Hokkaido Mathematical Journal Vol. 20 (1991) p. 253-264

Un théorème d'équivalence en géométrie symplectique

Pierre MOLINO

(Received May 8, 1990)

Introduction

La formulation moderne du *problème d'équivalence* d'Elie Cartan pour les structures transitives est due en particulier à C. Ehresmann [4], P. Libermann [12], D. Spencer [17], V. Guillemin [6], V. Guillemin-S. Sternberg [8][9] et I. Singer-S. Sternberg [16]. Rappelons également les contributions dans ce domaine de H. Goldschmidt-D. Spencer [5], A. Kumpera-D. Spencer [11], T. Morimoto [14], et spécialement N. Tanaka [18][19][20]. On utilisera ici les notations et les méthodes développées dans C. Albert-P. Molino [2], auxquels on renvoie pour les détails. Toutes les structures sont supposées de classe C^{∞}.

M sera une n-variété modèle munie d'un point base 0, Γ un pseudogroupe de Lie régulier transitif (PLT) de difféomorphismes locaux de M. Bour $k\geq 1$, soit E_M^k l'orbite de l'action naturelle de Γ sur le fibré B^kM des repères d'ordre k modelés sur M (k-jets en 0 de difféomorphismes locaux de M) qui contient le k-jet 0^k de l'identité. On obtient ainsi la *suite de définition* $E_M^{\infty}=(E_M^k)_{k\geq 1}$ *de* Γ, formée de fibrés de repères se projetant les uns sur les autres. Pour tout k, E_M^k est un G_k-sous-fibré principal de B^kM, et la restriction à E_M^k de la forme fondamentale θ_M^k de B^kM a pour image en chaque point le même sous-espace m_{k-1} de l'espace $J_0^{k-1}TM$ des $(k-1)$-jets en 0 de champs de vecteurs sur M. Les champs de vecteurs locaux de M qui engendrent des éléments de Γ sont appelés Γ-*champs* (locaux). Leurs germes forment un faisceau d'algèbres de Lie appelé *pseudoalgèbre de Lie* (*PAL*) *de* Γ, et noté $\mathscr{L}_\Gamma$. Les relevés dans B^kM de ces germes forment un faisceau relevé $\mathscr{L}_\Gamma^k$ admettant pour orbites les composantes connexes de E_M^k. L'espace m_{k-1} n'est autre que l'espace des $(k-1)$-jets en 0 de Γ-champs. On sait que, si k est supérieur à *l'ordre* k_0 *de* Γ, la donnée de E_M^k suffit à déterminer Γ (respectivement $\mathscr{L}_\Gamma$) comme le PLT de ses automorphismes locaux (resp. le faisceau de ses germes d'automorphismes infinitésimaux locaux); si l'on veut, $E_M^{k_0}$ représente *les équations de* Γ *et de* $\mathscr{L}_\Gamma$.

Soient maintenant V une autre variété de dimension n, B^kV le fibré de ses repères d'ordre k modelés sur M (k-jets en 0 de difféomorphismes locaux de M dans V), et $E_V^\infty=(E_V^k)_{k\geq 1}$ une suite de sous-fibrés de repères se projetant les uns sur les autres. Si, pour tout k, E_V^k est un sous-fibré principal de B^kV de groupe structural G_k, tel que la restriction à ce sous-fibré de la forme fondamentale θ_V^k de B^kV soit à valeurs dans m_{k-1}, on dira que E_V^∞ est *la suite de définition* (modelée sur E_M^∞) *d'une presque-*Γ*-structure sur* V. Cette presque-Γ-structure est une Γ*-structure* si, au voisinage de chaque point de V, il existe une *équivalence locale* entre E_V^∞ et E_M^∞, c-à-d. un difféomorphisme local de V dans M transportant E_V^∞ sur E_M^∞. Par exemple, E_M^∞ est la suite de définition de *la* Γ*-structure modèle*.

Le *problème d'équivalence pour* Γ s'énonce alors: toute presque-Γ-structure est-elle une Γ-structure? Si la réponse est affirmative, nous dirons (bien que la formulation soit un peu équivoque) que "le théorème d'équivalence est vrai pour Γ".

Un cas particulier important est celui où $M=R^n$, et où Γ contient les translations; on dit alors que Γ est *un PLT plat*. Dans [2], on trouvera une démonstration détaillée du théorème d'èquivalence pour les PLT plats; voir également à ce sujet [3][15][5][6][7].

Remarquons encore, pour en finir avec ces généralités que, le problème d'équivalence étant de nature purement locale, on peut *remplacer le modèle M par un voisinage ouvert arbitraire du point base* 0, et supposer les fibrés de repères E_M^k connexes, ce qui revient à *remplacer* Γ *par un PLT "connexe"* ayant même PAL associée $\mathscr{L}_\Gamma$; si en particulier on prend M simplement connexe, on pourra suposer *que les groupes structuraux G_k sont connexes*.

Dans le présent article, on s'intéresse à la situation suivante: $n=2p$, et $(M, \omega_M, \mathscr{F}_M)$ est une variété symplectique munie d'un feuilletage Lagrangien; pour toutes les notions de base, en géométrie symplectique, on renvoie à R. Abraham-J. Marsden [1]. On considère un PLT Γ sur M qui respecte ω_M et $\mathscr{F}_M$. Compte tenu de la remarque ci-dessus, on pourra supposer que $\mathscr{F}_M$ est défini par une fibration localement triviale $\pi_M: M\to N$, à fibres connexes et simplement connexes, sur une p-variété quotient simplement connexe, et que les groupes structuraux G_k des fibrés de la suite de définition $E_M^\infty=(E_M^k)_{k\geq 1}$ de Γ sont connexes.

Une *forme de Liouville* λ_M sur M sera une 1-forme semi-basique (c-à-d. induisant la forme nulle sur les fibres de π_M) telle que $\omega_M=-d\lambda_M$. Etant donnée une telle forme et un champ feuilleté local X dans un ouvert U de M, il existe dans U un unique champ de vecteurs X^{λ_M} tel que (i) X^{λ_M} respecte λ_M; (ii) $X^{\lambda_M}-X$ soit tangent aux feuilles. Ceci étant, on dira que λ_M est *adaptée à* Γ si, pour tout $X\in\mathscr{L}_\Gamma$, on a $X^{\lambda_M}\in\mathscr{L}_\Gamma$. Essentiellement, λ_M permet d'identifier M à un ouvert du cotangent T^*N, et la condition précédente signifie que le relevé naturel $T^*\bar{X}$ du projeté (local) $\bar{X}$ d'un Γ-champ est encore un Γ-champ. On dira que Γ est *un PLT de type cotangent sur* $(M, \omega_M, \mathscr{F}_M)$ s'il admet une forme de Liouville adaptée.

A un tel PLT, on associera un *PLT projeté* $\bar{\Gamma}$ sur la variété quotient N. Ce PLT est défini par la méthode générale de "passage au quotient par un feuilletage invariant" décrite en détail dans [2]: on obtient $\bar{\Gamma}$ en projetant sur N les équations de Γ. On prendra garde à la terminologie utilisée: elle ne signifie pas que tout $\varphi\in\Gamma$ se projette suivant un élément de $\bar{\Gamma}$ (c'est seulement vrai au voisinage de chaque point du domaine de définition de φ).

On peut également associer à Γ un système d'équations aux dérivées partielles linéaire et homogène (SEDPLH) sur N, défini de la façon suivante: λ_M étant une forme de Liouville adaptée à Γ, toute autre forme de Liouville s'écrit $\lambda_M+\pi_M^* d\bar{f}_N$. Ceci étant, la condition pour que cette nouvelle forme soit adaptée est que $\bar{f}_N$ soit solution d'un SEDPLH sur N. Si l'on note $\bar{R}^k$ l'ensemble des k-jets de fonctions locales $\bar{f}$ sur N répondant à la question, le SEDPLH peut être représenté par la suite $\bar{R}^\infty=(\bar{R}^k)_{k\geq 1}$. On dit que c'est *le système de Liouville de* Γ. Il est invariant par $\bar{\Gamma}$, et complètement intégrable.

Au paragraphe I, on précise les définitions de $\bar{\Gamma}$ et de $\bar{R}^\infty$.

Au paragraphe II, on démontre le résultat principal de l'article, qui est le théorème d'équivalence suivant:

THEOREME. *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *le théorème d'équivalence est vrai pour* $\bar{\Gamma}$,

(ii) *tout système non homogène formellement intégrable sur* N *ayant le système de Liouville comme système homogène associé est complètement intégrable,*

alors le théorème d'équivalence est vrai pour Γ.

Dans le cas particulier où l'on a unicité de la forme de Liouville adaptée ($\bar{R}^\infty=0$), le résultat est élémentaire, car Γ est alors un "prolongement généralisé" de $\bar{\Gamma}$. On observera d'autre part que la condition (ii) est automatiquement vérifiée si le système de Liouville de Γ est à coefficients constants (dans des coordonnées convenables de N), en vertu des théorèmes généraux d'intégrabilité d'Ehrenpreis-Malgrange [10].

La démonstration utilise à la fois la technique générale de "passage au quotient pour les presque- structures" développée dans [2], et une technique de "relèvement" liée à la nature particulière du problème. En ce qui concerne ce dernier point, l'idée essentielle est de construire une forme de Liouville "adaptée à la presque-structure".

Du point de vue de la géométrie symplectique, les constructions indiquées au paragraphe I apparaissent comme des outils naturels pour aborder la classification des PLT de type cotangent.

I. Structure des pseudogroupes de type cotangent.

Comme ci-dessus, $(M, \omega_M, \mathscr{F}_M)$ est une $2p$-variété symplectique munie du feuilletage Lagrangien défini par une fibration localement triviale $\pi_M: M\to N$ à fibre-type et base simplement connexes. Soit Γ un PLT de type cotangent sur $(M, \omega_M, \mathscr{F}_M)$, de PAL associée $\mathscr{L}_\Gamma$.

Soit $E_M^\infty=(E_M^k)_{k\geq 1}$ la suite de définition de Γ. Pour tout k, E_M^k est formé de *k-repères adaptés au feuilletage* (k-jets en 0 de difféomorphismes locaux feuilletés); on pourra d'ailleurs supposer Γ connexe, c-à-d. les groupes structuraux G_k des E_M^k connexes. Enfin, λ_M sera une forme de Liouville adaptée à Γ.

I. 1. Définition du *PLT* projeté $\bar{\Gamma}$.

On reprend pour l'essentiel la construction générale donnée en [2].

Pour $k\geq 1$, on a une projection naturelle π_M^k de E_M^k dans le fibré des k-repères de N modelés sur N (k-jets en $\bar{0}=\pi_M(0)$ de difféomorphismes locaux de N dans N), ceci du fait que E_M^k est formé de repères adaptés au feuilletage.

Soient $x\in M$, z^k un point de E_M^k au-dessus de x, $y=\pi_M(x)$ et $\bar{z}^k=\pi_M^k(z^k)$. Si X est un Γ-champ en x, la valeur en z^k du relevé X^k de X dans B^kM appartient à $T_{z^k}E_M^k$, et ne dépend que du k-jet de X en x; d'où un isomorphisme naturel de l'espace m_{kx} des k-jets de Γ-champs en x avec $T_{z^k}E_M^k$. Quitte à restreindre son domaine, X se projette sur N en un champ de vecteurs local $\bar{X}$ dont le k-jet en y ne dépend que de $j_x^k X$. On obtient donc une application linéaire de m_{kx} dans J_y^kTN, dont l'image sera notée $\bar{m}_{ky}^x$. Par transitivité, la dimension de cette image ne dépend pas de x. Pour y fixé, $\bar{m}_{ky}^x$ est localement indépendant de x, car on peut le définir à l'aide de champs feuilletés locaux. Les fibres de π_M étant connexes, $\bar{m}_{ky}^x$ ne dépend en fait que de y, et pourra donc être noté simplement $\bar{m}_{ky}$. On obtient ainsi un sous-fibré vectoriel de J^kTN, et par relèvement un champ de sous-espaces invariant par translations à droite sur B^kN. Ce champ d'éléments de contact peut être défini localement à l'aide des champs relevés $\bar{X}^k$; il est par suite complètement intégrable. La variété intégrale de ce champ passant par $\bar{z}^k$ sera notée $\bar{E}_N^k$. C'est un sous-fibré principal de B^kN dont on notera $\bar{G}_k$ le groupe structural (en général, $\bar{G}_k$ est strictement plus grand que l'image de G_k par la projection naturelle).

Comme tout Γ-champ projetable X définit par projection un automorphisme infinitésimal $\bar{X}$ de $\bar{E}^k_N$, cette structure est infinitésimalement transitive; étant connexe, elle est transitive. On en déduit que $\bar{E}^\infty_N=(\bar{E}^k_N)_{k\geq 1}$ est la suite de définition d'un PLT $\bar{\Gamma}$ sur N. On dira que $\bar{\Gamma}$ *est le projeté de* Γ *sur* N. La forme fondamentale de $\bar{E}^k_N$ est à valeurs dans $\bar{m}_{k-1}=\bar{m}_{k-1\,\bar{0}}$.

Comme π^k_M envoie le relevé X^k de X dans B^kM, restreint à E^k_M, sur le relevé $\bar{X}^k$ du champ projeté dans $\bar{E}^k_N$, et ceci pour tout Γ-champ projetable, on voit que π^k_M *induit une submersion de* E^k_M *dans* $\bar{E}^k_N$. Le feuilletage $\mathscr{F}^k_M$ défini par cette submersion est invariant par les relevés φ^k des éléments $\varphi\in\Gamma$ sur E^k_M.

I. 2. Relèvement des $\bar{\Gamma}$-champs par la forme de Liouville λ_M.

Soient X un Γ-champ en x, X^{λ_M} le Γ-champ associé qui laisse invariante la forme de Liouville λ_M. Si $X^{\lambda_M}=X+Y$, le champ vertical Y est défini par la relation $i_Y\omega_M=+L_X\lambda_M$; sous cette forme, on voit que le $(k-1)$-jet en x de X^{λ_M} est déterminé par le k-jet de X. La correspondance $j^k_xX\mapsto j^{k-1}_xX^{\lambda_M}$ définit donc une application linéaire:

(1) $\quad \Phi^{\lambda_M,k}_x : m_{kx}\to m_{(k-1)x}$

dont l'image sera notée $n_{(k-1)x}$.

En fait, il est clair que $j^{k-1}_xX^{\lambda_M}$ ne dépend que du k-jet en $\pi_M(x)$ du $\bar{\Gamma}$-champ $\bar{X}$ obtenu par projection (locale). En d'autres termes, (1) se factorise en une application linéaire:

(2) $\quad \bar{\Phi}^{\lambda_M,k}_x : \bar{m}_{k\pi_M(x)}\to m_{(k-1)x}$

d'image $n_{(k-1)x}$.

Ceci étant, considérons un $\bar{\Gamma}$-champ $\bar{X}$ dans un ouvert $\bar{U}$ de N. Définissons un champ de vecteurs X dans $U=\pi_M^{-1}(U)$ par:

(3) $\quad X_x=\bar{\Phi}^{\lambda_M,1}_x(j^1_{\pi_M(x)}\bar{X})$

Les applications (2) étant compatibles avec les troncatures et les prolongements, on aura pour tout k, et tout $x\in U$

(4) $\quad j^k_xX=\bar{\Phi}^{\lambda_M,k+1}_x(j^{k+1}_{\pi_M(x)}\bar{X})\in n_{kx}\subset m_{kx}$

Mais la relation (4) signifie que X est un automorphisme infinitésimal de E^k_M. En appliquant ceci pour k plus grand que l'ordre k_0 de Γ, on en déduit que X est un Γ-champ. On a donc relevé $\bar{X}$ dans M en un Γ-champ. D'où la propriété suivante:

LEMME 1. *Tout $\bar{\Gamma}$-champ dans un ouvert $\bar{U}$ de N se relève dans $U=\pi_M^{-1}(\bar{U})$ en un unique Γ-champ respectant la forme de Liouville λ_M.*

Contrairement à la construction du PLT projeté, cette propriété de relèvement est propre à la situation particulière étudiée : dans le cas général du passage au quotient par un feuilletage invariant, on n'a pas de propriété analogue.

Si l'on note $\mathscr{L}_{\Gamma}^{\lambda_M}$ le sous-faisceau de $\mathscr{L}_{\Gamma}$ formé des germes de Γ-champs qui respectent la forme de Liouville λ_M, et $\mathscr{T}_{\Gamma}$ le faisceau des germes de Γ-champs verticaux pour la projection π_M, on a une décomposition en comme directe vectorielle :

(5) $\mathscr{L}_{\Gamma}=\mathscr{T}_{\Gamma}\oplus\mathscr{L}_{\Gamma}^{\lambda_M}$

où le crochet des germes des champs de vecteurs vérifie :

(6) $[\mathscr{L}_{\Gamma},\mathscr{T}_{\Gamma}]\subset\mathscr{T}_{\Gamma}$ et $[\mathscr{L}_{\Gamma}^{\lambda_M},\mathscr{L}_{\Gamma}^{\lambda_M}]\subset\mathscr{L}_{\Gamma}^{\lambda_M}$

et le lemme 1 ci-dessus se traduit par un isomorphisme de faisceau

(7) $\mathscr{L}_{\Gamma}^{\lambda_M}\simeq\pi_M^*\mathscr{L}_{\bar{\Gamma}}$

défini à l'aide de la projection naturelle $\pi_{M*}:\mathscr{L}_{\Gamma}\to\mathscr{L}_{\bar{\Gamma}}$.

I. 3. Le système associé à l'idéal vertical $\mathscr{T}_{\Gamma}$.

Soient $x\in M$, $y=\pi_M(x)$, U un voisinage ouvert simplement connexe de x dont les traces sur les fibres sont connexes, et $\bar{U}=\pi_M(U)$. Si Y est un Γ-champ vertical dans U, $i_Y\omega_M$ est une 1-forme fermée semi-basique, donc s'écrit sous la forme $\pi_M^*\bar{\alpha}_{\bar{U}}$, où $\bar{\alpha}_{\bar{U}}$ est une 1-forme fermée dans $\bar{U}$. Mais $\bar{U}$ est simplement connexe, d'où

(8) $i_Y\omega_M=\pi_M^*d\bar{f},\ \bar{f}\in C^\infty(\bar{U})$.

De cette manière, on associe à chaque germe Y_x de Γ-champ vertical en x un germe de fonction en y (défini modulo les constantes). En outre, le k-jet en y de la fonction détermine le $(k-1)$-jet de Y en x. Notrons $\bar{I}_y^{k,x}$ l'ensemble des k-jets de fonctions en y définis de cette manière. Le même argument que celui utilisé au paragraphe I. 1 montre que $\bar{I}_y^{k,x}$ ne dépend pas de x, et peut donc être noté $\bar{I}_y^k$. On obtient ainsi une suite $\bar{I}^\infty=(\bar{I}^k)_{k\geq1}$ de fibrés de k-jets de fonctions sur N, se projetant les uns sur les autres, et compatibles avec les opérations naturelles de prolongement.

On a donc construit un SEDPLH, $\bar{I}^\infty=(\bar{I}^k)_{k\geq1}$, que l'on appellera *système associé à l'idéal vertical* $\mathscr{T}_{\Gamma}$. Il est, par construction, complètement intégrable [2].

LEMME 2. *Si $\bar{f}$ est une solution de $\bar{I}^\infty$ dans l'ouvert $\bar{U}$ de N, et si $f=\bar{f}\circ\pi_M$ est la fonction correspondante dans $U=\pi_M^{-1}(\bar{U})$, alors le champ hamiltonien défini dans U par $i_Y\omega_M=df$, est un Γ-champ vertical.*

PREUVE : Soit $k \geq 1$. Pour tout $x \in U$, le k-jet de Y en x est déterminé par le $(k+1)$-jet de $\bar{f}$ en $y = \pi_M(x)$, qui appartient à $\bar{I}_y^{k+1}$; ilexiste donc un Γ-champ vertical (local) Y' en x dont le k-jet en x coïncide avec celui de Y. Donc le k-jet de Y en x appartient à m_{kx}, et ceci pour tout $x \in U$. Ceci signifie que Y est un automorphisme infinitésimal de E_M^k. Comme ceci est vrai pour tout k, on a bien le résultat $- /\!/ -$

La correspondance qui à $\bar{f}$, solution locale de $\bar{I}^\infty$, associe le champ hamiltonien de $f \circ \pi_M$ détermine donc une suite exacte de faisceaux sur M :

(9) $$0 \to \boldsymbol{R} \to \pi_m^* \bar{\mathscr{T}}_\Gamma \to \mathscr{T}_\Gamma \to 0$$

où $\bar{\mathscr{T}}_\Gamma$ est le faisceau des germes de solutions du système $\bar{I}^\infty$.

Finalement, observons que *le système $\bar{I}^\infty$ associé à l'idéal vertical $\mathscr{T}_\Gamma$ est invariant par le PLT projeté $\bar{\Gamma}$* : comme $\bar{\Gamma}$ est connexe, il suffit de vérifier que le système est *invariant par $\mathscr{L}_{\bar{\Gamma}}$*. Or, si $\bar{X}$ est un $\bar{\Gamma}$-champ local dans $\bar{U}$, il se relève d'après le lemme 1 dans $U = \pi_M^{-1}(\bar{U})$ en un Γ-champ X. Si alors Y est un Γ-champ vertical au voisinage d'un point x de U, et si $i_Y \omega_M = \pi_M^* d\bar{f}$, on a $i_{[X,Y]} \omega_M = \pi_M^* d(\bar{X}\bar{f})$, ce qui prouve que la dérivée suivant un $\bar{\Gamma}$-champ local d'une solution locale de $\bar{I}^\infty$ est encore une solution, d'où l'assertion précédente.

I. 4. Le système de Liouville de Γ.

Soit λ'_M une autre forme de Liouville sur M. La différence $\lambda'_M - \lambda_M$ est semi-basique et fermée, donc de la forme $\pi_M^* \bar{\alpha}_N$, où $\bar{\alpha}_N$ est une 1-forme fermée sur N. Mais comme N est simplement conneve, on aura $\bar{\alpha}_N = d\bar{f}_N$, où $\bar{f}_N \in C^\infty(N)$. Finalement :

(10) $$\lambda'_M = \lambda_M + \pi_M^* d\bar{f}_N .$$

Ecrivons maintenant la condition pour que λ'_M soit adaptée à Γ. Il faut et il suffit pour cela que, pour tout Γ-champ (local) X, la différence $X^{\lambda'_M} - X^{\lambda_M}$ soit un Γ-champ vertical. En fait, il suffit d'écrire cette condition pour un Γ-champ X projetable en $\bar{X}$; dans ce cas, posant $Y = X^{\lambda'_M} - X^{\lambda_M}$, il vient :

(11) $$i_Y \omega_M = + \pi_M^* d(\bar{X}\bar{f}_N)$$

La condition pour que Y soit un Γ-champ est alors que $\bar{X}\bar{f}_N$ soit une solution du système $\bar{I}^\infty$. Pour $y \in N$ et $k \geq 1$, soit $\bar{R}_y^k$ l'espace des k-jets en y de fonction locales sur N dont les dérivées par rapport à tout $\bar{\Gamma}$-champ sont des solutions de $\bar{I}^\infty$. Comme on a vu que le système $\bar{I}^\infty$ est invariant par $\mathscr{L}_{\bar{\Gamma}}$, $\bar{R}_y^k$ contient $\bar{I}_y^k$. On définit ainsi un sous-fibré $\bar{R}^k$ du fibré des k-jets de fonctions sur N.

Soit $\bar{R}^\infty=(\bar{R}^k)_{k\geq 1}$. C'est un SEDPLH sur N *invariant par* $\mathscr{L}_{\bar{\Gamma}}$. D'après ce qui précède, $\lambda'_M=\lambda_M+\pi_M^* d\bar{f}_N$ *est adaptée à* Γ *si et seulement si* $\bar{f}_N$ *est une solution globale de* $\bar{R}^\infty$.

On dira que $\bar{R}^\infty$ est *le système de Liouville de* Γ.

II. Démonstration du théorème d'équivalence.

La situation étant encore celle décrite au paragraphe précédent, on suppose en outre satisfaites les conditions (i) et (ii) du théorème. Soient V une n-variété, et $E_V^\infty=(E_V^k)_{k\geq 1}$ la suite de définition (modelée sur E_M^∞) d'une presque-Γ-structure sur V.

Γ est contenu dans le PLT $\hat{\Gamma}$ des automorphismes locaux de la forme symplectique ω_M et du feuilletage $\mathscr{F}_M$. Par suite, la presque-Γ-structure considérée définit une presque-$\hat{\Gamma}$-structure ; le théorème d'équivalence étant vrai pour $\hat{\Gamma}$ (c'est un résultat élémentaire classique), il existe sur V une forme symplectique ω_V et un feuilletage Lagrangien $\mathscr{F}_V$, de telle sorte que *tout* $z^k\in E_V^k$ *est un* k*-jet de symplectomorphisme local feuilleté* de $(M, \omega_M, \mathscr{F}_M)$ dans $(V, \omega_V, \mathscr{F}_V)$.

Le problème d'équivalence étant local, on pourra d'ailleurs restreindre V de manière que $\mathscr{F}_V$ soit défini par une fibration localement triviale π_V: $V\rightarrow W$ de fibre-type et de base simplement connexes.

II. 1. Le passage au quotient pour la presque-structure [2].

Pour comprendre le principe de ce passage au quotient, il faut observer que, pour k et $l\geq 1$, E_M^{k+l} (respectivement E_V^{k+l}) peut être regardé comme un fibré de l-repères de E_M^k (resp. E_V^k) modelés sur E_M^k, c-à-d. de l-jets en 0^k de difféomorphismes locaux de E_M^k dans E_M^k (resp. E_V^k). En fait, si Γ^k est le PLT sur E_M^k engendré par les relevés des éléments de Γ, $E_M^{k,\infty}=(E_M^{k+l})_{l\geq 1}$ est la suite de définition de Γ^k, et $E_V^{k,\infty}=(E_V^{k+l})_{l\geq 1}$ la suite de définition, modelée sur $E_M^{k,\infty}$, d'une presque-Γ^k-structure sur E_V^k.

Comme Γ^k laisse invariant le feuilletage $\mathscr{F}_M^k$ sur E_M^k défini par la submersion π_M^k: $E_M^k\rightarrow E_N^k$, la presque-Γ^k-structure définie par $E_V^{k,\infty}$ définira un feuilletage $\mathscr{F}_V^k$ sur E_V^k. Ce feuilletage peut être également défini de la façon suivante: tout point de E_V^k est un k-jet de difféomorphisme local feuilleté de $(M, \mathscr{F}_M)$ dans $(V, \mathscr{F}_V)$ et définit donc un k-repère de W modelé sur N ; d'où une projection naturelle $\pi_V^k: E_V^k\rightarrow B^kW$. On vérifie alors que π_V^k est de rang constant, et que $\mathscr{F}_V^k$ est défini par la submersion π_V^k de E_V^k sur son image $W^k\subset B^kW$.

Soient $z^k\in E_V^k$ se projetant sur $x\in V$, $\bar{z}^k=\pi_V^k(z^k)$, $\bar{x}=\pi_V(x)$, et z^{k+1} un point de E_V^{k+1} au-dessus de z^k. En tant que repère en z^k, z^{k+1} envoie $m_k=T_{0^k}E_M^k$ sur $T_{z^k}E_V^k$. En projection, on obtient un repère $\bar{z}^{k+1}$ en $\bar{z}^k\in B^kW$, qui envoie $\overline{m}_k$ sur $T_{z^k}W^k$. On en déduit en $\bar{x}$ un sous-espace $\overline{m}_{k\bar{x}}$ de $J^k_{\bar{x}}TW$ indépendant du point z^k utilisé. On construit ainsi un sous-fibré vectoriel de J^kTW, donc un champ d'éléments de contact invariant à droite sur B^kW admettant W^k comme variété intégrale. Il en résulte que ce champ d'éléments de contact est complètement intégrable, et que W^k est un ouvert d'une variété intégrale maximale $\bar{E}^k_W$. Par construction, $\bar{E}^k_W$ est un sous-fibré principal connexe; on vérifie que son groupe structural (connexe, car W est simplement connexe) est $\bar{G}_k$, et sa forme fondamentale à valeurs dans $\overline{m}_{k-1}$.

Finalement, $\bar{E}^\infty_W=(\bar{E}^k_W)_{k\geq 1}$ est *la suite de définition, modelée sur* E^∞_N, *d'une presque-*$\bar{\Gamma}$*-structure sur* W, et, pour tout k, $\pi^k_V: E^k_V\to \bar{E}^k_W$ est une submersion.

L'hypothèse (i) entraîne alors que $\bar{E}^\infty_W$ *est la suite de définition d'une* $\bar{\Gamma}$*-structure sur* W. Les automorphismes locaux de $\bar{E}^\infty_W$ forment donc un PLT localement équivalent à $\bar{\Gamma}$, que nous noterons $\bar{\Gamma}_W$.

Comme les systèmes $\bar{I}^\infty$ et $\bar{R}^\infty$ sont invariants par $\bar{\Gamma}$, les équivalences locales entre $\bar{E}^\infty_N$ et $\bar{E}^\infty_W$ permettent de définir sur W *des SEDPLH invariants par* $\bar{\Gamma}_W$, *que nous noterons respectivement* $\bar{I}^\infty_W$ *et* $\bar{R}^\infty_W$.

II. 2. Formes de Liouville adaptées à la presque-structure.

a) *On va utiliser le langage des équivalences formelles*, des Γ-champs formels, etc...: si $x\in V$, une *équivalence formelle*, de source $x_0\in M$ et de but $x\in V$, de E^∞_M sur E^∞_V sera un jet infini en x_0 de difféomorphisme local de M dans V transportant x_0 en x et le jet infini en x_0 de E^∞_M sur celui de E^∞_V. Un Γ*-champ formel* en x (pour la presque-structure) sera le jet infini en x défini par transport par équivalence formelle d'un Γ-champ en x_0. On sait qu'en tout point x de V, il existe une équivalence formelle de source quelconque dans M et but x, de E^∞_M sur E^∞_V [2].

LEMME 3. *Soient $x\in V$, $j^\infty_{x_0}\varphi$ une équivalence formelle de source $x_0\in M$ et but x, de E^∞_M sur E^∞_V. Alors cette équivalence formelle s'étend dans un voisinage de x_0 dans la feuille $\mathscr{F}_M$ en un jet infini le long de la feuille qui est une équivalence formelle en chaque point.*

PREUVE: Ceci tient à la structure particulière des pseudogroupes d'automorphismes des feuilletages Lagrangiens d'une variété symplectique: les feuilles sont munies (par les hamiltoniens de fonctions $\pi^*_M\bar{f}_N$) d'une structure affine plate (connexion de Weinstein [21]); par suite, *le fibré des repères le long des feuilles FM* (un point $z_0\in FM$ au-dessus de x_0 est un repère de $T\mathscr{F}_{Mx_0}$) est muni d'un parallélisme de Lie le long des feuilles (modelé sur le groupe des transformations affines de $\boldsymbol{R}^p$), et Γ se relève en un PLT $F\Gamma$ sur ΓM qui respecte ce parallélisme de Lie. Il en est de même sur la variété V, et les équivalences formelles $j^{\infty}_{x0}\varphi$ de E^{∞}_{M} dans E^{∞}_{V} se relèvent en $j^{\infty}_{z^0}F_{\varphi}$, où F_{φ} respecte les deux parallélismes de Lie. Alors $j^{\infty}_{z^0}F_{\varphi}$ s'étend de manière unique (localement) le long de la feuille en un jet formel le long de la feuille qui respecte ces parallélismes; on vérifie alors que ce prolongement (projeté à nouveau sur les variétés) définit une équivalence formelle tout le long d'un voisinage de $x_0 - /\!/ -$.

b) *Soient $x \in V$, et z^k un point de E^k_V au-dessus de x.* On notera m_{kx} le sous-espace de $J^k_x TV$ défini par $T_{z^k}E^k_V$. D'après II. 1, m_{kx} est formé de k-jets de champs feuilletés pour $\mathcal{F}_V$. Si $X_{kx} = j^k_x X \in m_{kx}$, sa projection $\bar{X}_{k\bar{x}}$ sur W est un k-jet en $\bar{x} = \pi_V(x)$ appartenant au sous-espace $\bar{m}_{k\bar{x}}$ de $J^k_{\bar{x}}TW$.

Soit maintenant λ_V une forme de Liouville sur V, c-à-d. une 1-forme semi-basique pour la fibration π_V, telle que $\omega_V = -d\lambda_V$. La donnée de λ_V permet, comme en I. 2, d'associer à tout k-jet X_{kx} de champ de vecteurs feuilleté un $(k-1)$-jet de champ de vecteurs feuilleté respectant λ_V, que l'on notera encore $\Phi^{\lambda_V,k}_x(X_{kx}) = \bar{\Phi}^{\lambda_V,k}_x(\bar{X}_{k\bar{x}})$, où $\bar{X}_{k\bar{x}}$ est le k-jet projeté sur W. Ceci étant, on dira que λ_V *est adaptée à la presque-structure* si, quels que soient $x \in V$ et $X_{kx} \in m_{kx}$, on a $\Phi^{\lambda_V,k}_x(X_{kx}) \in m_{(k-1)x}$.

Le résultat essentiel de ce paragraphe assure l'existence locale (au voisinage de chaque point de V) de formes de Liouville adaptées. Plus précisément:

LEMME 4. *Soit $x_0 \in V$; quitte éventuellement à remplacer V par un voisinage de x_0, il existe une forme de Liouville adaptée λ'_V, et toute autre forme de Liouville adaptée est de la forme $\lambda'_V + \pi^*_V d\bar{f}_W$, où $\bar{f}_W$ est une solution globale de $\bar{R}^{\infty}_W$.*

PREUVE: Une fois démontrée l'existence de λ'_V, la seconde assertion est immédiate: en effet, comme sur la structure modèle, les hamiltoniens des fonctions solutions de $\bar{I}^{\infty}_W$ sont les automorphismes infinitésimaux (locaux) verticaux de la presque-structure; si alors λ'_V et λ''_V sont deux formes de Liouville adaptées, on aura $\lambda''_V = \lambda'_V + \pi^*_V d\bar{f}_W$, et en écrivant au niveau des jets infinis en un point la formule analogue à (11), il vient $j^{\infty}_{\bar{x}} \bar{f}_W \in \bar{R}^{\infty}_W$ pour tout $\bar{x} \in W$, d'où le résultat.

Partons maintenant d'une forme de Liouville quelconque λ_V sur V (l'existence au voisinage de x_0 d'une telle 1-forme est élémentaire [1]); toute autre forme de Liouville s'écrira $\lambda_V + \pi^*_V d\bar{f}_W$, où $\bar{f}_W \in C^{\infty}(W)$. On va étudier les conditions que doit satisfaire la fonction $\bar{f}_w$ pour que la nouvelle forme soit adaptée.

Observons en premier lieu que si le jet infini en x de $\lambda_V + \pi_{V*} d\bar{f}_W$ est adapté à la presque-structure, il en est de même en tout point de $\pi_V^{-1}(\bar{x})$, où $\bar{x}=\pi_V(x)$; en effet, l'ensemble des points où le jet infini de la forme est adapté est fermé dans la fibre (par définition) ; il est aussi ouvert : le lemme 3 assure l'existence locale, le long de la fibre, de formes de Liouville dont le jet infini est adapté ; comme elles diffèrent entre elles de $\pi_V^* d\bar{g}_W$, où $\bar{g}_W \in \bar{R}_W^\infty$, on en déduit le résultat.

Finalement, pour tout $\bar{x}\in W$, il existe un jet infini en $\bar{x}$ de fonction $\bar{f}_W$ tel que, le long de $\pi_V^{-1}(\bar{x})$, le jet infini de $\lambda_V+\pi_V^* d\bar{f}_W$ soit adapté. Notons alors $\bar{J}_W^\infty$ le fibré sur W des jets infinis de fonctions différentiables, et considérons la suite exacte de fibrés vectoriels :

$$(12)\qquad 0\to \bar{R}_W^\infty \to \bar{J}_W^\infty \xrightarrow{\bar{D}^\infty} \bar{J}_W^\infty/\bar{R}_W^\infty \to 0.$$

D'après ce qui précède, le choix de la forme de Liouville λ_V détermine une section σ^∞ de $\bar{J}_W^\infty/\bar{R}_W^\infty$, et la recherche d'une forme de Liouville adaptée à la presque-structure se ramène à la résolution de l'équation :

$$(13)\qquad \bar{D}^\infty(j^\infty \bar{f}_W)=\sigma^\infty$$

qui est formellement intégrable.

En réalité, au lieu de travailler sur les jets infinis, on peut se contenter de travailler avec les k-jets, pour k assez grand. Ceci étant, *l'hypothèse* (ii) *assure l'existence d'une forme de Liouville adaptée, au moins localement.* – // –

II. 3. Fin de la démonstration.

On fixe $x_0\in V$, et on veut construire une équivalence locale φ de E_M^∞ dans E_V^∞ telle que $\varphi(0)=x_0$. Pour cela, on part d'une équivalence locale $\bar{\varphi}$ de $\bar{E}_N^\infty$ dans E_W^∞ telle que $\bar{\varphi}(\bar{0})=\bar{x}_0$, et on cherche à la "relever".

Si on utilise les formes de Liouville adaptées λ_M et λ_V, qui identifient M et V respectivement à des ouverts de T^*N et T^*W, le relevé naturel $T^*\bar{\varphi}$ n'enverra pas, en général, 0 sur x_0, ni même sur un point de V. En fait, on changera λ_V de manière que $T^*\bar{\varphi}(0)=x_0$. Pour cela, on part d'une équivalence formelle $j_0^\infty\varphi$ de but x_0, se projetant suivant $j_{\bar{0}}^\infty\bar{\varphi}$ (l'existence d'une telle équivalence formelle est toujours assurée [2]). Cette équivalence formelle définit, à partir de λ_M, un jet infini en x_0 de forme de Liouville adaptée ; en fait, seul le 1-jet importera, car il suffit à déterminer l'image de 0 par le relevé naturel de $\bar{\varphi}$. On peut, d'après le lemme 4, trouver une forme de Liouville adaptée ayant même 1-jet en x_0. En utilisant cette nouvelle forme de Liouville, on relève $\bar{\varphi}$ en $T^*\bar{\varphi}$, qui est bien une équivalence locale de E_M^∞ dans E_V^∞ envoyant 0 sur x_0.

Bibliographie

[1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics* (2^{nd} *edition*) Benjamin (1978).

[2] C. ALBERT, P. MOLINO, *Pseudogroupes de Lie transitifs* (I, II) Hermann-Travaux en Cours (1984-1987).

[3] C. BUTTIN, P. MOLINO, Théorème général d'équivalence pour les pseudogroupes de Lie plats transitifs, *Jour of Dif. Geom.,* **9** (1974), 347-354.

[4] C. EHRESMANN, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, *"Géométrie Différentielle"*, Colloque CNRS, Strasbourg (1959), 119-136.

[5] H. GOLDSCHMIDT, D. SPENCER, On the non-linear cohomology for Lie equations, I, II, *Acta Math.*, **136** (1976), 103-239.

[6] V. GUILLEMIN, The integrability problem for G-structures, *Trans. A. M. S.*, **116** (1965), 544-560.

[7] V. GUILLEMIN, A Jordan-Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras, *Jour. of Diff. Geom.*, **2**, (1968), 313-345.

[8] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, An algebraic model for transitive differential geometry, *Bull. A. M. S.*, **70** (1964), 16-47.

[9] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, Deformation theory of pseudogroup structures, *Memoirs A. M. S.*, **64** (1966).

[10] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Grundlehren Math. Wiss, Springer (1963).

[11] A. KUMPERA, D. SPENCER, *Lie equations I. General Theory*, Annals of Math. Studies, **73** (1972).

[12] P. LIBERMANN, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, *Annali Math. Pura Appl.*, **4**, **36** (1954), 27-120.

[13] P. MOLINO, *Théorie des G-structures : le problème d'équivalence*, Lecture Notes in Math., **588** (1977).

[14] T. MORIMOTO, Sur le problème d'équivalence des structures géométriques, *Jap. Jour. of Math.*, **9** (1983).

[15] A. POLLACK, The integrability problem for pseudogroup structures, *Jour. of Diff. Geom.*, **9** (1974), 355-390.

[16] I. SINGER, S. STERNBERG, The infinite groups of Lie and Cartan, *Jour. An. Math. Jerusalem*, **15** (1965), 1-114.

[17] D. SPENCER, Deformations of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 306-445.

[18] N. TANAKA, On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, *Jour. Math. Soc. of Japan*, **17** (1965), 103-139.

[19] N. TANAKA, On differential systems, graded Lie algebras, and pseudogroups, *Jour. of Math. Kyoto Univ.*, **10** (1970), 1-82.

[20] N. TANAKA, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, *Hokkaido Math. J.*, 8 (1979), 23-84.

[21] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, in *CBMS Conf. Series*, **29**, A. M. S.

GETODIM, Département de Mathématiques
Université de Montpellier II et CNRS
URA n° 1407 et GDR 144
Place E. Bataillon-34060-Montpellier-FRANCE