J. Math. Kyoto Univ.
1-2 (1962) 225-245.

Sur les ensembles pseudoconcaves*

Par

Toshio NISHINO

(Communiqué par Prof. A. Kobori, le 2 décembre 1961)

Introduction. La théorie générale du prolongement analytique de plusieurs variables complexes a commencé, comme on sait bien, par des découvertes importants qu'on n'a rien rencontré dans celle d'une variable complexe. Citons rapidement dans l'ordre chronologique les énoncés qui sont établis. En 1902 *Fabry*[1] a remarqué que les rayons de convergence d'une série double ne sont pas arbitraires ; en 1906 *Hartogs*[2] a remarqué que tout domaine d'holomorphie est soumis à une restriction géométrique qui est connue sous le nom de "Théorème de la continuité", autrement dit, c'est un domaine pseudoconvexe. La même restriction pour les domaines de méromorphie a été successivement trouvé en 1910, par *E. E. Levi*[3] et pour les domaines de normalité des familles de fonctions holomorphes en 1926 par *Julia*[4], et finalement pour les domaines de normalité des familles de surfaces caractéristiques en 1934 par *Oka*[5].

Ces résultats, je pense, expliquent certainement qu'il suffit de borner un domaine au cas trés spécial pour étudier les théories des

---

*) En 1934, Oka a défini, dans "*Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc.*" l'ensemble des points en dehors d'un domaine pseudoconvexe comme "*Ensemble de la class H*" et il a indiqué le fait qui généralise le théorème de *Hartogs*. Les démonstrations des théorèmes indiqués dans ce travaille n'est pas été publié jusque ici, malgré on lit au bas de la page "Les détails seront publiés tout prochainement". Quant à l'idée de ce mémoire, je dois presque tout aux résultats de cette note. Donc presque tout les pages du present mémoire se sont consacrés à la démonstration du théorème qu'on trouve dans le note d'*Oka*.

1) C. R. Paris.
2) Math. annalen.
3) Annali di Math.
4) Acta Math.
5) Journal of Science of the Hiroshima Univ.

fonctions analytiques de plusieurs variables. Vraiment on a établi, grâce à *Oka*, que tous les domaines pseudoconvexes finis sans point critique intérieur sont toujours cels d'holomorphie. De plus on a établi aussi avec autres géomètres, les principes pour étudier les fonctions holomorphes dans tel domaine: par example, premier et deuxième problèmes de *Cousin* et un problème de dévelopement etc.

Dans le present mémoire nous traitons l'ensemble de points sur une variété analytique qui satisfait au théorème de la continuité en tout point de cet ensemble par rapport à un système de coordonnées locales quelconques, et voyons la généralisation du théorème du *Hartogs*.

Ce mémoire consiste en trois parties. Dans la partie I nous établissons les notions fondamentaux. Dans la partie II nous préparons un théorème qui généralise le théorème de *Hartogs*. Et dans la dernière partie nous traitons un'autre généralisation du théorème de *Hartogs*, en particulier, celui sur un ensemble formé par une infinité dénombrable de surfaces analytiques par analogie de la théorie d'ensemble dérivé.

I. Préliminaire.

1. Ensemble pseudoconcave.[6] Soit M une variété analytique complexe,[7] et n désigne sa dimension (complexe). Nous employons dans ce qui suit les mêmes lettres pour les points de ouvert U sur M et ceux de l'espace de variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, lorsqu'il existe dans U un système de coordonnées locales que nous convenons de désigner par $x_1, x_2, \cdots, x_n$, pourvu qu'il n'existe pas l'ambiguïté. Un ouvert connexe sur M sera généralement dit *un domaine sur M*; une fonction continue à valeur numérique complexe dans un domaine D sur M sera dit *holomorphe dans un domaine D*, si elle est holomorphe en tout point de D par rapport

6) Ensemble de la class (H) d'après M. *Oka*.

7) Sous une variété analytique complexe M nous entendons ici un espace topologique séparé de dimension $2n$ (réel) donnant un recouverment par des ouverts U_i, pour chaque U_i un homéomorphisme f_i de U_i sur un ouvert V_i dans l'espace numériques complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, de manière que $f_j \circ f_i^{-1}$ soit un correspondance pseudoconforme biunivoque de $f_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ à $f_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$.

au système de coordonnées locales en ce point au sens usuel.

Nous allons introduir, avec *Oka*, la notion de "*théorème de la continuité*"[8]. Soit E un ensemble des points dans l'espace de variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, où $n>1$; et $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point de E. Dans l'espace de deux variables x_1, x_2, en prenant un point (b_1, b_2) qui est différent de (a_1, a_2) on écrit un hypersphère S du centre (b_1, b_2) dont la frontière passe par (a_1, a_2) et un hypersphère σ du centre (a_1, a_2) qui a le rayon suffisamment petit. Par β on désigne la partie de σ qui est extérieure à S. Dans ces circonstances géométriques, s'il n'existe pas d'ensemble de points de la forme $(\beta, a_3, \cdots, a_n)$ à l'espace (x) tel qu'il ne contient aucun point de E sauf un point (a) quel que soient (b_1, b_2) et σ, nous appellerons que E satisfait au théorème de la continuité en ce point (a).

En nous appuyant sur ce notion, nous définissons, aussi avec *Oka*, des ensembles qui sont à extérieur de domaine peudoconvexe un ensemble pseudoconcave dans un domaine sur M.

On dit un ensemble E dans un domaine D sur M *un ensemble pseudoconcave dans* D s'il est fermé relatif à D et satisfait au théorème de la continuité en tout point de E par rapport à un système de coordonnées locales quelconques. Pour le cas $n=1$ nous pouvons considérer que tout ensemble fermé dans un domaine est aussi un ensemble pseudoconcave dans ce domaine.

C'est un ensemble de cette sorte que nous allons étudier dans le present mémoire.

On peut définir un ensemble pseudoconcave au moyen le théorème de la continuité en formes différentes.

Soit Δ la somme de deux ensembles tracé dans l'espace (x):

$$|x_i - x_i^0| \leqq r \qquad \rho' \leqq |x_n - x_n^0| \leqq \rho \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$
$$|x_i - x_i^0| \leqq r' \ (r' < r) \qquad |x_n - x_n^0| \leqq \rho \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$

où (x^0) désigne un point déterminé, et r, r', ρ, ρ' sont des nombres

8) Voir: K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. (J. J. of Math. 1953). On peut trouver dans ce mémoire trois formes différentes et équivalentes des définitions pour le domaine pseudoconvexe. Mais nous nous servons les formes (B) et (C) dans le suivant.

positifs quelconques, et désignons par $\bar{\Delta}$ le polycylindre $|x_i - x_i^0| \leqq r$, $|x_n - x_n^0| \leqq \rho$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$. Dans cette configuration géométrique, on appelle qu'un ensemble E satisfait au théorème de la continuité (C), s'il n'est jamais possible de réaliser le fait que E contient au moins un point de $\bar{\Delta}$ sans être que E ne contient aucun point de Δ.

D'où, on a propriétés suivantes d'un ensemble pseudoconcave:

Si l'on donne dans un domaine D sur M une famille (E) d'un nombre infini d'ensembles pseudoconcaves dans D et si l'on a la limite E_0[9], alors E_0 *est aussi pseudoconcave dans* D.

On trace, en effet, dans l'espace (x) d'un système de coordonnées locales, un ensemble fermé Δ comme ci-dessus tel que E_0 ne contient aucun point de Δ mais d'ailleurs quelconque. Alors il n'existe qu'un nombre fini d'ensembles qui appartient à la famille (E) qui a au moins un point commun avec Δ, et il en est ainsi pour $\bar{\Delta}$. C.Q.F.D.

Si E^* est, sous la même hypothèse, une somme d'un nombre quelconque d'ensembles qui appartiennent à la famille (E), alors *il est pseudoconcave pourvu que* E^* *est aussi fermé.*

On peut démontrer ce fait très facilement.

Soit, à nouveau, E un ensemble pseudoconcave dans un domaine D sur M, et N une sous variété (non singuliere) analytique[10] traversant dans le domaine D; désignons par E' la partie de E sur N et par D' celle de D sur N. Alors E' *est aussi un ensemble pseudoconcave dans un domaine* D' *sur* N.

La démonstration est aussi immédiate.

---

9) Cela veut dire que dans toute voisinage d'un point quelconque de E_0 il existe une infinité d'ensembles de la famille admettant l'existence au moins d'un point dans le voisinage.

10) Un ensemble S sur M s'appelle un ensemble analytique s'il est défini localement par zéro commun d'un nombre fini de fonctions holomorphes. S'il est défini par une seule fonction, il s'appelle une surface analytique. Un ensemble analytique S est dit régulier en ce point p s'il peut être représenté dans un voisinage de p de la form $x_1=0$, $x_2=0, \cdots, x_r=0$, dans un système de coordonnées (x) preférant convenablement. Si un ensemble analytique S sur M est régulier en tout point de S (précisément dit la somme d'un nombre fini de tels ensembles localement) on peut supposer que S soit une variété analytique complexe et nous l'appellons une sous variété analytique sur M.

C'est *Hartogs*[11] qui a étudié, pour la première fois, l'ensemble de cette sort. Nous donnons son resultat en mots presents.

Théorème de Hartogs. *Dans l'espace des variables complexes* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$, *étant donné un ensemble pseudoconcave E dans un polycylindre* (Γ, Γ') *où* $\Gamma: |x_i|<\rho$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ *et* $\Gamma': |y|<\sigma$, *où* ρ *et* σ *sont nombres réels positifs. Pour tout point* (ξ) *de* Γ *il y a un et seul un point* η *de* Γ' *tel que* $((\xi), \eta)$ *appartient à E, que l'on désigne par* $\eta=\varphi(\xi)$. *Alors* $\varphi(\xi)$ *est une fonction holomorphe de* (ξ) *dans un polycylindre* Γ.

On a généralisé ce théorème jusqu'au cas où pour tout point (ξ) de Γ, il y a ν points $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\nu$ de Γ' tels que tous les points $((\xi), \eta_i)$ appartiennent à E.

C'est la diminuition de la condition imposée sur l'ensemble pseudoconcave dans le théorème de *Hartogs* que nous voulons d'abord faire dans le present mémoire.

2. Fonction subharmonique[12] **et plurisousharmonique**[13]**.** La fonction subharmonique a été introduit pour la première fois en 1906 par *Hartogs* dans son recherche sur le domaine d'holomorphie, proprement dit, le rayon d'holomorphie et elle joue une rôle importante dans la démonstration du théorème de *Hartogs* qu'on a énoncé dans la section précédente. Cepandant, la fonction plurisousharmonique a été introduit en 1942 par M. *Oka*, pour généraliser la notion de fonction subharmonique à l'espace des plusieure variables complexes. Elle joue une rôle importante dans le problème frontièr de domaine pseudoconvexe. Commençons ici par la recherche de quelques proprietés remarquables de la fonction indiquée,

Lemme I. (Montel-Rado)[14]**.** *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction continue à la valeur réelle et positive dans un domaine D du plan d'une variable*

---

11) Voia: Hartogs. Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebild (Acta Math. 39, 1909).

12) Hartogs: Math. annalen 1906. Pour propriété général voir, par exemple, F. Riesz: Acta Math. 1926, 1930.

13) *Fonction pseudoconvexes* d'après M. *Oka* (voir Memoire VI, Tohoku Mathematical Journal. 1942), mais je emploie le nom avec *P. Lelong*.

14) T. Rado: C. R. Paris 1928.

complexe x. *Pour que* $\log \varphi(x)$ *est subharmonique, il faut et il suffit que la fonction* $e^{ax_1+bx_2}\varphi(x)$, *où* $x=x_1+ix_2$ (*i signifiant l'unite imaginaire*), *est subharmonique pour toutes les valeurs réelles de* a *et* b.

On dit qu'une fonction $\varphi(x)$ est logarithmiquement subharmonique si $\log \varphi(x)$ est subharmonique. On peut ainsi définir une fonction logarithmiquement plurisousharmonique. On a donc le fait suivant:

Toute fonction logarthmiquement subharmonique est aussi subharmonique elle-même.

Lemme II (Oka)[15]. *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction subharmonique dans un domaine* D *du plan* x. *Si l'on fait un point* x *parcourir une courbe continue* L *dans l'intérieur du domaine* D *tendant uniquement vers un point* ξ *de* D, *on aura toujours pour limit*

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) = \varphi(\xi)\,.$$

Comme nous avons dit, il y a des rapports intimes entre l'ensemble pseudoconcave et la fonction subharmonique ou plurisousharmonique. Nous rappelons maintenant avec un peu de modification à une conception qu'on doit à *Hartogs*[16].

Sur l'espace de deux variables complexes x et y, étant donné un ensemble pseudoconcave E dans un domaine cylindrique Δ de la forme $x \in D$, $|y| < \infty$, où D est un domaine sur le plan x, de manière que sa section par le plan analytique $x=\xi$ que nous désignons par $E(\xi)$ est toujours bornée supérierement en module de ce point pour tout point ξ de D. Prenant un point fixe P sur le plan y, et soit $d_P(\xi)$ la plus grande distance entre P et un point appartenant à $E(\xi)$. Alors on a:

$d_P(\xi)$ *est une fonction logarithmiquement subharmonique dans un domaine* D.

Sous la même hypothèse, on désigne par $D(\xi)$ un diamètre de la section $E(\xi)$.

Lemme III (Oka). $D(\xi)$ *est aussi une fonction logarithmiquement subharmonique dans un domaine* D.

---

15) Oka: Mémoire II, Journal of Science of the Hiroshima University.

16) Hartogs: Acta Math. 1909. On a consideré dans ce mémoire la plus petit distance d'un point appartenant à $E(\xi)$ à P, c'est-à-dire rayon d'holomorphie.

Ce lemme a été énoncé sans démonstration dans la note d'*Oka*. Nous allons donc le démontrer ici. Écrivons sur le plan y un cercle Γ, dont le centre est à l'origine et le rayon R est suffisamment grand de manière que Γ comprend tout section $E(\xi)$ de E par point ξ de D. Prenant tels deux points P et Q sur la frontière de Γ qui se trouvent symétriquement par rapport à l'origine, soient $d_P(\xi)$ et $d_Q(\xi)$ les fonctions de la distance précédente pour les points P et Q respectivement. $d_P(\xi)$ et $d_Q(\xi)$ sont des fonctions logarithmiquement subharmoniques et donc subharmoniques elles-mêmes ; d'où une fonction

$$\varphi(\xi) = d_P(\xi)+d_Q(\xi)-2R$$

est aussi dans le domaine D.

Partageons ensuite la frontière de Γ en $2n$ parties égales par $2n$ points que nous désignons, en faisant joindre deux points symétriques par rapport à l'origine, par $(P_1, Q_1), \cdots, (P_n, Q_n)$ successivement ; et formons les fonctions précédentes pour toute paire (P_i, Q_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ et dénotons les par $\varphi_i(\xi)$, et formons une fonction

$$\varphi_{nR}(\xi) = \max\,[\varphi_1(\xi)\,, \cdots, \varphi_n(\xi)]\,,$$

cette fonction est aussi une fonction subharmonique. Le diamètre $D(\xi)$ en question est une fonction limite de $\varphi_{nR}(\xi)$ qui convergent uniformement dans le domaine D lorsque n et R croisent indéfiniment, et aussi une fonction subharmonique dans le domaine D.

Il s'agit du $\log D(\xi)$. Posons $h(x)=\alpha\cdot x$, dont $\alpha=a-ib$, et faisons la transformation $x'=x$, $y'=e^{h(x)}y$. Elle est pseudoconforme et biunivoque, et désignons par E' l'image de E. E' est aussi un ensemble pseudoconcave avec la même hypothèse que E. De plus $E'(\xi)$ se déduit de $E(\xi)$ par homothétie de rapport $|e^{h(\xi)}|=e^{ax_1+bx_2}$, où $\xi=x_1+ix_2$, et de l'origine comme centre et rotation, le diamètre de $E'(\xi)$ est donc $e^{ax_1+bx_2}D(\xi)$ et une fonction subharmonique. Car a et b sont arbitraires, $D(\xi)$ est logarithmiquement subharmonique d'après le lemme I. C.Q.F.D.

On dit une variété analytique complexe de dimension $n+1$ du type (M, C) si elle est un produit d'une variété analytique M de dimension n et le plan d'une variable complexe y que nous convenons de désigner par C. Pour le point (p, q) de la variété, dont $p \in M$ et $q \in C$, p et q s'appellent respectivement *la projéction de ce point dans la variété* M et *le plan* C. Pour un ensemble S de points (p, q) dans la variété, l'ensemble de tous les points q sur le plan C sera dit *la section de* S *par le point* p *de* M, et nous la désignons par $S(p)$.

Étant donné un ensemble pseudoconcave E dans un domaine cylindrique (D, C) sur la variété analytique du type (M, C), où D est un domaine sur M. Si la séction $E(p)$ par le point p dans D, quel que soit p de D, est toujours bornée, on peut considérer le diamètre de $E(p)$ de la même manière que nous venons de dire, et nous le dénotons par $D(p)$. Alors, d'aprére ce que nous avons vu jusqu'ici et définition d'une fonction plurisousharmonique, nous pouvons énoncer comme suivant:

Lemme IV. *$D(p)$ est une fonction logarithmiquement plurisousharmonique dans le domaine D sur M.*

3. Capacité d'ensemble de points. Nous allons introduire dans cette section une notion de la capacité nulle ou non nulle pour un ensemble de points sur la variété analytique M, qui joue une rôle fondamental dans la suite. La théorie de capacité d'un ensemble des points sur le plan par rapport aux potentiels logarithmiques a été introduit par *H. Lebesgue*, et elle était développée successivement.[17] Dans la note d'*Oka*, on est aussi arrivé en cette notion à cause de caractériser un ensemble de sort que toute fonction subharmonique doit réduire à la constant $-\infty$, si elle prend au moins la valeur $-\infty$ en tout point de l'ensemble. Nous allons généraliser cette notion à un ensemble sur la variété analytique M.

Étant donné un ensemble e de points sur la variété analytique M, on dit qu'un point p de e est *un point* (α) *de* e, si, quel que le voisinage δ de ce point p soit, toute fonction plurisousharmonique faut réduir à la constant $-\infty$, si elle prend la valeur $-\infty$ au moins en tout point de $e \cap \delta$. Un ensemble e s'appelle *de possèder la pro-*

17) Voir: De La Vallée Poussin, Note II, Annale de L'institut Henri Poincaré, 1932.

priètè (α) s'il contient au moins un point (α) de e. On dit qu'un ensemble e de points sur M est *de capacité nulle* s'il se peut regarder comme la somme au plus d'une infinité dénombrable de sous ensembles qui ne possèdent pas la propriété (α). Au cas contraire on dit que e est *de capacité non nulle.*

De la définition que je viens de donner, on peut immédiatement déduire que : un ensemble analytique ou une somme d'une infinité dénombrable de ensembles analytiques est toujours capacité nulle. D'autre part une continuité de dimension $2n-1$ (réel) est toujours capacité non nulle. Pour une continuité de moindre dimension même il y a certainement un ensemble de capacité non nulle ainsi que celui de capacité nulle.

Soient $e_1, e_2, e_3, \cdots$ des ensembles de capacité nulle sur M et soit e_0 la somme de tous les ensembles e_i ($i=1, 2, 3, \cdots$). Alors e_0 *est aussi capacité nulle.*

Soit e un ensemble de capacité non nulle sur M. Alors il y a au moins un point de e tel que pour tout voisinage U de ce point, $U \cap e$ est toujours capacité non nulle ; on dit que tel point est *un point* (β) *de* e. *Un ensemble de tous les points* (β) *de* e *est aussi capacté non nulle.*

Faisant combiner le lemme IV dans la section précédente et la notion de capacité, nous allons formuler brièvement le lemme suivant :

Lemme V. *Étant donné un ensemble pseudoconcave E dans un domaine cylindrique (D, C) sur la variété analytique du type (M, C), dont D est un domaine connexe sur M. Supposons que pour tout point p de D, la section $E(p)$ de E est toujours bornée et l'ensemble de points p dans D pour que la section $E(p)$ contient un et seul un point q est de capacité non nulle. Alors pour tout point p de D, $E(p)$ se compose d'un seul point q, et lorsqu'on le désigne par $q=f(p)$, il est une fonction holomorphe dans un domaine D sur M.*

En effet, considérons le diamètre $D(p)$ de $E(p)$. Il est une fonction logarithmiquement plurisousharmonique et, pour tout point d'un ensemble de capacité non nulle, prend la valeur 0, donc $D(p)$ se réduit à la constante 0. Ce lemme est donc, d'après le théorème de *Hartogs*, démontré. C.Q.F.D.

II. Première généralisation du théorème de Hartogs

Théorème I. *Étant donné un ensemble pseudoconcave E dans un domaine cylindrique (D, C) sur la variété analytique du type (M, C), dont D est un domaine connexe sur M, de façon que la section $E(p)$ de E est toujours bornée pour tout point p de D. Supposons que pour tout point appartenant à un ensemble de capacité non nulle dans le domaine D que nous désignons par e, la section $E(p)$ ne contient au plus qu'un nombre fini de points du plan C qui peuvent change avec p. Alors il en est ainsi pour tout point de D et de façon que la section $E(p)$ consiste des fonctions algebroïdes en un nombre fini pour tout point du domaine D.*

C'est un des théorèmes qu'on obtient par la généralisation du théorème de *Hartogs*, et qu' *Oka* a donné dans son note sans démonstration et qui joue dans le cas de l'espace numérique complexe de deux variables le rôle du théorème principal de cette note. Il n'y a pas d'obtacle essentiel pour le généraliser à l'espace de dimension quelconque. Nous allons ici démontrer ce théorème complètement comme ce qui suit.

4. Dans l'espace de deux variables complexes x, y. Commençons par la recherche dans l'espace (x, y). D étant un domaine connexe sur le plan d'une variabl x.

1°) Partageons, d'abord, e en parties d'un nombre infini dénombrable au plus selon le nombre de points contenus à $E(x)$, et désignons par e_i un ensemble de tous x dans e dont $E(x)$ est i points. D'après l'hypothèse il y a, parmi e_i $(i=1, 2, 3, \cdots)$, au moins un ensemble de capacité non nulle, et soit e_ν celui du plus petit nombre de cette sorte.

Soit x_0 un point (α) *de e_ν, alors il existe un voisinage δ de x_0 dans D de façon que, pour tout x dans δ, $E(x)$ est formé aussi exactement par ν points.*

En effet, soient $y_1^0, y_1^0, \cdots, y_\nu^0$ ν points de $E(x_0)$. Écrivons sur le plan y des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu$ autour de chaque point y_i^0 $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ de rayons suffisamment petit de façon que γ_i et γ_j ne se croisent pas l'un l'autre quel que soient i et j, où $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, \cdots, \nu$. Il existe un voisinage de x_0 dans D tel que, pour tout point x de ce voisinage, $E(x)$ situe dans l'intérieurs de la somme de tous les cercles γ_i $(i=1, 2, \cdots, \nu)$, que nous désignons par δ. Or envisageons la partie de E qui se trouve dans un domaine cylindrique (δ, γ_i) pour tout i. Elle satisfait evidemment l'hypothèse du lemme V dans la section 3. C.Q.F.D.

De plus, d'après le théorème de *Hartogs*, $E(x)$ représente ν fonctions holomorphes de x dans δ; désignons les par $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots, f_\nu(x)$.

2°) Désignons par β un composant connexe de noyau ouvert de l'ensemble de tous x, dont $E(x)$ est formé exactement par ν points, dans D, qui contient x_0. On peut dire que les fonctions $f_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ sont prolongeables analytiquement au même temp à tout point de β sans réstriction, que nous convenons de désigner par mêmes letters, et de plus, par cette prolongement analytique un point nouvel n'apparaît jamais au dehors de E.

Supposons que chacun de ces fonctions ont sa limite fixe respectivement lorsqu'on fait un point x parcourir une courbe continue L dans β tendant uniqument vers un point frontière de β qui se trouve dans D, et nous le désignons, à nouveau, par x_0. Alors $E(x_0)$ ne contient aucun point outre que ces limites.

En effet, supposons que $E(x_0)$ contient au moins un point autre que ces limites. En faisant une transformation linéaire au plan y, et portant aussi les mêmes letters dans le nouveau plan, de manière que tout les limites ci-dessus se trouvent dans le cercle $|y|<K$, et de plus il existe au moins un point de $E(x_0)$ extérieur du cercle $|y|<4K$, et $E(x)$ est toujours bornée en tout point x d'un voisinage de x_0, dont K est un nombre positif convenable. C'est possible certainement. Considérons la fonction par le diamètre de $E(x)$ au voisinage de x_0. Elle est une fonction subharmonique et d'après le lemme II la limite supérieure de ce fonction est, lorsque x tende vers x_0 sur L, égal à la valeur de cette fonction en x_0. Ceci contrarie évidemment ce circonstance. C.Q.F.D.

On remarque ici que, sous la circonstance que nous venons de traiter, si $E(x_0)$ est aussi formé par juste ν points, x_0 doit se trouver dans le domaine β, puisqu'une partie quelconque d'une courbe continue soit un ensemble de capacité non nulle.

3°) Écrivons sur le plan x un cercle γ dans D de la manière qu'il y a partie commune avec β, et soit β_0 un de composants connexes de cette partie. Ensuite représentons β_0 conformément au cercle unité du plan d'une variable z par une fonction $x=\xi(z)$.

On ne fait pas correspondre par $x=\xi(z)$ l'ensemble de tous les points frontières accessibles x de β_0 dont $E(x)$ n'est pas ν points, même s'il existe, à l'autre point que des points de l'ensemble de mesure linéaire null sur $|z|=1$ au plus.

En effet, formons des fonctions $f_1(\xi(z))$, $f_2(\xi(z))$, $\cdots$, $f_\nu(\xi(z))$. Nous choisissons des déterminations initiale pour $z=0$ au même temp ; par continuité, les fonctions seront définies en tout point z dans le cercle unité, et nous les désignons par $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots$, $F_\nu(z)$. Elles sont évidemment bornées. Donc, d'aprés le théorème de *Fatou*, lorsque z tend vers z' au long du rayon, qui aboutit à z' les fonctions $F_i(z)$ $(i=1, e, \cdots , \nu)$ ont définitivement les valeurs frontières en tout point z' sur $|z|=1$, excepté un ensemble μ de mesure linéaire null au plus sur $|z|=1$; or d'après le théorème de *Riesz*, telles valeurs frontières sont différentes deux à deux pour toutes les fonctions excepté aussi un ensemble μ' de mesure linéaire null au plus sur $|z|=1$.

Si un point z' sur $|z|=1$ correspond à un point frontière accessible de β_0, l'image d'un rayon qui aboutit à z' est une courve continue dans β_0 qui tend uniquement à ce point frontière de β_0.

C.Q.F.D.

4°) Formons une fonction

$$F(xy) = [y-f_1(x)][y-f_2(x)] \cdots [y-f_\nu(x)] ,$$

il est évident que cette fonction est holomorphe et univalente dans un domaine (β, C) : $x \in \beta$, $|y| < \infty$, puisque tous les coefficients de ce pseudopolynome, autrement dit toutes les fonctions symmétriques élémentaires des $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_\nu(x)$, sont aussi dans β.

La fonction $F(x, y)$ est par continuité holomorphe et univalente dans (γ, C).

En effet, soit $A(x)$ un des coefficients quelconques de $F(x, y)$. Nous allons montrer ici que $A(x)$ peut être prolongé à tout point de γ. Écrivons une courbe régulière simple fermé dans β_0 et d'ailleurs quelconque et nous la désignons par Γ; nous désignons plus loin par G le domaine limité par Γ. On dit d'abord que $A(x)$ est holomorphe et univalent dans G. Soit $a(x)$ la partie réelle de $A(x)$ et soit $u(x)$ une fonction harmonique dans G et continue dans $G \cup \Gamma$ et elle se réduit sur Γ à la valeur de $a(x)$. Il existe certainement. De plus $a(x) = u(x)$ identiquement dans une partie commune de β_0 et G. Car, lorsqu'on représente conformément $\beta_0 \cap G$ sur le cercle unité du plan z, $a(x) - u(x)$ correspond par ce représentation une fonction harmonique dans ce cercle ayant la valeur frontière nulle excepté un ensemble sur $|z| = 1$ de mesure linéaire null au plus, d'après le même raisonement que du numéro précédent. Elle s'anule donc identiquement et c'est vrai aussi pour $a(x) - u(x)$. Il en est aissi pour la partie imaginaire de $A(x)$. D'où un domaine d'holomorphie de $A(x)$ dans γ est γ même, puisque sa frontière ne peut pas contenir une continuité en dehors de la frontière de γ d'après la même raisonnement comme ci-dessus. C.Q.F.D.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, on peut dire que la fonction $F(x, y)$ est holomorphe et univalente dans tout domaine (D, C) $x \in D$, $|y| < \infty$, par continuité, car on peut recouvrir tout D par famille de cercles γ ayant la propriété énoncée ci-dessus, d'où on peut démontrer parfaitement ce théorème pour l'espace des variables x, y.

5. Dans la variété analytique de type (M, C). Il s'agit du cas où D est un domaine sur la variété analytique M. Recouvrons tout domaine D par une infinité dénombrable des voisinages dans D de façon que chaque voisinage se trouve dans un seul voisinage de coordonnées locales convenables et il est un polycylindre par rapport à ce coordonnées locales que nous désignons généralement par Γ. Alors parmi ceux il existe au moins un voisinage que nous désignons par Γ_0 et dans lequel l'ensemble de points p dont $E(P)$ consiste de ν points, contient un domaine d'après la même raisonnement du numéro 1° de la section précédente, où ν est un nombre entier positif.

Si, dans un voisinage quelconque Γ, *l'ensemble de points* p, *dont*

$E(p)$ consiste de ν points au plus, contient un domaine σ, il en est ainsi pour tout point de Γ.

En effet, considérons dans l'espace des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On fixe un point p_0 dans σ d'ailleurs quelconque. Prenons un point quelconque q de Γ en dehors de p_0 et un plan analytique passant par p_0 et q de dimension 1 dans Γ et désignons le par L, et considérons la section $E(L)$ de E par L[18]. Ceci est un ensemble pseudoconcave dans l'espace (L, C) $p \in L$, $|y| < \infty$. La partie de L qui est dans δ étant évidemment de capacité non nulle comme le plan d'une variable complexe, on a d'après la section précédente que $E(p)$ consiste de ν points au plus pour tout point p sur L, en particulier pour q. q étant arbitraire, ce propriété est donc démontrée. C.Q.F.D.

Désignons des points de $E(p)$ par $f_1(p), f_2(p), \cdots, f_\nu(p)$ et formons la fonction

$$F(p, y) = [y - f_1(p)][y - f_2(p)] \cdots [y - f_\nu(p)].$$

Ceci est un pseudopolynome de y tel que tous ses coefficients sont des fonctions univalentes de p dans Γ, et holomorphes sur tout plan analytique comme le plan d'une variavble complexe. Donc, d'après le théorèm de *Hartogs*, elle est holomorphe par rapport à $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dans Γ et y.

On peut liet tout voisinage Γ à Γ_0 par une suite de voisinages $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_l$ de la manière que Γ_i et Γ_{i+1} a une partie commune pour tout i $(i=1, 2, \cdots, l-1)$, d'où on peut conclure que ce théorème est démontré parfaitement.

III. Deuxième généralisation du théorème de Hartogs.

6. Étant donné un ensemble pseudoconcave E dans un domaine D sur une variété analytique M de dimension n. On dit tout point de E *un point de première espèce* s'il y a un voisinage δ de ce point et une fonction holomorphe $f(p)$ dans δ de façon qu'une partie de E se situe dans ce voisinage δ est représentée par $f(p)=0$. Dans le cas contraire, on le dit *cel de deuxième espèce*. On dit l'ensemble

18) C'est-a-dire l'ensemble de tous les points de E dont projection sur M se trouve sur le plan analytique L.

qui se consiste seulment des points de deuxième espèce de E *l'ensemble dérivé du ensemble pseudoconcave E.* Il est évidemment aussi un ensemble fermé dans D.

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un système des coordonnées lacales en un point p_0 de E et d'ailleurs quelconque, et nous prenons, pour simplifier l'écriture, les coordonnées de p_0 par $(0, 0, \cdots, 0)$. Prenons dans l'espace de deux variables x_1, x_2, un point $(0, -b)$, où b est un nombre réel positif quelconque, et écrivons une hypersphère S de centre $(0, -b)$ telle que la frontière de S passe par $(0, 0)$. On trace, outre cela, une hypersphère σ de centre $(0, 0)$ et de rayon a suffisamment petit telle qu'elle soit dans D, et on désigne par β la partie de σ qui est extérieur à S. Or, dans cette circonstance géométrique, *si l'ensemble de points $(\beta, 0, \cdots, 0)$ ne contient qu'un point de première espèce parmi les points de E, alors le point p_0: $(0, 0, \cdots, 0)$ est aussi celui de première espèce de E.*

En effet, écrivons, à nouveau, une hypersphère S' de centre $(0, -b')$ et de rayon b'' où $b<b'<b''$ et $\sqrt{b''^2-b'^2}<\frac{1}{2}a$ dans l'espace de deux variables x_1, x_2, et désignons par β' la partie de σ qui est extérieurs à S'. On peut d'abord supposer sans restreindre à généralité que le plan analytique de deux dimension de la forme $x_i=0$, $i=3, 4, \cdots, n$ (si $n>2$) n'est pas contenue dans E, et l'ensemble de points $(\beta', 0, \cdots, 0)$ ne contient qu'un point de première espèce parmi les points de E. Ce n'est pas vrai, en faisant une transformation linéaire de coordonnées de la forme

$$x_i = x_i' + c_i x_2 \qquad i = 3, 4, \cdots, n$$

dont c_i $(i=3, 4, \cdots, n)$ sont des nombres réels positifs suffisamment petits et en diminuant a, on peut faire satisfaire la condition-ci.

Nous allons démontrer qu'il n'existe pas un point de deuxième espèce de E sur la frontière de S' se situe dans σ. Pour cela il suffit de montrer que le point $(0, b''-b', 0, \cdots, 0)$ est un point de première espèce (en cas de nécessité en faisant une transformation de coordonnées x_1, x_2). On peut encore supposer sans restreindre à généralité que le plan analytique de dimension 1 de la forme $x_2=b''-b'$, $x_3=0, \cdots, x_n=0$, n'est pas contenue dans E. Si ce n'est pas vrai, en faisant une transformation de coordonnées dans l'espace de x_1, x_2 de la forme

$$x_2 = x_2' + c_2 x_1^2$$

dont c_2 est un nombre réel positif suffisamment petit, on peut faire satisfaire la condition-ci. Prenant des nombres réels positifs ε et γ_1, γ_2 de façon que l'ensemble $\gamma_1 \leqq |x_1| \leqq \gamma_2$, $|x_2 - b'' + b'| \leqq \varepsilon$ est contenu dans β'. Ils existent certainement. Ayant E un nombre fini de points au plus sur le plan analytique $x_2 = b'' - b'$, $x_i = 0$ $(i = 3, 4, \cdots, n)$ dans $\gamma_1 \leqq |x_1| \leqq \gamma_2$, on peut choisir η et ε' tel que $\gamma_1 < \eta < \gamma_2$, $\varepsilon' < \varepsilon$, de manière que pour tout plan analytique $x_i = a_i$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$ où $|a_2 - b'' + b'| < \varepsilon'$, $|a_i| < \varepsilon'$ $(i = 3, 4, \cdots, n)$, il n'y a aucun point de E sur $|x_1| = \eta$. Envisageons la partie de E qui se trouve dans le polycylindre $|x_1| < \eta$, $|x_2 - b'' + b'| < \varepsilon'$, $|x_i| < \varepsilon'$ $(i = 3, 4, \cdots, n)$. Comme on peut voir de cette circonstance, le théorème I est applicable à cette partie, lorsqu'on regarde l'espace des variables complexes $x_2, x_3 \cdots, x_n$ comme une variété analytique M. De plus, si a_2' est un nombre réel positif tel que $b'' - b' < a_2' < b'' - b' + \varepsilon'$, la section de E par le point $x_2 = a_2'$, $x_i = 0$ $(i = 3, 4, \cdots, n)$, consiste d'un nombre fini de points dans $|x_1| < \eta$, et ils sont cels de première espèce de E. Il en est donc ainsi pour tout point dans un voisinage suffisamment petit de ce point et aussi pour tout point $(a_2, a_3, \cdots, a_n)$ où $|a_2 - b'' + b'| < \varepsilon'$, $|a_i| < \varepsilon'$ $(i = 3, 4, \cdots, n)$. et particulièrement le point $(0, b'' - b', 0, \cdots, 0)$ est un point de première espèce.

D'où, on a qu'un point de deuxième espèce de E n'apparait toujours rien sur la frontière de S' dans σ lorsque b' et b'' croisent indéfiniment en fixant la surface commune de S' et σ, et alors la frontière de S' passe certainement par l'origine. On a donc :

Lemme. *L'ensemble dérivé de l'ensemble pseudoconcave E dans un domaine D sur M est, s'il existe, aussi pseudoconcave dans ce domaine.*

7. Considérons de nouveau un ensemble pseudoconcave E dans un domaine D sur M. Soit E' l'ensemble dérivé du ensemble E. On dit qu'il est *dérivé de premier ordre.* S'il y a un point de première espèce de E' on peut former l'ensemble dérivé de E', et aussi pseudoconcave, désignons le par E'' et nous l'appellons *dérivé de deuxième ordre de E.* De cette manière on a une suite d'ensembles pseudoconcaves

$$E, E', E'', \cdots, E^{(n)}, \cdots$$

oú $E^{(n)}$ est l'ensemble dérivé de $E^{(n-1)}$ et on le nomme dérivé de n ième ordre de E.

Si tous les ensembles $E^{(n)}$ $(n=1, 2, \cdots)$ ne sont pas nulls, la limite de cette suite est aussi pseudoconcave d'après le remarque de la section 1, et dénotons le par E^{ω}.[19] En continuant ainsi, pour tous les nombres ordinaires trasfinis α, on a l'ensemble pseudoconcave de dérivé d'ordre α de E. De plus, s'il existe un nombre ordinaire transfini α tel que $E^{\alpha}=E^{\alpha+1}$ qui n'est pas null, on dit qu' E^{α} est le noyau de E et nous le désignons par E^{Ω}. (E^{0} signifie E).

Tout point de E sera dit *d'ordre* α si ce point se réduit à première espèce lorsqu'on prend l'ensemble dérivé d'ordre α de E, où α est un nombre ordinaire transfini de la classe I ou II mais d'ailleurs quelconque. Un point de première espèce de E est d'ordre null. De plus, un point de E qui appartient à noyau de E sera dit d'ordre Ω. E sera dit *d'ordre* α si le plus grand d'ordre du point appartenant à E est α, où α peut être Ω. D'où E est la somme d'un nombre fini de surfaces analytiques dans un domaine D s'il est d'ordre null.

On généralise ici la notion de la surface analytique dans un domaine D sur M.

Étant donné un germe de surface analytique[20] en un point p dans D, on peut considérer que la prolongement analytique de ce germe soit unique dans une partie de domaine D, c'est-à-dire la plus petite surface analytique dans la partie qui contient ce germe. S'il est prolongeable sans restriction le long d'un chemin

19) Nous employons ici généralement les termes und les notions de la théorie des nombres ordinaires transfinis, voir par example: R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues.

20) Pour les termes, voir par example, R. Remmert und K. Stein: Über die wesentlichen Singnlaritäten analytischen Mengen. (Math. Annalen, 1953)

convenable qui se pose sur ce surface dans tout domaine D, une surface obtenue ainsi autant que possible dans D sera dit *une surface analytique générale dans D.* Alors on a :

Lemme 1. *Soit E un ensemble pseudoconcave dans un domaine D sur M. Si l'ordre α de E est inférieur à Ω, E est formé par la somme d'une infinité dénombrable au plus de surfaces analytiques générales ou non dans un domaine D.*

En effet, il est évident lorsque $\alpha=0$ d'après le définition. On emploie à cette recherche la recurrence transfini par rapport à l'ordre. Supposons qu'il est vrai pour tout nombre ordinaire transfini α inférieur à α_0. Considérons l'ensemble dérivé E^{α_0} d'ordre α_0 de E. Il est une surface analytique dans D d'après la définition puisqu'il est un ensemble pseudoconcave d'ordre 0. D'autre part considérons la partie de E en dehors de E^{α_0}, et dénotons la par D^{α_0}. Pour tout point p de D^{α_0} il y a un voisinage δ tel que la partie de E situe dans δ est d'ordre inférieur à α_0 et elle se compose d'une infinite dénombrable au plus de surfaces analytiques générales ou non dans δ. On peut recouvrir tout D^{α_0} par une infinité dénombrable de voisinages comme ci-dessus, donc on peut facilement déduire que toutes surfaces dans δ sont sans restriction prolongeables au delà de δ le long du D^{α_0}, et par cette prolongement un point nouveau n'apparait jamais en dehors de E. C.Q.F.D.

8. Soit E un ensemble pseudoconcave dans un domaine (D, C) sur la variété analytique du type (M, C), dont D est un domaine connexe sur M. Dans ce qui suit nous supposons aussi que pour tout point p de D la section $E(p)$ est toujours bornée en module et de plus il y a un ensemble e de capacité non null dans D tel que, pour tout point p de e, $E(p)$ se compose toujours d'une infinité dénombrable au plus de points. Sous l'hypothèse ci-dessus nous allons montrer qu' E se compose d'une infinité dénombrable des surfaces analytiques générales ou non.

Désignons par $E^{\alpha}(p)$ la section de E^{α} en même manière qu' E, où α est un nombre ordinaire transfini. D'autre part considérons le ensemble dérivé d' $E(p)$, c'est-à-dire un ensemble des tous points limites de $E(p)$, et celui d'ordre supérieurs au sens de *Cantor*, dans le plan d'une variable y, et désignons le par $K^{\alpha}(p)$, où α est un nombre ordinaire transfini de class I ou II.

Comme on sait bien, si P est un ensemble fermé d'une infinité dénombrable de points sur le plan y, il existe, grâce à Cantor, un nombre ordinaire transfini α, $(\alpha < \Omega)$, tel que l'ensemble dérivé d'ordre α de P se réduit null.

D'où, si, pour tout point p appartenant à un ensemble e de capacité non nulle dans D, $E(p)$ se compose toujours une infinité dénombrable au plus de points, il existe aussi un nombre ordinaire transfini α $(\alpha < \Omega)$ de façon que l'ensemble de tout point p dont $K^{\alpha}(p)$ est null, est de capacité non nulle.

En effet, désignons par e_{α} l'ensemble de points p appartenants à e dont $K^{\alpha}(p)$ est null, on a une suite d'ensembles

$$e_1 \subset e_2 \subset, \cdots, \subset e_{\omega} \subset, \cdots .$$

Soit e_0 la somme de tout ensemble e_{α} $(\alpha < \Omega)$. Si e_0 est de capacité nulle, il y a au moins un point p_0 de e tel que, pour tout α, $\alpha < \Omega$, $K^{\alpha}(p)$ contient une infinité dénombrable de points, ceci est impossible. C.Q.F.D.

Soit α_0 le plus petit de nombre α qui joue la propriété ci-dessus. On peut dire que α_0 ne peut être un nombre de la class II.

En effet, supposons que α_0 est de la class II et soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ la suite de nombres ayant α_0 comme un nombre limit ; dénotons par e_i un ensemble de tous les points p appartenants à e dont $K^{\alpha_i}(p)$ est null, alors on a

$$e_1 \subset e_2 \subset e_3 \subset \cdots,$$

et de plus

$$\cup e_i = e_0$$

puisque, sinon, il existe un point p_0 de e_0 qui n'appartient aucun e_i $(i \neq 0)$, autrement dit, $K^{(\alpha_i)}(p_0)$ contient une infinité de points quel que soit i, et $\cap K^{\alpha_i}(p_0)$ est null, ceci est impossible car tout $K^{\alpha_i}(p_0)$ étant fermé. D'autre part tout e_i sont capacité nulle, donc e_0 l'est aussi. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. C.Q.F.D.

D'ou, il existe un nombre $\alpha_0 - 1$, et on dira que ce nombre est *rang de E*. D'après ce définition, si E est d'ordre α il est évidemment rang α. Inversement on a :

Lemme 2. *Si l'ensemble pseudoconcave E en question est de rang α il est aussi d'ordre α, où α est un nombre ordinire transfini.*

En effet, c'est le théorème I dans la deuxième partie de ce mémoire lorsque α est null. Supposons qu'il est vrai pour tout α inférieur à α_0. Partageons e en parties d'une infinité dénombrable au plus selon le nombre de $K^{\alpha_0}(p)$, et désignons par e_i un ensemble de tous les points p dont $K^{\alpha_0}(p)$ est i points. D'après l'hypothèse il existe, parmi e_i $(i=1, 2, 3, \cdots)$, au moins un ensemble de capacité non nulle, et soit e_ν celui du plus petit des nombres. Soit P_0 un point (β) de e_ν et soient $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu$ les points de $K^{\alpha_0}(P_0)$. Écrivons des cercles γ_i de centres Q_i $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ de rayons suffisamment petits de manière que γ_i et γ_j ne se croisent pas l'un l'autre quel que soient i et j, où $i, j=1, 2, \cdots, \nu$, et $i \neq j$; et tout frontière de cercle ne passe par aucun point de $E(P_0)$, et de plus un point Q_0 de $E(P_0)$ outre que Q_i $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ mais d'ailleurs quelconque est situé en dehors de tout γ_i $(i=1, 2, \cdots, \nu)$. Ensuite prenant un voisinage δ de P_0 suffisamment petit tel que pour tout point p de δ, $E(p)$ n'a aucun point sur chaque frontière de γ_i. C'est certainement possible puisqu' E est un ensemble fermé. Or envisageons la partie de E située dans (δ, γ_i) quel que soit i. On peut dire que, pour tout point p de $e_\nu \cap \delta$, $K^{\alpha_0}(p)$ a un et seul un point dans chaque γ_i sauf l'ensemble de capacité nulle au plus. Donc la partie de E qui n'est pas située dans (δ, γ_i) pour tout i $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ dans (δ, C) est d'ordre inférieur à α_0, et en particulier qu'un point (P_0, Q_0) est aussi d'ordre inférieur à α_0. Donc $E^{\alpha_0}(P_0)$ est formé exactement par ν points $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu$, puisque Q_0 est quelconque. Car l'ensemble de tout point (β) de e_ν est aussi de capacité non nulle et E^{α_0} est pseudoconcave dans (D, C) il est formé par un nombre fini de surfaces analytiques (non générales) d'après le théorème I. C.Q.F.D.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, on a :

Théorème II. *Soit un ensemble pseudoconcave dans un domaine (D, C) sur la variété analytique du type (M, C) dont D est un domaine connexe sur M. Si la section $E(p)$ est toujours bornée en module de ce point et pour tout point p appartenant à un ensemble e de capacité* *non nulle dans D, E(p) se compose d'une infinité dénombrable de points au plus, E se compose d'une infinité dénombrable de surfaces analytiques générales ou non.*

Ceci est indiqué dans le note d'*Oka*.