Hokkaido Mathematical Journal Vol. 29 (2000) p. 171–200

Résidus d'applications holomorphes entre variétés

El Hadji Cheikh Mbacké DIOP

(Received March 17, 1999)

Abstract. Let $f:V\to W$ be a holomorpic map from a complex analytic n-dimensional manifold V onto a complex analytic q-dimensional manifold W. Assume that the singular set Σ of f is not empty. Then the Chern classes $c_{n-q+i}[TV-f^{-1}(TW)]$ of the virtual bundle $[TV-f^{-1}(TW)]$ localize near Σ for $i=1,\ldots,q$. If Σ is compact, then the residue of $c_{n-q+i}[TV-f^{-1}(TW)]$ is defined in the homology group $H_{2q-2i}(\Sigma)$. We compute these residues under the assumptions that the singular fibres of f are locally isolated complete intersections and the singular set Σ is smooth. If $q=1$ and V is compact, a formula due to Fulton compute the cohomology class $[c_{n}(V)-(c_{n-1}(V)\smile f^{\star}c_{1}(W))]\frown[V]$ using the so-called Milnor number. The main result is a generalization of this formula for all codimension q. We deduce from it a generalization of the Riemann-Hurwitz formula and give examples for which the residues are not equal to zero.

Key words: classes caractéristiques, résidus, holomorphes.

1. Introduction

Considérons une application holomorphe $f:V\to W$ d'une variété analytique complexe V de dimension complexe n sur une variété analytique complexe W de dimension complexe q, $(n\geq q)$. On désigne par TV et TW les fibrés tangents holomorphes respectifs de V et W.

Supposons que V soit compacte, que W ait pour dimension 1 et que les singularités de f soient des points isolés $p_{1},\ldots,p_{k}$. Notons μ_{ℓ} le **nombre de Milnor** au point p_{ℓ} de l'hypersurface complexe $f^{-1}(f(p_{\ell}))$. La formule suivante est alors due à Fulton [Fu] si f est algébrique et à [HL] dans le cas holomorphe:

$$[c_{n}(V)-(c_{n-1}(V)\smile f^{\star}c_{1}(W))]\frown[V]=(-1)^{n}\sum_{\ell=1}^{k}\mu_{\ell}.$$

Fulton l'a démontrée en interprétant μ_{ℓ} comme l'indice de la section *df* du fibré $f^{-1}(TW)\otimes TV$ et en appliquant le théorème de Hopf. Le terme de gauche dans l'égalité précédente est en effet égal, au signe près, à la $n^{ième}$ classe de Chern du fibré $f^{-1}(TW)\otimes T^{\star}V$.

1991 Mathematics Subject Classification : 57R20, 57R30.

Si $q > 1$, le rang du fibré $f^{-1}(TW) \otimes T^\star V$ n'est plus égal à la dimension de V et on ne peut plus appliquer le théorème de Hopf. Mais on peut aussi remarquer que si q est égal à 1, $c_n(V) - c_{n-1}(V) \smile f^\star c_1(W)$ est la $n^{ième}$ classe de Chern du fibré virtuel $[TV - f^{-1}(TW)]$ dans $KU(V)$. La généralisation de ce point de vue permet de définir des classes de cohomologie résiduelles en codimension q quelconque.

En effet si f est régulière, les classes de Chern $c_j(T_{\mathcal{F}})$ du fibré $T_{\mathcal{F}}$ tangent au noyau de la différentielle de f sont égales à celles du fibré virtuel $[TV - f^{-1}(TW)]$ et s'annulent pour $j > n - q$.

Si f possède des singularités, $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ garde un sens mais n'est plus nécessairement nulle pour $i \geq 1$. On montre que $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ se localise près du lieu singulier de f.

De façon précise, nous montrons d'abord que $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ admet un relèvement naturel $c^0_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ dans $H^{2n-2q+2i}(V, V - \Sigma)$. Si Σ est compact (cette hypothèse est toujours vérifiée si V est compacte), on appellera résidu de $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ en Σ et l' on notera $\mathrm{Res}(c_{n-q+i}, f)$ l'image de $c^0_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ dans $H_{2q-2i}(\Sigma)$ par la dualité d'Alexander-Lefschetz.

Lorsque la variété V est compacte, l'image de $\mathrm{Res}(c_{n-q+i}, f)$ par le morphisme

$$H_{2q-2i}(\Sigma) \xrightarrow{i_\star} H_{2q-2i}(V)$$

induite par l'inclusion $i : \Sigma \to V$ de Σ dans V est la classe d'homologie $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)] \frown [V]$.

Nous calculons ensuite ces résidus en supposant les singularités de f non dégénérées. Le résultat obtenu permet d'établir, lorsque les variétés V et W sont compactes, des formules du type Riemann-Hurwitz (théorème 2.4).

Des exemples explicites où les résidus sont non nuls sont étudiés.

Je remercie le professeur Daniel Lehmann pour ses précieux conseils lors de l'élaboration de ce travail. Je remercie également les professeurs Jean Paul Brasselet et Tatsuo Suwa de leurs nombreuses suggestions.

2. Enoncé des résultats

Dans toute la suite V et W désignent deux variétés analytiques complexes de dimensions complexes respectives n et q, $(n \geq q)$, TV et TW sont les fibrés tangents holomorphes respectifs de V et W.

Soit $f : V \to W$ une application holomorphe de V sur W. On note $f^{-1}(TW)$ le fibré image réciproque de TW par f et $df_x : T_xV \to f^{-1}(TW)_x$ la différentielle de f au point x de V.

Supposons que l'ensemble singulier $\Sigma = \{x \in V : \operatorname{rang}(df_x) < q\}$ de f soit non vide et compact. Soit $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ l'ensemble des composantes connexes de Σ. Notons $i_\star^\alpha$ le morphisme induit en homologie par l'inclusion de Σ_α dans V.

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage singulier défini par les fibres de f.

Théorème 2.1 (existence de résidus) *Pour tout $i \geq 1$, il existe une classe d'homologie* $\operatorname{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)$ *dans* $H_{2q-2i}(\Sigma_\alpha, \mathbb{C})$ *qui vérifie les propriétés suivantes*:

1. $\operatorname{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)$ *ne dépend que du comportement de* $\mathcal{F}$ *au voisinage de* Σ_α;
2. *si V est compacte, alors*

$$\mathcal{P}_V(c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]) = \sum_{\alpha \in I} i_\star^\alpha(\operatorname{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)).$$

On dira que $\operatorname{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)$ *est le* **résidu** *de* $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ *en* Σ_α.

Il se pose le problème de trouver une expression explicite de ces résidus. Pour cela, on fera les hypothèses suivantes:

i) les fibres singulières de f sont des intersections complètes locales ayant des singularités isolées.

ii) Σ est compact et le rang de la différentielle de f en chaque point de Σ est $q-1$.

L'hypothèse i) implique que Σ est une sous-variété analytique de V de dimension $q-1$ et que le rang de df est $q-1$ en presque tout point de Σ (voir [Lo]). Pour une application holomorphe $g : V \to W$ générique, l'ensemble $\Sigma_r = \{x \in V : \operatorname{rang}(dg_x) = r\}$ est une sous-variété lisse de V de codimension complexe $(n-r)(q-r)$. On supposera que f vérifie cette propriété. L'hypothèse ii) implique alors:

iii) Σ est une sous-variété lisse et compacte de V, de dimension $q-1$.

Pour chaque α, posons:

$$\mathcal{L}_\alpha = f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha / df(TV|\Sigma_\alpha).$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est un fibré quotient en droites complexes sur Σ_α.

Soit f_Σ la restriction de f à Σ. Le rang de $d(f_\Sigma)$ est $q-1$ en presque tout point de Σ. Un point σ de Σ sera dit **régulier** si $d(f_\Sigma)$ est injective en σ.

Soient σ un point régulier de Σ_α, $(U, z_1, \ldots, z_n)$ une carte de $V, \sigma \in U$, et $(\bar{U}, v_1, \ldots, v_q)$ une carte de W, $y_0 = f(\sigma) \in \bar{U}$, telles que:

1) $\forall m = 1, \ldots, n,\ z_m(\sigma) = 0$ et $\Sigma \cap U = \{p \in U / z_q(p) = \cdots = z_n(p) = 0\}$,
2) $f(U) \subset \bar{U}$ et $v_1 \circ f = z_1, \ldots, v_{q-1} \circ f = z_{q-1}$.

Soit $\tau_\sigma = \{p \in U / z_1(p) = \cdots = z_{q-1}(p) = 0\}$. On note f_σ la restriction de $v_q \circ f$ à τ_σ. Posons $\mathcal{H} = f_\sigma^{-1}(v_q(y_0))$:

- si $n > q$, $\mathcal{H}$ est une hypersurface de τ_σ ayant une singularité isolée en σ. On note μ_α son nombre de Milnor au point σ;
- si $n = q$, $\mathcal{H}$ est réduit au point σ et on appellera aussi nombre de Milnor la valeur au point σ du symbole résidu de Grothendieck

$$\mu_\alpha = \begin{bmatrix} d\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_q}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_q} \end{bmatrix}_\sigma .$$

Lemme 2.2 *Le nombre de Milnor μ_α ne dépend pas du choix du point régulier σ dans Σ_α, ni de la transversale τ_σ.*

Soit μ_α la constante donnée par le lemme 2.2. Si l'on désigne par

$$\mathcal{P}_{\Sigma_\alpha} : H^{2q-2i}(\Sigma_\alpha) \to H_{2i-2}(\Sigma_\alpha)$$

la dualité de Poincaré sur Σ_α, on obtient:

Théorème 2.3

$$\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f) = (-1)^{n-q+i} \mu_\alpha \mathcal{P}_{\Sigma_\alpha}\left((c_1)^{i-1}(\mathcal{L}_\alpha)\right).$$

Dans le cas particulier où les variétés V et W ont la même dimension, T. Izawa a établi (voir [Iz]) une formule liant les nombres de Chern de V et ceux de W lorsque le lieu singulier de f et les composantes irréductibles de son image sont lisses. Une généralisation de la formule de Riemann-Hurwitz due à J.P. Brasselet [Br1], [Br2] et M.H. Schwartz [Sc] donne le lien entre les classes de Chern de V et celles de W lorsque tous les points de Σ sont réguliers. Plus généralement, en notant $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété X, on a le résultat suivant:

Théorème 2.4 *Si en plus des hypothèses du théorème 2.3, les variété V et W sont compactes et f est un revêtement ramifié à d feuillets ($n = q$), on a alors:*

$$\text{i)} \qquad \chi(V) - d\chi(W) = -\sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_{n-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha];$$

$$\text{ii)} \qquad (c_i(V) - f^\star c_i(W)) \frown [V]$$
$$= -\sum_\alpha \mu_\alpha \; i_\star(\mathcal{P}_{\Sigma_\alpha}(c_{i-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha])).$$

On retrouve, lorsque tous les points de Σ sont réguliers, des formules équivalentes à celles données dans [Sc].

Corollaire 2.5 *Si tous les points de Σ sont réguliers, on a, sous les hypothèses du théorème précédent:*

$$\chi(V) - d\chi(W) = -\sum_\alpha \mu_\alpha \chi(\Sigma_\alpha);$$
$$(c_i(V) - f^\star c_i(W)) \frown [V] = -\sum_\alpha \mu_\alpha \; i_\star(\mathcal{P}_{\Sigma_\alpha}(c_{i-1}(\Sigma_\alpha))).$$

Théorème 2.6 *Si V et W sont compactes et connexes et $n > q$, soit Υ une fibre générique de f. Sous les hypothèses du théorème 2.3, on a:*

$$\text{i)} \quad \chi(V) - \chi(\Upsilon)\chi(W) = (-1)^{n-q+1} \sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_{q-1}[f^{-1}(TW)|\Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha].$$

Si de plus tous les points de Σ sont réguliers, on a:

$$\text{ii)} \quad \chi(V) - \chi(\Upsilon)\chi(W) = (-1)^{n-q+1} \sum_\alpha \mu_\alpha \chi(\Sigma_\alpha).$$

Signalons un résultat de Yomdin [Yo] analogue au lemme 2.2 pour les germes d'intersection complète $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ à singularité isolée. Sa preuve utilise des méthodes algébriques. La deuxième partie du théorème 2.6 est également énoncée dans son article.

Remarques 2.7 Supposons V compacte. Pour $i = q$, on obtient par intégration, en appliquant le théorème 2.2:

$$c_n[TV - f^{-1}(TW)] \frown [V] = (-1)^n \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha \langle (c_1)^{q-1}(Q_\alpha), [\Sigma_\alpha] \rangle \quad (E).$$

Si $\mathcal{L}_\alpha$ est un fibré trivial, $\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f) = 0$ pour $i \geq 2$ et seul le résidu $\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+1}, f)$ peut être non nul.

En particulier si $q = 1$, l'hypothèse iii) signifie que Σ est un ensemble fini $\{p_1, \ldots, p_k\}$ et la relation (E) se ramène à la formule de Fulton.

3. Rappels et Notations

3.1. Théorie de Chern-Weil pour les fibrés virtuels

Soient E et F deux fibré s vectoriels complexes de base V, de rangs respectifs n et q.

Considérons le fibré virtuel $L = [E-F]$. Si $c(E) = 1+c_1(E)+\cdots+c_n(E)$ (respectivement $c(F) = 1 + c_1(F) + \cdots + c_q(F)$) désigne la classe de Chern totale de E (respectivement de F), la $j^{ième}$ classe de Chern de L est le coefficient de t^j dans le développement formel

$$\left(1 + \sum_{\ell=1}^{n} t^\ell c_\ell(E)\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{q} t^k c_k(F)\right)^{-1}.$$

Par exmple si $q = 1$, alors:

$$c_n[TV - f^{-1}(TW)] = c_n(V) - c_{n-1}(V) f^\star c_1(W).$$

Si $q = 2$:

$$\begin{aligned} c_n[TV - f^{-1}(TW)] &= c_n(V) - c_{n-1}(V) f^\star c_1(W) \\ &\quad + c_{n-2}(V) f^\star (c_1^2(W) - c_2(W)), \\ c_{n-1}[TV - f^{-1}(TW)] &= c_{n-1}(V) - c_{n-2}(V) f^\star c_1(W) \\ &\quad + c_{n-2}(V) f^\star (c_1^2(W) - c_2(W)). \end{aligned}$$

Une paire de connexions $\dot{\nabla} = [\nabla', \nabla'']$ sur L est la donnée d'une connexion ∇' sur E et d'une connexion ∇'' sur F.

Soit c_i le $i^{ième}$ polynôme symétrique homogène élémentaire. Il est bien connu que $c_i(E)$ est la classe de cohomologie du cocycle $c_i(\nabla')$, image de c_i par le morphisme de Chern-Weil. La $j^{ième}$ classe de Chern du fibré virtuel L sera donc la classe de cohomologie du coefficient $c_j(\dot{\nabla})$ de t^j dans le développement formel

$$\left(1+\sum_{\ell=1}^{n} t^{\ell} c_{\ell}(\nabla')\right)\left(1+\sum_{k=1}^{q} t^{k} c_{k}(\nabla'')\right)^{-1}.$$

Le cocycle $c_j(\dot{\nabla})$ s'écrira:

$$c_j(\dot{\nabla})=\sum_{\ell=0}^{j} c_{\ell}(\nabla')\wedge\psi_{j-\ell}\left(c_1(\nabla''),\ldots,c_q(\nabla'')\right),$$

$\psi_{j-\ell}$ étant un polynôme de degré $j-\ell$ en $c_1,\ldots,c_q$.

Soient $\dot{\nabla}_0=[\nabla'_0,\nabla''_0],\ldots,\dot{\nabla}_k=[\nabla'_k,\nabla''_k]$ $k+1$ paires de connexions sur L. Considérons l'application $\pi : V\times\mathbb{R}^{k+1}\to V$ définie par $\pi(x,t)=x$. On munit le fibré virtuel $[\pi^\star(E)-\pi^\star(F)]$ de la paire $\dot{\tilde{\nabla}}=[t_0\nabla'_0+\cdots+t_k\nabla'_k,\ t_0\nabla''_0+\cdots+t_k\nabla''_k\ ]$, avec $t=(t_0,\ldots,t_k)$.

Soit $\triangle^k$ le k-simplexe standard de $\mathbb{R}^{k+1}$. On note $\pi_\star$ l'intégration le long des fibres de $\pi|V\times\triangle^k$ et $[\frac{k}{2}]$ la partie entière de $\frac{k}{2}$.

On définit une forme différentielle sur V en posant:

$$c_j(\dot{\nabla}_0,\ldots,\dot{\nabla}_k)=(-1)^{[\frac{k}{2}]}\pi_\star(c_j(\dot{\tilde{\nabla}})).$$

Rappelons que si $\partial\triangle^k$ désigne le bord de $\triangle^k$, $\iota : \partial\triangle^k\to\triangle^k$ l'inclusion et d l'opérateur de différentiation extérieure, on a la relation:

$$\pi_\star\circ d+(-1)^{k+1}d\circ\pi_\star=\pi_\star^{\partial}\circ\iota,$$

$\pi_\star^{\partial}$ étant l'intégration le long des fibres de $\pi|V\times\partial\triangle^k$. De cette relation et de la formule de Stokes, on déduit l'égalité

$$dc_j(\dot{\nabla}_0,\ldots,\dot{\nabla}_k)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m c_j(\dot{\nabla}_0,\ldots,\dot{\nabla}_{m-1},\dot{\nabla}_{m+1},\ldots,\dot{\nabla}_k).$$

Remarquons que si F est le fibré vectoriel de rang 0, alors $c_j(\dot{\nabla}_0,\ldots,\dot{\nabla}_k)$ coïncide avec la différence itérée de Bott [Bo] $c_j(\nabla_0,\ldots,\nabla_k)$; celle-ci vérifie la relation

$$dc_j(\nabla_0,\ldots,\nabla_k)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m c_j(\nabla_0,\ldots,\nabla_{m-1},\nabla_{m+1},\ldots,\nabla_k).$$

3.2. Intégration sur le complexe de Mayer-Vietoris

Les travaux de D. Lehmann [Le1] et [Le2] seront la référence essentielle pour cette section.

Soit M une variété C^∞ de dimension n, et soit Σ une partie fermée de M. Soit $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$ un recouvrement ouvert de M, où $U_0 = M - \Sigma$ et U_1 est un voisinage de Σ qui se rétracte par déformation sur Σ.

Si U est un ouvert de M, on note $A^p(U)$ l'espace des p-formes différentielles C^∞ sur U à valeurs dans $\mathbb{C}, \wedge$ le produit extérieur. On pose $U_{01} = U_0 \cap U_1$ et $A^p(\mathcal{U}) = A^p(U_0) \oplus A^p(U_1) \oplus A^{p-1}(U_{01})$.

Le complexe de Mayer-Vietoris $(\mathcal{A}(\mathcal{U}), D)$ associé au recouvrement $\mathcal{U}$ est l'espace vectoriel gradué $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, muni de la différentielle

$$\begin{aligned} D : A^p(\mathcal{U}) &\rightarrow A^{p+1}(\mathcal{U}) \\ (\alpha, \beta, \varepsilon) &\rightarrow D(\alpha, \beta, \varepsilon) = (d\alpha, d\beta, \beta - \alpha - d\varepsilon) \end{aligned}$$

et de la multiplication

$$\begin{aligned} &\smile : A^p(\mathcal{U}) \times A^q(\mathcal{U}) \rightarrow A^{p+q}(\mathcal{U}) \\ &((\alpha, \beta, \varepsilon),\ (\alpha', \beta', \varepsilon')) \rightarrow (\alpha \wedge \alpha',\ \beta \wedge \beta',\ \varepsilon \wedge \beta' + (-1)^{degré(\alpha)} \alpha \wedge \varepsilon'). \end{aligned}$$

La cohomologie de ce complexe, notée $H^\star(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$, est la cohomologie de Čech-de Rham associé au recouvrement $\mathcal{U}$. On montre (voir [BT]) que l'injection

$$\begin{aligned} \iota : A^p(M) &\rightarrow A^p(\mathcal{U}) \\ \alpha &\rightarrow (\alpha|U_0,\ \alpha|U_1,\ 0) \end{aligned}$$

induit, d'après un théorème de A.Weil, un isomorphisme en cohomologie

$$H^p_{DR}(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{[\iota]} H^p(\mathcal{A}(\mathcal{U})).$$

Cet isomorphisme permet d'identifier les groupes de cohomologie $H^p_{DR}(M, \mathbb{C})$ et $H^p(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$.

Soit $A^p(\mathcal{U}, U_0)$ le noyau de la projection

$$A^p(\mathcal{U}) \longrightarrow A^p(U_0).$$

Puisqu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow A^p(\mathcal{U}, U_0) \rightarrow A^p(\mathcal{U}) \rightarrow A^p(U_0) \rightarrow 0,$$

la cohomologie du complexe $A^\star(\mathcal{U}, U_0)$ est isomorphe à $H^\star(M, U_0)$.

Supposons que M soit compacte, connexe et orientée. Soit $\mathcal{T}$ une sous-variété compacte à bord de M, de dimension n et de bord $\partial\mathcal{T}$ telle que $\Sigma \subset \mathcal{T} \subset U_1$ et $\partial\mathcal{T} \cap \Sigma = \emptyset$. D'après [Le1] et [Le2], l'intégration

$$\int_M : A^n(M) \to \mathbb{C}$$

s'étend à $A^n(\mathcal{U})$ en posant:

$$\int_M (\alpha, \beta, \varepsilon) = \int_{M-\overset{\circ}{\mathcal{T}}} \alpha + \int_{\mathcal{T}} \beta - \int_{\partial\mathcal{T}} \varepsilon.$$

Si σ est un élément de $A^n(\mathcal{U})$ tel que $D\sigma = 0$, $\int_M \sigma$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{T}$; de plus si $\sigma = D\tau$, $\tau \in A^{n-1}(\mathcal{U})$, alors $\int_M \sigma = 0$. Ainsi on a un isomorphisme

$$\int_M : H^n(\mathcal{A}(\mathcal{U})) \to \mathbb{C}.$$

L'application

$$\begin{aligned} A^p(\mathcal{U}) \times A^{n-p}(\mathcal{U}) &\to \mathbb{C} \\ (\sigma, \tau) &\to \int_M \sigma \smile \tau \end{aligned}$$

induit la dualité de Poincaré

$$\mathcal{P}_M : H^p_{DR}(M, \mathbb{C}) \simeq H^p(\mathcal{A}(\mathcal{U})) \xrightarrow{\sim} \left(H^{n-p}(\mathcal{A}(\mathcal{U}))\right)^\star \simeq H_{n-p}(M, \mathbb{C}).$$

Si $[\sigma] \in H^p(\mathcal{A}(\mathcal{U})), \mathcal{P}_M([\sigma])$ est la classe du cycle $\mathcal{C}$ défini par $\int_M \sigma \smile \tau = \int_{\mathcal{C}} \iota^\star \tau$ pour tout $\tau \in A^{n-p}(\mathcal{U})$ vérifiant $D\tau = 0$, $\mathcal{C}$ étant transverse à $\partial\mathcal{T}$ et ι désigne l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans M.

Si on suppose seulement Σ compacte, M ne l'étant pas nécessairement, on peut trouver une sous-variété $\mathcal{T}$ compacte de M, à bord, de dimension n et de bord $\partial\mathcal{T}$ telle que $\Sigma \subset \mathcal{T} \subset U_1$ et $\partial\mathcal{T} \cap \Sigma = \emptyset$.

Si $\alpha = (0, \alpha_0, \alpha_{01}) \in A^n(\mathcal{U}, U_0)$, l'intégrale

$$\int_M \alpha = \int_{\mathcal{T}} \alpha_1 - \int_{\partial\mathcal{T}} \alpha_{01}$$

est bien définie.

Soit $\alpha = (0, \alpha_0, \alpha_{01}) \in A^p(\mathcal{U}, U_0)$ et soit $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_{01}) \in A^{n-p}(\mathcal{U})$. L'élément $\alpha \smile \beta = (0, \alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_{01} \wedge \beta_1)$ de $A^n(\mathcal{U}, U_0)$ ne dépend ni de β_0

ni de β_{01}. On peut donc définir une application bilinéaire

$$\begin{aligned} A^p(\mathcal{U},U_0)\times A^{n-p}(U_1) &\to \mathbb{C}\\ ((0,\,\alpha_0,\,\alpha_{01}),\,\beta_1) &\to \int_T \alpha_1\wedge\beta_1 - \int_{\partial T}\alpha_{01}\wedge\beta_1. \end{aligned}$$

Puisque U_1 se rétracte par déformation sur Σ, le groupe d'homologie $H_{n-p}(\Sigma)$ est isomorphe à $H\,(\mathrm{Hom}\,(A^{n-p}(U_1),\ \mathbb{C}))$ et la dualité d'Alexander-Lefschetz

$$H^p(M, M-\Sigma;\mathbb{C}) \to H_{n-p}(\Sigma,\mathbb{C})$$

est induite par le morphisme

$$\begin{aligned} A^p(\mathcal{U},U_0) &\to \mathrm{Hom}\left(A^{n-p}(U_1),\,\mathbb{C}\right)\\ (0,\,\alpha_0,\,\alpha_{01}) &\to \left(\beta_1 \to \int_T \alpha_1\wedge\beta_1 - \int_{\partial T}\alpha_{01}\wedge\beta_1\right). \end{aligned}$$

4. Théorème d'annulation

Soit $f: V\to W$ une application holomorphe. Supposons que pour tout point x de V, la différentielle de f en x soit surjective. Les composantes connexes des fibres de f définissent alors sur V un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de dimension $n-q$. Notons $T_{\mathcal{F}}$ le fibré tangent à ce feuilletage. On a une suite exacte

$$0\to T_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\iota} TV \xrightarrow{df} f^{-1}(TW)\to 0 \quad (1),$$

où ι désigne l'inclusion de $T_{\mathcal{F}}$ dans TV.

Soit ∇^W une connexion sur $f^{-1}(TW)$ et $\nabla^{\mathcal{F}}$ une connexion sur $T_{\mathcal{F}}$. On peut construire une connexion ∇_0 sur TV telle que la famille $(\nabla^{\mathcal{F}},\nabla_0,\nabla^W)$ soit compatible avec (1), c'est-à-dire vérifie les relations

$$\iota\circ\nabla^{\mathcal{F}} = \nabla_0\circ\iota, \quad df\circ\nabla_0 = \nabla^W\circ df.$$

En effet soit Q un sous-fibré de TV telle que $TV = T_{\mathcal{F}}\oplus Q$; la restriction de df à Q réalise un isomorphisme de Q sur $f^{-1}(TW)$. Considérons sur Q la connexion $\nabla^Q = (df|Q)^{-1}\circ\nabla^W\circ(df|Q)$. Etant donnée une connexion quelconque $\nabla^{\mathcal{F}}$ sur $T_{\mathcal{F}}$, soit $\nabla_0 = \nabla^{\mathcal{F}}\oplus\nabla^Q$. Le triple $(\nabla^{\mathcal{F}},\nabla_0,\nabla^W)$ satisfait les relations ci-dessus.

On munit le fibré virtuel $[TV - f^{-1}(TW)]$ de la paire $\overset{\bullet}{\nabla}_0 = [\nabla_0,\nabla^W]$. En utilisant un raisonnement analogue à celui de [B – B], il est facile de voir que la compatibilité du triple $(\nabla^{\mathcal{F}}, \nabla_0, \nabla^W)$ avec la suite exacte (1) implique que les éléments $c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_0)$ et $c_j(\nabla^{\mathcal{F}})$ sont égaux. Puisque $T_{\mathcal{F}}$ est de rang $n-q$, on a donc le:

Théorème 4.1 (théorème d'annulation) *Pour tout $j \geq n-q+1$, on a:*

$$c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_0) = 0.$$

Soit $\left((\nabla_\ell^{\mathcal{F}}, \nabla_\ell, \nabla_\ell^W)\right)_{\ell=0,\dots,k}$ une famille de triples compatibles avec la suite exacte (1). Posons $\overset{\bullet}{\nabla}_\ell = [\nabla_\ell, \nabla_\ell^W]$. La proposition suivante généralise le théorème 4.1.

Proposition 4.2 *Pour tout $j \geq n-q+1$, on a:*

$$c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \dots, \overset{\bullet}{\nabla}_k) = 0.$$

Démonstration Considérons les fibrés $T_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}^{k+1}$, $TV \times \mathbb{R}^{k+1}$ et $f^{-1}(TW) \times \mathbb{R}^{k+1}$ de base $V \times \mathbb{R}^{k+1}$. On a une suite exacte

$$0 \to T_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}^{k+1} \xrightarrow{\iota \times 1_{\mathbb{R}^{k+1}}} TV \times \mathbb{R}^{k+1} \xrightarrow{df \times 1_{\mathbb{R}^{k+1}}} f^{-1}(TW) \times \mathbb{R}^{k+1} \to 0 \quad (2).$$

Le triple $(\tilde{\nabla}^{\mathcal{F}}, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^W)$ où $\tilde{\nabla}^{\mathcal{F}} = t_0\nabla_0^{\mathcal{F}} + \cdots + t_k\nabla_k^{\mathcal{F}}$, $\tilde{\nabla} = t_0\nabla_0 + \cdots + t_k\nabla_k$ et $\tilde{\nabla}^W = t_0\nabla_0^W + \cdots + t_k\nabla_k^W$, est compatible avec (2). Par suite on a, en posant $\overset{\bullet}{\tilde{\nabla}} = [\tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^W]$, $c_j(\tilde{\nabla}^{\mathcal{F}}) = c_j(\overset{\bullet}{\tilde{\nabla}})$. D'où $c_j(\overset{\bullet}{\tilde{\nabla}}) = 0$ si $j \geq n-q+1$, ce qui entraîne que $c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \dots, \overset{\bullet}{\nabla}_k) = \pi_\star(c_j(\overset{\bullet}{\tilde{\nabla}})) = 0$.

5. Preuve du théorème d'existence de résidus

Considérons maintenant une application holomorphe $f : V \to W$ ayant des singularités. Le lieu singulier de f est l'ensemble $\Sigma = \{x \in V : \operatorname{rang}(df_x) \leq q-1\}$.

Supposons que Σ soit compact. Cette hypothèse est évidemment toujours vérifiée si la variété V est elle même compacte. Soit $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ l'ensemble des composantes connexes de Σ.

Considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_0, U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de V qui vérifie les conditions suivantes:

i) $U_0 = V - \Sigma$,
ii) pour chaque $\alpha \in I$, U_α est un voisinage de Σ_α qui se rétracte par déformation sur Σ_α,
iii) si $\alpha \in I$ et $\beta \in I$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$.

On va exprimer les classes de Chern $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ dans le complexe de Čech - de Rham associé au recouvrement $\mathcal{U}$.

Notons $T_{\mathcal{F}_0}$ le fibré holomorphe tangent au feuilletage défini par la restriction de f à U_0; on a une suite exacte

$$0 \to T_{\mathcal{F}_0} \xrightarrow{\iota} TV|U_0 \xrightarrow{df} f^{-1}(TW) \mid U_0 \to 0 \quad (3).$$

Soit ∇^W une connexion fixée sur $f^{-1}(TW)$ et soit $\nabla^{\mathcal{F}_0}$ une connexion sur $T\mathcal{F}_0$. Considérons une connexion ∇_0 sur $TV|U_0$ telle que le triple $(\nabla^{\mathcal{F}_0}, \nabla_0, \nabla^W)$ soit compatible avec (3); sur $[TV - f^{-1}(TW)] \mid U_0$, on considère la paire $\overset{\bullet}{\nabla}_0 = [\nabla_0, \nabla^W]$.

Soit ∇_α une connexion sur $TV|U_\alpha$. On munit $[TV - f^{-1}(TW)] \mid U_\alpha$ de la paire $\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha = [\nabla_\alpha, \nabla^W]$.

Soit $i \geq 1$. D'après le théorème 4.1., on a: $c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0) = 0$. L'élément $(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))_{\alpha \in I}$ est donc un cocycle de $A^{2n-2q+2i}(\mathcal{U})$:

$$D\left(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)\right)_{\alpha \in I} = 0.$$

L'égalité précédente implique que $(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))_{\alpha \in I}$ est aussi un cocycle du complexe $A^{2n-2q+2i}(\mathcal{U}, U_0)$.

Proposition 5.1 *La classe de cohomologie relative de* $(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))_{\alpha \in I}$ *ne dépend pas du choix des connexions* ∇^W, ∇_0 *et* ∇_α.

Démonstration Soient ∇'^W, ∇'_0 et ∇'_α d'autres connexions sur $f^{-1}(TW), TV|U_0$ et $TV|U_\alpha$ respectivement, telles que $df \circ \nabla'_0 = \nabla'^W \circ df$. Considérons les paires $\overset{\bullet}{\nabla'_0} = [\nabla'_0, \nabla'^W]$ et $\overset{\bullet}{\nabla'_\alpha} = [\nabla'_\alpha, \nabla'^W]$; on a:

$$\begin{aligned} &c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla'_\alpha}) - c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) \\ &\quad = c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla'_\alpha}) - c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla'_0}) \\ &\qquad - dc_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla'_\alpha}) - dc_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha). \end{aligned}$$

La proposition 4.2 entraîne que $c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}'_0) = 0$. D'où:

$$\begin{aligned}(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}'_0, \overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha)) - (0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)) \\ = (0, dc_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha) - dc_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}'_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha) \\ - dc_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}'_0, \overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)).\end{aligned}$$

On remarque que le dernier terme de l'égalité précédente n'est rien d'autre que

$$D\Big(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha),\ c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}'_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha, \overset{\bullet}{\nabla}'_\alpha) + c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}'_0, \overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)\Big)_{\alpha\in I},$$

ce qui achè-ve la démonstration.

On voit, en utilisant l'isomorphisme

$$H^{2n-2q+2i}_{DR}(V, \mathbb{C}) \xrightarrow{[\imath]} H^{2n-2q+2i}(\mathcal{A}(\mathcal{U})),$$

que la classe de cohomologie relative de $(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))_{\alpha\in I}$ est un relèvement naturel de $c_{n-q+i}[TV - f^{-1}(TW)]$ dans $H^{2n-2q+2i}(V, V - \Sigma)$. Cet élément de $H^{2n-2q+2i}(V, V-\Sigma)$ sera appelé classe de cohomologie **résiduelle**. Son image dans $H_{2q-2i}(\Sigma)$ par la dualité d'Alexander-Lefschetz sera notée $\mathrm{Res}(c_{n-q+i}, f)$. On notera $\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)$ la composante de $\mathrm{Res}(c_{n-q+i}, f)$ suivant Σ_α.

Si $\mathcal{T}_\alpha$ est une sous-variété compacte à bord de V, de dimension n et de bord $\partial\mathcal{T}_\alpha$ telle que $\Sigma_\alpha \subset \mathcal{T}_\alpha \subset U_\alpha$ et $\partial\mathcal{T}_\alpha \cap \Sigma_\alpha = \emptyset$, alors $\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)$ est l'élément de $H_{2q-2i}(\Sigma_\alpha)$ défini par le morphisme

$$[\omega] \to \int_{\mathcal{T}_\alpha} c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) \wedge \omega - \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) \wedge \omega$$

de $H^{2q-2i}(U_\alpha)$ dans $\mathbb{C}$. Puisque $(0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))_{\alpha\in I}$ est un cocycle, l'intégrale ci-dessus ne dépend pas du choix de $\mathcal{T}_\alpha$, comme on l'a vu en 3.2.

Si V est compacte, soit $(\omega_0, \omega_\alpha, \omega_{0\alpha})$ un cocycle de $A^{2q-2i}(\mathcal{U})$. L'intégrale $\int_V (0, c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))_{\alpha\in I} \smile (\omega_0, \omega_\alpha, \omega_{0\alpha})$ est alors égale à la somme $\sum_\alpha \mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)([\omega_\alpha])$.

Le théorème 2.1 est donc démontré.

La section suivante est consacrée à la mise en place des outils utilisés dans la démonstration des autres résultats.

6. Construction de connexions adaptées

Munissons V d'une métrique g; on note δ la distance définie par g sur V.

Soit Σ_α une composante connexe de Σ. Etant donné un réel ρ assez petit, soit $U_\alpha = \{x \in V/\delta(x, \Sigma_\alpha) < \rho\}$ un voisinage tubulaire de Σ_α. On désigne par p l'application de projection orthogonale $p : U_\alpha \to \Sigma_\alpha$ de U_α sur Σ_α. Puisque p est une rétraction par déformation de U_α sur Σ_α, il existe un isomorphisme

$$\xi : TV|U_\alpha \to p^{-1}(TV|\Sigma_\alpha)$$

dont la restriction à $TV|\Sigma_\alpha$ est l'identité.

D'après les hypothèses, le noyau de la restriction de df à $TV|\Sigma_\alpha$ est un sous-fibré K_α de $TV|\Sigma_\alpha$ de rang $n - q + 1$. Soit H_α un supplémentaire de K_α dans $TV|\Sigma_\alpha$.

Considérons la décomposition $TV|U_\alpha = H \oplus K$, où l'on a posé $K = \xi^{-1}\left(p^{-1}(K_\alpha)\right)$ et $H = \xi^{-1}\left(p^{-1}(H_\alpha)\right)$. La preuve du théorème 2.3 utilise le lemme clé suivant:

Lemme 6.1 *Si ρ est assez petit, il existe des connexions ∇^W, ∇^W_α, ∇^W_Σ, ∇_α, ∇_0 qui vérifient les propriétés suivantes*:

1. *∇^W et ∇^W_Σ sont des connexions sur $f^{-1}(TW)$ et $f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha$ respectivement, telles que $c_j(\nabla^W) \mid U_\alpha = p^\star\left(c_j(\nabla^W_\Sigma)\right)$ pour tout entier $j \geq 0$;*
2. *∇_α est une connexion sur $TV|U_\alpha$ qui préserve le sous-fibré H, et telle que $c_k(\nabla_\alpha)$ soit une forme différentielle p-projetable pour tout k;*
3. *∇_0 est une connexion sur $TV|U_0$ telle que*:
   i) *$df \circ \nabla_0 = \nabla^W \circ df$,*
   ii) *$\nabla_0 s = \nabla_\alpha s$ pour toute section s de H au-dessus de $U_0 \cap U_\alpha$.*

Rappelons qu'une m-forme différentielle est dite p-projetable s'il est de la forme $p^\star\lambda$, avec $\lambda \in A^m(\Sigma_\alpha)$.

Démonstration du lemme 6.1

1. Soit γ la restriction de df à H. Puisque γ est injective au-dessus de Σ_α, il existe un voisinage U'_α de Σ_α tel que γ reste injective (de rang $q - 1$) sur U'_α. En choisissant ρ assez petit, on peut supposer qu'on a $U'_\alpha = U_\alpha$. Le

fibré $\gamma(H)$ est un sous-fibré de $f^{-1}(TW) \mid U_\alpha$(de rang $q-1$), qu'on notera F^1.

Puisque p est une rétraction par déformation, il existe un isomorphisme

$$\varpi_1 : F_1 \to p^{-1}(F^1_\Sigma),$$

où $F^1_\Sigma = F^1 \mid \Sigma_\alpha = df(TV|\Sigma_\alpha)$.

Soit F^2 un supplémentaire de F^1 dans $f^{-1}(TW) \mid U_\alpha$. Il existe aussi un isomorphisme

$$\varpi_2 : F^2 \to p^{-1}(F^2_\Sigma),$$

avec $F^2_\Sigma = F^2 \mid \Sigma_\alpha$.

Soit ∇^1_Σ (respectivement ∇^2_Σ) une connexion sur F^1_Σ (respectivement sur F^2_Σ). On munit respectivement les fibrés F^1 et F^2 des connexions $\nabla^{F^1} = \varpi_1^{-1}(p^\star\nabla^1_\Sigma)$ et $\nabla^{F^2} = \varpi_2^{-1}(p^\star\nabla^2_\Sigma)$. En posant $\nabla^W_\alpha = \nabla^{F^1} \oplus \nabla^{F^2}$ et $\nabla^W_\Sigma = \nabla^1_\Sigma \oplus \nabla^2_\Sigma$, il est facile de voir qu'on a: $c_j(\nabla^W_\alpha) = p^\star(c_j(\nabla^W_\Sigma))$, pour tout entier j. De plus on peut construire une connexion ∇^W sur $f^{-1}(TW)$ qui coïncide avec ∇^W_α au voisinage de Σ_α.

2. Sur H, on considère la connexion $\nabla^H = \gamma^{-1}(\nabla^{F^1})$. Les courbures de ∇^{F^1} et de ∇^H sont égales, car γ est un isomorphisme; par suite on a: $c_k(\nabla^H) = p^\star(c_k(\nabla^1_\Sigma))$ pour tout entier k.

Soit ∇^{K_Σ} une connexion sur K_Σ; on pose $\nabla^K = \xi^{-1}(p^\star\nabla^{K_\Sigma})$. La connexion ∇_α définie sur $TV|U_\alpha$ par $\nabla_\alpha = \nabla^H \oplus \nabla^K$ satisfait la condition 2.

3. Posons $U_{0\alpha} = U_0 \cap U_\alpha$. Soit Q un sous-fibré en droites de $TV|U_{0\alpha}$ tel que $TV|U_{0\alpha} = T_{\mathcal{F}_0} \oplus H \oplus Q$. Choisissant Q de façon que son image par df soit égale à $F^2|U_{0\alpha}$, on le munit de la connexion $\nabla' = (df|Q)^{-1}(\nabla^{F^2})$. Etant donnée une connexion quelconque $\nabla^{\mathcal{F}_0}$ sur $T_{\mathcal{F}_0}$, l'élément $\nabla^\alpha_0 = \nabla^{\mathcal{F}_0} \oplus \nabla^H \oplus \nabla'$ vérifie la propriété 3. Maintenant en utilisant une partition de l'unité, on peut construire une connexion ∇_0 qui coïncide avec ∇^α_0 sur un voisinage U'' de Σ_α. Quitte à choisir de nouveau ρ suffisamment petit, on peut supposer que U'' est égal à U_α.

Dans la suite, on se restreindra à l'ouvert $U_\alpha; \nabla_0, \nabla_\alpha, \nabla^W$ désigneront, sauf mention du contraire, des connexions données par le lemme 6.1. On note ∇^K_0 et ∇^K_α les connexions induites sur K respectivement par ∇_0 et ∇_α. Soit ∇^H la connexion induite par ∇_α sur le sous-fibré H.

On peut faire les remarques suivantes:

i) comme $TV|U_\alpha = H \oplus K$, $f^{-1}(TW) \mid U_\alpha = F^1 \oplus F^2$, le fait que H est isomorphe à F^1 entraîne que $[TV - f^{-1}(TW)] \mid U_\alpha = [K - F^2]$;

ii) en posant $\overset{\bullet}{\nabla}{}_0^K = [\nabla_0^K, \nabla^{F^2}]$ et $\overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K = [\nabla_\alpha^K, \nabla^{F^2}]$, on obtient les relations suivantes, qui découlent immédiatement de la construction des connexions ∇_α, ∇_0 et ∇^W:

$$c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) = c_j(\overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) \quad (1),$$

$$c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_0) = c_j(\overset{\bullet}{\nabla}{}_0^K) \quad (2),$$

$$c_j(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) = c_j(\overset{\bullet}{\nabla}{}_0^K, \overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) \quad (3).$$

Soit $\omega \in A^{2q-2i}(\Sigma_\alpha)$ telle que $d\omega = 0$. On pose $u = p^\star(\omega)$.

Lemme 6.2 *Pour $i \geq 1$, on a:*

1. $c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) \wedge u = 0$;
2. $c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}{}_0^K, \overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) \wedge u = (-1)^{i-1} p^\star(c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega) \wedge c_{n-q+1}(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K)$.

Démonstration du lemme 6.2. La première assertion du lemme est évidente; elle découle du fait que la $2n$-forme $c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) \wedge u$ est p-projetable sur Σ_α.

Pour prouver la deuxième partie du lemme, on observe que:

$$\begin{aligned} c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}{}_0^K, \overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) &= \left[\frac{1 + c_1(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K) + \cdots + c_{n-q+1}(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K)}{1 + c_1(\nabla^{F^2})}\right]_{n-q+i} \\ &= \sum_{k+\ell=n-q+i} (-1)^\ell c_k(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K) c_1^\ell(\nabla^{F^2}). \end{aligned}$$

Puisque $c_1(\nabla^{F^2}) = p^\star c_1(\nabla_\Sigma^2)$, on a:

$$\begin{aligned} & c_{n-q+i}(\overset{\bullet}{\nabla}{}_0^K, \overset{\bullet}{\nabla}{}_\alpha^K) \wedge u \\ & \qquad = \sum_{k+\ell=n-q+i} (-1)^\ell p^\star(c_1^\ell(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega) \wedge c_k(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K). \end{aligned}$$

Dans cette somme, seul le terme $(-1)^{i-1} p^\star(c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega) \wedge c_{n-q+1}(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K)$ peut être non nul. En effet:

- si $k > n - q + 1$, $c_k(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K)$ est alors nul car le fibré K est de rang $n - q + 1$.

- si $k < n-q+1$, $c_1^\ell(\nabla_\Sigma^2)\wedge\omega$ est une forme différentielle dont le degré est strictement supérieur à la dimension réelle de Σ_α et est par conséquent nulle. D'où le résultat.

Pour $i = 1$, la deuxième assertion du lemme 6.2 s'écrit:

$$c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0^K, \dot{\nabla}_\alpha^K) \wedge u = p^\star\omega \wedge c_{n-q+1}(\nabla_0^K, \nabla_\alpha^K).$$

En tenant compte des relations (1), (2) et (3) ci-dessus, on peut alors reformuler le lemme 6.2 de la manière suivante:

Lemme 6.2′ *Pour $i \geq 1$, on a:*

1. $c_{n-q+i}(\dot{\nabla}_\alpha) \wedge u = 0$;
2. $c_{n-q+i}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha) \wedge u = (-1)^{i-1}p^\star(c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega) \wedge c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha)$.

7. Démonstration du lemme 2.2

Soit r tel que $0 < r < \rho$. L'ensemble $\mathcal{T}_\alpha = \{x \in V/\delta(x, \Sigma_\alpha) \leq r\}$ est une sous-variété compacte de U_α, de dimension réelle $2n$ et de bord $\partial\mathcal{T}_\alpha = \{x \in V/\delta(x, \Sigma_\alpha) = r\}$. Pour chaque $t \in \Sigma_\alpha$, on pose $F_t = p^{-1}(t) \cap \mathcal{T}_\alpha$ et $\partial F_t = p^{-1}(t) \cap \partial\mathcal{T}_\alpha$.

Désignons par $p_\star$ (respectivement $p_\star^\partial$) l'opérateur d'intégration le long des fibres de $p|\mathcal{T}_\alpha$ (respectivement $p|\partial\mathcal{T}_\alpha$).

Considérons la fonction $\mu(t) = p_\star(c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha))(t) - p_\star^\partial(c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha))(t)$. On a:

$$\mu(t) = \int_{F_t} c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha)) - \int_{\partial F_t} c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha).$$

Proposition 7.1 *μ est une fonction constante sur Σ_α.*

Démonstration Puisque $c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha)$ est une forme différentielle p-projetable, on a:

$$p_\star(c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha))(t) = \int_{F_t} c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha) = 0.$$

D'autre part, la variété $\partial\mathcal{T}_\alpha$ étant sans bord, on a, d'après les propriétés de l'intégration le long des fibres rappelées au chapitre I,

$$d(p_\star^\partial c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha)) = -p_\star^\partial(dc_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha)).$$

Mais $dc_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha) = c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha) - c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0)$. Par le même argument que ci-dessus, on a $p^\partial_\star(c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha)) = 0$; de plus $c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0)$ est nulle (théorème d'annulation 4.1).

Finalement on a:

$$d\mu = -d(p^\partial_\star c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha)) = 0,$$

d'où la fonction μ prend une valeur constante μ_α sur Σ_α.

Soit σ un point régulier de Σ_α fixé une fois pour toutes. Considérons une carte $(U, z_1, \dots, z_n)$ de $V, \sigma \in U$ et une carte $(\bar{U}, v_1, \dots, v_q)$ de $W, y_0 = f(\sigma) \in \bar{U}$ telles que:

i) $\forall m = 1, \dots, n, z_m(\sigma) = 0$ et $\Sigma_\alpha \cap U = \{p \in U / z_q(p) = \cdots = z_n(p) = 0\}$,

ii) $f(U) \subset \bar{U}$ et $v_1 \circ f = z_1, \dots, v_{q-1} \circ f = z_{q-1}$.

Soit $\tau_\sigma = \{p \in U / z_1(p) = \cdots = z_{q-1}(p) = 0\}$. On note f_σ la restriction de $v_q \circ f$ à τ_σ. On va montrer que la constante μ_α donnée par la proposition 7.1 est, au signe près, le nombre de Milnor de l'hypersurface $\mathcal{H} = f_\sigma^{-1}(v_q(y_0))$ au point σ.

Remarquons d'abord que si les ouverts U_α et U sont assez petits, on peut choisir la métrique g de sorte que la fibre $p^{-1}(\sigma)$ coïncide avec la transversale τ_σ. Dans ces conditions on a:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \int_{F_\sigma} c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha) - \int_{\partial F_\sigma} c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha) \\ &= \int_{\tau_\sigma} (0, c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_\alpha), c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha)). \end{aligned}$$

Soit $\nabla^{\bar{U}}$ la connexion sur $TW|\bar{U}$ définie par $\nabla^{\bar{U}} \frac{\partial}{\partial v_j} = 0$ pour $j = 1, \dots, q$ et soit $\nabla'^W = f^\star \nabla^{\bar{U}}$ le pull-back de $\nabla^{\bar{U}}$ sur $f^{-1}(TW)|U$.

Soit E le sous-fibré de $TV|U$ engendré par $\{\frac{\partial}{\partial z_q}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$. Le noyau de la différentiel-le de $f|U$ étant contenu dans E, il existe une connexion ∇'_0 sur $TV|(U - \Sigma_\alpha)$ qui satisfait les conditions suivantes:

a) $\nabla'_0 \frac{\partial}{\partial z_i} = 0$ pour $i = 1, \dots, q-1$,

b) $df \circ \nabla'_0 = \nabla'^W \circ df$

c) ∇'_0 préserve le sous-fibré E.

On munit $TV|U$ de la connexion ∇_U triviale relativement à la base de sections locales $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$.

Considérons les paires $\overset{\bullet}{\nabla'_0}= [\nabla'_0, \nabla'^W]$ et $\overset{\bullet}{\nabla}_U= [\nabla_U, \nabla'^W]$. Les cocycles $(0, c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))|U$ et $(0, c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_U), c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla}_U))$ sont cohomologues; par suite les intégrales

$$I_1 = \int_{\tau_\sigma} (0, c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha), c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha))$$

et

$$I_2 = \int_{\tau_\sigma} (0, c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_U), c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla}_U))$$

sont égales.

Maintenant l'application $f_\sigma : \tau_\sigma \to \mathbb{C}$ définit le résidu $\mathrm{Res}_\sigma(c_{n-q+1}, f_\sigma)$. On peut calculer ce résidu en utisant les connexions ∇^σ et ∇^σ_0 induites respectivement par ∇_U et ∇'_0 sur $T\tau_\sigma$ et $T\tau_\sigma \mid (\tau_\sigma - \{\sigma\})$. Soit $\nabla^{\mathbb{C}}$ la connexion triviale sur le fibré holomorphe $T\mathbb{C}$ tangent à $\mathbb{C}$.

Posons $\overset{\bullet}{\nabla^\sigma}= [\nabla^\sigma, f^\star_\sigma \nabla^{\mathbb{C}}]$, $\overset{\bullet}{\nabla^\sigma_0}= [\nabla^\sigma_0, f^\star_\sigma \nabla^{\mathbb{C}}]$.

Soit F le sous-fibré de $TW|U$ engendré par $\frac{\partial}{\partial z_q}$. En utilisant le fait que les connexions ∇'_0 et ∇_U préservent le fibré $T\tau_\sigma$ et que $df(T\tau_\sigma)$ est contenue dans $f^{-1}F$, on obtient:

$$\begin{aligned} c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla^\sigma}) &= \jmath^\star c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_U), \\ c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla^\sigma_0}, \overset{\bullet}{\nabla^\sigma})) &= \jmath^\star c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla}_U). \end{aligned}$$

Dans les relations précédentes, $\jmath^\star$ désigne le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion $\jmath$ de τ_σ dans U. D'où:

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_\sigma} (0, c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_U), c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla'_0}, \overset{\bullet}{\nabla}_U)) \\ &\qquad = \int_{\tau_\sigma} (0, c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla^\sigma}), c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla^\sigma_0}, \overset{\bullet}{\nabla^\sigma})) \\ &\qquad = \mathrm{Res}_\sigma(c_{n-q+1}, f_\sigma). \end{aligned}$$

Le calcul de ce résidu se ramène, via les coordonnées locales, à celui du résidu d' une fonction holomorphe $h : \mathbb{C}^{n-q+1} \to \mathbb{C}$ ayant une singularité isolée en 0. Le lemme suivant montre que $\mathrm{Res}_\sigma(c_{n-q+1}, f_\sigma)$ est égal à $(-1)^{n-q+1}\mu_\alpha$.

Lemme 7.2 *Soit $h : \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $h(0) = 0$, qui possède une singularité isolée en 0. Si l'on note μ_0 le nombre de Milnor en 0 de l'hypersurface $h^{-1}(0)$, alors:* $\mathrm{Res}_0(c_m, h) = (-1)^m \mu_0$.

Démonstration[1] On désigne respectivement par $(z_1, \ldots, z_n)$ et x les coordonnées canoniques sur $\mathbb{C}^m$ et $\mathbf{C}$. Soit ∇_1 (respectivement ∇) la connexion sur $T\mathbb{C}^m$ (respectivement $T\mathbb{C}$) définie par $\nabla_1 \frac{\partial}{\partial z_i} = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$ (respectivement $\nabla \frac{\partial}{\partial x} = 0$). On pose $\nabla^c = h^\star \nabla$.

Soit ∇_0 une connexion sur $T(\mathbb{C}^m - \{0\})$ telle que $dh \circ \nabla_0 = \nabla^c \circ dh$. Si on pose $\overset{\bullet}{\nabla}_0 = [\nabla_0, \nabla^c]$, $\overset{\bullet}{\nabla}_1 = [\nabla_1, \nabla^c]$, alors on a: $\mathrm{Res}_0(c_m, h) = -\int_S c_m (\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_1)$, où $S = \{z : |\frac{\partial h}{\partial z_1}(z)|^2 + \cdots + |\frac{\partial h}{\partial z_m}(z)|^2 = m\epsilon^2\}$ est orientée par la normale sortante.

Considérons le recouvrement ouvert $\mathcal{U}' = (U^i)_{i=1,\ldots,m}$ de $\mathbb{C}^m - \{0\}$ où $U^i = \{z : \frac{\partial h}{\partial z_i}(z) \neq 0\}$. Pour chaque i, on munit $T\mathbb{C}^m \,|\, U^i$ de la connexion $\nabla^{(i)}$ donnée par: $\nabla^{(i)} \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{d(\frac{\partial h}{\partial z_j})}{\frac{\partial h}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial z_i}$, $j = 1, \ldots, m$. On a: $dh \circ \nabla^{(i)} = \nabla^c \circ dh$.

Notant $\overset{\bullet}{\nabla}^{(i)} = [\nabla^{(i)}, \nabla^c]$, on a les propriétés suivantes:

1): $c_m(\nabla_0, \nabla^{(i_1)}, \ldots, \nabla^{(i_k)}) = c_m(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}^{(i_1)}, \ldots, \overset{\bullet}{\nabla}^{(i_k)}) = 0$ pour tout entier k;

2): $c_m(\nabla^{(i_1)}, \ldots, \nabla^{(i_k)}) = c_m(\overset{\bullet}{\nabla}^{(i_1)}, \ldots, \overset{\bullet}{\nabla}^{(i_k)}) = 0$ pour tout entier k;

3): $c_m(\nabla_1, \nabla^{(i_1)}, \ldots, \nabla^{(i_\ell)}) = c_m(\overset{\bullet}{\nabla}_1, \overset{\bullet}{\nabla}^{(i_1)}, \ldots, \overset{\bullet}{\nabla}^{(i_\ell)}) = 0$, si $\ell < m$;

4): $c_m(\nabla_1, \nabla^{(1)}, \ldots, \nabla^{(m)}) = c_m(\overset{\bullet}{\nabla}_1, \overset{\bullet}{\nabla}^{(1)}, \ldots, \overset{\bullet}{\nabla}^{(m)})$
$$= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^m \frac{d(\frac{\partial h}{\partial z_1}) \wedge \cdots \wedge d(\frac{\partial h}{\partial z_m})}{\frac{\partial h}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial z_m}}.$$

On utilisera la méthode de [Le3]. Considérons l'élément τ de $A^{2m-2}(\mathcal{U})$ défini par:

$$\tau_{i_0 \ldots\, i_k} = (-1)^{[\frac{k}{2}]} c_m(\nabla_0, \nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \ldots, \nabla^{(i_k)}).$$

Puisque les éléments $c_m(\nabla_1, \nabla^{(i)})$ et $c_m(\nabla_0, \nabla^{(i)})$ sont nuls, on a:

---

[1] L'idée de cette démonstration est due à Lehmann et Suwa.

$$\begin{aligned}(D\tau)_i &= dc_m(\nabla_0, \nabla_1, \nabla^{(i)}) \\ &= c_m(\nabla_0, \nabla_1) + c_m(\nabla_1, \nabla^{(i)}) - c_m(\nabla_0, \nabla^{(i)}) \\ &= c_m(\nabla_0, \nabla_1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D\tau)_{i_0 \dots\, i_k} &= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \tau_{i_0 \dots \hat{i_\nu} \dots i_k} + (-1)^k d\tau_{i_0 \dots\, i_k} \\ &= (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu c_m(\nabla_0, \nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \hat{\nabla}^{(i_\nu)}, \dots \nabla^{(i_k)}) \\ &\quad + (-1)^k d\tau_{i_0 \dots\, i_k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^k d\tau_{i_0 \dots\, i_k} &= (-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} dc_m(\nabla_0, \nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)}) \\ &= (-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \Big(\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu c_m(\nabla_0, \nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \hat{\nabla}^{(i_\nu)}, \dots \nabla^{(i_k)}) \\ &\quad + c_m(\nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)}) - c_m(\nabla_0, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)}) \Big).\end{aligned}$$

Des égalités $(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} + (-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} = 0$ et $c_m(\nabla_0, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)}) = 0$, il résulte:

$$\begin{aligned}(D\tau)_{i_0 \dots\, i_k} &= (-1)^{k+\left[\frac{k}{2}\right]} (c_m(\nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)}) \\ &\qquad - c_m(\nabla_0, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)})) \\ &= (-1)^{k+\left[\frac{k}{2}\right]}\, c_m(\nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)}).\end{aligned}$$

D'après 2), l'élément $c_m(\nabla_1, \nabla^{(i_0)}, \dots, \nabla^{(i_k)})$ est nul si $k < m - 1$. Finalement on a:

$$\left\{ \begin{aligned} (D\tau)_i &= c_m(\nabla_0, \nabla_1) \\ (D\tau)_{i_0 \dots\, i_k} &= 0 \quad \text{si} \quad k < m - 1 \\ (D\tau)_{1 \dots\, m} &= (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}\, c_m(\nabla_1, \nabla^{(1)}, \dots, \nabla^{(m)}). \end{aligned} \right.$$

Les traces Ω_i des ouverts $U^{(i)}$ sur S forment un recouvrement de S. On définit un système d'alvéoles $(R^i)_{i=1,\dots,m}$ adapté à ce recouvrement en posant $R^i = \{z \in \Omega_i : |\frac{\partial h}{\partial z_i}|(z) \geq |\frac{\partial h}{\partial z_j}|(z)\ si\ i \neq j\}$. Notons R l'intersection des R^i. En utilisant le principe d'intégration sur le complexe de Čech-de

Rham, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_S D\tau &= \sum_{i=1}^{m} \int_{R^i} c_m(\nabla_0, \nabla_1) + (-1)^{[\frac{m}{2}]} \int_R c_m(\nabla_1, \nabla^{(1)}, \dots, \nabla^{(m)}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_0(c_m, f) &= -\int_S c_m(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_1) \\ &= -\int_S c_m(\nabla_0, \nabla_1) \\ &= (-1)^{[\frac{m}{2}]} \int_R c_m(\nabla_1, \nabla^{(1)}, \dots, \nabla^{(m)}) \\ &= (-1)^{[\frac{m}{2}]} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^m \int_R \frac{d(\frac{\partial h}{\partial z_1}) \wedge \cdots \wedge d(\frac{\partial h}{\partial z_m})}{\frac{\partial h}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial z_m}}.\end{aligned}$$

Si l'on considère le m-cycle $\Gamma = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |\frac{\partial h}{\partial z_1}| = \cdots = |\frac{\partial h}{\partial z_m}| = \epsilon\}$, orienté de façon que la forme $d(\arg \frac{\partial h}{\partial z_1}) \wedge \cdots \wedge d(\arg \frac{\partial h}{\partial z_m})$ soit positive, on a alors $\Gamma = (-1)^{[\frac{m}{2}]} R$. Par suite on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_0(c_m, f) &= \left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^m \int_\Gamma \frac{d(\frac{\partial h}{\partial z_1}) \wedge \cdots \wedge d(\frac{\partial h}{\partial z_m})}{\frac{\partial h}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial z_m}} \\ &= (-1)^m \mu_0.\end{aligned}$$

8. Démonstration du théorème 2.3

Soit $\omega \in A^{2q-2i}(\Sigma_\alpha)$ telle que $d\omega = 0$. En posant $u = p^\star(\omega)$, on obtient:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)[u] = &\int_{\mathcal{T}_\alpha} c_{n-q+i}(\dot{\nabla}_\alpha) \wedge u \\ &- \int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} c_{n-q+i}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha) \wedge u.\end{aligned}$$

D'après le lemme 6.2$'$, $c_{n-q+i}(\dot{\nabla}_\alpha) \wedge u$ est nulle. De plus,

$$c_{n-q+i}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha) \wedge u = (-1)^{i-1} p^\star(c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega) \wedge c_{n-q+1}(\dot{\nabla}_0, \dot{\nabla}_\alpha).$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)[u] \\
&\quad = (-1)^i \int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} p^\star(c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega) \wedge c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) \\
&\quad = (-1)^i \int_{\Sigma_\alpha} c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega \wedge p_\star^\partial(c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)).
\end{aligned}$$

Puisque $\int_{F_\sigma} c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)$ est nulle, il vient:

$$\begin{aligned}
&p_\star^\partial(c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)) \\
&\quad = \int_{\partial F_\sigma} c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) \\
&\quad = -\left(\int_{F_\sigma} c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha) - \int_{\partial F_\sigma} c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)\right).
\end{aligned}$$

De la démonstration du lemme 2.2, on déduit que

$$p_\star^\partial(c_{n-q+1}(\overset{\bullet}{\nabla}_0, \overset{\bullet}{\nabla}_\alpha)) = (-1)^{n-q}\mu_\alpha,$$

d'où:

$$\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)[u] = (-1)^{n-q+i}\mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_1^{i-1}(\nabla_\Sigma^2) \wedge \omega.$$

Comme tout cocycle de $A^{2q-2i}(U_\alpha)$ est cohomologue à un élément de la forme $p^\star(\omega)$, il résulte de cette égalité que:

$$\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f) = (-1)^{n-q+i}\mu_\alpha \mathcal{P}_{\Sigma_\alpha}(c_1^{i-1}(F_\Sigma^2)).$$

Le fibré F_Σ^2 étant par constuction isomorphe au fibré $\mathcal{L}_\alpha$ normal à $df(TV|\Sigma_\alpha)$, le théorème 2.3 est donc démontré.

Le problème de trouver une expression explicite du résidu $\mathrm{Res}(c_{n-q+i}, f)$ reste ouvert si le lieu singulier Σ de l'application holomorphe f n'est pas lisse.

9. Démonstration des autres résultats

Posons $c_i = c_i[TV - f^{-1}(TW)]$, $c_i' = c_i(V)$, $c_i'' = f^\star c_i(W)$. De la relation $c(TV) = c[TV - f^{-1}(TW)]c(f^{-1}(TW))$, on déduit que: $c_n' = c_n + c_{n-1}c_1'' + c_{n-2}c_2'' + \cdots + c_{n-q+1}c_{q-1}'' + c_{n-q}c_q''$.

Maintenant dans l'expression $c_{n-q}c''_q$, seul le terme $c'_{n-q}c''_q$ peut être non nul pour des raisons de dimension. D'où

$$c'_n - c'_{n-q}c''_q = c_n + c_{n-1}c'_1 + c_{n-2}c''_2 + \cdots + c_{n-q+1}c''_{q-1}.$$

Par intégration on obtient:

$$\begin{aligned} &\chi(V) - \int_V c'_{n-q}c''_q \\ &\quad = \sum_\alpha \Big(\mathrm{Res}_\alpha(c_n, f) + \mathrm{Res}_\alpha(c_{n-1}, f)(c''_1) \\ &\qquad + \ \mathrm{Res}_\alpha(c_{n-2}, f)(c''_2) + \cdots + \mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+1}, f)(c''_{q-1})\Big) \quad (\star). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 2.3, on obtient:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_\alpha(c_{n-q+i}, f)(c''_{q-i}) \\ &\quad = (-1)^{n-q+i}\mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} (c_1)^{i-1}(\mathcal{L}_\alpha) \smile \iota^\star c_{q-i}(f^{-1}(TW)), \end{aligned}$$

$\iota^\star$ étant le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion de Σ_α dans V. Par conséquent, la composante suivant α du terme de droite dans l'égalité $(\star)$ est égale à:

$$(-1)^{n-q+1}\mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} c_1^{i-1}(\mathcal{L}_\alpha) \smile c_{q-i}(f^{-1}(TW)|\Sigma_\alpha).$$

On voit que la somme dans cette intégrale est égale à $c_{q-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha]$.

Si f est un revêtement ramifié à d feuillets $(n = q)$, le terme de droite dans $(\star)$ est alors égal à:

$$-\sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_{n-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha].$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \chi(V) - \int_V c'_{n-q}c''_q &= \chi(V) - \int_V f^\star c_n(W) \\ &= \chi(V) - d\chi(W), \end{aligned}$$

ce qui prouve i).

ii) De la relation $c(TV) = c[TV - f^{-1}(TW)]c(f^{-1}(TW))$, on déduit que:

$$c_i' - c_i'' = c_i + c_{i-1}c_1'' + c_{i-2}c_2'' + \cdots + c_1 c_{i-1}''.$$

Si ω est une $2n - 2i$ forme fermée, on a donc:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_V(c_i(V) - f^\star c_i(W))[\omega] \\
&\qquad = \mathrm{Res}(c_i, f)[\omega] + \mathrm{Res}(c_{i-1}, f)(f^\star c_1(W) \smile [\omega]) \\
&\qquad\qquad + \cdots + \mathrm{Res}(c_1, f)(f^\star c_{i-1}(W) \smile [\omega])
\end{aligned}$$

D'où, en posant $\sigma\eta = \mathcal{P}_V(c_i(V) - f^\star c_i(W))$, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\sigma\eta([\omega]) \\
&\quad = \sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j c_1^{j-1}(\mathcal{L}_\alpha) \smile i^\star(c_{i-j}(f^{-1}(TW)) \smile [\omega]). \\
&\quad = -\sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_{i-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha] \smile [i^\star\omega].
\end{aligned}$$

ii) en résulte.

Le corollaire 2.5 découle du fait que, si tous les points de Σ sont réguliers, on a une suite exacte

$$0 \to T\Sigma_\alpha \xrightarrow{df} f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha \to \mathcal{L}_\alpha \to 0.$$

Les classes de Chern $c_i[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha]$ et $c_i(T\Sigma_\alpha)$ sont donc égales.

Supposons maintenant $n > q$, V et W compactes et connexes. Posons $S = f(\Sigma)$, $W_0 = W - S$ et $V_0 = V - f^{(-1)}(S)$. L'ouvert W_0 est connexe et dense dans W. Soit f_0 la restriction de f à V_0. Puisque les fibres de f_0 sont compactes, cette application est, d'après un théorème de C. Ehresmann [Eh], une fibration (différentiable) localement triviale.

Notons $f_{0\star}$ l'intégration le long des fibres de f_0. Soit ∇_w une connexion sur TW; posons $\nabla^W = f^\star\nabla_w$. Considérons sur TV une connexion ∇ qui, loin de Σ, vérifie la propriété $df \circ \nabla = \nabla^W \circ df$. On a:

$$\begin{aligned}
\int_V c_{n-q}(V) f^\star c_q(W) &= \int_V c_{n-q}(\nabla) f^\star c_q(\nabla_w) \\
&= \int_{V_0} c_{n-q}(\nabla) f^\star c_q(\nabla_w)
\end{aligned}$$

$$= \int_{W_0} (f_{0\star}(c_{n-q}(\nabla)))c_q(\nabla_w).$$

Maintenant on a: $d(f_{0\star}(c_{n-q}(\nabla)) = f_{0\star}(dc_{n-q}(\nabla)) = 0$. La fonction $f_{0\star}(c_{n-q}(\nabla))$ est donc constante sur V_0. Soit Υ une fibre générique de f. Le fait que ∇ préserve, loin de Σ, le fibré tangent aux fibres de f, entraîne que $f_{0\star}(c_{n-q}(\nabla)) = \chi(\Upsilon)$. Il en résulte:

$$\int_V c_{n-q}(V)f^\star c_q(W) = \chi(\Upsilon)\chi(W).$$

On déduit alors de la relation

$$\chi(V) - \int_V c_{n-q}(V)f^\star c_q(W)$$
$$= (-1)^{n-q+1}\sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_{q-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha]$$

établie ci-dessus l'égalité:

$$\chi(V) - \chi(\Upsilon)\chi(W)$$
$$= (-1)^{n-q+1}\sum_\alpha \mu_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} c_{q-1}[f^{-1}(TW) \mid \Sigma_\alpha - \mathcal{L}_\alpha].$$

Le reste de la preuve se fait de la même manière que pour le corollaire.

10. Exemples

10.1. Exemple 1

Soit $M = \mathbb{C}P^{q+1} \times \mathbb{C}P^q$. On notera $([X_0, \ldots, X_{q+1}], [A_0, \ldots, A_q])$ un point de M. Soit V la sous-variété de M définie par les relations

$$\begin{aligned} X_0^2 + \cdots + X_{q+1}^2 &= 0, \\ A_0X_0 + \cdots + A_qX_q &= 0. \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{C}P^q \\ ([X_0, \ldots, X_{q+1}], [A_0, \ldots, A_q]) &\to [A_0, \ldots, A_q]. \end{aligned}$$

Le lieu singulier de f est $\Sigma = \{([A_0, \ldots, A_q], [A_0, \ldots, A_q, 0]) \in V\}$. C'est une sous-variété lisse de V de dimension complexe $q-1$. L'image de Σ est la sous-variété $S = \{[A_0, \ldots, A_q]/A_0^2 + \cdots + A_q^2 = 0\}$ de $\mathbb{C}P^q$. La restriction f_Σ de f à Σ est un plongement injectif de Σ dans $\mathbb{C}P^q$. Donc $df(TV|\Sigma) = f_\Sigma^{-1}(TS)$, TS étant le fibré holomorphe tangent à S. On en déduit que $f_\Sigma^{-1}(T\mathbb{C}P^q)/df(TV|\Sigma)$ est isomorphe à $f_\Sigma^{-1}(\nu_S)$, où ν_S est le fibré normal à S. Soit L le dual du fibré tautologique en droites complexes sur $\mathbb{C}P^q$. On a: $\nu_S = L^{\otimes 2}|S$.

Considérons l'ouvert $\Omega = \{m \in M/X_0 \neq 0, A_0 \neq 0\}$ de M. En posant $x_i = \frac{X_i}{X_0}$ et $a_j = \frac{A_j}{A_0}$ pour $i = 1, \ldots, q+1$, $j = 1, \ldots, q$, on obtient un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{q+1}, a_1, \ldots, a_q)$ sur Ω. Les équations de V s'écrivent dans ces coordonnées

$$\begin{aligned} 1 + x_1^2 + \cdots + x_{q+1}^2 &= 0, \\ 1 + a_1 x_1 + \cdots + a_q x_q &= 0. \end{aligned}$$

Le point $m_0 = ([1, i, 0, \ldots, 0], [1, i, 0, \cdots, 0])$ appartient à Σ. Dans un voisinage U de m_0 dans $V, x_2, \ldots, x_{q+1}, a_2, \ldots, a_q$ vont définir un système de coordonnées et l'application f s'écrit dans les coordonnées $(x_2, \ldots, x_{q+1}, a_2, \ldots, a_q), (a_1, \ldots, a_q)$:

$$(x_2, \ldots, x_{q+1}, a_2, \ldots, a_q) \to (f_2(x_2, \ldots, x_{q+1}, a_2, \ldots, a_q), a_2, \ldots, a_q),$$
$$\text{avec} \quad f_2(x_2, \ldots, x_{q+1}, a_2, \ldots, a_q) = -\frac{1 + a_2 x_2 \cdots + a_q x_q}{i\sqrt{1 + x_2^2 + \cdots + x_{q+1}^2}}.$$

La trace de Σ sur U est l'ensemble des points $m \in U$ tels que:

$$x_2(m) - a_2(m) = 0, \ldots, x_q(m) - a_q(m) = 0, x_{q+1} = 0.$$

En posant $u_2 = x_2 - a_2, \ldots, u_q = x_q - a_q, u_{q+1} = x_{q+1}$, on obtient un nouveau système de coordonnées sur U dans lequel $\Sigma \cap U$ est défini par les équations $u_2 = 0, \ldots, u_{q+1} = 0$. L'application f s'écrit alors:
$(u_2, \ldots, u_{q+1}, a_2, \ldots, a_q) \to (f_1(u_2, \ldots, u_{q+1}, a_2, \ldots, a_q), a_2, \ldots, a_q)$ avec

$$f_1(u_2, \ldots, u_{q+1}, a_2, \ldots, a_q) = -\frac{1 + \sum_{\ell=2}^q a_\ell(u_\ell + a_\ell)}{i\sqrt{1 + \sum_{\ell=2}^q (u_\ell + a_\ell)^2 + u_{q+1}^2}}.$$

Soit $\tau_{m_0} = \{m \in U/a_2(m) = 0, \ldots, a_q(m) = 0\}$ la transversale à Σ en m_0 et soit $\widetilde{f} : \tau_{m_0} \to \mathbb{C}$ la restriction de $a_1 \circ f$ à τ_{m_0}. Le point m_0 est dans $\widetilde{f}^{-1}(i)$.

Pour calculer le nombre de Milnor de l'hypersurface $\widetilde{f}^{-1}(i)$ au point m_0, considérons l'expression $h : (u_2, \ldots, u_{q+1}) \to \frac{-1}{i\sqrt{1 + u_2^2 + \cdots + u_q^2 + u_{q+1}^2}}$ de $\widetilde{f}$ dans les coordonnées $(u_2, \ldots, u_{q+1})$. Puisque le déterminant de la matrice

$(\frac{\partial^2 h}{\partial u_k \partial u_l}(0))$ est égal à $-i$, $(0,\ldots,0)$ est une singularité quadratique de h. Par conséquent le nombre de Milnor de $\widetilde{f}^{-1}(i)$ au point m_0 qui est, par définition, celui de $h^{-1}(i)$ au point $(0,\ldots,0)$, est égal à 1. En appliquant le théorème 2.3, on obtient:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(c_{n-q+1}, f) &= (-1)^q[\Sigma], \\ \operatorname{Res}(c_{n-q+i}, f) &= (-1)^{q-1+i}\mathcal{P}_\Sigma(f_\Sigma^\star(c_1^{i-1}(L^{\otimes 2}|S))). \end{aligned}$$

On a en particulier:

$$\begin{aligned} \langle c_{2q-1}[TV - f^\star(TW)], [V]\rangle &= \operatorname{Res}(c_{2q-1}, f) \\ &= -\int_S c_1^{q-1}(L^{\otimes 2}|S) \\ &= -\int_{\mathbb{C}P^q} c_1^q(L^{\otimes 2}) \\ &= -2^q \end{aligned}$$

10.2. Exemple 2

Soit V l'hypersurface (lisse) de $\mathbb{C}P^{q+1}$ d'équation $X_0^r + \cdots + X_{q+1}^r = 0$, et soit f l'application de V dans $\mathbb{C}P^q$ définie par $f([X_0,\ldots,X_{q+1}]) = [X_0,\ldots,X_q]$.

L'ensemble $\Sigma = (X_{q+1} = 0)$ est le lieu singulier de f et $f(\Sigma)$ est la sous-variété $S = (A_0^r + \cdots + A_q^r = 0)$. Comme dans l'exemple 1., la restriction f_Σ de f à Σ est un biholomorphisme de Σ sur S; ainsi $f_\Sigma^{-1}(T\mathbb{C}P^q)/df(TV|\Sigma)$ est isomorphe à $f_\Sigma^{-1}(\nu_S)$, où ν_S est le fibré normal à S. Soit L le dual du fibré tautologique en droites complexes sur $\mathbb{C}P^q$. On a: $\nu_S = L^{\otimes r}|S$.

Sur l'ouvert $\{[X_0,\ldots,X_{q+1}] \in \mathbb{C}P^{q+1}/X_0 \neq 0\}$ de $\mathbb{C}P^{q+1}$, on a les fonctions coordonnées $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, $i = 1,\ldots,q+1$. Dans ces coordonnées $U \cap V$ a pour équation: $1 + x_1^r + \cdots + x_{q+1}^r = 0$.

Les fonctions $x_2,\cdots,x_{q+1}$ définissent un système de coordonnées sur un voisinage U du point $m_0 = [1, e^{\frac{i\pi}{r}}, 0,\ldots,0]$ dans V. La trace de Σ sur U est l'ensemble $\{m \in U/x_{q+1}(m) = 0\}$.

En posant $a_i = \frac{A_i}{A_0}$ pour $i = 1,\ldots,q$, on obtient un système de coordonnées sur le voisinage ouvert $\bar{U}_{A_0} = \{[A_0,\ldots,A_q] \in \mathbb{C}P^q/A_0 \neq 0\}$ de $f(m_0)$.

Dans les coordonnées ci-dessus, f s'écrit:

$$(x_2,\ldots,x_{q+1}) \to ((-1 - x_2^r - \cdots - x_{q+1}^r)^{\frac{1}{r}}, x_2,\ldots,x_q).$$

Sur la transversale $\tau_{m_0} = \{m \in U/x_2(m) = 0, \ldots, x_q(m) = 0\}$, x_{q+1} est une fonction coordonnée, et la fonction $a_1 \circ f \mid \tau_{m_0}$ s'écrit:

$$v : x_{q+1} \to (-1 - x_{q+1}^r)^{\frac{1}{r}}.$$

En appliquant le théorème 2.3 on obtient, pour tout $j \geq 1$,:

$$\mathrm{Res}(c_j, f) = (-1)^j \mu_0 \mathcal{P}_\Sigma(f_\Sigma^\star(c_1^{j-1}(L^{\otimes r}|S))),$$

avec $\mu_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x_{q+1}|=\varepsilon} \frac{d\left(\frac{dv}{dx_{q+1}}\right)}{\frac{dv}{dx_{q+1}}} = r - 1.$

En particulier, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(c_q, f) &= (-1)^q(r-1)\int_\Sigma (f_\Sigma^\star(c_1^{q-1}(L^{\otimes r}|S))) \\
&= (-1)^q(r-1)\int_S c_1^{q-1}(L^{\otimes r}|S) \\
&= (-1)^q(r-1)\int_{\mathbb{C}P^q} c_1^q(L^{\otimes r}) \\
&= (-1)^q r^q (r-1).
\end{aligned}$$

References

[BB] Baum P. and Bott R., *Singularities of Holomorphics Foliations.* J. of Diff. Geom. **7** (1972), 279–342.

[Br1] Brasselet J.P., *Une Généralisation de la Formule de Riemann-Hurwitz.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire **38**, (1974), 99–106.

[Br2] Brasselet J.P., *Sur une formule de M. H. Schwartz relative aux revêtements ramifiés.* C. R. Acad. Sc. Paris, t.**283**, série A, (1976), 41–44.

[Bo] Bott R., *Lectures on characteristic classes.* Lecture Notes in Mathematics **279**, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[BT] Bott R. and Tu L., *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1982.

[Eh] Ehresmann C., *Structures feuilletées.* Proc. V^e Can. Congress, Montreal (1961), 109–172.

[Fu] Fulton, *Intersection Theory, Ergebnisse der Mathematik undihrer Grenzgebiete.* 3. Folge. Band 2, Springer Verlag, 1984, 245–246.

[FP] Fulton W. and Pragacz P., *Schubert Varieties and Degeneracy loci.* Lecture Notes in Mathematics **1689**, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[HL] Harvey F.R. and Lawson H. Blaine, A *Theory of Characteristic Currents Associated with a Singular Connection.* Astérisque **213**, (1993), 262–263.

[Iz] Izawa T., *Chern number of ramified coverings.* Preprint.

[Le1] Lehmann D., *Classes caractéristiques résiduelles.* Differential Geometry and its applications, Proc. Conf. Aug. 27-Sep.2 1989, Brno (Tchecoslovaquie), Word Scientific edit. (1989).

[Le2] Lehmann D., *Variétés stratifiés C^∞, intégration de Čech-de Rham et théorie de Chern-Weil.* Geometry and Topology of submanifolds II, Proc. Conf. May 30–June 3, 1988, Avignon, France, Word Scientific edit. (1990).

[Le3] Lehmann D., *Résidus des sous-varités invariantes d'un feuilletage singulier.* Ann. Inst. Fourier, **41**, 1 (1991), 211–258.

[Lo] Looijenga E., *Isolated Singular Points on Complete Intersections.* London Mathematical Society Lecture Note Series **77**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[Mi] Milnor J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Annals of Mathematics Studies **61**, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[Sc] Schwartz M.H., *Champs de repères tangents à une variété presque complexe.* Bull. Soc. Math. Belgique **19**, fasc. 4 (1967).

[Yo] Yomdin Y., *The Structure of Critical Set of a Complete Intersection Singularity.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol.**84**, Number 3, 1982.

Departement de Mathematiques et Informatique
Faculte des Sciences et Techniques
Universite Cheikh Anta Diop
Dakar, Senegal
E-mail: cmdiop@ucad.sn