Koendlich erzeugte Moduln und Kogeneratoren

von Takeshi ONODERA

Einleitung

In jüngster Zeit sind in mehreren Arbeiten Kogeneratoren, insbesondere injektive Kogeneratoren untersucht worden. Diese Überlegungen sollen hier mit Hilfe des Begriff des koendlich erzeugten Moduls weitergeführt werden. Dieser Begriff ist mir unter der Bezeichnung „durchschnittendlicher Modul" aus einem Vortrag von F. Kasch aus dem Jahr 1966 bekannt. Als „finitely embedded module" wird er dann in einer Arbeit von P. Vámos [20] untersucht. Wir schließe uns in der Bezeichnung an J. P. Jans an, die dieser 1966 eingeführt hat [6].

Ein R-Linksmodul ${}_RM$ heißt koendlich erzeugt, wenn zu jeder nichtleeren Menge $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ von Untermoduln N_α von M mit $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha=0$ jeweils endlich viele $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ mit $\bigcap_{i=1}^{n} N_{\alpha_i}=0$ existieren. Als wichtige Charakterisierung wir zunächst gezeigt, daß ein R-Linksmodul ${}_RM$ genau dann koendlich erzeugt ist, wenn der Sockel von ${}_RM$ endlich erzeugt und großer ($=$wesentlicher) Untremodul von ${}_RM$ ist (Satz 1). Diese Kennzeichnung und weitere grundlegende Eigenschaften von koendlich erzeugten Moduln werden in Abschnitt 1 angegeben.

In Abschnitt 2 wird bewiesen, daß für einen projektiven Generator ${}_RM$ ein Verbandsisomorphismus zwischen dem Verband der Rechtsideale von R und dem der Untermoduln von M_S besteht, wobei S der Endomorphismenring von ${}_RM$ ist. Dieses Resultat war bisher nur für einen endlich erzeugten projektiven Generator ($=$Progenerator) ${}_RM$ bekannt.

In Abschnitt 3 beweisen wir ein Dichtesatz, der als Spezialfall den Jacobsonschen Dichtesatz über vollständig reduzible Moduln enthält.

Zum Hauptsatz der Arbeit (Satz 12), den wir hier in abgeschwächter Form formulieren wollen, kommen wir dann im 4 Abschnitt.

Sei ${}_RQ_S$ ein R-S-Modul mit folgenden Eigenschaften:

(1) ${}_RQ$ und Q_S sind Kogeneratoren

(2) $S=End({}_RQ)$ und $R=End(Q_S)$

(3) ${}_RR$ und S_S sind koendlich erzeugt.

Dann gilt: Ein R-Linksmodul ${}_RM$ ist dann und nur dann endlich bzw. koendlich erzeugt, wenn $M_S^*:=Hom({}_RM, {}_RQ)_S$ koendlich bzw. endlich erzeugt ist. In Anschluß an diesen Satz folgen Anwendungen auf Quasi-Frobenius-Modul, *QF*–3 Ringe und Quasi-Frobenius-Erweiterungen.

Außer im 3 Abschnitt wird vorausgesetzt, daß alle Ringe ein Einselement besitzen und alle Moduln unitär sind.

1. Koendlich erzeugte Moduln, kolokale Moduln

Sei R ein Ring mit Einselement.

DEFINITION 1. *Ein R-Linksmodul* $_RM$ *heißt koendlich erzeugt, wenn zu jeder nichtleeren Menge* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *von Untermoduln* N_α *von* M *mit* $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha=0$ *jeweils endlich viele* $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ *mit* $\bigcap_{i=1}^{n} N_{\alpha_i}=0$ *existieren.*

DEFINITION 2. *Ein R-Linksmodul* $_RM$ *heißt kolokal, wenn zu jeder nichtleeren Menge* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *von Untermoduln* N_α *von* M *mit* $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha=0$ *mindestens ein* α *mit* $N_\alpha=0$ *existiert.*

PROPOSITION 1. *Jeder kolokal Modul ist koendlich erzeugt.*

PROPOSITION 2. *Jeder Untermodul eines koendlich erzugten* (*kolokalen*) *Moduls ist koendlich erzeugt* (*kolokal*).

Beweise von Proposition 1 und 2 sind trivial.

PROPOSITION 3. *Sei* $_RM$ *koendlich erzeugt* (*kolokal*). *Dann ist die injektive Hulle* $_RE(M)$ *von* $_RM$ *koendlich erzeugt* (*kolokal*).

BEWEIS. Sei $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine Menge von Untermoduln von $_RE(M)$, so daß $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha=0$. Dann gilt $(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)\cap M=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(N_\alpha\cap M)=0$. Da $_RM$ koendlich erzeugt (kolokal) ist, gibt es $N_{\alpha_1},\cdots,N_{\alpha_n}$ (mindestens einen N_α) mit $\bigcap_{i=1}^{n}(N_{\alpha_i}\cap M)=0$ (mit $N_\alpha\cap M=0$). Da $_RM$ groß in $_RE(M)$ ist, folgt daraus $\bigcap_{i=1}^{n} N_{\alpha_i}=0$ $(N_\alpha=0)$.

SATZ 1. *Für einen R-Linksmodul* $_RM$ *sind folgende Aussagen äquivalent*:

(1) $_RM$ *ist koendlich erzeugt*;

(2) *Der Sockel von* $_RM$ *ist endlich erzeugt und groß in* $_RM$;

(3) $_RM$ *ist isomorph zu einen Untermodul von* $\bigoplus_{i=1}^{n} E(\mathfrak{m}_i)$, *wobei* $_R\mathfrak{m}_i$ $(i=1,\cdots,n)$ *einfache R-Linksmodul sind und* $E(\mathfrak{m}_i)$ *die injektive Hülle von* $_R\mathfrak{m}_i$ *sei.* (*Siehe auch* [20], *Lemma* 1).

BEWEIS. (1)$\Rightarrow$(2), (3): Da $_RM$ koendlich erzeugt ist, ist der Sockel von $_RM$ endlich erzeugt. Sei $_RK=\bigoplus E(\mathfrak{m}_\alpha)$, wobei $\mathfrak{m}_\alpha$ ein Repräsentantensystem

1) Der Autor möchte F. Kasch herzlich dafür danken, daß er viele nützliche Bemerkungen und Verbesserungen zu dieser Arbeit gemacht hat.

für die Isomorphieklassen von einfachen R-Linksmoduln durchläuft. Da ${}_RK$ ein Kogenerator[2] ist, gilt $\bigcap_{f\in Hom_R(M,K)} Ker\, f=0$. Daraus folgt, daß es endlich viele $f_1,\cdots,f_n$ gibt, so daß $\bigcap_{i=1}^{n} Ker\, f_i=0$. Folglich ist ${}_RM$ isomorph zu einen Untermodul von $K^{(n)}$, wobei $K^{(n)}$ die direkte Summe von n-Kopien von ${}_RK$ sei. Da der Sockel von $K^{(n)}$ groß in $K^{(n)}$ ist, ist der Sockel von ${}_RM$ auch groß in ${}_RM$.

(2)$\Rightarrow$(1): Seien $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine Menge von Untermoduln von ${}_RM$, so daß $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha=0$ und S_α der Sockel von N_α ist. Dann gilt $\bigcap S_\alpha=0$. Sei Γ die Menge von allen Untermoduln von ${}_RM$, die als Durchschnitt von endlich vielen S_α darstellbar sind. Da der Sockel von ${}_RM$ endlich erzeugt und folglich artinsch ist, gibt es ein minimales Element $E=S_{\alpha_1}\cap\cdots\cap S_{\alpha_n}$ in Γ. Dann gilt für beliebiges S_α $F\cap S_\alpha=F$ und daraus folgt, daß $F\subseteq\bigcap_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha=0$, das heißt, $F=0$. Da S_{α_i} groß in N_{α_i}, gilt dann $\bigcap_{i=1}^{n} N_{\alpha_i}=0$. Folgliche ist ${}_RM$ koendlich erzeugt.

(3)$\Rightarrow$(2): ist klar, da der Sockel von $\bigoplus_{i=1}^{n} E(\mathfrak{m}_i)$ endlich erzeugt und groß in $\bigoplus_{i=1}^{n} E(\mathfrak{m}_i)$ ist.

SATZ 1′. *Für einen R-Linksmodul ${}_RM$ sind folgende Aussagen äquivalent*:

(1) ${}_RM$ *ist kolokal*;

(2) ${}_RM$ enthält *einen kleinsten Untermodul* ($\neq 0$);

(3) ${}_RM$ *ist isomorph zu einen Untermodul von* $E(\mathfrak{m})$, *wobei* ${}_R\mathfrak{m}$ *ein einfacher R-Linksmodul und* $E(\mathfrak{m})$ *die injektive Hülle von* ${}_R\mathfrak{m}$ *sind.*

KOROLLAR zu SATZ 1. *Jede endlich direkte Summe von koendlich erzeugten Modul ist koendlich erzeugt.*

PROPOSITION 4. *Seien ${}_RM$ ein R-Linksmodul und ${}_RN$ ein Untermodul von ${}_RM$, so daß N und M/N koendlich erzeugt sind. Dann ist ${}_RM$ koendlich erzeugt* (*Siehe* [20], *Proposition* 3).

BEWEIS. Seien ${}_RE(N)$ die injektive Hülle von ${}_RN$ und φ ein R-Homomorphismus von ${}_RM$ in ${}_RE(N)$, so daß $\varphi(n)=n$ für alle n in N. Sei ϕ der R-Homomorphismus von ${}_RM$ in $E(N)\oplus M/N$, der folgendenmaßen definiert wird:

$$\phi(m)=\varphi(m)\oplus\bar{m}\,,\qquad m\in{}_RM\,.$$

Dann ist ϕ ein Monomorphismus. Da $E(N)\oplus M/N$ koendlich erzeugt

2) Ein R-Linksmodul ${}_RQ$ heißt Kogenerator, wenn für jeden R-Linksmodul ${}_RM$ $\bigcap_{f\in Hom_R(M,Q)} Ker f=0$ gilt. (Siehe [15]).

ist, folgt nun, daß ${}_RM$ koendlich erzeugt ist.

Satz 2 (F. Kasch). *Ein R-Linksmodul* ${}_RM$ *ist dann und nur dann artinsch, wenn jedes epimorphe Bild von* ${}_RM$ *koendlich erzeugt ist.* (*Siehe* [20], *Proposition* 2*).

Beweis. „Notwendig": Sei ${}_RM$ artinsch. Dann ist jedes epimorphe Bild ${}_RM'$ von ${}_RM$ artinsch. Daraus folgt nach Satz 1, daß ${}_RM'$ koendlich erzeugt ist.

„Hinreichend": Sei ${}_RM$ ein R-Linksmodul, so daß jedes epimorphe Bild von ${}_RM$ koendlich erzeugt ist. Seien $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Kette von Untermoduln von ${}_RM$ und $N = \bigcap_i M_i$. Dann ist nach Voraussetzung M/N koendlich erzeugt. Da $\bigcap_i M_i/N = 0$ ist, folgt, daß es endlich viele $i_1, \cdots, i_n$ gibt so daß $\bigcap_{j=1}^{n} M_{i_j} = N$. Dann gilt $M_{i_0} = M_{i_0+1} = \cdots$, wobei $i_0 = Max.(i_1, \cdots, i_n)$. Folglich ist ${}_RM$ artinsch.

Proposition 5. *Für einen R-Linksmodul* ${}_RM$ *sind folgende Aussagen äquivalent*:

(1) ${}_RM$ *ist koendlich erzeugt und* $Ra(M)$[3] $=0$;

(2) ${}_RM$ *ist halbeinfach artinsch.*

Beweis. (2)$\Rightarrow$(1) ist klar. (1)$\Rightarrow$(2): Nach Voraussetzung gilt $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha = 0$, wobei M_α alle maximale Untermoduln von M_R durchläuft. Da ${}_RM$ koendlich erzeugt ist, gibt es endlich viele $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, so daß $\bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} = 0$. Daraus folgt, daß ${}_RM$ isomorph zu einen Untermodul von $\bigoplus_{i=1}^{n} M/M_{\alpha_i}$ ist, und folglich ist ${}_RM$ halbeinfach artinsch.

Proposition 5′. *Für einen R-Linksmodul* ${}_RM$ *sind folgende Aussagen äquivalent*:

(1) ${}_RM$ *ist kolokal und* $Ra(M) = 0$;

(2) ${}_RM$ *ist einfach.*

Definition 3 (K. Kato [10]). *Ein R-Linksmodul* ${}_RM$ *heißt endlich treu, wenn* ${}_RR$ *isomorph zu einen Untermodul einer endlichen direkte Summe* ${}_RM^{(n)}$ *von Kopien von* ${}_RM$ *ist.*

Proposition 6. *Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent*:

(1) ${}_RR$ *ist koendlich erzeugt*;

(2) *Jeder treue R-Linksmodul ist endlich treu.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2). Seien ${}_RR$ koendlich erzeugt und ${}_RM$ ein treuer R-

3) $Ra(M)$=Radikal von ${}_RM$ ist die Durchschnitt von allen maximalen Untermoduln von ${}_RM$.

Linksmodul. Für ein Element x von ${}_RM$ bezeichnen wir mit φ_x den R-Homomorphismus von ${}_RR$ nach ${}_R$M, der folgendenmaßen definiert wird:

$$\varphi_x(r) := rx, \quad r \in R.$$

Da ${}_RM$ treu ist, gilt dann $\bigcap_{x \in M} Ker\,\varphi_x = 0$ und daraus folgt, daß es endliche viele $x_1, \cdots, x_n$ gibt, so daß $\bigcap_{i=1}^{n} Ker\,\varphi_{x_i} = 0$. Folglich ist die Abbildung: $R \ni r \to (rx_1, \cdots, rx_n) \in M^{(n)}$ ein Monomorphismus und ${}_RM$ ist endlich treu.

$(2) \Rightarrow (1)$: Da der Kogenerator ${}_RK = \oplus E(\mathfrak{m}_\alpha)$ treu ist, ist ${}_RK$ endlich treu. Da R ein 1-Element besitzt und isomorph zu einen Untermodul von $K^{(n)}$ ist, ist ${}_RR$ koendlich erzeugt.

Satz 3. *Für eien Ring R sind folgende Aussagen aquivalent*:

(1) ${}_RR$ *ist koendlich erzeugt und injektiv*;
(2) ${}_RR$ *ist koendlich erzeugt und Kogenerator*;
(3) ${}_RR$ *ist Kogenerator und* R_R *koendlich erzeugt*;
(4) ${}_RR$ *ist injektiver Kogenerator*;
(5) *Jeder treuer R-Linksmodul ist Generator.*

Beweis. Unter der Voraussetzung (1) ist ${}_RR$ direkte Summe von endlich viele injektive direkt unzerlegbare Linksideal von R, von denen jedes einen kleinste Untermodul ($\neq 0$) enthält. Die Äquivalent von (1), (4) und (5) und die Behauptungen $(1) \Rightarrow (2)$, (3) folgen dann aus ([2] Theorem6, Theorem 7; [9] Theorem 7).

$(3) \Rightarrow (1)$: Seien $\mathfrak{l}$ ein maximales Linksideal von R und $\mathfrak{r}$ ($\neq 0$) ein minimales Rechtsideal von R, das in $r(\mathfrak{l})$, dem Rechtsannulator von $\mathfrak{l}$ in R enthalten ist. Da der Linksannulator $l(\mathfrak{r})$ von $\mathfrak{r}$ in R $l(r(\mathfrak{l})) = \mathfrak{l}$ enthält und nicht gleich R ist, gilt $l(\mathfrak{r}) = \mathfrak{l}$. Sei N das Radikal von R, das heißt, $N = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{l}_\alpha$, wobei $\mathfrak{l}_\alpha$ alle maximale Linksideale von R durchläuft. Sei $\mathfrak{r}_\alpha$ ein minimales Rechtsideal von R, das in $r(\mathfrak{l}_\alpha)$ enthalten ist. Dann gilt wegen $\mathfrak{l}_\alpha = l(\mathfrak{r}_\alpha)$ $N = \bigcap_\alpha l(\mathfrak{r}_\alpha) = l(\sum_\alpha \mathfrak{r}_\alpha)$. Nach Voraussetzung gibt es endlich viele $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ so daß $\sum_\alpha \mathfrak{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_{\alpha_i}$. Daraus folgt $N = l(\sum_i \mathfrak{r}_{\alpha_i}) = \bigcap_i l(\mathfrak{r}_{\alpha_i}) = \bigcap_i \mathfrak{l}_{\alpha_i}$, das heißt, N ist als Durchschnitt von endlich vielen maximalen Linksideale von R darstellbar. Daraus folgt, daß R/N halbeinfach artinsch ist. Unsere Behauptung folgt dann aus ([4], 4.1 Theorem).

$(2) \Rightarrow (1)$: Da es dann nur endlich viele Klassen von nicht isomorphen einfachen R-Linksmodul gibt, folgt die Behauptung aus den Beweis von ([4], 4.1 Theorem).

2. Projektive Generatoren

Lemma 1. *Sei $_RM$ Generator. Dann für ein beliebiges Rechtsideal $\mathfrak{r}$ von R: $\mathfrak{r}=\{a\in R;\ aM\subseteq\mathfrak{r}M\}$.*

Beweis. Es ist klar, daß $\mathfrak{r}\subseteq\{a\in R;\ aM\subseteq\mathfrak{r}M\}$. Seien $M^*:=Hom_R(M, R)$ und $M^*(M)=\{\sum_{end.Summe} f_i(x_i);\ f_i\in M^*,\ x_i\in M\}$. Da $_RM$ Generator ist, gilt $M^*(M)=R$. Aus $aM\subseteq\mathfrak{r}M$ folgt dann $aM^*(M)\subseteq\mathfrak{r}M^*(M)=\mathfrak{r}R=\mathfrak{r}$, also $a\in\mathfrak{r}$. Daraus folgt wie behauptet $\mathfrak{r}=\{a\in R;\ aM\subseteq\mathfrak{r}M\}$.

Lemma 2. *Sei $_RM$ projektiv und sei S der Endomorphismenring von $_RM$. Für einen beliebigen Untermodul $\mathfrak{U}$ des S-Rechtsmodul M_S sei $M^*(\mathfrak{U})=\{\sum_{end.Summe} g_i(u_i);\ g_i\in M^*,\ u_i\in\mathfrak{U}\}$. Dann gilt $M^*(\mathfrak{U})M=\mathfrak{U}$.*

Beweis. Da $_RM$ projektiv ist, gilt das Dual-Basis-Lemma und daraus folgt sofort $\mathfrak{U}\subseteq M^*(\mathfrak{U})M$. Für $f\in M^*$, $y\in M$ ist die Abbildung: $M\ni x\to f(x)y\in M$ ein R-Endomorphismus von $_RM$, das heißt, ein Element aus S. Daraus folgt, daß $M^*(\mathfrak{U})M\subseteq\mathfrak{U}$, da $\mathfrak{U}$ Untermodul von M_S.

Bemerkung: Wenn $_RM$ Generator ist, dann gilt für beliebigen Untermodul $\mathfrak{U}$ von M_S: $M^*(\mathfrak{U})=\{a\in R;\ aM\subseteq\mathfrak{U}\}$.

Aus Lemma 1 und Lemma 2 ergibt sich folgender

Satz 4. *Seien $_RM$ ein projektiver Generator und $S=End(_RM)$ der Endomorphismenring von $_RM$. Dann gibt es einen Verbandsisomorphismus zwischen dem Verband aller Rechtsideale von R und dem aller S-Untermoduln von M_S in folgender Weise:*

$$\mathfrak{r}\longrightarrow\mathfrak{r}M,\qquad \mathfrak{U}_S\longrightarrow\{r\in R;\ rM\subseteq\mathfrak{U}\}=M^*(\mathfrak{U}),$$

wobei $\mathfrak{r}$ Rechtsideal von R und $\mathfrak{U}_S$ Untermodul von M_S sind.

Korollar 1. *Sei $_RM$ projektiver Generator. R_R ist dann und nur dann koendlich erzeugt (artinsch, noethersch) wenn S_S koendlich erzeugt (artinsch, noethersch).*

Korollar 2. *Seien $_RP$ Progenerator und $S=End(_RP)$. Dann ist R_R dann und nur dann koendlich erzeugt (artinsch, noethersch) wenn S_S koendlich erzeugt (artinsch, noethersch) ist.*

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen in Korollar 2 ist $_RR$ (R_R) dann und nur dann injektiver Kogenerator, wenn $_SS$ (S_S) injektiver Kogenerator ist.*

Beweis. Sei $_RR$ injektiver Kogenerator. Da R_R koendlich erzeugt ist, ist dann S_S koendlich erzeugt. Weiter ist $_SS=Hom_R(P, P)$ injektiv. Wegen Satz 3, folgt dann, daß $_SS$ injektiver Kogenerator ist. Die Umkehrung gilt ebenso, da die Voraussetzungen für R und S symmetrisch sind.

3. Ein Dichtesatz

Seien R und S zwei Ringe, die nicht notwendig ein 1-Element enthalten, und ${}_RQ_S$ ein zweiseitiger R–S-Modul. Für einen R-Linksmodul ${}_RM$ (S-Rechtsmodul N_S) bezeichnen wir mit M^* (N^*) den S-Rechtsmodul $Hom_R(M, Q)$ (R-Linksmodul $Hom_S(N, Q)$). Es gibt ein natürlichen Homomorphisms Φ: $M \ni x \to \varphi_x \in {}_R(M^*)^* = M^{**}$ ($\Phi : N \ni y \to \varphi_y \in N^{**}$) von ${}_RM$ nach ${}_RM^{**}$ (von N_S nach N_S^{**}), der folgendermaß en definiert wird;

$$\varphi_x(f) = f(x), \quad f \in M^* \quad \left(\varphi_y(g) = g(y), \quad g \in N^*\right).$$

${}_RR$ (S_S) heißt Q-torsionslos, wenn die Abbildung Φ ein Monomorphismus ist. ${}_RM$ (N_S) heißt Q-reflexiv, wenn Φ ein Isomorphismus ist.

Seien K_S und L_S S-Rechtsmoduln und $\mathfrak{M}$ ein Untermenge ($\neq \phi$) von $Hom_S(K, L)$. $\mathfrak{M}$ ist dicht in $Hom_S(K, L)$ bezüglich auf die endliche Topologie in $Hom_S(K_S, L_S)$, wenn für beliebiges $f \in Hom_S(K, S)$ und beliebige endlich viele $x_1, \cdots, x_n \in K$, es einen Element $g \in \mathfrak{M}$ gibt so daß $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$. (Sieche [5], Chapter II).

Satz 6. *Seien ${}_RQ$ ein K-Linksmodul und $S = End({}_RQ)$ der Endomorphismenring von ${}_RQ$. Ist für jede natürliche Zahl n jedes epimorphe Bild von ${}_RQ^{(n)}$ Q-torsionslos, dann ist für jeden R-Linksmodul ${}_RM$ $\Phi(M)$ dicht in M^{**}.*

Beweis. Seien $g \in M^{**}$, $f_1, \cdots, f_n \in M^*$ und $\mathfrak{U} = \{(f_1(x), \cdots, f_n(x));\ x \in M\}$. Es ist leicht zu sehen daß $\mathfrak{U}$ ein Untermodul von ${}_RQ^{(n)}$ ist. Enthält $\mathfrak{U}$ nicht das Element $\xi = (g(f_1), \cdots, g(f_n))$, dann gibt es nach Voraussetzungen einen R-Homomorphismus α von ${}_RQ^{(n)}$ nach ${}_RQ$, so daß $\alpha(\mathfrak{U}) = 0$ und $\alpha(\xi) \neq 0$. Da $Hom_R(Q^{(n)}, Q)$ isomorph zu $S_S^{(n)}$ ist, gibt es dann ein Element $(s_1, \cdots, s_n) \in S^{(n)}$, so daß $\sum_i f_i(x)s_i = 0$ und $\sum_i g(f_i)s_i \neq 0$. Daraus folgt, daß $\sum_i f_i s_i = 0$ und $g(\sum_i f_i s_i) \neq 0$ und das ist ein Widerspruch.

Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 6, *seien ${}_RM$ Q-torsionslos und M_S^* endlich erzeugt. Dann ist ${}_RM$ Q-reflexiv.*

Setzt man in Satz 6 ${}_RQ = {}_RM$ und ${}_RM = {}_RR$, dann erhält man als Spezialfälle folgende Sätze.

Satz 7. (Jacobsoscher Dichtesatz, [5] Chapter VI Theorem 1).

Seien ${}_RM$ ein treuer, vollständig reduzibler R-Linksmodul und $\tilde{R}$ der Bikommutator von ${}_RM$. Dann ist R dicht in $\tilde{R}$.

Satz 8. *Sei ${}_RQ$ Kogenerator. Dann ist R dicht im Bikommutator $\tilde{R}$ von ${}_RR$ (Siehe* [14] Lemma 2).

4. Kogeneratoren

LEMMA 3. *Seien ${}_RQ$ ein quasi-injektiver R-Linksmodul und $S=End({}_RQ)$. Dann ist für jeden koendlich erzeugten Q-torsionlosen R-Linksmodul ${}_RM$ der S-Rechtsmodul $M_S^*=Hom_R(M, Q)_S$ endlich erzeugt.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es endlich viele $f_1, \cdots, f_n$ M^*, so daß $\bigcap_{i=1}^{n} Ker\ f_i=0$. Sei f ein Element von M^* und betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & {}_RM & \xrightarrow{g} & {}_RQ^{(n)} \\ & & f\downarrow & & \\ & & {}_RQ & & \end{array}$$

wobei $g(x):=(f_1(x), \cdots, f_n(x))$, $x\in{}_RM$. Da ${}_RQ$ quasi-injektiv ist, ist ${}_RQ$ auch ${}_RQ^{(n)}$-injektiv. Daraus folgt, daß es ein Element $(s_1, \cdots, s_n)\in S_S^{(n)}$ gibt, so daß $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)s_i$, $x\in{}_RM)$. Folglich ist $f=\sum_{i=1}^{n} f_i s_i$ und M_S^* ist endlich erzeugt wie behauptet.

SATZ 9. *Seien ${}_RQ$ ein injektiver Kogenerator und ${}_RM$ koendlich erzeugt. Dann ist M_S^* endlich erzeugt und ${}_RM$ Q-reflexiv.*

BEWEIS. Der Satz folgt unmittelbar aus dem Korollar von Satz 6 und Lemma 3.

LEMMA 4. *Seien ${}_RQ$ ein R-Linksmodul, $S=End({}_RQ)$ und ${}_RE(Q)$ die injektive Hülle von ${}_RQ$. Sei ${}_RE(Q)$ Q-torsionslos und Q_S enthalte isomorphe Bilder von allen einfachen S-Rechtsmoduln. Dann ist ${}_RQ$ injektiv.*

BEWEIS. (Homomorphismen von R-Linksmoduln werden im folgenden recht von ihren Argumenten geschrieben). Sei ι: ${}_RQ\rightarrow{}_RE(Q)$ die Inklusion von ${}_RQ$ in ${}_RE(Q)$, dann ist $\mathfrak{r}$: $\iota E(Q)_S^*\subseteq S_S$. Angenommen $\mathfrak{r}\neq S$, dann gibt es nach Voraussetzung einen Epimorphismus φ: $S_S\rightarrow\mathfrak{U}_S=q_0S$ von S_S auf einen einfachen Untermodul $\mathfrak{U}_S=q_0S$ von Q_S mit $0=\varphi(\mathfrak{r})=q_0\mathfrak{r}$, $q\neq 0$. Wegen $0=q_0\mathfrak{r}=q_0\iota E(Q)^*=q_0E(Q)^*$ und da ${}_RE(Q)$ Q-torsionslos ist, muß andererseits $q_0E(Q)^*\neq 0$ gelten. Das ist ein Widerspruch. Aus $\iota E(Q)^*=S$ folgt aber sofort ${}_RE(Q)=Q\oplus Q_1$, also ${}_RQ$ injektiv (und $Q=E(Q)$).

LEMMA 5. *Seien Q_S ein endlich erzeugter S-Rechtsmodul und $R=End(Q_S)$. Vorausgesetzt, daß jeder endlich erzeugte S-Rechtsmodul Q-torsionslos ist und ${}_RQ$ die isomorphen Bilder von allen einfachen R-Linksmodul enthält. Dann ist Q_S injektiv.*

BEWEIS. Sei $M_S=Q_S+yS$ eine zyklische Erweiterung von Q_S. Da dann M_S endlich erzeugt, also Q-torsionslos ist, folgt wie in Beweis von

Lemma 4, daß Q_S ein direkter Summand von M_S ist. Sei jetzt $y \in E(Q_S)$, also $M_S = Q_S + yS \subseteq E(Q_S)$, dann folgt, da Q_S groß in $E(Q_S)$ ist, $Q = M$, also $Q = E(Q_S)$.

SATZ 10. (Morita, [11] Theorem 2. 4). *Sei ${}_RQ_S$ ein zweiseitiger R–S-Modul, so daß ${}_RQ$ und Q_S injektive Kogeneratoren sind und $S = End({}_RQ)$, $R = End(Q_S)$ gilt. Dann enthält die Kategorie aller Q-reflexiven R-Linksmoduln (oder Q-reflexiven S-Rechtsmoduln) ${}_RR$ und ${}_RQ$ (S_S und Q_S) und ist abgeschloßen gegenüber endlichen direkten Summen, Untermoduln und epimorphen Bilder.*

Aus den bisherigen Feststellungen können wir leicht folgende Satze herleiten:

SATZ 11. *Für einen zweiseitigen R–S-Modul ${}_RQ_S$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *${}_RQ$ und Q_S sind Kogeneratoren, $S = End({}_RQ)$und $R = End(Q_S)$.*

(2) *${}_RQ$ und Q_S sind injektive Kogeneratoren, $S = End({}_RQ)$ und $R = End(Q_S)$.*

(3) 1) *Für jeden endlich erzeugten R-Linksmodul ${}_RM$, ist $M_S^* = Hom_R(M, Q)_S$ koendlich erzeugt und ${}_RM$ Q-reflexiv.*

2) *Für jeden koendlich erzeugten R-Linksmodul ${}_RM'$, ist M'^*_S endlich erzeugt und ${}_RM'$ Q-reflexiv.*

3) *Für jeden endlich erzeugten S-Rechtsmodul N_S, ist ${}_RN^* = {}_RHom_S(N, Q)$ koendlich erzeugt und N_S Q-reflexiv.*

4) *Für jeden koendlich erzeugten S-Rechtsmodul N'_S, ist ${}_RN'^*$ endlich erzeugt und N'_S Q-reflexiv.*

KOROLLAR. *Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *R ist zweiseitiger Kogenerator.*

(2) *R ist zweiseitiger injektiver Kogenerator.*

(3) *Für jeden koendlich erzeugten R-Linksmodul ${}_RM$ ist $M_R^* = Hom_R(M, R)_R$ endlich erzeugt und ${}_RM$ R-reflexiv und umgekehrt ist für jeden endlich erzeugten R-Rechtsmodul N_R $N_R^* = Hom_R(N, R)$ koendlich erzeugt und N_R R-reflexiv.*

(4) *Für jeden endlich erzeugten R-Linksmodul ${}_RM'$ ist $M_R'^*$ koendlich erzeugt und ${}_RM'$ R-reflexiv und umgekehrt ist für jeden koendlich erzeugten R-Rechtsmodul N'_R ${}_RN'^*$ endlich erzeugt und N'_R R-reflexiv.*

SATZ 12. *Für eien zweiseitigen R–S-Modul ${}_RQ_S$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *${}_RQ$ und Q_S sind (injektive) Kogeneratoren, $S = End({}_RQ)$, $R = End(Q_S)$ und ${}_RR$, S_S sind koendlich erzeugt.*

(2) *${}_RR$ ist koendlich erzeugt, ${}_RQ$ endlich erzeugt und*

1) *für jeden koendlich erzeugten R-Linksmodul* ${}_RM$, *ist* M_S^* *endlich erzeugt und* ${}_RM$ *Q-reflexiv*;

2) *für jeden endlich erzeugten S-Rechtsmodul* N_S *ist* ${}_RN^*$ *koendlich erzeugt und* N_S *Q-reflexiv.*

(3) S_S *ist koendlich erzeugt,* Q_S *endlich erzeugt und*

1) *für jeden koendlich erzeugten S-Rechtsmodul* M'_S *ist* ${}_RM'^*$ *endlich erzeugt und* M'_S *Q-reflexiv*;

2) *für jeden endlich erzeugten R-Linksmodul* ${}_RN'$ *ist* N'_S *koendlich erzeugt und* ${}_RN'$ *Q-reflexiv.*

LEMMA 6. *Seien* ${}_RQ$ *Kogenerator und* $S=End({}_RQ)$. *Seien* ${}_RM$ *ein R-Linksmodul,* N_S *ein endlich erzeugter S-Rechtsmodul und* $M\times N\ni x, y\rightarrow(x, y)\in Q$ *ein regulares skalares Produkt über* $M\times N$ *in* Q. *Dann ist* ${}_RM$ *in natürlicher Weise isomorph zu* ${}_RN^*={}_RHom_S(N, Q)$.

BEWEIS. Ist n die Anzahl der Elemente eines erzeugendensystems von N_S, dann ist N_S isomorph zu $S^{(n)}/\mathfrak{U}$, wodei $\mathfrak{U}$ ein Untermodul von $S_S^{(n)}$ ist. Betrachten wir jetzt das folgendermaßen definierte reguläre skalare Produkt über $Q^{(n)}\times S^{(n)}$ in Q:

$$Q^{(n)}\times S^{(n)}\ni(q_1, \cdots, q_n),\ (s_1, \cdots, s_n)\longrightarrow\sum_{i=1}^{n}q_is_i\in Q\,.$$

Da das Produkt über $M\times N$ regulär ist, ist ${}_RM$ dann kanonisch isomorph zu einen Untermodul $\mathfrak{m}$ von ${}_RQ^{(n)}=Hom_S(S^{(n)}, Q)$, so daß $\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{U}^{\perp}:=\{\xi\in Q^{(n)};\ (\xi, \eta)=0$ für alle $\eta\in\mathfrak{U}\}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{U}^{\perp\perp}\subseteq\mathfrak{m}^{\perp}$. Ferner gilt wegen der Regularität des Produkt $\mathfrak{m}^{\perp}\subseteq\mathfrak{U}$ und folglich $\mathfrak{m}^{\perp}=\mathfrak{U}$. Angenommen $\mathfrak{m}\supsetneqq\mathfrak{U}^{\perp}$. Da ${}_RQ$ Kogenerator ist, gibt es dann ein Element $\xi\in S^{(n)}$, so daß $(\mathfrak{m}, \xi)=0$ und $(\mathfrak{U}^{\perp}, \xi)\neq0$. Das ist ein Widerspruch, da dann $\xi\in\mathfrak{m}^{\perp}=\mathfrak{U}$ wäre.

KOROLLAR 1. *Sei* N_S *ein endlich erzeugte Untermodul von* Q_S *(oder* S_S*). Dann kann jeder S-Homomorphismus von* N_S *nach* Q_S *zu einem S-Homomorphismus von* Q_S *(oder* S_S*) nach* Q_S *fortgesetzt werden.*

KOROLLAR 2. *Sei* S_S *noethersch. Dann ist* Q_S *injektiv.*

LEMMA 7. *Seien* ${}_RR$ *artinsch,* ${}_RQ$ *endlich erzeugter injektiver Kogenerator und* $S=End({}_RQ)$. *Dann ist* S_S *artinsch,* Q_S *endlich erzeugter injektiver Kogenerator und* $R=End(Q_S)$.

BEWEIS. Daß Q_S endlich erzeugt und $R=End(Q_S)$ ist, folgt aus Satz 9, wenn man ${}_RM={}_RR$ setzt. Seien $\mathfrak{U}$ ein Untermodul von Q_S und $l(\mathfrak{U})=\bigcap_{u\in\mathfrak{U}}l(uS)$ der Linksannulator von $\mathfrak{U}$ in R. Da ${}_RR$ artinsch ist, gibt es endlich viele $u_1, \cdots, u_n$ von $\mathfrak{U}$, so daß $l(\mathfrak{U})=\bigcap_{i=1}^{n}l(u_iS)=l(\sum_{i=1}^{n}u_iS)$. Daraus folgt dann nach

([18], Theorem 1. 1), daß $\mathfrak{U}=rl(\mathfrak{U})=\sum_{i=1}^{n}u_i S$. Da ${}_RR$ notwendig noethersch ist, ist Q_S gleichzeitig artinsch und noethersch. Da S_S isomorph zu einen Untermodul von $Q_S^{(n)}$, ist S_S artinsch. Die Injektivität von Q_S folgt aus Korollar 2 von Lemma 6. Sei jetzt $\mathfrak{r}$ ein maximales Rechtsideal von S. Da ${}_RQ$ notwendig artinsch ist, folgt dann, wie oben, aus ([18], Theorem 1. 1), daß $rl(\mathfrak{r})=\mathfrak{r}$. Folglich $l(\mathfrak{r})\neq 0$. Daraus folgt daß Q_S injektiver Kogenerator ist.

Auf Grund unserer Überlegungen können wir jetzt den folgenden Satz über Quasi-Frobenius Modul leicht herleiten, der von G. Azumaya und K. Morita stammt ([2] Theorem 4, [11] Theorem 6. 3);

SATZ 13. *Für einen zweiseitigen R–S-Modul* ${}_RQ_S$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) ${}_RR$ *ist artinsch,* ${}_RQ$ *endlich erzeugter injektiver Kogenerator und* $S=End({}_RQ)$;

(2) S_S *ist artinsch,* Q_S *endlich erzeugter injektiver Kogenerator und* $R=End(Q_S)$;

(3) *Die kontravarianten Funktoren* $Hom_R(\ ,Q)$ *und* $Hom_S(\ ,Q)$ *sind zueinander inverse Kategorie-isomorphismen zwischen der Kategorie aller endlich erzeugten R-Linksmoduln und der aller endlich erzeugten S-Rechtsmoduln*[4].

KOROLLAR. *Für einen Ring R sind folgende Aussagen aquivalent:*

(1) *R ist Quasi-Frobenius Ring;*

(2) *Für jeden koendlich erzeugten R-Linksmodul* ${}_RM$ *ist* $M_R^*=Hom_R(M, R)$ *koendlich erzeugt und* ${}_RM$ *R-reflexiv, und für jeden koendlich erzeugten R-Rechtsmodul* N_R *ist* ${}_RN^*$ *koendlich erzeugt unf* N_R *R-reflexiv.*

BEWEIS. Für einen Quasi-Frobenius Ring R ist ein R-Modul dann und nur dann koendlich erzeugt, wenn er endlich erzeugt ist. Daraus folgt die Behauptung (1)$\Rightarrow$(2) wegen Satz 13. (2)$\Rightarrow$(1): Aus den Voraussetzungen folgt, daß R zweiseitiger (injektiver) Kogenerator ist. Weiter ist jeder endlich erzeugter Modul notwendig koendlich erzeugt. Daraus folgt, daß R artinsch und folglich Quasi-Frobenius Ring ist.

5. QF–3 Ringen

DEFINITION 4. *Ein Ring R heißt Links- (Rechts-) QF–3 Ring, wenn es einen treuen projektiven und injektiven R-Linksmodul (Rechtsmodul) gibt.*

SATZ 14. *Sei R ein Ring, so daß* ${}_RR$ *koendlich erzeugt ist. Dann sind*

4) Sei ${}_RQ_S$ ein zeiseitigen R–S-Modul in Satz 13. Dann ist ein R-Linksmodul (ein S-Rechtsmodul) dann und nur dann endlich erzeugt, wenn er koendlich erzeugt ist.

folgende Aussagen äquivalent:

(1) *Die injektive Hulle* ${}_RE(R)$ *von* ${}_RR$ *ist projektiv*;

(2) *R ist Links-QF–*3 *Ring*;

(3) ${}_RE(R)$ *ist R-torsionslos*;

(4) *Es gibt einen minimal treuen R-Linksmodul*[5].

EEWEIS. (1)$\Rightarrow$(2) und (1)$\Rightarrow$(3) sind klar. (2)$\Rightarrow$(1): Sei ${}_RM$ ein treuer projektiver und injektiver R-Linksmodul. Da ${}_RM$ treu ist und ${}_RR$ koendlich erzeugt, ist ${}_RR$ isomorph zu einen Untermodul von ${}_RM^{(n)}$. Da ${}_RM^{(n)}$ injektiv ist, folgt dann, daß ${}_RE(R)$ direkter Summand von ${}_RM^{(n)}$ ist und folglich projektiv. (3)$\Rightarrow$(1): Da ${}_RE(R)$ koendlich erzeugt und R-torsionslos ist, ist ${}_RE(R)$ isomorph zu einen Untermodul von ${}_RR^{(n)}$. Daraus folgt, daß ${}_RE(R)$ projektiv ist. (1)$\Rightarrow$(4): Sei ${}_RE(R)\cong\bigoplus_{i=1}^{n}Re_i$, wobei e_i ein primitives Idempotent von R ist und Re_i einen kleinsten Untermodul enthält. Sei M_0 die direkte Summe von allen nicht isomorphen Re_i, Da für jeden treuen R-Linksmodul ${}_RM$, Re_i in einem Produkt von Kopien von ${}_RM$ enthalten und der Sockel von Re_i groß in Re_i ist, ist Re_i in ${}_RM$ enthalten. Daraus folgt, daß ${}_RM_0$ ein minimal treuer R-Linksmodul ist. (4)$\Rightarrow$(1): Ein minimal treuer R-Linksmodul ist als direkter Summand von ${}_RR$ und auch von ${}_RE(R)$ notwendig projektiv und injektiv. Da dann ${}_RR$ und folglich auch ${}_RE(R)$ isomorph zu einen Untermodul von ${}_RM_0^{(n)}$ ist, ist ${}_RE(R)$ projektiv.

6. Ein Beispiel

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß eine gewisse Klasse von Endomorphismenringen $T:=End({}_RM)$ rechts koendlich erzeugt QF–3 Ringe sind.

Wir fangen mit folgendem Lemma an.

LEMMA 8. *Seien* ${}_RM$ *ein R-Linksmodul, der Kogenerator ist, und* $T=End({}_RM)$, *dann ist der Sockel von* M_T *groß in* M_T. *Ferner gilt, daß jedes maximale Linksideal* $\mathfrak{l}$ *von R der Rechtsannulator* $r(\mathfrak{n})$ *von einem minimalen Untermodul* $\mathfrak{n}$ *von* M_T *in R ist und für jeden minimalen Untermodul* $\mathfrak{n}$ *von* M_T *der Rechtsannulator von* $\mathfrak{n}$ *in R ein maximales Linksideal von R ist. Weiter gilt, daß für jeden endlich erzeugten Untermodul* $\mathfrak{U}_T$ *von* M_T *der Sockel von* $r(l(\mathfrak{U}))_T$ *gleich dem Sockel von* $\mathfrak{U}_T$ *ist.*

BEWEIS. Seien x ein von Null verschiedenes Element von ${}_RM$ und $\mathfrak{B}$ ein maximaler Untermodul von Rx. Da ${}_RM$ Kogenerator ist, gibt es ein

5) Ein treuer R-Linksmodul ${}_RM_0$ heißt minimal treu, wenn ${}_RM_0$ in jeden treuen R-Linksmodul als direkter Summand enthalten ist.

Element $y \in {}_RM$, so daß $Rx/\mathfrak{B} \cong Ry$ ($\bar{x} \leftrightarrow y$) und Ry in einem injektiven Untermodul von ${}_RM$ enthalten ist. Dann ist, wie leicht zu prüfen, yT einfach und in xT enthalten. Seien $\mathfrak{l}$ ein maximales Linksideal von R und y ein Element von $r(\mathfrak{l})$, so daß Ry in einem injektiven Untermodul von ${}_RM$ enthalten ist. Dann ist yT einfach und $l(yT)=\mathfrak{l}$. Seien xT ein einfacher Untermodul von M_T und y ein Element von M, so daß Ry einfach ($\cong Rx/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ ein maximaler Untermodul von Rx) und in einem injektiven Untermodul von ${}_RM$ enthalten ist. Dann gilt $yT=xT$ und daraus folgt, daß $l(xT)=l(yT)$ ein maximales Linksideal von R ist. Seien $\mathfrak{U}_T=u_1T+\cdots+u_nT$ ein endlich erzeugter Untermodul von M_T und $\mathfrak{n}$ ein minimaler Untermodul von $r(l(\mathfrak{U}))_T$. Sei y ein Element von ${}_RM$, so daß $\mathfrak{n}=yT$, Ry einfach, und Ry in einem injektiven Untermodul von ${}_RM$ enthalten. Sei ferner ${}_RN=\{(ru_1, \cdots, ru_n)\,;\, r\in R\}\subseteq {}_RM^{(n)}$. Da dann die Abbildung: ${}_RN\ni(ru_1,\cdots,ru_n)\to ry\in Ry$ wohl definiert ist und Ry in einem injektiven Untermodul von ${}_RM$ enthalten, gibt es ein Element $(t_1,\cdots,t_n)\in T^{(n)}$, so daß $ry=r\sum_{i=1}^{n}u_it_i$ für alle $r\in R$. Daraus folgt, daß $y=\sum_{i=1}^{n}u_it_i$ und folglich $yT\subseteq\mathfrak{U}_T$. Unserer Beweis ist damit vollständig.

Aus obigen Beweis erhalten wir ebenfalls folgende

PROPOSITION 7. *Sei ${}_RM$ ein R-Linksmodul, so daß jeder zykliche Untermodul von ${}_RM$ in einem injektiven Untermodul von ${}_RM$ enthalten ist. Dann gilt für jeden endlich erzeugten Untermodul $\mathfrak{U}_T$ von M_T $r(l(\mathfrak{U}))=\mathfrak{U}$, wobei $T=End({}_RM)$.*

SATZ 15. *Seien R ein Ring, der zweiseitiger Kogenerator ist, und ${}_RM$ ein endlich erzeugter treuer R-Linksmodul. Sei $T=End({}_RM)$. Dann ist T_T koendlich erzeugter QF–3 Ring.*

BEWEIS. Es ist bekannt, daß M_T injektiv ist (z.B. Siehe [16] Satz 1). Da ${}_RM$ Generator ist, ist ferner M_T endlich erzeugt und projektiv. Da ${}_RM$ endlich erzeugt T_T isomorph zu einen Untermodul von $M_T^{(n)}$. Da ${}_RM$ Kogenerator ist, ist wegen Lemma 8 der Sockel von T_T groß in T_T. Sei $S=\sum_{\text{minimale }\mathfrak{n}_\alpha}\mathfrak{n}_\alpha$ der Sockel von M_T. Wegen Lemma 8 ist dann $N=l(S)=\bigcap_\alpha(\mathfrak{n}_\alpha)$ das Radikal von R. Da R/N halbeinfach artinsch ist, gibt es endlich viele $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, so daß $N=\bigcap_{i=1}^{n}l(\mathfrak{n}_{\alpha_i})=l(\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{n}_{\alpha_i})$. Daraus folgt, daß $S=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ endlich erzeugt ist. Folglich ist der Sockel von T_T auch endlich erzeugt.

7. Anwendung auf Ringerweiterungen

Seien R ein Ring mit 1-Element 1 und S ein Unterring von R, der 1 enthalt. Dann ist $Hom(R_S, S_S)_R$ in natürlicher Weise ein R-Rechtsmodul.

SATZ 16. *Seien $Hom(R_S, S_S)_R$ R-torsionslos und M_R ein R-Rechtsmodul. Wenn M_S S-torsionslos ist, dann ist M_R R-torsionslos.*

BEWEIS. M_R ist isomorph zu $F/\mathfrak{U}$, wobei $F=\oplus R_\alpha$ ein freier R-Rechtsmodul und $\mathfrak{U}$ ein Untermodul von F_R ist. Sei jetzt (x_α) ein Element von F_R, das nicht in $\mathfrak{U}$ enthalten ist. Da M_S S-torsionslos ist, gibt es dann ein Element $(f_\alpha)\in\prod Hom(R_{\alpha S}, S_S)$, so daß $\sum_\alpha f_\alpha(x_\alpha)\neq 0$ und $\sum_\alpha f_\alpha(u_\alpha)=0$ für alle $(u_\alpha)\in\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ ein Untermodul von F_R ist, folgt, daß $\sum_\alpha f_\alpha\cdot x_\alpha\neq 0$ und $\sum_\alpha f_\alpha\cdot u_\alpha=0$ für alle $(u_\alpha)\in\mathfrak{U}$. Nach Voraussetzungen gibt es ein Element $g\in Hom_R(Hom_S(R, S), R)$, so daß $\sum_\alpha g(f_\alpha)x_\alpha\neq 0$. Sei φ der R-Homomorphismus: $F_R\ni(y_\alpha)\xrightarrow{\varphi}\sum_\alpha g(f_\alpha)y_\alpha\in R_R$. Dann gilt $\varphi(x_\alpha)\neq 0$ und $\varphi(u_\alpha)=0$ für alle $(u_\alpha)\in\mathfrak{U}$. Daraus folgt, daß M_R R-torsionslos ist.

KOROLLAR 1. *Sei $R\supset S$ eine Ringerweiterung, so daß $Hom(R_S, S_S)_R$ R-torsionslos ist. Wenn S_S Kogenerator ist, dann ist R_R Kogenerator.*

Eine Ringerweiterung $R\supset S$ heißt Links-Quasi-Frobenius-Erweiterung (nach B. Müller [12]), wenn ${}_SR$ endlich erzeugt und projektiv ist und ${}_RR_S$ direkter Summand in einer direkten Summe von Kopien von ${}_RHom({}_SR, {}_SS)_S$ ist. Eine Rechts-Quasi-Frobenius-Erweiterung wird entsprechend definiert.

KOROLLAR 2. *Seien $R\supset S$ eine Links-Quasi-Frobenius-Erweiterung und S_S Kogenerator. Dann ist R_R Kogenerator.*

BEWEIS. ${}_SHom(R_S, S_S)_R$ ist dann direkter Summand in einer direkten Summe von Kopien von ${}_SR_R$ und folglich R-torsionslos (Siehe [12] Satz 2). Unsere Behauptung folgt dann unmittelbar aus Korollar 1.

SATZ 17. *Sei $R\supset S$ eine Links-(oder Rechts-) Quasi-Frobenius-Erweiterung. Wenn ${}_SS$ injektiver Kogenerator ist, dann ist ${}_RR$ auch injektiver Kogenerator.*

BEWEIS. Sei $R\supset S$ Links-Quasi-Frobenius-Erweiterung. Da ${}_SS$ koendlich erzeugt ist, ist dann ${}_SR$ und folglich auch ${}_RR$ koendlich erzeugt. Da ${}_SS$ injektiv ist, ist ${}_RHom({}_SR, {}_SS)$ injektiv und folglich auch ${}_RR$. Daraus folgt, daß ${}_RR$ injektiver Kogenerator ist. Sei $R\supset S$ Rechts-Quasi-Frobenius-Erweiterung. Wegen Korollar 2 von Satz 16, ist dann ${}_RR$ Kogenerator. Da ${}_SR$ endlich erzeugt und projektiv und ${}_SS$ koendlich erzeugt sind, ist ${}_RR$ auch koendlich erzeugt. Daraus folgt, daß ${}_RR$ injektiver Kogenerator ist.

KOROLLAR. *Sei $R\supset S$ Links-(oder Rechts-) Quasi-Frobenius-Erweiter-*

ung. Wenn S zweiseitiger Kogenerator ist, dann ist R auch zweiseitiger Kogenerator.

Mathematisches Institut
Universität Hokkaido

Literaturverzeichnis

[1] G. AZUMAYA: A duality theory for injective modules. Amer. J. Math., 81, 249–278 (1959).

[2] G. AZUMAYA: Completely faithful modules and self-injective rings. Nagoya Math. J. 27, 697–708 (1966).

[3] H. BASS: Algebraic K-theory. W. A. Benjamin, New York 1968.

[4] C. FAITH: Direct-sum representation of injective modules. J. Algebra 5, 203–227 (1967).

[5] N. JACOBSON: Structur of rings. Amer. Math. Soc. Colloq. Vol. 36 Providence, Rode Island 1964.

[6] J. P. JANS: On co-noetherian rings. J. London Math. Soc. (2), 1, 588–590 (1969).

[7] F. KASCH-H. J. SCHNEIDER-H. J. STOLBERG: Report 69–23, Dept. Math., Carnegie Institute of Technology, Carnegie Mellon Univ. 1969.

[8] T. KATO: Self-injective rings. Tohoku Math. J., Vol. 19, 485–495 (1967).

[9] T. KATO: Torsionless modules. Tohoku Math. J., Vol. 20, 234–243 (1968).

[10] T. KATO: Rings of U-dominant dimension $\geqq 1$. Tôhoku Math. J., Vol. 21, 321–327 (1969).

[11] K. MORITA: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 6, 83–142 (1958).

[12] B. MÜLLER: Quasi-Frobenius-Erweiterungen. Math. Zeitschr. 85, 345–368 (1964).

[13] B. MÜLLER: Quasi-Frobenius-Erweiterungen II. Math Zeitschr. 88, 380–409 (1965).

[14] B. MÜLLER: On Morita duality, Canad. J. Math. 21, 1338–1347 (1969).

[15] T. ONODERA: Über Kogeneratoren. Arch. Math., Vol. 16, 402–410 (1968).

[16] T. ONODERA: Eine Bemerkung über Kogeneratoren. Proc. Japan Acad., Vol. 47, No. 2, 140–142 (1971).

[17] B. OSOFSKY: A generalization of quasi-Frobenius rings. J. Algebra 4, 373–387 (1966).

[18] A. ROSENBERG-D. ZELINSKY: Annihilators. Portugalle Math., Vol. 20, 53–65 (1966).

[19] K. SUGANO: Supplementary results on cogenerators. Osaka J. Math. 6, 235–241 (1969).

[20] P. VÁMOS: The dual of the notion "finitely generated". J. London Math. Soc., 43, 643–646 (1968).

(Received August 18, 1972)