1-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu)} \bar{A}_{\beta(\mu-l+1+t)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{l-1}} \bar{A}_{\beta(\mu-l+1-t)}^{\alpha_{l+1} \dots \alpha_\lambda} u_{\beta_{\mu+1}}^\alpha \\ + \sum_{t=0}^{\mu-\lambda+1} \sum_{(l+t, \mu-l-t)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\mu)} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \bar{A}_{\beta(\mu-l-t)}^{\alpha_{l+1} \dots \alpha_{\lambda-1}} u_{\beta_{\mu+1}}^\alpha.$$

En calculant le 2^{ème} terme à droite de (7.8), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\ell+\ell)/\beta_{\mu+1}}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell} \bar{A}_{\beta(\mu-\ell-\ell)}^{\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_\lambda} |) \\ & + \sum_{\ell=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\ell+\ell)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell} \bar{A}_{\beta(\mu-\ell-\ell)/\beta_{\mu+1}}^{\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_\lambda} |) . \end{aligned}$$

De plus, le 1^{er} terme de la forme précédente s'écrit

$$\sum_{\ell=1}^{\mu-\lambda+1} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\ell+\ell-1)/\beta_{\mu+1}}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell} \bar{A}_{\beta(\mu-\ell-\ell+1)}^{\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_\lambda} |) .$$

Alors, en utilisant de nouveau la formule récurrente (3.7), la forme (7.8) devient

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{\mu+1-\lambda} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\ell+\ell-1)/\beta_{\mu+1}}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell} \bar{A}_{\beta(\mu+1-\ell-\ell)}^{\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_\lambda} |) \\ & + \sum_{\ell=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\ell+\ell)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell} \bar{A}_{\beta(\mu+1-\ell-\ell-1)}^{\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_\lambda} |)_{\beta_{\mu+1}} \\ & = \sum_{\ell=0}^{\mu+1-\lambda} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\mu+1})}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\mu+1})} \bar{A}_{(|\beta(\ell+\ell)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell} \bar{A}_{\beta(\mu+1-\ell-\ell)}^{\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_\lambda} |) . \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Le théorème 7.4 peut être généralisé et nous avons le

Théorème 7.5. Les coefficients de paramètre-transformation non-symétrique $\bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$ s'expriment par le produit de quelques lui-mêmes d'ordre plus inférieur, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} (7.9) \quad & \sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\sigma)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)} = \sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\sigma)}^{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu}^{\alpha(\lambda_1)\alpha(\lambda_2)\cdots\alpha(\lambda_\sigma)} |) \\ & = \sum_{\substack{(\mu_1\mu_2\cdots\mu_\sigma) \\ \lambda_a \leq \mu_a}}^{\mu} \sum_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\mu_1)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\lambda_1}} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha_{\lambda_1+1}\cdots\alpha_{\lambda_1+\lambda_2}} \cdots \bar{A}_{\beta(\mu_\sigma)}^{\alpha_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\sigma-1}+1}\cdots\alpha_\lambda} , \end{aligned}$$

où nous avons la restriction $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\sigma = \lambda$.

Démonstration. En cas de $\sigma=2$, (7.9) devient le théorème 7.4 que nous avons déjà vérifié. En supposant le cas de $\sigma-1$, nous allons démontrer le cas σ . Le terme à droite de (7.9) peut s'exprimer par

$$(7.10) \quad \sum_{\substack{(\mu_1+\mu_2) \\ \mu_1 \geq \lambda_1}}^{\mu} \sum_{(\mu_1\mu_2)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\mu_1)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\lambda_1}} \sum_{(\mu_2+\cdots+\mu_\sigma)}^{\mu_2'} \sum_{(\mu_2\cdots\mu_\sigma)}^{f(\mu_2')} \bar{A}_{(|\beta(\mu_2)}^{\alpha_{\lambda_1+1}\cdots\alpha_{\lambda_1+\lambda_2}} \cdots \bar{A}_{\beta(\mu_\sigma)}^{\alpha_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\sigma-1}+1}\cdots\alpha_\lambda} .$$

Par l'hypothèse en cas de $\sigma-1$, la forme (7.10) devient

$$\sum_{\substack{(\mu_1+\mu_2) \\ \mu_1 \geq \lambda_1}}^{\mu} \sum_{(\mu_1\mu_2)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_\mu)} \bar{A}_{(|\beta(\mu_1)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\lambda_1}} \sum_{(\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_\sigma)}^{(\alpha_{\lambda_1+1}\cdots\alpha_\lambda)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\lambda_2)\alpha(\lambda_3)\cdots\alpha(\lambda_\sigma)} |)$$

D'après le théorème 7.4 la forme précédente s'exprime par

$$(7.11) \quad \sum_{(\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_\sigma)}^{\alpha_{\lambda_1+1} \dots \alpha_{\lambda_2} \dots \alpha_{\lambda_1}} \sum_{(\lambda_1 \lambda'_2)} \langle |\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)| \rangle \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\langle |\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)| \rangle} \langle .$$

En utilisant le symbole du théorème précédent 7.5, on obtient l'ordre des α , $\alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda}$, de telle sorte que nous ayons

$$(7.12) \quad \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lambda_1} \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \langle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} (|\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)|) \\ \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \end{array} \right).$$

Puisque l'ordre de base du symbole $\rangle (|\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)|) \langle$ est $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \langle$, nous changeons comme suit :

$$\rangle (|\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)|) \langle \longrightarrow \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda}.$$

Ensuite, nous considérons $\rangle \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \langle$ par le symbole fondé de cet ordre de base $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\lambda_1} \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \langle$, c'est-à-dire,

$$(7.13) \quad \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \dots \alpha_{\lambda_1} \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \langle \\ \rangle \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \langle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \\ \alpha_1 \dots \alpha_{\lambda_1} \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \langle \end{array} \right).$$

L'ordre de α , $\rangle (|\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)|) \langle$, a la signification que nous avons énoncée précédemment. Donc, on a

$$\rangle \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \langle = \rangle (|\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)|) \langle .$$

D'après (7.12), (7.13), nous pouvons déduire comme suit :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda \\ \rangle \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} \dots \alpha_{a_\lambda} \langle \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} (|\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda'_2)|) \\ \alpha_1 \dots \alpha_{\lambda_1} \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \langle \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} (|\alpha(\lambda_1) (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|)|) \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda \end{array} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la forme (7.11) devient

$$\sum_{(\lambda_1 \lambda'_2)}^{\langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda \rangle} \sum_{(\lambda_2 \dots \lambda_\sigma)}^{\alpha(\lambda_2)} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\langle |\alpha(\lambda_1) \rangle (|\alpha(\lambda_2) \alpha(\lambda_3) \dots \alpha(\lambda_\sigma)|) \rangle} \langle = \sum_{\substack{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\sigma) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\sigma = \lambda}}^{\langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\langle |\alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \dots \alpha(\lambda_\sigma)| \rangle} \langle .$$

Le dernier terme est identique au terme à gauche de (7.9).

C. Q. F. D.

§ 8. Quelques formules concernant le produit semi-holonome d'ordre supérieur de $\bar{p}_{\alpha(\mu)}^\ell$.

À § 6, nous avons défini $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\ell(\lambda)}$, le produit semi-holonome d'ordre supérieur

de $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^i$. Puisque la forme (6.6) de la définition est de même que celle (3.8) à § 3 de la partie I, d'après les théorèmes 3.1, 3.2, nous pouvons immédiatement énoncer deux théorèmes suivants.

Théorème 8.1. *Le produit semi-holonyme d'ordre supérieur $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ s'exprime par la forme récurrente*

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^i &= \bar{P}_{\alpha(\mu)}^i, \quad \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \equiv 0, \quad (\lambda > \mu)^{8)} \\ \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} &= \bar{P}_{\alpha(\mu-1)}^{i(\lambda-1)} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i\lambda} + \frac{\partial^*}{\partial u^{\alpha_\mu}} \bar{P}_{\alpha(\mu-1)}^{i(\lambda)}, \quad (1 < \lambda < \mu), \\ \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\mu)} &= \bar{P}_{\alpha_1}^{i_1} \bar{P}_{\alpha_2}^{i_2} \cdots \bar{P}_{\alpha_\mu}^{i_\mu}. \end{aligned}$$

Théorème 8.2. *Nous pouvons exprimer $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ par la forme directe*

$$(8.2) \quad \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} = \sum_{(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\lambda)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu)} \sum_{[\mu_\lambda]}^{\mu} \bar{P}_{[\alpha(\mu_1)]}^{i_1} \bar{P}_{\alpha(\mu_2)}^{i_2} \cdots \bar{P}_{\alpha(\mu_\lambda)]}^{i_\lambda} \quad ^{9)}.$$

En vertu du corollaire à p. 203, on obtient aussi le

Corollaire 8.1. *Lorsque $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ sont symétriques par rapport aux indices $i(\lambda), \alpha(\mu)$, $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ devient $P_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$, où nous avons posé*

$$(8.3) \quad P_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} = \sum_{(+s_\lambda)}^{\mu} \frac{\mu!}{s_1! s_2! \cdots s_\lambda! \nu_1! \nu_2! \cdots \nu_{\mu-\lambda+1}!} P_{\alpha(s_1)}^{i_1} P_{\alpha(s_2)}^{i_2} \cdots P_{\alpha(s_\lambda)}^{i_\lambda} \quad ^{10)}.$$

D'ailleurs, de même que les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3, on obtient trois théorèmes suivants.

Théorème 8.3. *Lorsque $\lambda \leq \mu$, $\nu \leq \mu$, la dérivée partielle de $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ par rapport à $\bar{P}_{\alpha'(\nu)}^{i'}$ s'exprime par*

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}}{\partial \bar{P}_{\alpha'(\nu)}^{i'}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{P}_{\alpha'_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_\nu}^{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu}} \bar{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu}^{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} \quad ^{11)} \\ &= \sum_{(<\alpha_\lambda)}^{1, \mu} \delta_{\alpha_{a_1}}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_{a_2}}^{\alpha'_2} \cdots \delta_{\alpha_{a_\nu}}^{\alpha'_\nu} \sum_{(s_1+s_2+\cdots+(s_b)+\cdots+s_\lambda)}^{\mu-\nu} \sum_{(s_1 s_2 \cdots (s_b) \cdots s_\lambda)}^{(\alpha_1 \cdots (\alpha_{a_1}) \cdots (\alpha_{a_2}) \cdots (\alpha_{a_\nu}) \cdots \alpha_\mu)} \\ &\quad \times \left[\underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_1}}^{i_1} \cdots \alpha}_{s_1} \underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_2}}^{i_2} \cdots \alpha}_{s_2} \cdots \underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_{\sigma-1}}}^{i_{\sigma-1}} \cdots \alpha}_{s_{\sigma-1}} \delta_{i'_\sigma}^{i_\sigma} \underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_\sigma}}^{i_\sigma+1} \cdots \alpha}_{s_\sigma} \cdots \underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_{b-1}}}^{i_{b-1}} \cdots \alpha}_{s_{b-1}} \underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_{b+1}}}^{i_{b+1}} \cdots \alpha}_{s_{b+1}} \cdots \underbrace{\bar{P}_{\alpha_{c_\lambda}}^{i_\lambda} \cdots \alpha}_{s_\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Théorème 8.4. *Nous pouvons expliquer la structure des dérivées par-*

8) L'explication du symbole $\frac{\partial^*}{\partial u^{\alpha}}$ peut être trouvée à la note 3) au bas de p. 202 de la partie I.

9) La signification du symbole utilisé est déjà énoncée à p. 203 de la partie I.

10) Voir, A. KAWAGUCHI [7] p. 207. L'explication du symbole se trouve à p. 201 de la partie I.

11) Voir, le symbole à (4.1) de la partie I.

tielles de $\bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)}$ comme suit : lorsque $\nu > \mu - \lambda + 1$, $\partial \bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)} / \partial \bar{P}_{a'(\nu)}^{i'}$ est identiquement zéro et pour $\nu \leq \mu - \lambda + 1$, nous avons la forme

$$(8.5) \quad \frac{\partial \bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)}}{\partial \bar{P}_{a'(\nu)}^{i'}} = \frac{\partial}{\partial \bar{P}_{a'_1 a'_2 \dots a'_\nu}^{i'_1 i'_2 \dots i'_\nu}} \bar{P}_{a_1 a_2 \dots a_\lambda \dots a_\mu}^{i_1 i_2 \dots i_\lambda}, \quad \lambda < \mu^{12)},$$

$$= \sum_{(\alpha_\nu)}^{1, \mu} \delta_{a_{a_1}}^{a'_1} \delta_{a_{a_2}}^{a'_2} \dots \delta_{a_{a_\nu}}^{a'_\nu} \left[\delta_{i'_1}^{i_1} \bar{P}_{a_1 \dots (a_{a_1}) \dots (a_{a_2}) \dots (a_{a_\nu}) \dots a_\mu}^{i_1 \dots (i_b) \dots i_\lambda} + \bar{S}_{i'_1 i_1 \dots (i_b) \dots i_\lambda}^{i'_1 a_1 \dots (a_{a_1}) \dots (a_{a_\nu}) \dots a_\mu} \right],$$

où nous posons

$$\bar{S}_{i'_1 i_1 \dots (i_b) \dots i_\lambda}^{i'_1 a_1 \dots (a_{a_1}) \dots (a_{a_\nu}) \dots a_\mu} = \sum_{b \neq \sigma}^{(\alpha_1 \dots (\alpha_{a_1}) \dots (\alpha_{a_\nu}) \dots a_\mu)} \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\lambda)}^\mu \sum_{(+\mu_\lambda)}^\mu$$

$$\left[\underbrace{\bar{P}_{a_{c_1} \dots a_{c_{\mu_1}}}^{i_1 \dots i_{\mu_1}}}_{\mu_1} \dots \underbrace{\bar{P}_{a_{c_{b-1}} \dots a_{c_{\mu_{b-1}}}}^{i_{b-1} \dots i_{\mu_{b-1}}}}_{\mu_b} \delta_{i'_b}^{i_b} \underbrace{\bar{P}_{a_{c_{b+1}} \dots a_{c_{\mu_{b+1}}}}^{i_{b+1} \dots i_{\mu_{b+1}}}}_{\mu_{b+1}} \dots \underbrace{\bar{P}_{a_{c_\lambda} \dots a_{c_{\mu_\lambda}}}^{i_\lambda \dots i_{\mu_\lambda}}}_{\mu_\lambda} \right.$$

$$\left. + \underbrace{\bar{P}_{a_{c_1} \dots a_{c_{\mu_1}}}^{i_1 \dots i_{\mu_1}}}_{\mu_1} \dots \delta_{i'_\sigma}^{i_\sigma} \underbrace{\bar{P}_{a_{c_\sigma} \dots a_{c_{\mu_\sigma}}}^{i_\sigma \dots i_{\mu_\sigma}}}_{\mu_\sigma} \dots \underbrace{\bar{P}_{a_{c_{b-1}} \dots a_{c_{\mu_{b-1}}}}^{i_{b-1} \dots i_{\mu_{b-1}}}}_{\mu_{b-1}} \underbrace{\bar{P}_{a_{c_{b+1}} \dots a_{c_{\mu_{b+1}}}}^{i_{b+1} \dots i_{\mu_{b+1}}}}_{\mu_{b+1}} \dots \underbrace{\bar{P}_{a_{c_\lambda} \dots a_{c_{\mu_\lambda}}}^{i_\lambda \dots i_{\mu_\lambda}}}_{\mu_\lambda} \right].$$

Corollaire 8.2. Le terme supplémentaire $\bar{S}_{i'_1 i_1 \dots (i_b) \dots i_\lambda}^{i'_1 a_1 \dots (a_{a_1}) \dots (a_{a_\nu}) \dots a_\mu}$ dans (8.5) disparaît lorsque b est égal à σ , c'est-à-dire, on a toujours $c_{b-1} < a_1 < c_b$. Plus clairement, lorsque $\lambda = 1, 2$, ou lorsque $\nu = \mu - \lambda + 1$, on peut le dire.

Théorème 8.5. On peut exprimer les $\bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)}$ par la forme récurrente

$$(8.6) \quad \bar{P}_{a(\mu+1)}^{i(\lambda)} = \bar{P}_{a_1 \dots a_{\mu+1}}^{i_1 \dots i_\lambda} = \sum_{t=0}^\mu \sum_{(\alpha_t)}^{1, \mu} \bar{P}_{a_{a_1} \dots a_{a_t} a_{\mu+1}}^{i'_1 \dots i'_t} \bar{P}_{a_1 \dots (a_{a_1}) \dots (a_{a_t}) \dots a_\mu}^{i_1 \dots (i_b) \dots i_\lambda}$$

$$+ \sum_{t=1}^\mu \sum_{(\alpha_t)}^{1, \mu} \bar{P}_{a_{a_1} \dots a_{a_t} a_{\mu+1}}^{i'_1 \dots i'_t} \bar{S}_{i'_1 i_1 \dots (i_b) \dots i_\lambda}^{i'_1 a_1 \dots (a_{a_1}) \dots (a_{a_t}) \dots a_\mu}.$$

Théorème 8.6. Nous pouvons décomposer $\bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)}$ comme suit :

$$(8.7) \quad \bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)} = \bar{P}_{a_1 a_2 \dots a_\mu}^{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\ell+1, \mu-1-t)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} \bar{P}_{a_1 \dots a_{\ell+1}}^{i_1 \dots i_{\ell+1}} \bar{P}_{a_{\ell+1} \dots a_{\mu-1-t}}^{i_{\ell+1} \dots i_{\mu-1-t}} \bar{P}_{a_{\mu-1-t} \dots a_\mu}^{i_{\mu-1-t} \dots i_\lambda},$$

en utilisant les mêmes symboles que pour la forme (3.8).

Théorème 8.7. En général, nous avons l'expression suivante de $\bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)}$:

$$(8.8) \quad \bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)} = \bar{P}_{a_1 a_2 \dots a_\mu}^{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{(+\mu_{\sigma+1})}^\mu \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\sigma+1})}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} \bar{P}_{a_1 \dots a_{\mu_1}}^{i_1 \dots i_{\mu_1}} \bar{P}_{a_{\mu_1} \dots a_{\mu_2}}^{i_{\mu_1} \dots i_{\mu_2}} \dots \bar{P}_{a_{\mu_\sigma} \dots a_{\mu_{\sigma+1}}}^{i_{\mu_\sigma} \dots i_{\mu_{\sigma+1}}} \bar{P}_{a_{\mu_{\sigma+1}} \dots a_\mu}^{i_{\mu_{\sigma+1}} \dots i_\lambda},$$

$$1 \leq \sigma \leq \lambda$$

où nous utilisons les mêmes symboles qu'à la forme (3.8). Lorsque $\sigma = \lambda$, cette forme (8.8) est identiquement (6.6).

Corollaire 8.3. Pour les $\bar{P}_{a(\mu)}^{i(\lambda)}$, nous ne pouvons pas obtenir la formule

12) Voir, les symboles à p. 205, p. 206 de la partie I.

qui correspond à celle de A. Kawaguchi¹³⁾, lorsque $l \geq 2$, c'est-à-dire,

$$\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \neq \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} \bar{P}_{(\lambda(\lambda+t))}^{i_1 i_2 \dots i_l} \bar{P}_{\alpha(\mu-l-t)}^{i_{l+1} \dots i_\lambda}, \text{ pour } \lambda \neq \mu.$$

Mais, lorsque $\lambda = \mu$, on obtient toujours cette formule.

D'après les théorèmes 7.1, 7.2 à § 7, nous avons deux théorèmes suivants.

Théorème 8.8. *Le produit semi-holonyme d'ordre supérieur $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ se décompose à quelques lui-mêmes d'ordre plus inférieur comme suit :*

$$\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} = \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} \frac{1}{\binom{\lambda-1}{l-1}} \bar{P}_{(\lambda(\lambda+t))}^{i(\lambda)} \bar{P}_{\alpha(\mu-l-t)}^{i(\lambda-l)}.$$

Théorème 8.9. *Nous pouvons décomposer $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ à la forme du produit de σ fois selon la loi*

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} &= \sum_{\substack{(\mu_\sigma) \\ \lambda_a \leq \mu_a}}^{\mu} \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\sigma)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} \left[\binom{\lambda-1}{\lambda_1-1} \binom{\lambda-\lambda_1-1}{\lambda_2-1} \dots \binom{\lambda-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{\sigma-2}-1}{\lambda_{\sigma-1}-1} \right]^{-1} \\ &\times \bar{P}_{(\lambda(\mu_1))}^{i(\lambda_1)} \bar{P}_{\alpha(\mu_2)}^{i(\lambda_2)} \dots \bar{P}_{\alpha(\mu_\sigma)}^{i(\lambda_\sigma)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\sigma = \lambda, \quad a = 1, 2, \dots, \sigma. \end{aligned}$$

De plus, nous avons le théorème suivant qui correspond au théorème 7.3.

Théorème 8.10. *Lorsque nous décomposons $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ par (6.6), l'ordre des indices $\langle i(\lambda_1) i(\lambda_2) \dots i(\lambda_\sigma) \rangle$ de chaque terme dans*

$$\bar{P}_{(\lambda(\mu_1))}^{i(\lambda_1)} \bar{P}_{\alpha(\mu_2)}^{i(\lambda_2)} \dots \bar{P}_{\alpha(\mu_\sigma)}^{i(\lambda_\sigma)}$$

n'est pas uniquement déterminé, l'ordre dépend de chaque terme.

En se référant aux théorèmes 7.4, 7.5, on a deux théorèmes comme suit :

Théorème 8.11. *Le produit semi-holonyme d'ordre supérieur $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ peut être décomposé à deux lui-mêmes d'ordre plus inférieur selon la loi*

$$\begin{aligned} &\sum_{(\lambda, \lambda-l)}^{(i_1 i_2 \dots i_\lambda)} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \bar{P}_{(\lambda(\lambda-l))}^{i(\lambda-l)} \langle 14 \rangle \\ &= \sum_{t=0}^{\mu-\lambda} \sum_{(\lambda+t, \mu-l-t)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} P_{(\lambda(\lambda+t))}^{i_1 i_2 \dots i_l} P_{\alpha(\mu-l-t)}^{i_{l+1} \dots i_\lambda}, \quad 1 \leq l < \mu-t. \end{aligned}$$

Théorème 8.12. *Nous pouvons exprimer le produit semi-holonyme d'ordre supérieur $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)}$ par la décomposition à σ lui-mêmes d'ordre plus inférieur, $\sigma \leq \lambda$, c'est-à-dire,*

13) Voir, la formule (2.7) (Satz 2.3) dans l'article [7] p. 268.

14) Voir, l'explication du symbole $\langle \rangle$ au théorème 7.4

$$\sum_{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\sigma)}^{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\lambda)} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\sigma)} = \sum_{\substack{\mu \\ \lambda_a \leq \mu_a}}^{\mu} \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\sigma)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)} \bar{A}_{\alpha(\mu_1)}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{\lambda_1-15}} \\ \times \bar{A}_{\alpha(\mu_2)}^{\lambda_1+1 \dots \lambda_1+\lambda_2} \dots \bar{A}_{\alpha(\mu_\sigma)}^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{\sigma-1}+1 \dots \lambda_\lambda}.$$

§ 9. Quelques formules concernant les symboles $(| |)$, $\langle \rangle$, $> <$ et les démonstrations des théorèmes 6.1, 6.2.

Avant les démonstrations des théorèmes à § 6, nous énonçons quelques formules fondamentales concernant les symboles $(| |)$, $\langle \rangle$, $> <$.

Théorème 9.1. Lorsque les composantes de l'objet géométrique $\Phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}^i$, $\mu=1, 2, \dots, r$, (par exemple, $\bar{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}^i$) sont donnés, la formule suivante est obtenue :

$$(9.1) \quad \begin{aligned} & \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{\alpha(\mu_1)}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)} \\ &= \Phi_{\langle \alpha(\sigma_1) \rangle}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{\langle \beta(\mu_1) \rangle}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)} \\ &= \Phi_{\langle \alpha(\sigma_1) \rangle}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{\langle \beta(\mu_1) \rangle}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)} \rangle, \end{aligned}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\lambda$ sont les entiers arbitraires, avec la restriction $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\lambda = \sigma$ et nous supposons que dans le 2^{ème} ou le 3^{ème} terme, $\langle \alpha(\sigma_1) \alpha(\sigma_2) \dots \alpha(\sigma_\lambda) \rangle$ de $\Phi^1 \Phi^2 \dots \Phi^\lambda$ soit identique à $\langle \alpha(\sigma_1) \alpha(\sigma_2) \dots \alpha(\sigma_\lambda) \rangle$ de $\bar{A}_{\langle \beta(\mu_1) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}$.

Démonstration. Les indices inférieurs $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma$ de $\alpha_{\alpha_1} \alpha_{\alpha_2} \dots \alpha_{\alpha_\sigma}$ de $\Phi^1 \Phi^2 \dots \Phi^\lambda$ soient identiques à ceux de $\bar{A}_{\langle \beta(\mu_1) \rangle} \bar{A}_{\beta(\mu_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}$. Puisque α est l'indice de sommation (contraction), le même résultat de sommation est obtenu. Et d'après le théorème 7.3, nous pouvons dire que le 3^{ème} terme est identique au 1^{er} terme.

C. Q. F. D.

Par l'exemple de ce théorème, nous montrons comme suit :

$$\begin{aligned} & \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3 \alpha_4}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3 \alpha_4} = \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3 \alpha_4}^2 (u_{\beta_1 \beta_5}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_3} u_{\beta_3}^{\alpha_2} u_{\beta_4}^{\alpha_4} \\ & \quad + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_3} u_{\beta_3 \beta_5}^{\alpha_2} u_{\beta_4}^{\alpha_4} + u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_3} u_{\beta_4}^{\alpha_2} u_{\beta_5}^{\alpha_4}) \\ &= \Phi_{\alpha_1 \alpha_3}^1 \Phi_{\alpha_2 \alpha_4}^2 (u_{\beta_1 \beta_5}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} u_{\beta_3}^{\alpha_3} u_{\beta_4}^{\alpha_4} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} u_{\beta_3 \beta_5}^{\alpha_3} u_{\beta_4}^{\alpha_4}) \\ & \quad + \Phi_{\alpha_1 \alpha_4}^1 \Phi_{\alpha_2 \alpha_3}^2 (u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} u_{\beta_4}^{\alpha_3} u_{\beta_5}^{\alpha_4}) \\ &= \Phi_{\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle}^1 \Phi_{\alpha_3 \alpha_4}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3 \alpha_4}. \end{aligned}$$

Théorème 9.2. Lorsque nous considérons $\Phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu}$ de même qu'en cas du théorème 9.1, nous avons la formule concernant le symbole $(| |)$,

$$\sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\lambda)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma)} \Phi_{\langle \alpha(\sigma_1) \rangle}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{\langle \beta(\mu_1) \rangle}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)}$$

15) L'explication du symbole $> <$ se trouve au théorème 7.5.

$$= \binom{\sigma-1}{\sigma_1-1} \binom{\sigma-\sigma_1-1}{\sigma_2-1} \dots \binom{\sigma-\sigma_1-\dots-\sigma_{\lambda-2}-1}{\sigma_{\lambda-1}-1} \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \\ \times \bar{A}_{(\beta(\mu_1))}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)}.$$

Démonstration. Puisque les indices $\alpha(\sigma_1) \alpha(\sigma_2) \dots \alpha(\sigma_\lambda)$ sont ceux de sommation (contraction), lorsqu'on pense $\sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\lambda)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma)}$, nous obtenons tous les mêmes termes et la calcul du nombre des termes est identique à celle du cas du théorème 7.2.

C. Q. F. D.

Pour bien comprendre ce théorème, nous l'expliquons en utilisant l'exemple précédent :

$$\sum_{(2,2)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)} \Phi_{(\alpha(2))}^1 \Phi_{\alpha'(2)}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha(2)} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha'(2)} \\ = \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3 \alpha_4}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3 \alpha_4} + \Phi_{\alpha_1 \alpha_3}^1 \Phi_{\alpha_2 \alpha_4}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_3} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_2 \alpha_4} + \Phi_{\alpha_1 \alpha_4}^1 \Phi_{\alpha_2 \alpha_3}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_4} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_2 \alpha_3} \\ = 3 \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3 \alpha_4}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_5}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3 \alpha_4}.$$

D'ailleurs, nous obtenons le

Théorème 9.3. Nous avons la formule suivante concernant le symbole $\langle \rangle$:

$$\sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\lambda)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma)} \Phi_{(\alpha(\sigma_1))}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{(\beta(\mu_1))}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)+1 \dots \alpha(\sigma_1)+\sigma_2} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)+1 \dots \alpha(\sigma_1)+\dots+\sigma_{\lambda-1}+1 \dots \alpha(\sigma)} \\ = \binom{\sigma-1}{\sigma_1-1} \binom{\sigma-\sigma_1-1}{\sigma_2-1} \dots \binom{\sigma-\sigma_1-\dots-\sigma_{\lambda-2}-1}{\sigma_{\lambda-1}-1} \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \\ \times \bar{A}_{(\beta(\mu_1))}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)}.$$

Démonstration. Puisque nous trouvons le symbole $\langle \rangle$ aux indices, l'ordre de α ne dépend pas de la sommation et l'explication du nombre de termes est de même qu'en cas du corollaire précédent.

C. Q. F. D.

Théorème 9.4. Nous avons la formule suivante très importante :

$$(9.2) \quad \sum_{\mu_1 \geq \sigma}^k \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\lambda)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda)} \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{(\beta(\mu_1))}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_\lambda)}^{\alpha(\sigma_\lambda)} \\ = \sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\lambda)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma)} \Phi_{(\alpha(\sigma_1))}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_\lambda)}^\lambda \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma}, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\lambda.$$

Démonstration. En changeant l'ordre de $\alpha(\sigma_1) \alpha(\sigma_2) \dots \alpha(\sigma_\lambda)$ comme l'explication dans le théorème 7.4, le terme à droite de (9.2) peut s'écrire

$$\Phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\sigma_1}}^1 \Phi_{\alpha_{\sigma_1+1} \dots \alpha_{\sigma_1+\sigma_2}}^2 \dots \Phi_{\alpha_{\sigma_1+\dots+\sigma_{\lambda-1}+1} \dots \alpha_{\sigma}}^{\lambda} \sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{\lambda})}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\sigma})} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^{(\alpha(\sigma_1) \alpha(\sigma_2) \dots \alpha(\sigma_{\lambda}) |)}.$$

De plus, en vertu du théorème 7.5, la forme précédente devient

$$\Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_{\lambda})}^{\lambda} \sum_{\substack{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda}) \\ \mu_{\alpha} \geq \sigma_{\alpha}}}^k \sum_{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)} \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_{\lambda})}^{\alpha(\sigma_{\lambda})} |)}.$$

C. Q. F. D.

Pour comprendre ce théorème facilement, nous montrons l'exemple du cas $k=4$, $\lambda=2$, $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$, $\sigma_1+\sigma_2=\sigma=3$.

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_1+\mu_2}^4 \sum_{(\mu_1 \mu_2)}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3}^2 \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha_3} |) \\ &= \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3}^2 [\bar{A}_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_3 \beta_4}^{\alpha_3} + \bar{A}_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3} + \bar{A}_{\beta_1 \beta_4}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_3} \\ & \quad + \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_4}^{\alpha_3} + \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \beta_4}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_3}^{\alpha_3} + \bar{A}_{\beta_1 \beta_3 \beta_4}^{\alpha_1 \alpha_2} \bar{A}_{\beta_2}^{\alpha_3}] \\ &= \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3}^2 [(u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2}) u_{\beta_3 \beta_4}^{\alpha_3} + (u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2}) u_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_3} + (u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_4}^{\alpha_2}) u_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_3} \\ & \quad + (u_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_2} + u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2}) u_{\beta_4}^{\alpha_3} + (u_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1} u_{\beta_4}^{\alpha_2} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_2} + u_{\beta_1 \beta_4}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2}) u_{\beta_3}^{\alpha_3} \\ & \quad + (u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_4}^{\alpha_2} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_3 \beta_4}^{\alpha_2} + u_{\beta_1 \beta_4}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2}) u_{\beta_2}^{\alpha_3}] \\ &= (\Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3}^2 + \Phi_{\alpha_1 \alpha_3}^1 \Phi_{\alpha_2}^2) (u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} u_{\beta_3 \beta_4}^{\alpha_3} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2 \beta_3}^{\alpha_2} u_{\beta_4}^{\alpha_3} + u_{\beta_1}^{\alpha_1} u_{\beta_2 \beta_4}^{\alpha_2} u_{\beta_3}^{\alpha_3} \\ & \quad + u_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1} u_{\beta_3}^{\alpha_2} u_{\beta_4}^{\alpha_3} + u_{\beta_1 \beta_3}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} u_{\beta_4}^{\alpha_3} + u_{\beta_1 \beta_4}^{\alpha_1} u_{\beta_2}^{\alpha_2} u_{\beta_3}^{\alpha_3}) \\ &= \sum_{(2,1)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \Phi_{\alpha_3}^2 \sum_{(2,1)}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}^{(\alpha(2) \alpha(1) |)}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\bar{A}_{\alpha(k)}^{i(\sigma)}$ au théorème 9.4 par $\bar{P}_{\alpha(k)}^{i(\sigma)}$, nous avons aussi le

Théorème 9.5. La formule suivante concernant $\bar{P}_{\alpha(k)}^{i(\sigma)}$, le produit semi-holonome d'ordre supérieur de $\bar{P}_{\alpha(k)}^i$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda}) \\ \mu_{\alpha} \geq \sigma_{\alpha}}}^k \sum_{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)} \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_{\lambda})}^{\lambda} \bar{P}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{P}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{P}_{\beta(\mu_{\lambda})}^{\alpha(\sigma_{\lambda})} |) \\ &= \sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{\lambda})}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\sigma})} \Phi_{\alpha(\sigma_1)}^1 \Phi_{\alpha(\sigma_2)}^2 \dots \Phi_{\alpha(\sigma_{\lambda})}^{\lambda} \bar{P}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\sigma}}, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{\lambda}. \end{aligned}$$

Maintenant, il est tout prêt pour démontrer le théorème 6.1 et le théorème 6.2.

Démonstration du théorème 6.1. D'après (6.5), nous obtenons la forme

$$\begin{aligned} (9.3) \quad \bar{P}_{\beta(k)}^j &\equiv \bar{P}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^j = \sum_{\lambda=1}^k \bar{X}_{i(\lambda)}^j \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda})}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)} \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\lambda})}^k \sum_{\sigma_1=1}^{\mu_1} \sum_{\sigma_2=1}^{\mu_2} \dots \sum_{\sigma_{\lambda}=1}^{\mu_{\lambda}} \\ &\quad \times \bar{P}_{\alpha(\sigma_1)}^{i_1} \bar{P}_{\alpha(\sigma_2)}^{i_2} \dots \bar{P}_{\alpha(\sigma_{\lambda})}^{i_{\lambda}} \bar{A}_{\beta(\mu_1)}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{\beta(\mu_2)}^{\alpha(\sigma_2)} \dots \bar{A}_{\beta(\mu_{\lambda})}^{\alpha(\sigma_{\lambda})} |). \end{aligned}$$

Dans cette formule, puisque nous avons la relation

$$\sum_{(+\mu_\lambda)}^k \sum_{\sigma_1=1}^{\mu_1} \sum_{\sigma_2=1}^{\mu_2} \cdots \sum_{\sigma_\lambda=1}^{\mu_\lambda} = \sum_{(+\mu_\lambda)}^k \sum_{\sigma=\lambda}^k \sum_{\sigma_a \leq \mu_a}^\sigma, \quad k > \lambda,$$

la forme (9.3) s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\beta(k)}^j &= \sum_{\lambda=1}^k \bar{X}_{\bar{\ell}(\lambda)}^j \sum_{\substack{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\lambda) \\ \sigma_a \leq \mu_a}}^k \sum_{\sigma=\lambda}^\sigma \bar{P}_{\alpha(\sigma_1)}^{\bar{\ell}_1} \bar{P}_{\alpha(\sigma_2)}^{\bar{\ell}_2} \cdots \bar{P}_{\alpha(\sigma_\lambda)}^{\bar{\ell}_\lambda} \\ &\quad \times \bar{A}_{(|\beta(\mu_1)|)}^{\alpha(\sigma_1)} \bar{A}_{|\beta(\mu_2)|}^{\alpha(\sigma_2)} \cdots \bar{A}_{|\beta(\mu_\lambda)|}^{\alpha(\sigma_\lambda)}. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le théorème 9.4, la forme (9.3) devient

$$\bar{P}_{\beta(k)}^j = \sum_{\lambda=1}^k \bar{X}_{\bar{\ell}(\lambda)}^j \sum_{\sigma=\lambda}^k \sum_{(+\sigma_\lambda)}^\sigma \sum_{(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\lambda)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma)} \bar{P}_{|\alpha(\sigma_1)|}^{\bar{\ell}_1} \bar{P}_{\alpha(\sigma_2)}^{\bar{\ell}_2} \cdots \bar{P}_{\alpha(\sigma_\lambda)}^{\bar{\ell}_\lambda} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma}$$

et d'après (6.6) on a

$$\bar{P}_{\beta(k)}^j = \sum_{\lambda=1}^k \sum_{\sigma=\lambda}^k \bar{X}_{\bar{\ell}(\lambda)}^j \bar{P}_{\alpha(\sigma)}^{\bar{\ell}(\lambda)} \bar{A}_{\beta(k)}^{\alpha(\sigma)}.$$

Ici, on peut changer comme

$$\sum_{\lambda=1}^k \sum_{\sigma=\lambda}^k = \sum_{\sigma=1}^k \sum_{\lambda=1}^\sigma$$

et donc nous avons

$$\bar{P}_{\beta(k)}^j = \sum_{\sigma=1}^k \sum_{\lambda=1}^\sigma \bar{X}_{\bar{\ell}(\lambda)}^j \bar{P}_{\alpha(\sigma)}^{\bar{\ell}(\lambda)} \bar{A}_{\beta(k)}^{\alpha(\sigma)}.$$

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème 6.2. En vertu de la définition du produit semi-holonyme d'ordre supérieur et du théorème 6.1, nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} &= \sum_{(+k_\sigma)}^\omega \sum_{(k_1 k_2 \dots k_\sigma)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\omega)} \bar{P}_{(|\beta(k_1)|)}^{j_1} \bar{P}_{\beta(k_2)}^{j_2} \cdots \bar{P}_{\beta(k_\sigma)}^{j_\sigma} \\ &= \sum_{(+k_\sigma)}^\omega \sum_{(k_1 k_2 \dots k_\sigma)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\omega)} \sum_{\mu_1=1}^k \sum_{\lambda_1=1}^{\mu_1} \bar{X}_{\bar{\ell}(\lambda_1)}^{j_1} \bar{P}_{\alpha(\mu_1)}^{\bar{\ell}(\lambda_1)} \bar{A}_{(|\beta(k_1)|)}^{\alpha(\mu_1)} \\ &\quad \times \sum_{\mu_2=1}^{k_2} \sum_{\lambda_2=1}^{\mu_2} \bar{X}_{|\bar{\ell}(\lambda_2)|}^{j_2} \bar{P}_{|\alpha(\mu_2)|}^{\bar{\ell}(\lambda_2)} \bar{A}_{\beta(k_2)}^{\alpha(\mu_2)} \times \cdots \\ &\quad \times \sum_{\mu_\sigma=1}^{k_\sigma} \sum_{\lambda_\sigma=1}^{\mu_\sigma} \bar{X}_{|\bar{\ell}(\lambda_\sigma)|}^{j_\sigma} \bar{P}_{|\alpha(\mu_\sigma)|}^{\bar{\ell}(\lambda_\sigma)} \bar{A}_{\beta(k_\sigma)}^{\alpha(\mu_\sigma)}. \end{aligned}$$

D'après la relation

$$\sum_{(+k_\sigma)}^\omega \sum_{\mu_1=1}^{k_1} \sum_{\mu_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{\mu_\sigma=1}^{k_\sigma} = \sum_{(+k_\sigma)}^\omega \sum_{\mu=\sigma}^\omega \sum_{\substack{\mu_a \leq k_a, \\ \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma}}^\mu, \quad \omega > \sigma,$$

la forme précédente devient

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = & \sum_{(+k_\sigma)}^{\omega} \sum_{(k_1 k_2 \dots k_\sigma)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\sigma)} \sum_{\lambda_1=1}^{\mu_1} \sum_{\lambda_2=1}^{\mu_2} \dots \sum_{\lambda_\sigma=1}^{\mu_\sigma} \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \sum_{(+\mu_\sigma)}^{\mu} \\ & \times \bar{X}_{i(\lambda_1)}^{j_1} \bar{X}_{i(\lambda_2)}^{j_2} \dots \bar{X}_{i(\lambda_\sigma)}^{j_\sigma} \bar{P}_{\alpha(\mu_1)}^{i(\lambda_1)} \bar{P}_{\alpha(\mu_2)}^{i(\lambda_2)} \dots \bar{P}_{\alpha(\mu_\sigma)}^{i(\lambda_\sigma)} \\ & \times \bar{A}_{(\beta(k_1))}^{\alpha(\mu_1)} \bar{A}_{\beta(k_2)}^{\alpha(\mu_2)} \dots \bar{A}_{\beta(k_\sigma)}^{\alpha(\mu_\sigma)} \end{aligned}$$

et selon le théorème 9.4, on a

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = & \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \sum_{(+\mu_\sigma)}^{\mu} \sum_{\lambda_1=1}^{\mu_1} \sum_{\lambda_2=1}^{\mu_2} \dots \sum_{\lambda_\sigma=1}^{\mu_\sigma} \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\sigma)}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma)} \bar{X}_{i(\lambda_1)}^{j_1} \bar{X}_{i(\lambda_2)}^{j_2} \dots \bar{X}_{i(\lambda_\sigma)}^{j_\sigma} \\ & \times \bar{P}_{(\alpha(\mu_1))}^{i(\lambda_1)} \bar{P}_{\alpha(\mu_2)}^{i(\lambda_2)} \dots \bar{P}_{\alpha(\mu_\sigma)}^{i(\lambda_\sigma)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}. \end{aligned}$$

De plus, on a la relation

$$\sum_{(+\mu_\sigma)}^{\mu} \sum_{\lambda_1=1}^{\mu_1} \sum_{\lambda_2=1}^{\mu_2} \dots \sum_{\lambda_\sigma=1}^{\mu_\sigma} = \sum_{(+\mu_\sigma)}^{\mu} \sum_{\lambda=\sigma}^{\mu} \sum_{(+\lambda_\sigma)}^{\lambda}, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\sigma,$$

et en utilisant le théorème 9.5 la forme précédente peut s'écrire

$$\bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \sum_{\lambda=\sigma}^{\mu} \sum_{(+\lambda_\sigma)}^{\lambda} \sum_{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\sigma)}^{(\ell_1 \ell_2 \dots \ell_\sigma)} \bar{X}_{i(\lambda_1)}^{j_1} \bar{X}_{i(\lambda_2)}^{j_2} \dots \bar{X}_{i(\lambda_\sigma)}^{j_\sigma} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}.$$

Finalement, d'après la définition de $X_{i(\lambda)}^{j(\sigma)}$, on est conduit à

$$\bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \sum_{\lambda=\sigma}^{\mu} \bar{X}_{i(\lambda)}^{j(\sigma)} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}.$$

C. Q. F. D.

§ 10. Lois de composition entre deux jets semi-holonomes (la suite).

À § 2, nous avons considéré la loi de composition externe à gauche d'un élément X de $\bar{L}_{np}^r$ par un élément Y de $\bar{L}_{mn}^r$ et celle à droite par un élément Z de $\bar{L}_{pq}^r$. En utilisant chaque pseudo-représentant tensoriel

$$\begin{aligned} X: \quad x^i &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^i u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_k}, \\ Y: \quad x^j &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}^j x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_k}, \\ Z: \quad u^\alpha &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \beta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^\alpha u^{\beta_1} u^{\beta_2} \dots u^{\beta_k}, \end{aligned}$$

nous avons eu respectivement les relations (2.1), (2.2) entre ses coefficients.

En vertu de la définition du produit semi-holonome d'ordre supérieur, les

formes (2. 1), (2. 3) s'écrivent

$$(10. 1) \quad a_{\alpha(k)}^j = \sum_{\lambda=1}^k \alpha_{i(\lambda)}^j a_{\alpha(k)}^{i(\lambda)},$$

$$(10. 2) \quad a_{\beta(k)}^i = \sum_{\lambda=1}^k a_{\alpha(\lambda)}^i \beta_{\beta(k)}^{\alpha(\lambda)}.$$

Lorsque nous avons considéré deux compositions externes en même temps, en désignant $Y \cdot X \cdot Z \in \bar{L}_{mq}^r$ par la forme

$$x^j = \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} a_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}^j u^{\beta_1} u^{\beta_2} \dots u^{\beta_k},$$

la relation (2. 3) était obtenue.

Maintenant, nous pouvons davantage simplifier la forme (2. 3), c'est-à-dire, d'après le théorème 6.1, la forme (2. 3) devient

$$(10. 3) \quad a_{\beta(k)}^j = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\lambda=1}^{\mu} \alpha_{i(\lambda)}^j a_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \beta_{\beta(k)}^{\alpha(\mu)}.$$

D'ailleurs, lorsque nous considérons le produit semi-holonyme d'ordre supérieur de $a_{\beta(k)}^j$, on peut obtenir la forme linéaire suivante :

$$(10. 4) \quad a_{\beta(k)}^{j(v)} = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\lambda=1}^{\mu} \alpha_{i(\lambda)}^{j(v)} a_{\alpha(\mu)}^{i(\lambda)} \beta_{\beta(k)}^{\alpha(\mu)},$$

en utilisant le théorème 6.2. Il en résulte que

Théorème 10. 1. *Lorsque, en utilisant la composition externe à droite et en même temps celle à gauche, la loi de composition externe d'un élément X de $\bar{L}_{np}^r$ par un élément (Y, Z) de $\bar{L}_{mn}^r \times \bar{L}_{pq}^r$*

$$\bar{L}_{np}^r \rightarrow \bar{L}_{mq}^r : X \rightarrow Y \cdot X \cdot Z$$

peut être définie, la loi de changement des coefficients du pseudo-représentant tensoriel du jet semi-holonyme $a_{\alpha(\mu)}^i \rightarrow a_{\beta(k)}^j$ s'exprime par la forme (10. 3) et celle de son produit semi-holonyme d'ordre supérieur par la forme linéaire (10. 4).

Errata. Dans la démonstration de proposition 2.2 à § 2 de la partie I, il faut corriger quelques endroits comme suit : à la 1^{ère} ligne de p. 199 “en substituant x^i de (2. 6) par (2. 7)” → “d'après la relation (2. 1)”; dans la forme (2. 8) et celle précédente “ $\frac{3}{2} a_{i_1 i_2}^j (\bar{a}_{k_1 k_2}^{i_1} \bar{a}_{k_3}^{i_2} + \bar{a}_{k_1}^{i_1} \bar{a}_{k_2 k_3}^{i_2})$ ” → “ $a_{i_1 i_2}^j (\bar{a}_{k_1 k_2}^{i_1} \bar{a}_{k_3}^{i_2} + \bar{a}_{k_1}^{i_1} \bar{a}_{k_2 k_3}^{i_2} + \bar{a}_{k_1 k_3}^{i_1} \bar{a}_{k_2}^{i_2})$ ”.

**§ 11. Vecteurs non-symétriques (semi-holonomes)
d'ordre supérieur.**

À § 2 et § 10, nous avons discuté deux compositions externes d'un jet semi-holonome $X \in \bar{L}_{np}^r$, par les autres jets semi-holonomes $Y \in \bar{L}_{mn}^r$, $Z \in \bar{L}_{pq}^r$. Maintenant, dans ce paragraphe § 11, en posant $m=n$, $p=q$, nous regardons le jet Y comme exprimant l'extension semi-holonome d'une transformation d'ordre supérieur dans V_n et aussi le jet Z celle dans R_p . De plus, au lieu de (10. 1) nous désignons les pseudo-représentants tensoriels par

$$X: x^i = \sum_{\lambda=1}^r \frac{1}{\lambda!} \bar{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda}^i u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_\lambda}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$Y: x^j = \sum_{\lambda=1}^r \frac{1}{\lambda!} \bar{X}_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}^j x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_\lambda}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p,$$

$$Z: u^\alpha = \sum_{\lambda=1}^r \frac{1}{\lambda!} u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda}^\alpha u^{\beta_1} u^{\beta_2} \dots u^{\beta_\lambda},$$

où $\bar{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda}^i$, $\bar{X}_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}^j$, $u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda}^\alpha$ ne sont pas toujours symétriques par rapport aux indices inférieurs et ils ont aussi les propriétés déjà énoncées de § 3 à § 9. Donc, quant à $\bar{X}_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}^j$ nous avons les mêmes propriétés que celles de $u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda}^\alpha$. Par conséquent, il en résulte le

Théorème 11. 1. *Nous avons les mêmes formules concernant $\bar{X}_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}^j \equiv \bar{X}_{i(\lambda)}^j$ que celles concernant $u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\lambda}^\alpha$. De même, quant au produit semi-holonome d'ordre supérieur $\bar{X}_{i(\lambda)}^{j(\nu)}$, nous avons les mêmes théorèmes que ceux de $u_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)}$. Autrement dit, nous avons les théorèmes de $\bar{X}_{i(\lambda)}^j$, $\bar{X}_{i(\lambda)}^{j(\nu)}$ qui correspondent aux théorèmes 4.1~4.5, 7.1~7.5 et aux corollaires 4.1, 4.2.*

De même que la discussion à § 5, lorsque nous considérons deux extensions semi-holonomes de transformation d'ordre supérieur $x^i \rightarrow x^j$, $x^j \rightarrow x^h$, la forme suivante, qui correspond à (5. 2),

$$(11. 1) \quad \sum_{\lambda=\nu}^{\mu} \bar{X}_{j(\lambda)}^{h(\nu)} \bar{X}_{i(\mu)}^{j(\lambda)} = \bar{X}_{i(\mu)}^{h(\nu)}$$

est immédiatement obtenue. D'après (6. 4), en utilisant la même considération qu'à § 6, on a

$$(11. 2) \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^j = \sum_{\lambda=1}^{\omega} \bar{X}_{i(\lambda)}^j \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\lambda)},$$

$$(11. 3) \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^h = \sum_{\lambda=1}^{\omega} \bar{X}_{j(\lambda)}^h \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\lambda)},$$

d'où, les relations linéaires suivantes du produit semi-holonome d'ordre supérieur

sont établies :

$$(11.4) \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\nu)} = \sum_{\mu=\nu}^{\omega} \bar{X}_{i(\mu)}^{j(\nu)} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\mu)},$$

$$(11.5) \quad \bar{P}_{\beta(\omega)}^{h(\sigma)} = \sum_{\lambda=\sigma}^{\omega} \bar{X}_{j(\lambda)}^{h(\sigma)} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\lambda)}.$$

Par conséquent, en substituant (11.4) dans le terme à droite de (11.5), nous avons

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{h(\sigma)} &= \sum_{\lambda=\sigma}^{\omega} \bar{X}_{j(\lambda)}^{h(\sigma)} \sum_{\mu=\lambda}^{\omega} \bar{X}_{i(\mu)}^{j(\lambda)} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\mu)} \\ (11.6) \quad &= \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \left(\sum_{\lambda=\sigma}^{\mu} \bar{X}_{j(\lambda)}^{h(\sigma)} \bar{X}_{i(\mu)}^{j(\lambda)} \right) \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\mu)} \\ &= \sum_{\mu=\sigma}^{\omega} \bar{X}_{i(\mu)}^{h(\sigma)} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\mu)}. \end{aligned}$$

Ici, en posant $\sigma=1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\beta(\omega)}^h &= \sum_{\mu=1}^{\omega} \left(\sum_{\lambda=1}^{\mu} \bar{X}_{j(\lambda)}^h \bar{X}_{i(\mu)}^{j(\lambda)} \right) \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\mu)} \\ (11.7) \quad &= \sum_{\mu=1}^{\omega} \bar{X}_{i(\mu)}^h \bar{P}_{\beta(\omega)}^{i(\mu)}. \end{aligned}$$

Prochainement, en considérant l'extension semi-holonome de transformation d'ordre supérieur, $x^i \rightarrow x^j$ et en même temps la paramètre-transformation non-symétrique d'ordre supérieur, $u^\alpha \rightarrow u^\beta$, d'après le théorème 6.1, nous avons la forme suivante

$$\bar{P}_{\beta(\omega)}^j = \sum_{\nu=1}^{\omega} \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{X}_{i(\mu)}^j \bar{P}_{\alpha(\nu)}^{i(\mu)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\nu)}.$$

Lorsque l'autre forme pour $x^j \rightarrow x^h$, $u^\beta \rightarrow u^r$ s'écrit

$$\bar{P}_{r(\omega)}^h = \sum_{\nu=1}^{\omega} \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{X}_{j(\mu)}^h \bar{P}_{\beta(\nu)}^{j(\mu)} \bar{A}_{r(\omega)}^{\beta(\nu)},$$

la relation suivante est obtenue,

$$\bar{P}_{r(\omega)}^h = \sum_{\nu=1}^{\omega} \sum_{\mu=1}^{\nu} \bar{X}_{i(\mu)}^h \bar{P}_{\alpha(\nu)}^{i(\mu)} \bar{A}_{r(\omega)}^{\alpha(\nu)},$$

c'est-à-dire, le composé de $(x^i \rightarrow x^j, u^\alpha \rightarrow u^\beta)$, $(x^j \rightarrow x^h, u^\beta \rightarrow u^r)$ peut être défini et la loi de composition est associative.

Nous supposons que les jets semi-holonomes concernant $(x^i \rightarrow x^j, u^\alpha \rightarrow u^\beta)$ soient inversibles. Alors, nous considérons la forme

$$(11.8) \quad \delta_{i_1}^{h_1} \delta_{i_2}^{h_2} \dots \delta_{i_\nu}^{h_\nu} \delta_\mu^\nu \equiv \bar{\delta}_{i(\mu)}^{h(\nu)} = \sum_{\lambda=\nu}^{\mu} \bar{X}_{j(\lambda)}^{h(\nu)} \bar{X}_{i(\mu)}^{j(\lambda)}$$

qui correspond à la première forme à p. 210 de la partie I. D'après (11.8), on a $|X_{\bar{i}}^j| \neq 0$ et la matrice inverse peut être considérée. Et, de même que la discussion à la proposition 2.2 de p. 198, il est possible de considérer le jet semi-holonome inverse, c'est-à-dire, en désignant les coefficients inverses de $\bar{X}_{\bar{i}(\mu)}^{j(\lambda)}$ par $\bar{X}_{j(\lambda)}^{\bar{i}(\mu)}$, pour obtenir la relation inverse de

$$\bar{P}_{\beta(\omega)}^j = \sum_{\mu=1}^{\omega} \sum_{\nu=1}^{\mu} \bar{X}_{\bar{i}(\nu)}^j \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\bar{i}(\nu)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)},$$

nous considérons, d'abord, le produit semi-holonome d'ordre supérieur

$$\bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = \sum_{\mu=1}^{\omega} \sum_{\nu=\sigma}^{\mu} \bar{X}_{\bar{i}(\nu)}^{j(\sigma)} \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\bar{i}(\nu)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}$$

et puis, d'après les coefficients inverses de $\bar{X}_{\bar{i}(\nu)}^{j(\sigma)}$ et de $\bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}$, on a

$$\sum_{\omega=1}^{\mu} \sum_{\sigma=\nu}^{\omega} \bar{X}_{\bar{i}(\nu)}^{j(\sigma)} \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} \bar{A}_{\alpha(\mu)}^{\beta(\omega)} = \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\bar{i}(\nu)},$$

finallement, en posant $\nu=1$, la relation inverse

$$\sum_{\omega=1}^{\mu} \sum_{\sigma=1}^{\omega} \bar{X}_{\bar{i}(\sigma)}^j \bar{P}_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} \bar{A}_{\alpha(\mu)}^{\beta(\omega)} = \bar{P}_{\alpha(\mu)}^{\bar{i}}$$

peut être obtenue.

Maintenant, nous considérons $n \sum_{a=1}^r p^a$ fonctions $V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\lambda}^{\bar{i}}(x(u)) \equiv V_{\alpha(\lambda)}^{\bar{i}}$, $\lambda=1, 2, \dots, r$, définies par les coordonnées locaux $x^{\bar{i}}$.¹⁶⁾ (pas nécessairement symétriques par rapport aux indices inférieurs) Lorsque ces fonctions se transforment contre l'extension semi-holonome de transformation d'ordre supérieur $x^{\bar{i}} \rightarrow x^{\bar{j}}$ et en même temps la paramètre-transformation non-symétrique d'ordre supérieur, $u^\alpha \rightarrow u^\beta$, selon la loi

$$V_{\beta(\mu)}^j = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \sum_{\nu=1}^{\lambda} \bar{X}_{\bar{i}(\nu)}^j V_{\alpha(\lambda)}^{\bar{i}(\nu)} \bar{A}_{\beta(\mu)}^{\alpha(\lambda)},$$

l'ensemble de ces $n \sum_{a=1}^r p^a$ valeurs $V_{\alpha(\lambda)}^{\bar{i}}$ pour chaque système de valeur de u^α sera appelé un p^r -vecteur non-symétrique (semi-holonome) d'ordre supérieur. L'ensemble des $\bar{P}_{\beta(\mu)}^j$ est un exemple de p^r -vecteur non-symétrique d'ordre supérieur.

En général, nous considérons $\sum_{b=1}^r \sum_{a=b}^r n^b p^a$ fonctions $V_{\alpha(\mu)}^{\bar{i}(\lambda)}(x(u))$, $\lambda, \mu=1, 2, \dots, r$, $\lambda \leq \mu$ qui se transforment contre l'extension semi-holonome de transformation d'ordre supérieur $x^{\bar{i}} \rightarrow x^{\bar{j}}$ et en même temps la paramètre-transformation d'ordre supérieur, $u^\alpha \rightarrow u^\beta$, de la loi

16) Voir, la définition de E-vecteur (symétrique) dans l'article [9] p. 29.

$$V_{\beta(\omega)}^{j(\sigma)} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n \bar{X}_{i(\nu)}^{j(\sigma)} V_{\alpha(\mu)}^{i(\nu)} \bar{A}_{\beta(\omega)}^{\alpha(\mu)}.$$

L'ensemble de ces fonctions sera appelé *un p^r -quasi-vecteur¹⁷⁾ non-symétrique (semi-holonyme) d'ordre supérieur*. Naturellement, le produit semi-holonyme d'ordre supérieur $\bar{P}_{\alpha(\mu)}^{i(\nu)}$ est un exemple de p^r -quasi-vecteur non-symétrique d'ordre supérieur.

Références

- [1] CH. EHRESMANN: Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloque Intern. Géométrie Différentielle de Strasbourg, C. N. R. S., (1953), 97-110.
- [2] CH. EHRESMANN: Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, C. R. Acad. Sci. Paris, 239 (1954), 1762-1764.
- [3] CH. EHRESMANN: Applications de la notion de jet non holonyme. C. R. Acad. Sci. Paris, 240 (1955), 397-399.
- [4] CH. EHRESMANN: Les prolongements d'un espace fibré différentiable, C. R. Acad. Sci. Paris, 240 (1955), 1755-1757.
- [5] CH. EHRESMANN: Les connexions infinitésimales d'ordre supérieur, Atti V Congresso Unione Mat. Italiana, Pavia-Torino (1956), 344-346.
- [6] CH. EHRESMANN: Sur les pseudo-groupes de Lie de type fini, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 360-362.
- [7] A. KAWAGUCHI: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV. Erweiterung des verallgemeinerten Rheonomtransformationen von Flächenelementen höherer Ordnung und R_K -Extensoren, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 7 (1960), 256-276.
- [8] A. KAWAGUCHI: Eine Verallgemeinerung des Begriffs von Vektoren und ein nicht-lineares absolutes Differential, Collected papers for 70th Anniversary of Nihon Univ., 3 (1960), 27-31.
- [9] A. KAWAGUCHI: On the vectors of higher order and the extended affine connections, Annali di Mat. pura ed applicata (IV), 55 (1961), 105-118.
- [10] M. KAWAGUCHI: Une généralisation du calcul des jets et quelques prolongements généralisés de variétés différentiables, Tôhoku Math. Jour. Series II, 13 (1961), 329-370.
- [11] M. KAWAGUCHI: Une considération sur les représentants tensoriels de jets infinitésimaux, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 75-77.
- [12] M. KAWAGUCHI: Sur le calcul des jets au berceau I, R. A. A. G. (Research Association of Applied Geometry, Tokyo) Newsletter, No. 45 (1961), 3-5.
- [13] M. KAWAGUCHI: Jets semi-holonomes et tenseurs non symétriques d'ordre supérieur I, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Series I, 16 (1962), 193-213.

17) Dans l'article [10], p. 111, on peut trouver la définition de m^p -quasi-vecteur (symétrique).

- [14] M. KAWAGUCHI: Sur le calcul des jets au berceau II, R. A. A. G. Newsletter, No. 53 (1963), 3-7.
- [15] M. KAWAGUCHI: On semi-holonomic jets, R. A. A. G. Newsletter, No. 55 (1963), 3-7.

Faculté des Sciences,
Université de Hokkaido
Sapporo, Japan

(Received July 16, 1963)