J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
16-3 (1976) 497-530

Famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes, qui est une variété de Stein

Par

Hiroshi YAMAGUCHI

(Communiqué par Prof. Kusunoki, le 20 oct. 1975)

Introduction. Une famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes est définie de façon qu'il soit donné une variété complexe $\mathscr{D}$ de dimension $n+1$ et représentation holomorphe $\pi: \mathscr{D} \to \Delta$ sur une variété complexe Δ de dimension n. On pose ici l'hypothèse que $\mathscr{D}$ est une variété de Stein. Pour z fixé dans Δ la fibre $\pi^{-1}(z)$ dans $\mathscr{D}$ est une surface de Riemann ouverte d'une variable. Or à la théorie des fonctions d'une variable on sait bien deux modules de $\pi^{-1}(z)$: $\lambda(z: \alpha, \beta)$ et $\mu(z: C)$ qui sont invariants par tout automorphisme analytique de $\pi^{-1}(z)$ (en détail voir le paragraphe 2). Dans le présent mémoire nous allons établir un lemme fondamental: $\lambda(z: \alpha, \beta)$ *et* $\mu(z: C)$ *sont des fonctions positives plurisurharmoniques de* z *dans* Δ. D'après cela, suite au mémoire précédent [5] on recherchera des fonctions entières de deux variables. De plus on fera quelques applications de ce lemme à la normalité d'une famille de sections holomorphes dans $\mathscr{D}$ ou à la trivialité d'une famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes.

1. Examples. Considérons à l'espace de deux variables complexes z et w une fonction $f(z, w)$ de la forme $f(z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z) w^n$ où $a_n(z)$ est holomorphe dans un domaine Δ du plan z pour tout n. Posons $r_1(z) = \overline{\lim_{\zeta \to z}} [\overline{\lim_{n \to -\infty}} \sqrt[|n|]{|a_n(\zeta)|}]$ et $r_2(z) = \underline{\lim_{\zeta \to z}} [\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n(\zeta)|}]^{-1}$. Supposons

$r_1(z)<r_2(z)$ dans Δ. $f(z, w)$ est alors bien définie et holomorphe par rapport à z et w dans le domaine

$$(D) \qquad z\in\Delta, \quad r_1(z)<|w|<r_2(z).$$

D'après F. Hartogs (1906) il est remarqué que $r_1(z)$ et $r_2(z)^{-1}$ sont logarithmiquement sousharmoniques dans Δ. On désigne par $\mathscr{D}(z)$ l'anneau $r_1(z)<|w|<r_2(z)$ dans le plan w.

Or formons la fonction harmonique $h(z, w)$ dans $\mathscr{D}(z)$ qui est $=0$ sur $|w|=r_1(z)$ et est $=1$ sur $|w|=r_2(z)$ c'est-à-dire $h(z, w)=\log\frac{|w|}{r_1(z)}\Big/\log\frac{r_2(z)}{r_1(z)}$, et considérons l'intégrale de Dirichlet de $h(z, w)$ étendue à $\mathscr{D}(z)$: $D(h(z, w))=\iint_{\mathscr{D}(z)}\left[\left(\frac{\partial h(z, w)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h(z, w)}{\partial v}\right)^2\right]dudv$ où $w=u+\sqrt{-1}v$. Posons $\lambda(z)=D(h(z, w))^{-1}$, qui est dit le module harmonique de $\mathscr{D}(z)$. Le calcul simple donne $\lambda(z)=\log\frac{r_2(z)}{r_1(z)}$. Il s'en suit que $\lambda(z)$ *est une fonction positive surharmonique dans* Δ.

Ensuite soit R une surface de Riemann fermée d'une variable qui est de genre $g\ (\geqq 1)$. On trace sur R $2g$ cycles $\{C_i, D_i\}_{i=1}^g$ de façon que $R-\{C_i, D_i\}_{i=1}^g$ soit simplement connexe. Soit $\{\alpha_i(w)dw\}_{i=1}^g$ le système des différentielles normales de premiére espèce telles que $\int_{C_i}\alpha_i(w)dw=\delta_{ij}$ pour $1\leqq i, j\leqq g$. On sait que, si l'on pose $\int_{D_j}\alpha_i(w)dw=\tau_{ij}$, alors la matrice des périodes: (τ_{ij}) est symétrique et la matrice $\mathrm{Im}(\tau_{ij})$ est positive non-dégénérée. En abrégé posons $T=\mathrm{Im}(\tau_{ij})=(t_{ij})$ et $T^{-1}=S=(s_{ij})$. Pour chaque $i\ (1\leqq i\leqq g)$ fixé, formons la différentielle harmonique sur R: $\sigma_i(w)=a_i(w)du+b_i(w)dv$ telle que $\int_{C_j}\sigma_i(w)=0$ et $\int_{D_j}\sigma_i(w)=\delta_{ij}$ pour $1\leqq j\leqq g$. D'après la relation binaire on a pour toute différentielle harmonique $\omega=a(w)du+b(w)dv$ sur R, $<\omega, \sigma_i^*>=\iint_R(a_i(w)b(w)-a(w)b_i(w))dudv=\sum_{j=1}^g\left\{\int_{C_i}\omega\int_{Dj}\sigma_i-\int_{C_i}\sigma_i\int_{Dj}\omega\right\}=\int_{Ci}\omega$ où $\sigma_i^*=-b_i(w)du+a_i(w)dv$. C'est-à-dire la différentielle harmonique $\sigma_i^*(w)$ est le noyau de reproduction par rapport au cycle C_i. En particulier il vient $\|\sigma_i\|^2=<\sigma_i^*, \sigma_i^*>=\mathrm{Im}\left\{\int_{C_i}\sigma_i+\sqrt{-1}\sigma_i^*\right\}$. Notons que $\sigma_i+\sqrt{-1}\sigma_i^*$ est holomorphe et que le systeme $\{\alpha_i(w)dw\}_{i=1}^g$ est une base de l'espace des différentielles holomorphes sur R. Comme on sait bien il en résulte que la norme de Dirichlet $\|\sigma_i\|^2$ est égale a (i, i) élément de la matrice $S:=$

$s_{ii}(>0)$. De plus posons $\mu(C_i)=\|\sigma_i\|^{-2}=\frac{1}{s_{ii}}$. On appelle $\mu(C_i)$ le module harmonique de R par rapport au cycle C_i.

Maintenant soit donnée pour chaque $z\in\Delta$ une surface de Riemann fermée R_z étalée au-dessus de $\boldsymbol{P}^1$: $|w|\leqq+\infty$ de façon que, si l'on désigne par $\{\xi_i(z)\}_{i=1}^n$ l'ensemble des points de ramification de R_z, tout $\xi_i(z)$ soit holomorphe et uniforme dans Δ et que $\xi_i(z)\neq\xi_j(z)$ $(i\neq j)$ pour aucun z dans Δ. On trace sur R_z $2g$ cycles $\{C_i(z), D_i(z)\}_{i=1}^g$ de façon qu'ils se meuvent continuellement avec $z\in\Delta$ et que le domaine $R-\{C_i(z), D_i(z)\}_{i=1}^g$ soit simplement connexe. Par le même procédé qu'on vient de faire on a pour tout $z\in\Delta$ la matrice des périodes $(\tau_{ij}(z))$, $T(z)=\operatorname{Im}(\tau_{ij}(z))=(t_{ij}(z))$, $S(z)=T(z)^{-1}=(s_{ij}(z))$ et le module harmonique $\mu(z: C_i)$ de R_z par rapport au cycle $C_i(z)$ qui est égale à $\frac{1}{s_{ii}(z)}$. Voici une remarque: $\mu(z: C_i)$ *est une fonction positive surharmonique de z dans Δ.*

En effet,[#] il suffit de vérifier cette remarque au cas où $i=1$. Il est bien connu que tout élément $\tau_{ij}(z)$ de la matrice des périodes définit une fonction holomorphe de z dans Δ, car tout point de ramification $\xi_i(z)$ de R_z est holomorphe en z dans Δ (voir par exemple H. E. Rauch; Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959)). Par suite $t_{ij}(z)$ est harmonique en z dans Δ. Puisque $S(z)T(z)=I$ (identité) pour tout $z\in\Delta$, on a $\frac{\partial S}{\partial z}T+S\frac{\partial T}{\partial z}=0$ (zéro) où $\frac{\partial S}{\partial z}=\left(\frac{\partial s_{ij}(z)}{\partial z}\right)$. De plus $\frac{\partial^2 S}{\partial\bar z\partial z}T+\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial\bar z}+\frac{\partial S}{\partial\bar z}\frac{\partial T}{\partial z}+S\frac{\partial^2 T}{\partial\bar z\partial z}=0$. De ce que $\frac{\partial^2 T}{\partial\bar z\partial z}=0$, on a $\frac{\partial^2 S}{\partial\bar z\partial z}=-\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial\bar z}S-\frac{\partial S}{\partial\bar z}\frac{\partial T}{\partial z}S=-\frac{\partial S}{\partial z}\left(-T\frac{\partial S}{\partial\bar z}\right)-\frac{\partial S}{\partial\bar z}\left(-T\frac{\partial S}{\partial z}\right)=2\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial S}{\partial z}T\frac{\partial S}{\partial\bar z}\right\}$. En particulier $\frac{\partial^2 s_{11}}{\partial\bar z\partial z}=2\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^g\left\{\frac{\partial s_{1i}}{\partial z}t_{ij}\frac{\partial s_{j1}}{\partial\bar z}\right\}$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}\mu(z: C_1)&=\frac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}\left(\frac{1}{s_{11}(z)}\right)\\&=\frac{-1}{s_{11}^3}\left(s_{11}\frac{\partial^2 s_{11}}{\partial\bar z\partial z}-2\left|\frac{\partial s_{11}}{\partial z}\right|^2\right)\\&=\frac{-2}{s_{11}}\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^g\left\{\frac{\partial s_{1i}}{\partial z}t_{ij}\frac{\partial s_{j1}}{\partial\bar z}\right\}-\frac{\partial s_{11}}{\partial z}\frac{1}{s_{11}}\frac{\partial s_{11}}{\partial\bar z}\right)\end{aligned}$$

[#] Cette démonstration est due à M. Akira Takeuchi

En posant $S_{1z}=\left(\frac{\partial s_{11}}{\partial z},\dots,\frac{\partial s_{1g}}{\partial z}\right)$ et

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix} t_{11}-\frac{1}{s_{11}} & t_{12} & \cdots & t_{1g} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1g} & t_{2g} & \cdots & t_{gg} \end{pmatrix}$$

on a $\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\,\partial z}\mu(z\colon C_1)=\left(\frac{-2}{s_{11}^2}\right)\mathrm{Re}\{S_{1z}\tilde{T}\,{}^t\bar{S}_{1z}\}$. Considérons la matrice suivante: $P=(p_{ij}(z))$ telle que $p_{ii}(z)=1$ $(1\leqq i\leqq g)$, $p_{1j}(z)=\frac{s_{1j}(z)}{s_{11}(z)}$ $(2\leqq j\leqq g)$ et $p_{ij}(z)=0$ $(2\leqq i\leqq g,\ 1\leqq j\leqq g,\ i\neq j)$. La matrice P est réelle et non-singulière. Alors on a

$$P\tilde{T}\,{}^tP=\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_{2g} & \cdots & t_{gg} \end{pmatrix}$$

Puisque T est positive non-dégénérée, il en résulte que la matrice $\tilde{T}$ est positive non-dégénérée, d'où $S_{1z}\tilde{T}\,{}^t\bar{S}_{1z}\geqq 0$. Par suite $\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\,\partial z}\mu(z\colon C_1)\leqq 0$ pour tout $z\in\Delta$. Nous avons donc que $\mu(z\colon C_1)$ est une fonction positive surharmonique de z dans Δ. C. Q. F. D.

Un des propos de ce mémoire est de généraliser la surharmonicité de $\lambda(z)$ et de $\mu(z\colon C_i)$ mentionnée ci-dessus à la famille holomorphe quelconque $\pi\colon\mathscr{D}\to\Delta$ de surfaces de Riemann ouvertes telle que $\mathscr{D}$ soit une variété de Stein.

2. Modules harmoniques $\lambda(\alpha,\beta)$ et $\mu(C)$. Soit S un domaine multivalent étalé au-dessus du plan w dont la frontière consiste en nombre fini des courbes fermées lisses: $\{C_i\}_{i=1}^n$. Supposons que la direction de toute C_i soit positive par rapport à S: $\partial S=C_1+\cdots+C_n$. D'abord supposons $n\geqq 2$. Partageons $\{C_i\}_{i=1}^n$ en trois parties: $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ où α et β sont non-vides. Formons alors la fonction harmonique $h(w\colon\alpha,\beta)$ $(=h(w)=h)$ dans S qui est$=0$ sur α, $=1$ sur β, $=c$ (une constante) sur γ et $\int_\gamma \frac{\partial h}{\partial n}\, dS = 0$. Elle existe uniquement. Considérons l'intégrale de Dirichlet de h étendue à S: $D_S(h) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] du dv$ et posons $\lambda(S: \alpha, \beta) = D_S(h)^{-1}$, qui est dite un module harmonique de S par rapport aux contours α et β. Evidemment $\lambda(S: \alpha, \beta) = \lambda(S: \beta, \alpha)$.

Ensuite supposons que le genre de S est positif, mais d'ailleurs quelconque. Soit C une courbe fermée de Jordan dans S telle que le domaine $S - C$ soit connexe. Deux composantes frontières $\{C^+, C^-\}$ de $S - C$ se trouvent au-dessus de C. On a $\partial(S - C) = \partial S + C^+ + C^-$. Pour $w \in C$ écrivons w^+ et w^- deux points de C^+ et C^- au-dessus de w respectivement. Formons la différentielle harmonique et regulière $\sigma(w: C)$ dans S de façon que l'intégrale de $\sigma(w: C)$ dans $S - C$ soit uniforme qu'on désigne par $u(w: C)$, que $u(w^+: C) - u(w^-: C) = 1$ pour tout $w \in C$ et que $u(w: C)$ soit une constante C sur ∂S. Certainement $\sigma(w: C)$ existe uniquement. Considérons la norme de Dirichlet de $\sigma(w: C)$ étendue à S: $\|\sigma(w: C)\|_S^2 = \iint_S \left[\left(\frac{\partial u(w: C)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(w: C)}{\partial v}\right)^2\right] du dv$ et posons $\mu(S: C) = \|\sigma(w: C)\|_S^{-2}$, qui est dite le module harmonique de S par rapport au cycle C.

Evidemment $\lambda(S: \alpha, \beta)$ et $\mu(S: C)$ sont des nombres réels positif et invariants par tout automorphisme analytique de S. De plus il est bien connu que $\lambda(S: \alpha, \beta)$ s'exprime une sorte de distance entre α et β dans S (voir par exemple A. Marden et B. Rodin; Acta Math. 115 (1966)) et $\mu(S: C)$ s'exprime la longueur extrémale de la famille des courbes dans S qui sont homologues à la courbe C (voir A. Accola; Proc. N.A.S. 46 (1960)). Ceci est très utile pour observer *intuitivement* le mouvement de $\lambda(S: \alpha, \beta)$ et $\mu(S: C)$ quand on meut *analytiquement* le domaine S (voir le § suivant).

3. Mouvement de $\lambda(z: \alpha, \beta)$ et $\mu(z: C)$. Soit $\mathscr{D}$ un domaine multivalent en nombre fini ou infini étalé au-dessus d'un dicylindre de la forme (Δ, C) où $\Delta: |z| < \rho$ et $C: |w| < \infty$ dans l'espace (z, w). Ecrivons $\mathscr{D}(c)$ la fibre dans $\mathscr{D}$ qui se trouve au-dessus de la droite $z = c$. Supposons que pour tout z dans Δ, $\mathscr{D}(z)$ soit irréductible et que $\mathscr{D}$ se considère comme une variété de Stein. Par suite on peut former une fonction plurisousharmonique $\varphi(z, w)$ analytique au sens réel dans $\mathscr{D}$ telle que, si l'on désigne par $\mathscr{D}_R$ l'ensemble des points de $\mathscr{D}$ donné par $\varphi(z, w)<R$, R étant un nombre réel quelconque, $\mathscr{D}_R$ soit contenu à l'intérieur complet de $\mathscr{D}$: $\mathscr{D}_R \Subset \mathscr{D}$ et $\lim_{R\to\infty} \mathscr{D}_R=\mathscr{D}$. Ecrivons $\{C_i(z, R)\}_{i=1}^{n(z,R)}$ la famille des composantes frontières de $\mathscr{D}_R(z)$. Soit Δ': $|z|<\rho'$ où $0<\rho'<\rho$ et prenons R_0 tel que $\mathscr{D}_{R_0}(z)\neq\emptyset$ pour $z\in\Delta'$. Supposons que $n(z, R)\geqq 2$ pour $z\in\Delta'$ et $R\geqq R_0$. Nous partageons $\{C_i(z, R)\}_{i=1}^{n(z,R)}$ en trois parties $\{\alpha(z, R), \beta(z, R), \gamma(z, R)\}$ de manière que $\alpha(z, R)$ et $\beta(z, R)$ sont non-vides, qu'il existe R_1 $(\geqq R_0)$ tel que pour tout $z\in\Delta'$, $\{\alpha(z, R), -\alpha(z, R_1)\}$ limite un sous-domaine de $\mathscr{D}_R(z)-\mathscr{D}_{R_1}(z)$ et de même pour $\{\beta(z, R), -\beta(z, R_1)\}$ et $\{\gamma(z, R), -\gamma(z, R_1)\}$ et que trois ensembles $\bigcup_{z\in\Delta'}(z, \alpha(z, R))$, $\bigcup_{z\in\Delta'}(z, \beta(z, R))$ et $\bigcup_{z\in\Delta'}(z, \gamma(z, R))$ soient mutuellement disjointes dans $\mathscr{D}$. D'après le §2 on peut considérer le module harmonique $\lambda(\mathscr{D}_R(z)$: $\alpha(z, R), \beta(z, R))$. Puisque $\mathscr{D}_R(z)\Subset\mathscr{D}_{R'}(z)$ pour $R<R'$, la suite $\{\lambda(\mathscr{D}_R(z)$: $\alpha(z, R), \beta(z, R))\}$ tend en croissant vers un nombre positif ou $+\infty$ qu'on désigne par $\lambda(z$: $\alpha, \beta)$.

Ensuite supposons qu'on trouve pour $z\in\Delta$ une courbe fermée de Jordan $C(z)$ dans $\mathscr{D}(z)$ de maniere que $\mathscr{D}(z)-C(z)$ est connexe et que $C(z)$ se meut continuellement avec z dans Δ. Prenons R_2 $(>R_0)$ tel que $D_{R_2}(z)$ contient $C(z)$ pour $z\in\Delta'$. Alors d'après le §2 on peut considérer le module harmonique $\mu(\mathscr{D}_R(z)$: $C(z))$. Il est clair que, si R tend vers $+\infty$, la suite $\{\mu(\mathscr{D}_R(z)$: $C(z))\}$ tend en croissant vers un nombre réel qu'on désigne par $\mu(z$: $C)$. Bien entendu $0<\mu(z$: $C)<+\infty$. Sous cette configuration je vais montrer un lemme fondamental:

Lemme 1. 1. *$\lambda(z$: $\alpha, \beta)$ est une fonction positive surharmonique de z dans Δ.* 2. *$\mu(z$: $C)$ l'est aussi.*

Quand on rappelle le raisonnement dans le §3 du mémoire précédent [5], il suffit de traiter le domaine $\mathscr{D}_R$. De plus d'aprés son §2 on peut supposer que $\left(\frac{\partial\varphi(z, w)}{\partial u}, \frac{\partial\varphi(z, w)}{\partial v}\right)\neq 0$ à aucun point de $(z, \partial\mathscr{D}_R(z))$ et que $\mathscr{D}_R(z)$ n'a aucun point de ramification comme un domaine multivalent étalé au-dessus du plan w. Par suite toutes

$\mathscr{D}_R(z)$ pour $z \in \varDelta'$ sont topologiquement équivalentes. En abrégé posons à nouveau $\mathscr{D}_R = \mathscr{D}$, $\varDelta' = \varDelta$, $h(w: \alpha(z, R), \beta(z, R)) = h(z, w)$ et $\lambda(\mathscr{D}_R(z): \alpha(z, R), \beta(z, R)) = \lambda(z: \alpha, \beta)$ respectivement. Puisque pour z fixé dans $\varDelta$, $h(z, w)$ est une constante sur chaque contour de $\partial\mathscr{D}(z)$, le principe de réflexion montre que $h(z, w)$ sur $\mathscr{D}(z)$ peut être uniquement étendue à la fonction $\hat{h}(z, w)$ qui est harmonique au voisinage $V(z)$ de $\partial\mathscr{D}(z)$. Il s'en suit naturellement que $\hat{h}(z, w)$ s'exprime une fonction de la classe C^2 par rapport à x, y, u et v définie dans un voisinage de $\bigcup_{z \in \varDelta} (z, \partial\mathscr{D}(z))$. Pour simplicité désignons à nouveau $\hat{h}(z, w)$ par $h(z, w)$. Pour démontrer le lemme 1.1 il suffit de vérifier l'inégalité suivante:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \lambda(z: \alpha, \beta)\right]_{z=0} \leqq 0. \tag{1}$$

Comme d'habitude sous les conditions mentionnées ci-dessus la formule de Stokes donne

$$D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w)) = \int_{\beta(z)} \mathrm{d}^* h(z, w)$$

où $\mathrm{d}^*[\ ] = \dfrac{\partial[\ ]}{\partial n}\,\mathrm{d}s$. Prenons z suffisamment voisin de l'origine. Alors $h(z, w)$ peut se regarder comme une fonction harmonique sur une surface $\hat{\mathscr{D}}(0)$ qui contient $\mathscr{D}(0)$ à l'intérieur complet et $\beta(z)$ comme une courbe dans $\hat{\mathscr{D}}(0)$ qui est homologue à $\beta(0)$ dans $\hat{\mathscr{D}}(0)$. Il en vient

$$= \int_{\beta(0)} \mathrm{d}^* h(z, w).$$

D'après la propriété de $h(z, w)$ et $h(0, w)$ la formule de Stokes donne encore que cette intégrale est

$$= \int_{\alpha(0)+\beta(0)+\gamma(0)} h(0, w)\mathrm{d}^* h(z, w)$$

$$= \iint_{\mathscr{D}(0)} \left[\frac{\partial h(0, w)}{\partial u} \frac{\partial h(z, w)}{\partial u} + \frac{\partial h(0, w)}{\partial v} \frac{\partial h(z, w)}{\partial v}\right] \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{*}$$

$$= \int_{\alpha(0)+\beta(0)+\gamma(0)} h(z, w)\mathrm{d}^* h(0, w). \tag{2}$$

Or pour des raisons de convenance on appelle une fonction réelle finie $\psi(z, w)$ définie dans un voisinage V d'un point frontière $P_0 \in (z_0, \partial\mathscr{D}(z_0))$, *celle de Levi au point* P_0, s'il existe un voisinage V_{P_0} de P_0 contenu dans V tel que $V_{P_0} \cap \mathscr{D} = \{P \in V_{P_0}: \psi(P) > 0\}$, $V_{P_0} \cap \partial\mathscr{D} = \{P \in V_{P_0}: \psi(P) = 0\}$ et $V_{P_0} - \mathscr{D} = \{P \in V_{P_0}: \psi(P) < 0\}$. Supposons de plus que, quel que soit z fixé, $\psi(z, w)$ est harmonique par rapport à w sur $V_{P_0} \cap \hat{\mathscr{D}}(z)$. Alors le même procédé qu'on a fait dans le §1 de [5] nous fournit

$$(3) \quad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2\psi(z, w)}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right]_{P_0} \leqq 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2\psi(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\,\frac{\partial\psi(z, w)}{\partial z}\Big/\frac{\partial\psi(z, w)}{\partial w}\right\}_{P_0}, \\ &\mathrm{d}^*\psi(z_0, w) = \frac{\partial\psi(z_0, w)}{\partial n_w}\,\mathrm{d}s_w < 0 \end{aligned}$$

le long de l'arc déterminé par $\partial\mathscr{D}(z_0) \cap V_{P_0}$.

Maintenant notre fonction $h(z, w)$ est celle de Levi à tout point sur $\bigcup_{z\in\Delta}(z, \alpha(z))$ et que $1 - h(z, w)$ l'est aussi à tout point sur $\bigcup_{z\in\Delta}(z, \beta(z))$. Il s'agit du point sur $\bigcup_{z\in\Delta}(z, \gamma(z))$. Soit ζ un point quelconque de $\gamma(z)$ tel que $\dfrac{\partial h(z, w)}{\partial w} \neq 0$ au point (z, ζ). D'après $h(z, w) = c(z)$ (une constante) sur $\gamma(z)$ on trouve un sous-arc $\gamma_\zeta(z)$ de $\gamma(z)$ contenant ζ tel que $h(z, w) - c(z)$ ou $c(z) - h(z, w)$ est de Levi à tout point de $\gamma_\zeta(z)$. Il s'en suit que, si l'on pose $\{\zeta_i(z)\}_{i=1}^{n(R)}$ l'ensemble des points de $\gamma(z)$ auquel $\dfrac{\partial h(z, w)}{\partial w}$ est nulle, on prend que $h(z, w) - c(z)$ est de Levi à tout point sur les parties entre $\zeta_1(z)$ et $\zeta_2(z)$, $\zeta_3(z)$ et $\zeta_4(z), \dots$, et $c(z) - h(z, w)$ l'est aussi sur les parties entre $\zeta_2(z)$ et $\zeta_3(z)$, $\zeta_4(z)$ et $\zeta_5(z), \dots$. Désignons par $\gamma'(0)$ ceux-là et par $\gamma''(0)$ ceux-ci. Revenons à la formule (2). On y fait la différentielle laplacienne comme suite:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\,D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))\right]_{z=0} \\ &= \int_{\alpha(0)+\beta(0)+\gamma(0)}\left[\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right]_{z=0}\mathrm{d}^*h(0, w) \\ &= \left\{\int_{\alpha(0)}\left[\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right]_{z=0}\mathrm{d}^*h(0, w)\right. \end{aligned}$$

$$+\int_{\gamma'(0)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}(h(z, w)-c(z))\right]_{z=0} d^*h(0, w)\Big\}$$

$$+\Big\{\int_{\beta(0)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}(1-h(z, w))\right]_{z=0} d^*h(0, w)$$

$$+\int_{\gamma''(0)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}(c(z)-h(z, w))\right]_{z=0} d^*h(0, w)\Big\}$$

$$+\int_{\gamma(0)}\left[\frac{\partial^2 c(z)}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right]_{z=0} d^*h(0, w).$$

Appliquons la formule (3) à $h(z, w)$, $h(z, w)-c(z)$, $1-h(z, w)$ ou $c(z)-h(z, w)$ àtout point de $(0, \alpha(0))$, $(0, \gamma'(0))$, $(0, \beta(0))$ ou $(0, \gamma''(0))$ respectivement. D'après $\int_{\gamma(0)} d^*h(0, w)=0$ il vient

$$\geqq\int_{\alpha(0)+\beta(0)+\gamma(0)} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\,\frac{\partial h(z, w)}{\partial z}\Big/\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\right\}_{(0,\zeta)} d^*h(0, \zeta)$$

$$-\int_{\gamma(0)} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\,\frac{\partial c(z)}{\partial z}\Big/\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\right\}_{(0,\gamma)} d^*h(0, \zeta).$$

En utilisant la dérivée complexe par le même calcul dans le § 1 de [5], il vient évidemment

$$=4\,\mathrm{Im}\Big\{\int_{\partial\mathscr{D}(0)}\left[\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\,\frac{\partial h(z, w)}{\partial z}\right]_{(0,w)} dw$$

$$-\left[\frac{\partial c(z)}{\partial z}\right]_{z=0}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_{\gamma(0)}\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\,dw\right]_{z=0}\Big\}$$

$$=4\,\mathrm{Im}\Big\{\int_{\partial\mathscr{D}(0)}\left[\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\,\frac{\partial h(z, w)}{\partial z}\right]_{(0,w)} dw\Big\}.$$

D'après la formule de Stokes nous avons enfin

$$(4)\qquad \left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))\right]_{z=0} \geqq 8\iint_{\mathscr{D}(0)}\left|\left[\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\right]_{z=0}\right|^2 du\,dv\,.$$

Parce que $\lambda(z\colon\alpha, \beta)=D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))^{-1}>0$ il suffit pour (1) de justifier l'inégalité suivante:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &D_{\mathscr{D}(0)}(h(0, w))\left[\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))\right]_{z=0} \\ &\geqq 2\left|\left[\frac{\partial}{\partial z} D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))\right]_{z=0}\right|^2. \end{aligned}$$

D'après l'expression $(*)$ on aura d'abord

$$(**)\qquad D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))=4\iint_{\mathscr{D}(0)}\left\{\frac{\partial h(z, w)}{\partial \bar{w}}\,\frac{\partial h(0, w)}{\partial w}\right\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

En effet, il suffit de voir

$$\mathrm{Im}\left\{\iint_{\mathscr{D}(0)}\frac{\partial h(z, w)}{\partial \bar{w}}\,\frac{\partial h(0, w)}{\partial w}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right\}=0\,.$$

Si l'on désigne par $h^*(z, w)$ la fonction harmonique conjugée de $h(z, w)$, la formule de Cauchy-Riemann donne que $\mathrm{Im}\{\ \ \}=\iint_{\mathscr{D}(0)}\left[\frac{\partial h^*(z, w)}{\partial u}\,\frac{\partial h(0, w)}{\partial u}\right.$ $\left.+\frac{\partial h^*(z, w)}{\partial v}\,\frac{\partial h(0, w)}{\partial v}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v= <\mathrm{d}h^*(z, w), \mathrm{d}h(0, w)>_{\mathscr{D}(0)}$. Soit g le genre de $\mathscr{D}(0)$ et soit $\{C_i(0)\}_{i=1}^n$ l'ensemble des contours de $\partial\mathscr{D}(0)$. Comme d'habitude on trace sur $\mathscr{D}(0)$, $2g$ courbes fermées $\{A_i, B_i\}_{i=1}^g$ et $n-1$ arcs $\{l_i\}_{i=1}^{n-1}$ tels que l_i traverse en point de $C_1(0)$ au point de $C_{i+1}(0)$ et que $\mathscr{D}(0)-\{A_i, B_i\}_{i=1}^g \cup \{l_i\}_{i=1}^{n-1}$ soit simplement connexe. Alors on a $<\mathrm{d}h^*(z, w), \mathrm{d}h(0, w)>_{\mathscr{D}(0)}=\int_{(\prod_{i=1}^g A_iB_iA_i^{-1}B_i^{-1})\alpha(0)\beta(0)\gamma(0)(\prod_{i=1}^{n-1} l_i^+ l_i^-)} h(0, w)$ $\mathrm{d}^*h^*(z, w)=-\int_{\alpha(0)\beta(0)\gamma(0)} h(0, w)\mathrm{d}h(z, w)$. D'après la propriété de $h(0, w)$ cette intégrale doit être nulle.

Or en prenant la différentielle de la formule $(**)$ par rapport à z, on a

$$\frac{\partial}{\partial z} D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))=4\iint_{\mathscr{D}(0)}\left\{\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial z\,\partial \bar{w}}\,\frac{\partial h(0, w)}{\partial w}\right\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz il s'en suit que

$$\begin{aligned} &\left|\left[\frac{\partial}{\partial z} D_{\mathscr{D}(z)}(h(z, w))\right]_{z=0}\right|^2 \\ &\leqq 16\left\{\iint_{\mathscr{D}(0)}\left|\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial z\,\partial \bar{w}}\right|^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right\}_{z=0}\cdot\left\{\iint_{\mathscr{D}(0)}\left|\frac{\partial h(0, w)}{\partial w}\right|^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right\}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (4) il vient

$$\leqq \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} D_{\mathscr{D}(z)}(h(z,w))\right]_{z=0} \cdot D_{\mathscr{D}(0)}(h(0,w))\,.$$

Cette inégalité est celle qu'on désire. Le lemme 1.1 a été complètement démontré.

Pour démontrer le lemme 1.2 il suffit de vérifier $\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\mu(z,C)\right]_{z=0} \leqq 0$. Sous notre configuration la formule de Stokes donne

$$\|\sigma(z,w)\|^2_{\mathscr{D}(z)} = \int_{C^+(z)} \sigma^*(z,w)\,.$$

Prenons z suffisamment voisin de l'origine. Alors $\sigma(z,w)$ peut se regarder comme une différentielle harmonique sur une surface $\hat{\mathscr{D}}(0)$ contenant $\mathscr{D}(0)$ à l'intérieur complet et de plus $C^+(0)$ peut se regarder comme un cycle dans $\hat{\mathscr{D}}(0)$ qui est homologue à $C^+(0)$ dans $\hat{\mathscr{D}}(0)$. Il en vient

$$= \int_{C^+(0)} \sigma^*(z,w)\,.$$

D'après la propriété de $u(0,w)$ $(=\int^W \sigma(0,w))$ et $\sigma(z,w)$ il est

$$= \int_{C^+(0)+C^-(0)+\partial\mathscr{D}(0)} u(0,w)\sigma^*(z,w)$$

$$= 4\,\mathrm{Re}\left[\iint_{\mathscr{D}(0)} \left\{\frac{\partial u(z,w)}{\partial\bar{w}}\,\frac{\partial u(0,w)}{\partial w}\right\} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right]$$

$$= \int_{C^+(0)} \sigma^*(0,w) + \int_{\partial\mathscr{D}(0)} u(z,w)\sigma^*(0,w)\,.$$

On sait donc que

$$\|\sigma(z,w)\|^2_{\mathscr{D}(z)} - \|\sigma(0,w)\|^2_{\mathscr{D}(0)} = \int_{\partial\mathscr{D}(0)} u(z,w)\sigma^*(0,w)\,. \tag{2'}$$

D'autre part le même calcul qu'on vient de faire nous conduit à

$$\int_{\partial\mathscr{D}(0)} \left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right]_{(0,w)} \sigma^*(0,w)$$

$$\geqq 4\,\mathrm{Im}\left\{\iint_{\partial\mathscr{D}(0)}\left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial\bar z\,\partial w}\frac{\partial u(z,w)}{\partial z}\right]_{(0,w)}dw\right\}.$$

Puisque $\left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial\bar z\,\partial w}\frac{\partial u(z,w)}{\partial z}\right]_{(0,w)}dw$ s'exprime une 1-forme non-fermée sur $\mathscr{D}(0)-C(0)$, et $u(z,w^+)-u(z,w^-)=1$ pour tout $z\in\varDelta$ et $w\in C(0)$, la formule de Stokes donne que le second membre est

$$=4\,\mathrm{Im}\left\{\iint_{\mathscr{D}(0)+C^+(0)+C^-(0)}\left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial\bar z\,\partial w}\frac{\partial u(z,w)}{\partial z}\right]_{(0,w)}dw\right.$$

$$\left.+\int_{C(0)}\left[\frac{\partial}{\partial z}(u(z,w^+)-u(z,w^-))\right]_{z=0}\left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial\bar z\,\partial w}\right]_{(0,w)}dw\right\}$$

$$=4\mathrm{Im}\left\{2\sqrt{-1}\iint_{\mathscr{D}(0)}\left|\left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial\bar z\,\partial w}\right]_{z=0}\right|^2 du\,dv\right\}.$$

D'après l'expression (2′) on a donc

$$(4')\qquad \left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\|\sigma(z,w)\|^2_{\mathscr{D}(z)}\right]_{z=0}\geqq 8\iint_{\mathscr{D}(0)}\left|\left[\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial\bar z\,\partial w}\right]_{z=0}\right|^2 du\,dv.$$

En répétant le même procédé qui conduit (5), on aura l'inégalité désirée: $\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\mu(z:C)\right]_{z=0}\leqq 0$. Le lemme 1.2 a été démontré.

C.Q.F.D.

Par le même raisonnement dans le §2 et le §3 du mémoire précédent [5], le lemme 1 qu'on vient d'établir peut être aisément généralisé à celui de la forme mentionnée dans l'introduction de ce mémoire.

4. Sections holomorphes. En utilisant le lemme 1.1 nous allons montrer la propriété de sections holomorphes dans la famille speciale $\mathscr{D}$. Cette propriété s'appliquera à la recherche sur les fonctions entierès de deux variables dans le § suivant. Soit $\mathscr{D}$ un domaine multivalent étalé au-dessus du dicylindre $(\varDelta, C)$ où $\varDelta$: $|z|<\rho$ et C: $|w|<\infty$ dans l'espace (z, w) qui satisfait à trois conditions suivantes:

1°. *$\mathscr{D}$ se considère comme une variètè de Stein.*

2°. *Pour tout $z\in\varDelta$, la fibre $\mathscr{D}(z)$ est analytiquement équivalente* *au cercle unité.*

3°. *Il y a un feuillet de $\mathscr{D}$ qui contient une partie univalente étalé au-dessus d'un voisinage de la droite $w=0$ dans (Δ, C).*

On l'appelle dans ce mémoire *de type* (H). Désignons par U le feuillet de $\mathscr{D}$ mentionné en 3°. Sans perdre la généralité dès à présent on peut supposer que U se situe justement au dicylindre $(\Delta, |w|<1)$. Posons $O=U\cap(\Delta, w=0)$ et désignons par O_z le seul point commun de O et $\mathscr{D}(z)$ pour $z\in\Delta$.

Or soit Δ' un sous-domaine de Δ quelconque et $\mathscr{D}'=\bigcup_{z\in\Delta'}(z, \mathscr{D}(z))$. Considérons une fonction uniforme: $z\in\Delta'\to a(z)\in\mathscr{D}(z)$ telle que $(z, a(z))$ définit un ensemble analytique dans D'. En posant $\mathfrak{a}$: $z\to a(z)$ où $z\in\Delta'$ on l'appelle une section holomorphe (dans D) définie sur Δ'. D'abord on montre une généralisation du théorème concernant des fonctions holomorphes et bornées. Si l'on pouvait avoir en domaine $\mathscr{D}$ de type (H) une métrique strictement négative, on aurait immédiatement les lemmes suivants 2 et 3 (voir H. Grauert et H. Reckziegel; Math. Zeitschr. 89 (1965) et encore S. Kobayashi; Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker Inc. New York (1970)). Mais il nous semble qu'il est difficile de voir si l'on a toujours telle métrique en notre $\mathscr{D}$. Donc nous les montrerons directement:

Lemme 2. *Supposons que $\mathscr{D}$ est de type (H). Soit $\mathfrak{a}$: $z\to a(z)$ une section holomorphe définie sur le cercle pointillé Δ^*: $0<|z|<\rho$. Alors il y a une section holomorphe $\hat{\mathfrak{a}}$: $z\to\hat{a}(z)$ définie sur tout le cercle Δ telle que $\hat{a}(z)=a(z)$ pour $z\in\Delta^*$.*

En effet, posons $\mathscr{D}^*=\mathscr{D}-(0, \mathscr{D}(0))$. Nous allons ici un domaine multiplié en nombre deux au-dessus de $\mathscr{D}^*$ dont les surfaces de ramification consistent en la droite: $O-\{(0, O_0)\}$ et la section $\mathfrak{a}$. On désigne tel domaine par $\tilde{\mathscr{D}}^*_{\mathfrak{a}}$. D'après la condition 2°, $\tilde{\mathscr{D}}^*_{\mathfrak{a}}$ est uniquement déterminé. De plus grâce au théorème d'Oka $\tilde{\mathscr{D}}^*_{\mathfrak{a}}$ est un espace de Stein, parce que $\mathfrak{a}$ est holomorphe. Soit $e(\mathfrak{a})=\{z\in\Delta^*: a(z)=O_z\}$. Alors il est isolé dans Δ^* et le sous-domaine de $\tilde{\mathscr{D}}^*$ se trouvant audessus de $(\Delta^*-e(\mathfrak{a}), C)$ est une variété de Stein. Par 2°, $\tilde{\mathscr{D}}^*_{\mathfrak{a}}(z)$ pour $z\in\Delta^*-e(\mathfrak{a})$ est équivalente à un anneau. On désigne par $\alpha(z)$

l'un des contours frontières idéals de $\mathscr{D}_{a}^{*}(z)$ et par $\beta(z)$ l'autre. Immédiatement on peut prendre $\{\alpha(z), \beta(z)\}$ de façon que le partage $\{\bigcup_{z\in\Delta^*-e(a)}(z, \alpha(z)), \bigcup_{z\in\Delta^*-e(a)}(z, \beta(z))\}$ se soumette à la configuration mentionnée dans le §3. On donc considère le module harmonique $\lambda(z: \alpha, \beta)\,(=\lambda(z))$ de $D(z)$ pour $z\in\Delta^*-e(a)$. En vertu du lemme 1.1 $\lambda(z)$ y est positive surharmonique. Or pour z fixé dans Δ on considère une fonction holomorphe $f(z, w)$ dans $\mathscr{D}(z)$ telle que $f(z, w)$ transforme biunivoquement $\mathscr{D}(z)$ sur un cercle dans le plan W: $|W|<R(z)$ et que $f(z, O_z)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial w}(z, O_z)=1$. Elle est dite la fonction d'uniformisation de $\mathscr{D}(z)$ par rapport à O_z. D'après 2° et $\mathscr{D}(z)\supset U(z)=|w|<1$ on a $+\infty>R(z)>1$ pour tout $z\in\Delta$. Posons $f(z, a(z))=A(z)$ pour $z\in\Delta^*-e(a)$. Considérons la surface de Riemann étalée au-dessus du plan W déterminée par $\sqrt{W(W-A(z))}$ et désignons par $\mathscr{D}_{A}^{*}(z)$ sa partie qui se trouve au-dessus du cercle: $|W|<R(z)$. Evidemment $\mathscr{D}_{A}^{*}(z)$ est analytiquement équivalente à $\mathscr{D}_{a}^{*}(z)$. Maintenant soit $0<r<1$ et soit $\mathrm{I}(r)$ le ségment fermé $[0, r]$ sur l'axe réel dans le plan W. Posons $S(r)=\{|W|<1\}-\mathrm{I}(r)$. Les composantes frontières de $S(r)$ consistent en $|W|=1$ et $\mathrm{I}(r)$. De plus soit $\tilde{S}(r)$ la partie de la surface déterminée par $\sqrt{W(W-r)}$ qui se trouve au-dessus du cercle unité: $|W|<1$. Les composantes de $S(r)$ consistent en deux contours: $\{\tilde{\alpha}(z), \tilde{\beta}(z)\}$ qui se trouvent au-dessus de $|W|=1$. Il est évident d'après la symétrie de $S(r)$ que $\lambda(\tilde{S}(r): \tilde{\alpha}(z), \tilde{\beta}(z))=2\lambda(S(r): |W|=1, \mathrm{I}(r))$. En abrégé posons $\Lambda(r)=\lambda(S(r): |W|=1, \mathrm{I}(r))$. Puisque $\mathscr{D}_{a}^{*}(z)$ est équivalente à $S(|A(z)|/R(z))$, il s'en suit que $\lambda(z)=2\Lambda(|A(z)|/R(z))$. D'autre part $\Lambda(r)$ est exactement exprimé par l'intégrale elliptique et le développement asymptotique de $\Lambda(r)$ pour $r\to0$ ou $r\to1$ est complètement étudié (voit par exemple G. Hersch; Comm. Math. Helv. 29 (1955)):

$$\Lambda(r)=\frac{1}{4}\frac{\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(1-r^2)x^2)}}}{\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}}$$

$$(6)\qquad \Lambda(r)\sim\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{r}+O(r^2)\quad \textit{pour } r\longrightarrow 0$$

$$\Lambda(r) \sim \frac{\pi}{4\log\frac{8}{1-r}}(1+O(1-r)) \text{ pour } r \longrightarrow 1 .$$

Soit $z_0 \in e(\mathfrak{a})$. Il y a un petit voisinage γ de z_0 dans Δ^* tel que $(\gamma - \{z_0\}) \cap e(\mathfrak{a}) = \phi$ et $a(z) \in U(z)$ pour $z \in \gamma - \{z_0\}$. D'après le principe de Dirichlet on y a $\lambda(z) > 2\Lambda(|a(z)|)$. Puisque $a(z) \to 0$ pour $z \to z_0$, la formule (6) donne $\lim_{z \to z_0} \lambda(z) = +\infty$. Par suite quand on pose $\lambda(z) = +\infty$ pour $z \in e(\mathfrak{a})$, $\lambda(z)$ est positive surharmonique dans Δ^*. Il s'en suit que $\lambda(z)$ peut s'étendre uniquement une fonction surharmonique dans tout le domaine Δ et donc que $\lambda(0) > 0$.

Cas ou $\lambda(0) = +\infty$. Soit L un arc de Jordan contenu dans Δ^* qui aboutit à l'origine, mais d'ailleurs quelconque. D'après le lemme du mémoire précédent [5], $\log R(z)$ *est surharmonique dans* Δ. La proposition élémentaire (voir K. Oka; J. Sci. Hiroshima Univ. 7 (1937)) fournit que $\underline{\lim}_{z \in L} \log R(z) = \log R(0)$. Il y a donc une suite $\{z_n\}$ de point sur L tendant vers 0 telle qu'on ait $\lim_{n \to \infty} R(z_n) = R(0)$ et $\lim_{n \to \infty} \lambda(z_n) = +\infty$. D'après $R(0) < +\infty$ on a $R(z_n) < R(0) + 1$ pour grand n et $\lambda(z_n) = 2\Lambda(|A(z_n)|/R(z_n)) \leqq 2\Lambda(|A(z_n)|/R(0)+1)$. Par la formule (6) on a $\lim_{n \to \infty} A(z_n) = 0$. En appliquant le théorème de Koebe on a

$$\frac{|A(z_n)|}{(1+4|A(z_n)|)^2} \leqq |a(z_n)| \leqq \frac{|A(z_n)|}{(1-4|A(z_n)|)^2}$$

pour grand n. Il en vient $\lim_{n \to \infty} a(z_n) = 0$. Supposons maintenant que la section $\mathfrak{a}$ ne s'étend holomorphiquement jamais à l'origine. $\mathfrak{a}$ bien définit une fonction holomorphe et uniforme: $w = a(z)$ du cercle pointillé Δ^* en le plan w. Alors $a(z)$ doit avoir la singularité essentielle à l'origine. D'après $a(z) \neq \infty$ pour aucun $z \in \Delta^*$, F. Iversen [3] nous introduit qu'on peut tracer un arc L de Jordan contenu dans Δ^* aboutissant à l'origine de manière que $\lim_{z \in L} a(z) = \infty$. C'est en contradiction avec le fait précédent: $\lim_{n \to \infty} a(z_n) = 0$. En posant $a(0) = 0$ on sait que la section $\mathfrak{a}$ sur Δ^* s'étend holomorphiquement à l'origine.

Cas ou $0 < \lambda(0) < +\infty$. Pour $i = 1, 2$ soit $0 < |w_i| < 1$ et $w_1 \neq w_2$ et soit O_i la droite dans U qui se trouve au-dessus de $w = w_i$. Par le même procédé qu'on a construit $\mathscr{D}^*_{\mathfrak{a}}$ en utilisant $\mathfrak{a}$ et O, on peut construire $\mathscr{D}^*_{i\alpha}$ en utilisant α et O_i. De même que $\mathscr{D}^*_{\alpha}(z)$, $\lambda(z)$, $f(z, w)$ et $R(z)$ on considère $\mathscr{D}^*_{i\alpha}(z)$, $\lambda_i(z)$, $f_i(z, w)$ et $R_i(z)$ respectivement. Par l'argument qu'on a fait au cas où $\lambda(0)=+\infty$, $\lambda_i(z)$ est une fonction positive surharmonique dans tout le domaine $\varDelta$. On peut supposer que $0<\lambda_i(0)<+\infty$ pour $i=1, 2$. La fibre $\mathscr{D}(z)$ est transformée en le cercle $|W|<R(z)$ ou $|W_i|<R_i(z)$ par la fonction d'uniformisation $f(z, w)$ ou $f_i(z, w)$ par rapport à O_z et O_{iz} $(=O_i \cap \mathscr{D}(z))$ respectivement. Considérons dans $|W|<R(z)$ l'ensemble des points W tel que $2\Lambda(|W|/R(0)) =\lambda(0)$. Il est évidemment un cercle avec centre de l'origine qu'on désigne par $C: |W|=\eta\,(>0)$. De même pour $i=1, 2$ considérons l'ensemble: $2\Lambda(|W_i|/R_i(0))=\lambda_i(0)$ qu'on désigne par C_i: $|W_i|=\eta_i\,(>0)$. Soit L un arc de Jordan quelconque dans $\varDelta^*$ aboutissant à l'origine. La proposition élémentaire sur les fonctions surharmoniques donne que $\varliminf_{z\in L} \{\log[R(z)R_1(z)R_2(z)]+\lambda(z)+\lambda_1(z)+\lambda_2(z)\}=\log[R(0)R_1(0)R_2(0)] +\lambda(0)+\lambda_1(0)+\lambda_2(0)$. Il s'en suit qu'il y a une suite $\{z_n\}$ de point sur L tendant vers 0 pour $n\to\infty$ telle que $\lim_{n\to\infty} R(z_n)=R(0)$, $\lim_{n\to\infty} R_i(z_n)=R_i(0)$, $\lim_{n\to\infty} \lambda(z_n)=\lambda(0)$ et $\lim_{n\to\infty} \lambda_i(z_n)=\lambda_i(0)$. Posons $K=f^{-1}(0, C)$ et $K_i=f^{-1}(0, C_i)$ sur $\mathscr{D}(0)$. Puisque la transformation: $|W_i|<R_i(0)\to|W|<R(0)$ déterminé par $f_i(0, W_i)=f(0, W)$ est linéaire, on sait que trois cercles $\{C, f(0, f_1^{-1}(0, C_1)), f(0, f_2^{-1}(0, C_2))\}$ sur $|W|<R(0)$ ou $\{K, K_1, K_2\}$ sur $\mathscr{D}(0)$ s'intersectent au plus à un point, car si nécessaire il suffit de mouvoir w_i un peu. Or soit V un voisinage de K dans $\mathscr{D}$ quelconque. Alors on veux montrer que $(z_n, a(z_n))$ est contenu dans V pour assez grand n.

En effet, puisque $\mathscr{D}$ est une variété de Stein, il y a une fonction plurisousharmonique $\varphi(z, w)$ analytique au sens réel dans $\mathscr{D}$ telle que, si l'on pose $\mathscr{D}_q$: $\varphi(z, w)<q$, on a $\mathscr{D}_q \Subset \mathscr{D}$ et $\lim_{q\to\infty} \mathscr{D}_q=\mathscr{D}$. Pour z voisin de l'origine: $|z|<\rho_0$ et pour grand q tel que $O_z \in \mathscr{D}_q(z)$, soit $f_q(z, w)$ la fonction d'uniformisation de la fibre $\mathscr{D}_q(z)$ par rapport à O_z: $\mathscr{D}_q(z)\to|W|<R_q(z)$. Alors il n'est pas difficile de vérifier que $R_q(z)$ est continue dans $|z|<\rho_0$. Considérons une suite $\{R_q(z_n)\}_{q=1,2,\dots}$ de la fonction définie seulement dans l'ensemble $\{z_n\}_{n=1,2,\dots,\infty}$ où $z_\infty=0$. Puisque $R(z_n)$ y est continue et $\{R_q(z)\}$ tend en croissant vers $R(z)$, le théorème de Dini donne que $R_q(z_n)\to R(z_n)$ pour $q\to\infty$ uniformément dans $\{z_n\}_{n=1,2,\dots,\infty}$. On peut trouver N_0 tel que $2R(0)>R(z_n)>R(0)/2$ pour $n\geqq N_0$ et $\lambda(z_n)>\lambda(0)/2$. D'après (6) on a $\varepsilon_0>0$ tel que $2\Lambda\left(1-\frac{2\varepsilon_0}{R(0)}\right)$ $<\lambda(0)/2$. Supposons qu'on extraie une suite $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ telle que $|f(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|>R(z_{n_k})-\varepsilon_0$. Alors on a une contradiction suivante: pour $n_k>N_0$, $\lambda(0)/2<\lambda(z_{n_k})=2\Lambda(|f(z_{n_k}, a(z_{n_k})|/R(z_{n_k}))<2\Lambda\left(1-\frac{\varepsilon_0}{R(z_{n_k})}\right)$ $<2\Lambda\left(1-\frac{2\varepsilon_0}{R(0)}\right)<\lambda(0)/2$. Par suite il y a N_1 tel que $|f(z_n, a(z_n))|$ $\leqq R(z_n)-\varepsilon_0$ pour tout $n\geqq N_1$. Maintenant soit $|W_0|<1$ et soit C une courbe fermée de Jordan dans le cercle unité $|W|<1$ telle que l'intérieur $[C]$ limité par C contienne l'origine et ne contienne pas le point W_0, mais d'ailleurs quelconque. Considérons la fonction d'uniformisation de $[C]$ par rapport à l'origine: $f_C(W)\colon [C]\to|W'|<R_C$. Alors d'après la propriété de fonctions conformes (voir par exemple R. Nevanlinna; Eindeutige analytische Functionen, 2[e] ed. (1953) Chap. IV) on a $R_C\leqq p(|W_0|)<1$ où $p(|W_0|)$ ne dépend pas en prenant C. On en trouve $\varepsilon^*>0$ tel que pour grand n: $n\geqq N_2$ $(\geqq N_1)$ on a $R(z_n)p\left(1-\frac{\varepsilon_0}{R(z_n)}\right)$ $<(R(0)+\varepsilon^*)p\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2R(0)}\right)<R(0)-\varepsilon^*<R(z_n)-\varepsilon^*/2$. D'après $R_q(z_n)\to R(z_n)$ pour $q\to\infty$ uniformément dans $\{z_n\}_{n=1,2,\dots,\infty}$ il y a q_0 tel que $R(z_n)p\left(1-\frac{\varepsilon_0}{R(z_n)}\right)<R_{q_0}(z_n)$. Il s'en suit que

$$f(z_n, \mathscr{D}_{q_0}(z_n))\supseteq|W|<R(z_n)-\varepsilon_0 \qquad \textit{pour} \quad n\geqq N_2. \tag{7}$$

En particulier on a $\mathscr{D}_{q_0}(z_n)\ni a(z_n)$ pour $n\geqq N_2$. Par suite, si l'on suppose que $\{(z_n, a(z_n))\}$ ne soit pas contenue dans V pour assez grand n, alors on peut extraire une suite $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ telle que $\{(z_{n_k}, a(z_{n_k}))\}$ tende vers un point $(0, w_0)$ sur $(0, \mathscr{D}_{q_1}(0)-V(0))$ où $q_1>q_0$. Ecrivons $[K]$ le sous-domaine de $\mathscr{D}(0)$ limité par la courbe K. D'abord supposons que $w_0\in[K]-V(0)$. Alors il y a η' tel que $|f(0, w_0)|<\eta'<\eta$. Soit donné $\varepsilon'>0$. D'après (6) on a $\delta>0$ tel que $\Lambda(\eta'/(R(0)-\delta))>\Lambda(\eta'/R(0))-\varepsilon'/2$. Pour assez grand q_1 on a d'après (7), $\mathscr{D}_{q_1}(0)\supseteq f^{-1}(0, |W|<R(0)-\delta)$. Grâce à T. Nishino [II, p. 225] on peut former une rétraction analytique $\pi_{q_1}(z, w)$ d'un sous-domaine de $\mathscr{D}(z)$ en un sous-domaine de $\mathscr{D}(0)$ contenant $\mathscr{D}_{q_1}(0)$ telle que $\pi_{q_1}(z, O_z)=(0, O_0)$ où z est suffisamment voisin de l'origine: $|z|<\rho_1$ $(<\rho_0)$. Puisque $(z_{n_k}, a(z_{n_k}))\to(0, w_0)$

dans $\mathscr{D}$ pour $k\to\infty$, on a $|f(0, \pi_{q_1}(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|<\eta'$ pour grand k: $k\geqq N_3$ $(>N_2)$. Il s'en suit que $2\Lambda(\eta/R(0))+\varepsilon'=\lambda(0)+\varepsilon'>\lambda(z_{n_k})\geqq 2\Lambda(|f(0, \pi_{q_1}(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/(R(0)-\delta))>2\Lambda(\eta'/(R(0)-\delta))>2\Lambda(\eta'/R(0))-\varepsilon'$. En faisant $\varepsilon'\to 0$ on a $\Lambda(\eta/R(0))\geqq\Lambda(\eta'/R(0))$, qui est en contradiction avec $\eta>\eta'$. Ensuite supposons que $w_0\in\mathscr{D}(0)-[K]-V(0)$. Le lemme de Schwarz nous donne que $|f_q(z, w)|/R_q(z)\to|f(z, w)|/R(z)$ en croissant pour $q\to\infty$. Il n'est pas difficile de voir que pour $q\,(>q_0)$ fixé $|f_q(z, w)|/R_q(z)$ est continue par rapport à z et w dans $\mathscr{D}_q$. Par suite $\{|f_q(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R_q(z_{n_k})\}$ converge vers un nombre positif pour $k\to\infty$. De plus, puisque $\lambda(z_{n_k})\to\lambda(0)$ pour $k\to\infty$, on a par la formule (6) $\lim_{k\to\infty}|f(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R(z_{n_k})=\eta/R(0)$. Le théorème de Dini encore fournit que $|f_q(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R_q(z_{n_k})\to|f(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R(z_{n_k})$ pour $q\to\infty$ uniformément dans $\{z_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$. D'après (6) on a quel que soit $\varepsilon''>0$ il y a q_2 tel que $2\Lambda(\eta/R(0))-\varepsilon''=\lambda(0)-\varepsilon''<\lambda(z_{n_k})-\varepsilon''/2=2\Lambda(|f(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R(z_{n_k}))-\varepsilon''/2<2\Lambda(|f_{q_2}(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R_{q_2}(z_{n_k}))-\varepsilon''/3=\lambda(\mathscr{D}_{q_2}(z_{n_k}))-\varepsilon''/3\leqq 2\Lambda(|f(0, \pi_{q_2}(z_{n_k}, a(z_{n_k}))|/R(0))-\varepsilon''/4$ pour assez grand k. En faisant $k\to\infty$ et ensuite $\varepsilon''\to 0$ on a $\Lambda(\eta/R(0))\leqq\Lambda(|f(0, w_0)|/R(0))$, qui est en contradiction avec $w_0\in\mathscr{D}(0)-[K]-V(0)$. Par conséquent on a $(z_n, a(z_n))\in V$ pour assez grand n.

En posant V_i un voisinage quelconque de K_i dans $\mathscr{D}$, par le même procédé qu'on vient de faire on sait que $(z_n, a(z_n))\in V_i$ pour grand n. Autrement dit étant donné V, V_1 et V_2 à priori, il y a N tel que $(z_n, a(z_n))\in V\cap V_1\cap V_2$ pour $n\geqq N$. Par suite trois courbes $\{K, K_1, K_2\}$ sur $\mathscr{D}(0)$ s'intersectent au moins à un point. Il s'en suit que $K\cap K_1\cap K_2$ consiste en un seul point $(0, w_0)$ sur $\mathscr{D}(0)$ et que $\lim_{n\to\infty}a(z_n)=w_0$. Evidemment w_0 est déterminé indépendamment d'un arc L ou d'une suite $\{z_n\}$. Par suite de même que $\lambda(0)=+\infty$ le théorème de F. Iversen fournit que, si l'on pose $a(0)=w_0$, alors la section: $z\in\Delta\to a(z)$ est holomorphe même à l'origine. C. Q. F. D

En modifiant un peu la démonstration mentionnée ci-dessus nous avons aisément le

Lemme 2'. *Supposons que $\mathscr{D}$ soit de type (H). Soit $\mathfrak{a}$: $z\to a(z)$ une section holomorphe définie sur un domaine $\Delta-e$ où e est un ensemble fermé de capacité logarithmique nulle dans le plan z. Alors*

$\mathfrak{a}$ s'étend à la section holomorphe sur tout le domaine Δ.

Maintenant on montrera une généralisation du théorème relatif à familles normales des fonctions holomorphes et bornées (P. Montel). Soit $\mathscr{D}$ un domaine multivalent étalé au-dessus de (Δ, C): $\mathscr{D}=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}(z))$. Soit $\{\mathfrak{a}_\iota: z\to a_\iota(z)\}_\iota$ une famille de sections définies sur Δ. On dit qu'elle est *normale* si elle satisfait à la condition suivante: Soit $\{\mathfrak{a}_n\}$ une suite de $\{\mathfrak{a}_\iota\}$ quelconque. Alors on peut extraire une suite $\{\mathfrak{a}_{n_k}\}$ de $\{\mathfrak{a}_n\}$ telle que ou bien il existe une section sur $\Delta, \mathfrak{a}: z \to a(z)$ telle que $(z, a_{n_k}(z))\to(z, a(z))$ dans $\mathscr{D}$ pour $k\to\infty$ uniformément dans tout Δ' $(\Subset\Delta)$ ou bien pour tout E $(\Subset\mathscr{D})$ et tout Δ' $(\Subset\Delta)$ il y a N_0 dépandant de E et de Δ' tel que $(z, a(z_{n_k}))\notin E$ pour $k\geqq N_0$ et $z\in\Delta'$.

Lemme 3. *Supposons que $\mathscr{D}$ soit un domaine de type (H). Alors la famille consistant en toutes les sections holomorphes définies sur Δ est normale.*

Il suffit de voir qu'elle est normale à l'origine: $z=0$. Soit Δ': $|z|<\rho'$ $(<\rho)$ et soit $\{\mathfrak{a}_n\}$ une suite de sections de cette famille quelconque. Pour n fixé, par le même méthode que celle dans la démonstration du lemme 2 on considère le domaine $\tilde{\mathscr{D}}_n$ multivalent en deux étalé au-dessus de $\mathscr{D}$ dont les surfaces de ramification sont O et $\mathfrak{a}_n$ et le module harmonique $\lambda_n(z)$ de la fibre $\tilde{\mathscr{D}}_n(z)$ pour $z\in\Delta$. D'après le lemme 1.1 $\lambda_n(z)$ est alors une fonction positive surharmonique dans Δ. On prend z_0 dans $\Delta-\Delta'$ et traçons dans $\Delta-\bar{\Delta}'$ un petit cercle K_0 avec centre z_0. Considérons l'intégrale de Poisson $u_n(z)$ de $\lambda_n(z)$ dans K_0 qui y est positive harmonique. Il s'en suit qu'on extrait une suite $\{u_{n_k}(z)\}$ de $\{u_n(z)\}$ telle que $\{u_{n_k}(z)\}$ converge uniformément à l'intérieur complet de K_0. En abrégé on désigne à nouveau $\{u_{n_k}(z)\}$ par $\{u_n(z)\}$ et $\lim_{n\to\infty} u_n(z)=u(z)$ pour $z\in K_0$.

Cas où $u(z)\not\equiv 0$. Considérons la fonction harmonique $v_n(z)$ dans $\Delta-K_0$ tel que $v_n(\zeta)=\lambda_n(\zeta)$ sur $\partial\Delta\cup\partial K_0$. On extrait une suite $\{v_{n_k}(z)\}$ de $\{v_n(z)\}$ qui converge vers une fonction $v(z)$ uniformément dans l'intérieur complet de $\Delta-K$. Comme $u(z)>0$ on a $v(z)>0$ pour $z\in\Delta$

$-K_0$. Si l'on pose $\min_{z\in\Delta'} v(z)=m_0>0$, il y a N_0 tel que $\lambda_n(z)\geqq v_n(z)>m_0/2$ pour $z\in\Delta'$ et $n\geqq N_0$. Soit $z_1\in\Delta'$ quelconque. Considérons la fonction d'uniformisation par rapport à l'origine $f(z_1, w)$: $\mathscr{D}(z_1)\to|W|<R(z_1)$. Comme $R(z_1)<+\infty$ et $\lambda_n(z_1)>m_0/2$, on a $|f(z_1, a_n(z_1))|<r(z_1)<R(z_1)$ où $r(z_1)$ ne dépend pas de $n\,(\geqq N_0)$, d'où $\{a_n(z_1)\}\subset f^{-1}(z_1, |W|<r(z_1))\Subset\mathscr{D}(z_1)$. Autrement dit à chaque point z de Δ', $\{a_n(z)\}_{n\geqq N_0}$ est contenu dans l'intérieur complet de $\mathscr{D}(z)$. Supposons maintenant que $\{a_n\}$ ne soit pas normale au point $z=0$. Soit $p=1, 2,\ldots$ et soit $r\in(1/p+1, 1/p]$. Alors d'après ce qui est mentinonné ci-dessus les fonctions holomorphes $\{a_n(z)\}$ ne sont pas bornées uniformément sur $|z|=r$. Il y a donc $\zeta_r\in\{|z|=r\}$ et $n(r)\,(\geqq N_0)$ tels que $|a_{n(r)}(\zeta_r)|>p$. On en trouve une famille d'arc $\{l_k\}_{k=1,2,\ldots}$ dans Δ' satisfaisant aux conditions: (i) Pour k fixé, $\inf\{|z|: z\in l_k\}>0$ et $\{l_k\}$ tend vers l'origine. (ii) L'ensemble $\bigcup_{k=1}^{\infty} l_k$ est fermé dans $\Delta'-\{0\}$ et quel que soit $0<r<\rho'$ le cercle $|z|=r$ s'intersecte toujours au moins un arc $l_{n(r)}$. (iii) Quelque soit la suite $\{z_k\}$ telle que $z_k\in l_k$ il y ait $\{n(k)\}$ telle que $a_{n(k)}(z_k)\to\infty$ pour $k\to\infty$. Puisque $\log R(z)$ est surharmonique dans Δ, la condition (ii) et le théorème de distortion (voir par exemple R. Nevanlinna, cité plus haut) donne qu'il existe une suite $\{z_p\}$ dans $\bigcup_{k=1}^{\infty} l_k$ telle que $z_p\to 0$ et $R(z_p)\to R(0)$ pour $p\to\infty$. Soit $[K]$ le sous-domaine de $\mathscr{D}(0)$ qui est limité par la courbe K sur $\mathscr{D}(0)$ déterminé par $2A(|f(0, w)|/R(0))=m_0/2$ et soit V tel que $[K]\Subset V\Subset\mathscr{D}$. Puisque $\lim_{p\to\infty} R(z_p)=R(0)$ et $\lambda_n(z_p)\geqq m_0/2$ pour $n\geqq N_0$, le même procédé qui conduit l'expression (7) fournit qu'il y a P_0 tel que $(z_p, a_n(z_p))\in V$ pour $p\geqq P_0$ et $n\geqq N_0$. Par suite on trouve M tel que $|a_n(z_p)|<M$ pour $p\geqq P_0$ et $n\geqq N_0$. Ceci est en contradiction avec (iii). Donc au cas où $u(z)\not\equiv 0$, on peut extraire une suite $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ qui converge vers une section holomorphe définie sur Δ uniformément à l'intérieur complet de Δ.

Cas où $u(z)\equiv 0$. Alors il y a une suite $\{u_{n_k}(z_0)\}$ telle que $0<u_{n_k}(z_0)<1/2^k$. A nouveau posons $n_k=n$. Considérons la fonction $\lambda_n^*(z)$ dans Δ qui est $=\lambda_n(z)$ pour $z\in\Delta-K_0$ et est $=u_n(z)$ pour $z\in K_0$. Elle est positive surharmonique dans Δ. Par suite $s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^*(z)$ s'exprime une telle fonction dans Δ qui est $\not\equiv+\infty$. Si l'on pose $e=\{z\in\Delta: s(z)=+\infty\}$, alors la capacité logarithmique dans le plan z de e est nulle et de plus $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^*(z)=0$ pour $z\in\Delta-e$. Supposons maintenant que $\{\mathfrak{a}_n\}$ ne converge pas vers la frontière idéale de $\mathscr{D}$ uniformément dans Δ', c'est-à-dire il y a un ensemble $E^*\Subset\mathscr{D}$ et une suite $\{n_k\}$ tels que $z_{n_k}\in\Delta'$ et $(z_{n_k}, a_{n_k}(z_{n_k}))\in E^*$. En abrégé posons $n_k=n$ à nouveau. Sans perdre la généralité on peut supposer que $(z_n, a_n(z_n))\to(0, O_0)$ pour $n\to\infty$. Il y a N tel que $|z_n|<\rho'/2$ et $|a_n(z_n)|<1/2$ pour $n\geqq N$. En posant $a_n(z_n)=w_n$ on a le développement suivant au voisinage de z_n: $a_n(z)=w_n+a_{n,k}(z-z_n)^k+a_{n,k+1}(z-z_n)^{k+1}+\cdots$ où $k\geqq 1$. Construisons encore le domaine $\hat{\mathscr{D}}_n$ multivalent en deux étalé au-dessus de $\mathscr{D}$ dont les surfaces de ramification sont la droite O_n: $w=w_n$ et la section $\mathfrak{a}_n$, et soit $\hat{\lambda}_n(z)$ le module harmonique de la fibre $\hat{\mathscr{D}}_n(z)$. Puisque $|w_n|<1/2$ on a dans un petit voisinage de z_k

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_n(z)&\geqq 2\Lambda(2|a_n(z)-w_n|)\\ &=2\Lambda(|2a_{n,k}(z-z_n)^k+\cdots|)\,.\end{aligned}$$

D'après la formule (6) il vient

$$\sim\frac{1}{\pi}\log\frac{4}{|2a_{n,k}(z-z_n)^k+\cdots|}+O(|z-z_n|^2)$$

$$\sim\frac{k}{\pi}\log\frac{1}{|z-z_n|}+O(|z-z_n|)\,.$$

Formons la fonction $s_n(z)=\hat{\lambda}_n(z)-\dfrac{1}{\pi}\log\dfrac{\rho'}{2|z-z_n|}$ dans $0<|z-z_n|<\rho'/2$. Elle y est surharmonique et de plus on a $\varliminf_{n\to\infty} s_n(z)=\varliminf_{n\to\infty}\left\{\dfrac{k-1}{\pi}\log\dfrac{1}{|z-z_n|}+O(|z-z_n|)\right\}>-\infty$. Par suite $s_n(z)$ s'étend a une fonction surharmonique dans $|z-z_n|<\rho'/2$. Puisque $s_n(z)\geqq 0$ sur $|z-z_n|=\rho'/2$, on a $s_n(z)\geqq 0$ ou

$$\hat{\lambda}_n(z)\geqq\frac{1}{\pi}\log\frac{\rho'}{2|z-z_n|}$$

dans $|z-z_n|<\rho'/2$ pour tout $n\geqq N$. Prenons z^* dans $\{0<|z|<\rho'/3\}-e$. Alors $\varliminf_{n\to\infty}\hat{\lambda}_n(z^*)=\dfrac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left\{\log\dfrac{\rho'}{2|z^*-z_n|}\right\}>\dfrac{1}{\pi}\log(3/2)$. D'autre part par le théorème de Koebe on a immédiatement $\lim_{n\to\infty}\hat{\lambda}_n(z^*)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(z^*)=0$, car $z^*\notin e$. Nous sommes arrivés à une contradiction. Donc au cas où $u(z)\equiv 0$, $\{\mathfrak{a}_n\}$ converge vers l'infini uniformément dans l'intérieur complet de Δ. C.Q.F.D.

Remarque. Supposons que la famille $\mathscr{D}=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}(z))$ satisfasse à 1° et 3° mentionnées au début du §4 et au lieu de 2° à la condition 2*: Pour tout $z\in\Delta$ la fibre $\mathscr{D}(z)$ est analytiquement de type hyperbolique, c'est-à-dire, on peut former une fonction non-constante positive surharmonique dans $\mathscr{D}(z)$. Alors le lemme 2 n'est plus vrai en général. Voici un exemple: Soit $\mathscr{D}=\bigcup_{|z|<1}\left(z, \frac{|z|}{2}<|w-1|<2\right)$. $\mathscr{D}$ est alors une variété de Stein et toute fibre est topologiquement équivalente à un anneau et est analytiquement de type hyperbolique. Considérons la droite $w=z+1$. Elle définit évidemment une section holomorphe dans $\mathscr{D}$ sur $0<|z|<1$. Mais elle ne peut pas s'étendre à l'origine: $z=0$.

5. Fonctions entières. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de l'espace (x, y) et soit e_f l'ensemble de tous les points z dans le plan z tels qu'il existe au moins une surface première irrégulière de f avec valeur z (pour définition de surface première irrégulière voir l'introduction de T. Nishino [I]). D'après la remarque dans le §4 du mémoire précédent [5] on a montré que, si $f(x, y)\in(P)$, alors la capacité logarithmique de l'ensemble e_f est nulle. En appliquant le lemme 2′ de ce mémoire on va donner une propriété de la fonction spéciale appartenant à $(E)-(P)$.

Théorème 1. *Supposons que f soit une fonction entière de l'espace (x, y) telle que toute surface première de f est analytiquement équivalente au cercle unité. Alors ou bien l'ensemble e_f défini plus haut est vide ou bien la capacité logarithmique dans le plan z n'est pas nulle.*

En effet, puisque toute surface première de f est simplement connexe, par le même raisonnement dans T. Nishino [II, §9] on sait que toute surface première de f est d'ordre *un* et non-singulière comme surface analytique dans l'espace (x, y) et que deux surfaces premières différentes quelconques ne s'intersectent pas. Supposons que e_f nonvide et que la capacité de e_f est nulle. Il existe deux surfaces premières S_0 et S'_O de f telles que S'_O soit conjuguée de S_0. En abrégé $f(x, y)=0$ sur S_0 et S'_O. Formons les tubes normaux $\sum_\Gamma$ et $\sum_{\Gamma'}$ autour de S_0 et S'_O aux points ordinaires p_0 et p'_O respectivement. Posons Γ^*: $|z|<\rho$ et Γ'^*: $|z|<\rho'$ et soit sans perdre la généralité $\rho=\rho'$. On désigne par S_z la surface première de f avec valeur z qui est contenue dans $\sum_\Gamma$ et par e^* l'ensemble de tous les points z de Γ^* tels que S_z dans $\sum_\Gamma$ n'intersecte pas avec la droite analytique Γ'. Evidemment $0\in e^*\subset e_f$. Comme d'habitude *le domaine* $\mathscr{D}=\bigcup_{z\in\Gamma^*}(z, S_z)$ *peut se regarder comme un des domaines de type* (H) (voir T. Nishino [II, p. 256]). D'autre part la droite Γ' détermine une section holomorphe définie sur Γ^*-e^* et cette section holomorphe n'est jamais étendue à aucun point de e^*. Ceci est en contradiction avec le lemme 2′, parce que la capacité logarithmique de e^* est nulle. C. Q. F. D.

Par le théorème 1 de [5] on sait que la propriété uniforme des surfaces constantes d'une fonction entière de deux variables. Pour continuer cet étude on montre un lemme suivant. Pour cela on va encore mettre le lemme 1 en usage.

Lemme 4. *Soit* $\mathscr{D}=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}(z))$ *une variété de Stein et soit* e_g *l'ensemble des points* z *de* Δ *tel que le genre de* $\mathscr{D}(z)$ *est fini* g. *Supposons que toute* $\mathscr{D}(z)$ *soit de type parabolique et que la capacité logarithmique de* e_g *dans le plan* z *ne soit pas nulle. Alors pour tout* $z\in\Delta$ *sauf un ensemble fermé de la capacité logarithmique nulle, le genre de* $\mathscr{D}(z)$ *est le même nombre* g *et le genre de* $\mathscr{D}(z)$ *exceptionnelle quelconque est moins de* g.

En effet, on trouve z_0 de e_g tel que quel que soit le voisinage V de z_0 la capacité logarithmique de l'ensemble $V\cap e_g$ soit positive. Par l'hypothèse on trace sur $\mathscr{D}(z_0)$ $2g$ cycles $\{A_i(z_0), B_i(z_0)\}_{i=1}^g$ comme d'habitude. Il y a Δ_0 tel que $z_0\in\Delta_0$ et que, quel que soit $z\in\Delta_0$ on trace sur $\mathscr{D}(z)$ un système de $2g$ cycles $\{A_i(z), B_i(z)\}_{i=1}^g$ qu'on meut continuellement à $\{A_i(z_0), B_i(z_0)\}$ dans $\mathscr{D}$. Supposons maintenant qu'il existe au moins $z^*\in\Delta_0$ tel que le genre de $\mathscr{D}(z^*)$ soit $\geqq g+1$.

Alors on trace sur $\mathscr{D}(z^*)$ deux cycles $\{A_{g+1}(z^*), B_{g+1}(z^*)\}$ tel que $\mathscr{D}(z^*) - \bigcup_{i=1}^{g+1}\{A_i(z^*), B_i(z^*)\}$ connexe et le nombre d'intersection $A_i(z^*)\times B_j(z^*) = \delta_{ij}$, $A_i(z^*)\times A_j(z^*) = B_i(z^*)\times B_j(z^*) = 0$ pour $1\leqq i\leqq j\leqq g+1$. Evidemment il y a Δ^* tel que $z^*\in\Delta^*\Subset\Delta_0$ et que, quel que soit $z\in\Delta^*$ on peut tracer sur $\mathscr{D}(z)$ deux cycles $\{A_{g+1}(z), B_{g+1}(z)\}$ qu'on meut continuellement à $\{A_{g+1}(z^*), B_{g+1}(z^*)\}$. Désignons par K la partie de U se trouvant au-dessus de $(\Delta, |w|<1/2)$. Pour assez grand R on a $\mathscr{D}_R \Subset \bigcup_{z\in\Delta_0}(z, U(z))$. Pour $z\in\Delta_0$ on pose $\mathscr{D}_R^K(z) = \mathscr{D}(z) - K(z)$. Comme $\alpha(z)$, $\beta(z)$ et $\gamma(z)$ du §3 soient $\partial K(z)$, $\partial\mathscr{D}_R(z)$ et ϕ respectivement et considérons le module harmonique $\lambda_R(z)$ de $\mathscr{D}_R^K(z)$. D'après l'hypothèse que $\mathscr{D}(z)$ est de type parabolique, on a $\lim_{R\to\infty}\lambda_R(z) = +\infty$ en croissant. Soit M un nombre donné arbitrairement. Puisque $\lambda_R(z)$ est continue dans Δ_0, il y a R_0 tel que $\lambda_R(z)\geqq \mathrm{M}$ pour $z\in\Delta_0$ et $R\geqq R_0$ et que $D_R(z) \supset \bigcup_{i=1}^{g+1}\{A_i(z), B_i(z)\}$ pour $z\in\Delta^*$. Considérons l'ensemble de z de Δ_0 tel que $\mathscr{D}_R(z)$ ait au moins un point singulier comme une surface analytique dans $\mathscr{D}$. Il consiste en nombre fini des points $\{z_i\}_{i=1}^{n(R)}$. Soit l un arc dans $\Delta_0 - e_g - \{z_i\}_{i=1}^{n(R)}$ partant de z^* et aboutissant à un point de e_g qui n'est pas nécessairement de Jordan, mais d'ailleurs quelconque. Alors considérons l'ensemble L des sous-arcs l' de l tels que l' parte de z^* et que pour tout $z\in l'$ on puisse trouver sur $\mathscr{D}(z)$ deux cycles $\{A_{g+1}(z), B_{g+1}(z)\}$ qui se meut continuellement dans $\mathscr{D}_R$ avec $z\in l'$ mais que pour le point terminus z' de l' on ne puisse pas trouver un des pareills $\{A_{g+1}(z'), B_{g+1}(z')\}$ sur $\mathscr{D}_R(z')$. Evidemment $A_{g+1}(z)$ et $B_{g+1}(z)$ pour $z\in l'$ sont uniquement déterminés excepté la relation homologue sur $\mathscr{D}(z)$. Il s'en suit que l'arc supremum dans L est déterminé qu'on désigne à nouveau par l'. D'après l'hypothèse on a $l'\in L$. Par exemple soit $A_{g+1}(z')$ qui ne peut pas être trouvé sur $\mathscr{D}_R(z')$. Mais on eut aisément trouver un cycle $A_{g+1}(z')$ dans $[\mathrm{Cl}\,\mathscr{D}_R](z)$ ayant le même caractère mentionné ci-dessus. En un mot $A_{g+1}(z)$ s'étend à la frontière de $\mathscr{D}_R(z')$ le long de l'. Or soit $z\in l'$ et considérons l'ensemble de toutes les paires (w, τ) où $w\in\mathscr{D}_R(z)$ et τ est un arc sur $\mathscr{D}_R(z)$ partant de l'origine O_z et finissant à w. Introduisons dans cet ensemble la relation équivalente telle que $(w, \tau)\sim(w', \tau')$ si et seulement si $w=w'$ et $l\times A_{g+1}(z)\equiv l'\times A_{g+1}(z) \bmod 2$

et classons cet ensemble par $\sim : \{(w, \tau)\}/\sim$. C'est bien défini et la topologie de $\mathscr{D}(z)$ y est naturellement introduite. Il est une surface de Riemann multivalent en deux étalée au-dessus de $\mathscr{D}_R(z)$ qu'on désigne par $\tilde{\mathscr{D}}_R(z, A_{g+1}, l')$. Ecrivons $\tilde{K}_1(z)$ et $\tilde{K}_2(z)$ ses deux parties qui se trouvent au-dessus de $K(z)$ dans $\mathscr{D}_R(z)$. Considérons l'ensemble de $(z, \tilde{w})$ de $\bigcup_{l'} \{\bigcup_{z \in l'} (z, \tilde{\mathscr{D}}_R(z, A_{g+1}, l'))\}$. Comme d'habitude ce n'est pas difficile d'introduire la topologie canoniquement dans cet ensemble $\{(z, \tilde{w})\}$ (voir T. Nishino [III]). On a ainsi un domaine $\tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}}$ multivalent étalé au-dessus de $(\Delta_0 - e_g - \{z_k\}_{k=1}^{n(R)}, C)$ dans l'espace (z, w) qui satisfait aux conditions suivantes: (i) $\tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}}$ se regarde comme une variété de Stein. (ii) Si l'on pose $\tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}} = \bigcup_{\tilde{z} \in \tilde{\delta}} (\tilde{z}, \tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}}(\tilde{z}))$, alors $\tilde{\delta}$ est un domaine multivalent en nombre infini étalé au-dessus de $\Delta_0 - e_g - \{z_k\}_{k=1}^{n(R)}$ et la fibre $\tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}}(\tilde{z})$ est égale à une certaine $\tilde{\mathscr{D}}(z, A_{g+1}, l')$. Pour $i=1, 2$ on évidemment trouve une partie $\tilde{K}_i = \bigcup_{\tilde{z} \in \tilde{\delta}} (\tilde{z}, \tilde{K}_i(\tilde{z}))$ qui est justement univalent étalé au-dessus de $(\tilde{\delta}, |w| < 1/2)$. En posant $\tilde{\mathscr{D}}^K_{R,A_{g+1}} = \tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}} - \mathrm{Cl}[\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2]$ il est encore une variété de Stein. Quel que soit $\tilde{z} \in \tilde{\delta}$, comme $\alpha(\tilde{z})$, $\beta(\tilde{z})$ et $\gamma(\tilde{z})$ du §3 soient $\partial \tilde{K}_1(\tilde{z})$, $\partial K_2(\tilde{z})$ et $\partial \tilde{\mathscr{D}}_{R,A_{g+1}}(\tilde{z})$ et en considérons le module harmonique $\lambda_{R,A_{g+1}}(\tilde{z})$. En vertu du lemme 1.1 il est une fonction positive surharmonique dans $\tilde{\delta}$. De même en utilisant $B_{g+1}(z)$ on construit le domaine $\tilde{\mathscr{D}}^K_{R,B_{g+1}}$ et forme la fonction $\lambda_{R,B_{g+1}}(\tilde{z})$ dans le même domaine $\tilde{\delta}$ qui y est positive surharmonique. Soit maintenant l' un arc quelconque dans $\tilde{\delta}$ tendant vers le point frontière $\tilde{z}'$ de $\tilde{\delta}$ qui se situe à un point z' contenu entièrement dans $\Delta_0 - e_g - \{z_k\}_{k=1}^{n(R)}$. Alors un des cycles $\{A_{g+1}(\tilde{z}), B_{g+1}(\tilde{z})\}$ s'étend à la frontière de $\mathscr{D}_R(z')$: soit par exemple $A_{g+1}(\tilde{z})$. Soit L un arc quelconque dans $\mathrm{Cl}[\tilde{\mathscr{D}}_R(z', A_{g+1}, l')]$ partant d'un point frontière de $\tilde{K}_1(z')$ et aboutissant à un point de $\tilde{K}_2(z')$. Alors L doit passer toujours par un point de $\partial \mathscr{D}_R(z')$. Il s'en suit d'après le principe de Dirichlet que $\lambda_{R,A_{g+1}}(z') \geqq \lambda_R(z') \geqq M$, d'où $\varliminf_{\tilde{z} \in l'} \lambda_{R,A_{g+1}}(z) = \lambda_{R,A_{g+1}}(z') \geqq M$. Par suite on a

$$\varliminf_{\tilde{z} \in l'} \{\lambda_{R,A_{g+1}}(\tilde{z}) + \lambda_{R,B_{g+1}}(\tilde{z})\} \geqq M.$$

Considérons la mesure harmonique $\omega(z)$ dans $\Delta_0 - e_g$ qui est $=1$ quasipartout sur e_g et $=0$ sur $\partial\Delta_0$. D'après l'hypothèse $\omega(z)>0$ dans $\Delta_0 - e_g$. $\omega(\tilde{z})$ est évidemment une fonction harmonique et uniforme dans $\tilde{\delta}$. Formons la fonction dans $\tilde{\delta}$: $s_M(\tilde{z})=\lambda_{R,A_{g+1}}(\tilde{z})+\lambda_{R,B_{g+1}}(\tilde{z})-M\omega(\tilde{z})$ qui est surharmonique et est $\geqq -M$ dans $\tilde{\delta}$. Par le raisonnement qu'on vient de faire on a $\varliminf_{\tilde{z}\to l'} s_M(\tilde{z})\geqq 0$ où l' est un arc quelconque dans $\tilde{\delta}$ tendant vers un point frontière de $\tilde{\delta}$ qui ne se trouve pas sur $\{z_k\}_{k=1}^{n(R)}$. Il s'en suit que $s_M(\tilde{z})\geqq 0$ dans $\tilde{\delta}$. En particulier posons $z=z^*$ (le point initial) on a $\lambda_{R,A_{g+1}}(z^*)+\lambda_{R,B_{g+1}}(z^*)\geqq M\omega(z^*)$. D'abord faisons R tendre vers $+\infty$ et ensuite M tendre vers $+\infty$. On a $\lambda_{A_{g+1}}(z^*)+\lambda_{B_{g+1}}(z^*)\geqq +\infty$, parce que $\lambda_{R,A_{g+1}}(z^*)\leqq\lambda_{R',A_{g+1}}(z^*)$ pour $R\leqq R'$ et $\lim_{R\to\infty}\lambda_{R,A_{g+1}}(z^*)=\lambda_{A_{g+1}}(z^*)$ et que $\lambda_{B_{g+1}}(z^*)$ l'est aussi. D'autre part, par notre supposition il est évident que $\lambda_{A_{g+1}}(z^*)$ et $\lambda_{B_{g+1}}(z^*)$ sont simultanément finis. C'est absurde. Donc le genre de $\mathscr{D}(z)$ est $\leqq g$ pour tout $z\in\Delta_0$. En répétant tour à tour le même procédé au point frontière de Δ_0 nous sommes arrivés au lemme 4.

C. Q. F. D.

En combinant ce lemme avec le théorème 1 du mémoire précédent [5] on aura par la méthode qui a été étudiée dans T. Nishino [II, § 8] le

Théorème 2. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variable et soit e (ou e') l'ensemble de z tel qu'il existe au moins une surface première de f qui est de type parabolique (ou de genre fini) avec valeur z. Si ni la capacité logarithmique de e ni celle de e' ne sont nulles, toute surface première de f est de type parabolique et pour tout nombre complexe z sauf celles avec valeur z appartenant à un ensemble fermé de la capacité logarithmique nulle, le genre de toute surface première avec valeur z est le même nombre fini g et de plus le genre d'une surface première exceptionnelle quelconque est moins du nombre g.*

6. Famille triviale. Comme autre application du lemme 1 on donnera une remarque sur la famille holomorphe: $\mathscr{D}=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}(z))$ dont toute fibre $\mathscr{D}(z)$ est l'un à l'autre (analytiquement) équivalente.

Si de plus $\mathscr{D}(z)$ est compacte, alors $\mathscr{D}$ est équivalente localement à la famille triviale, c'est-à-dire, pour tout z_0 il y a un voisinage $\Delta_0\,(\subset\Delta)$ de z_0 tel que $\bigcup_{z\in\Delta_0}(z, \mathscr{D}(z))$ est équivalente à $\Delta_0\times\mathscr{D}(z_0)$ (cf. W. Fischer et H. Grauert; Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl II (1965)). D'autre part quand $\mathscr{D}(z)$ n'est pas compacte, même si $\mathscr{D}$ est supposée une variété de Stein, ce n'est pas vrai en général. Pour simplicité dès à présent on va traiter seulement le cas où $\mathscr{D}(z)$ *est topologiquement de type fini*. On aura le

Théorème 3. *Soit* $\mathscr{D}=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}(z))$ *une famille holomorphe telle que toute* $\mathscr{D}(z)$ *soit l'un à l'autre équivalente. Supposons que* $\mathscr{D}$ *soit une variété de Stein. Alors sauf deux cas où* $\mathscr{D}(z)$ *est équivalente ou bien au cercle unité*: $|W|<1$ *ou bien au cercle pointillé*: $0<|W|<1$, $\mathscr{D}$ *est équivalente localement à la famille triviale.*

Posons que toute $\mathscr{D}(z)$ est équivalente à une surface de Riemann ouverte S dont le genre g et dont les composantes frontières consistent n courbes fermées $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ et q points $\{p_i\}_{i=1}^{q}$ où g, n et q sont finis. En T. Nishino [II] pour rechercher les fonctions entières de deux variables de la classe (A), le cas où $n=0$ a été complètement étudié. Donc nous pouvons supposer que $n\geqq 1$. On va vérifier le théorème en partageant en quatre parties.

Cas 1: $g=0$, $n=2$, $q=0$. D'abord on suppose que la frontière $\partial\mathscr{D}(z)$ se compose en deux courbes analytiques au sens réel: $\{\alpha_1(z), \alpha_2(z)\}$ qui se meuvent doucement avec $z\in\Delta$. Soit $h(z, w)$ la fonction harmonique dans $\mathscr{D}(z)$ qui est $=0$ sur $\alpha_1(z)$ et $=1$ sur $\alpha_2(z)$. D'après l'hypothèse que toute $\mathscr{D}(z)$ est l'un à l'autre équivalente on a $D(z)$ $=\iint_{\mathscr{D}(z)}\left[\left(\frac{\partial h(z, w)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h(z, w)}{\partial v}\right)^2\right]dx\,dy=k$: une constante indépendante de z. Par l'inégalite (4) on a

$$\iint_{\mathscr{D}(z)}\left|\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\right|^2 du\,dv\leqq\frac{1}{8}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\,D(z)\right\}\equiv 0,$$

d'où $\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\equiv 0$ dans tout le domaine $\mathscr{D}$. Puisque pour z fixé $h(z, w)$ est harmonique en w, il s'en suit que 1-forme $\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\,dw$

est holomorphe en z et w. Considérons sur $\mathscr{D}(z)$ l'intégrale suivante: $\int_{\alpha_2(z)} \frac{\partial h(z, w)}{\partial w} dw = (\sqrt{-1}/2)D(z) = (k/2)\sqrt{-1}$. Formons la fonction sur $\mathscr{D}(z)$ suivante: $w' = f(z, w) = \exp\left\{(4\pi/k)\int_{O_z}^{w} \frac{\partial h(z, w)}{\partial w} dw\right\}$ qui transforme $\mathscr{D}(z)$ conformément en un anneau $\mathscr{D}'(z)$: $r_1(z) < |w'| < r_2(z)$ dans le plan w' de façon que $f(z, O_z) = 1$. Par $z = z$, $w' = f(z, w)$ la famille $\mathscr{D}$ est transformée biunivoquement et analytiquement en $\mathscr{D}' = \bigcup_{z \in \Delta} (z, \mathscr{D}'(z))$. $\mathscr{D}'$ doit être un domaine pseudoconvexe dans l'espace (z, w'). Grâce à F. Hartogs [1], $\log r_2(z)$ et $\log(1/r_1(z))$ sont des fonctions surharmoniques dans Δ. D'après notre hypothèse $\log(r_2(z)/r_1(z)) = D(z)^{-1} = 1/k$. Par suite $\log r_1(z)$ est harmonique dans Δ. Posons $u_1(z) = \log r_1(z)$ et soit $u_1(z)^*$ une fonction harmonique conjugée dans Δ. Il est clair que par $z = z$, $w'' = w' \exp\{-[u_1(z) + \sqrt{-1}u_1(z)^*]\}$ la famille $\mathscr{D}'$ est transformée en celle triviale: $\Delta \times (1 < |w''| < \exp(1/k))$.

Approximation. On va traiter la famille générale $\mathscr{D}$. Soit Δ_0: $|z| < \rho_0$ $(< \rho)$. Pour assez grand n la section $\bigcup_{z \in \Delta_0} (z, O_z)$ est contenue dans $\mathscr{D}_n$: $\varphi(z, w) < n$. On pose $\partial\mathscr{D}_n(z) = \alpha_{1n}(z) \cup \alpha_{2n}(z)$. Les contours $\alpha_{1n}(z)$ et $\alpha_{2n}(z)$ se meuvent doucement avec $z \in \Delta_0$ (voir en détail [5, §2]). Mais $\mathscr{D}_n(z)$ n'est plus l'un à l'autre analytiquement équivalente. Soit $h_n(z, w)$ la fonction harmonique dans $\mathscr{D}_n(z)$ qui est $=0$ sur $\alpha_{1n}(z)$ et $=1$ sur $\alpha_{2n}(z)$. Pour z fixé la 1-forme $\frac{\partial h_n(z, w)}{\partial w} dw$ est holomorphe en w. De plus la suite $\left\{\frac{\partial h_n(z, w)}{\partial w} dw\right\}$ converge vers $\frac{\partial h(z, w)}{\partial w} dw$ uniformément dans l'intérieur complet de $\mathscr{D}$, car $\{h_n(z, w)\}$ converge vers $h(z, w)$ dans $\mathscr{D}$. Ici on va dire que $\frac{\partial h(z, w)}{\partial w} dw$ est holomorphe par rapport à deux variables z et w dans $\mathscr{D}$.

En effet, soit (z_0, w_0) un point quelconque de $\mathscr{D}$ qui n'est pas situé sur les surfaces de ramification de $\mathscr{D}$. Soit γ_0: $|z - z_0| < r_0$ et δ_0: $|w - w_0| < s_0$ tel que $\gamma_0 \times \delta_0 = \Omega \Subset \mathscr{D}$. Il suffit de voir que $\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}$ est holomorphe par rapport à z et w dans Ω. Pour grand n: $n \geqq N_0$ on a $\mathscr{D}_n \Subset \Omega$. Soit $\{\psi_p(z)\}_{p=1,2,\dots}$ une base dénombrable de fonctions d'examens dans γ_0 c'est-à-dire $\psi_p \in C^\infty(\gamma_0)$ et $\{\psi_p(z) \neq 0\} \Subset \gamma_0$. Posons $\mathrm{I}(w, \psi_p) = \iint_{\gamma_0} \left\{(\psi_p)_{\bar{z}}(z) \cdot \frac{\partial h}{\partial w}(z, w)\right\} dx dy$ où l'intégrale de second membre est au sens de Lebesgue. D'après la formule de Stokes on a

$$\iint_{\delta_0} |\mathrm{I}(w, \psi_p)| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{\delta_0} \left| \iint_{\gamma_0} \left\{ (\psi_p)_{\bar z}(z) \cdot \frac{\partial h_n}{\partial w}(z, w) \right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{\delta_0} \left| \iint_{\gamma_0} \left\{ \psi_p(z) \cdot \frac{\partial^2 h_n}{\partial \bar z\, \partial w}(z, w) \right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

$$\leqq \sqrt{\pi} s_0 \sqrt{\iint_{\gamma_0} |\psi_p|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\iiiint_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 h_n}{\partial \bar z\, \partial w} \right|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v} .$$

Si l'on pose $D_n(z)$ l'intégrale de Dirichlet de $h_n(z, w)$ étendue à $\mathscr{D}_n(z)$, la suite $\{D_n(z)\}$ converge en décroissant vers celle de $h(z, w)$ étendue à $\mathscr{D}(z)$ qui est d'après l'hypothèse une constante k. Prenons r_1 tel que $r < r_1$ et $(|z - z_0| < r_1) \times (|w - w_0| < s_0) \Subset \mathscr{D}_n$ pour $n \geqq N_0$. D'abord remarquons

$$\int_{r_0}^{r_1} \int_0^{2\pi} \frac{\partial D_n(r, \theta)}{\partial r} \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \{D_n(r_1, \theta) - D(r_0, \theta)\} \mathrm{d}\theta .$$

Puisque $D_n(z)$ est continue dans $|z| \leqq r_1$, le théorème de Dini fournit que $\{D_n(z)\}$ y converge à k uniformément. Il s'en suit que le second membre converge 0 pour $n \to \infty$. Par suite on peut extraire une suite $\{n_k\}$ telle que

$$\int_{r_0}^{r_1} \int_0^{2\pi} \frac{\partial D_{n_k}(r, \theta)}{\partial r} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r < \frac{r_1 - r_0}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{2^k} .$$

Considérons $E_k = \left\{ r \in [r_0, r_1] : \int_0^{2\pi} \frac{\partial D_{n_k}(r, \theta)}{\partial r} \mathrm{d}\theta \geqq 1/2^k \right\}$. Par l'inégarite (4) $D_{n_k}(z)$ est une fonction sousharmonique dans Δ. Il en vient

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{n_k}(r, \theta) \mathrm{d}\theta \right\} \geqq 0 .$$

Si l'on désigne par $|E_k|$ la longueur de l'intervalle E_k, on a $|E_k| \leqq (1/2^{k+1})(r_1 - r_0)$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| \leqq (1/2)(r_1 - r_0)$. On peut donc trouver r_0' tel que $r_0' \in [r_0, r_1] - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Il vient pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial D_{n_k}(r,\theta)}{\partial r}\right]_{r=r_0'} d\theta \leqq \frac{1}{2^k}.$$

En autre côté puisque $\mathscr{D}_n$ est une variété de Stein, par (4) on a pour $z\in\Delta$

$$\iint_{|w-w_0|<s_0}\left|\frac{\partial^2 h_{n_k}(z,w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\right|^2 du\,dv \leqq \frac{1}{8}\,\frac{\partial^2 D_{n_k}(z)}{\partial z\,\partial\bar{z}},$$

d'où immédiatement

$$\iiiint_\Omega\left|\frac{\partial^2 h_{n_k}}{\partial\bar{z}\,\partial w}\right|^2 dx\,dy\,du\,dv \leqq \frac{1}{32}\iint_{|z-z_0|<r_0'}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)D_{n_k}(z)\right\}dx\,dy.$$

D'après la formule de Stokes le second membre est

$$=\frac{r_0'}{32}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial D_{n_k}(r,\theta)}{\partial r}\right]_{r=r_0'} d\theta \leqq \frac{r_0'}{32}\cdot\frac{1}{2^k}.$$

Nous avons enfin

$$\iint_{\delta_0}|\mathrm{I}(w,\psi_p)|\,du\,dv \leqq \sqrt{\pi}\,s_0\sqrt{\iint_{\gamma_0}|\psi_p|^2 dx\,dy}\cdot\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{r_0'}{32}\cdot\frac{1}{2^k}}=0.$$

Il existe donc pour $p=1, 2,\dots$ un ensemble e_p dans δ_0 tel que la mesure de Lebesgue de e_p est nulle: $m(e_p)=0$ et que $\mathrm{I}(w,\psi_p)=0$ pour tout $w\in\delta_0-e_p$. Si l'on pose $\delta_0^*=\delta_0-\bigcup_{p=1}^{\infty}e_p$, alors on a immédiatement $\iint_{\gamma_0}\left\{\frac{\partial\psi(z)}{\partial\bar{z}}\,\frac{\partial h(z,w)}{\partial w}\right\}dx\,dy=0$ pour $w\in\delta_0^*$ et pour toute fonction d'examen $\psi(z)$ dans γ_0 autrement dit $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)(z,w)\equiv 0$ dans γ_0 au sens de distribution. Il en résulte que, w étant fixé arbitrairement dans δ_0^*, la fonction $\frac{\partial h(z,w)}{\partial w}$ de z est holomorphe dans γ_0. Puisque $m(\delta_0^*)=\pi s_0^2>0$ et $\frac{\partial h(z,w)}{\partial w}$ est pour tout z fixé dans γ_0 holomorphe en w, il est connu comme une généralisation du théorème de Hartogs (voir T. Terada; Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 2 (1967)), $\frac{\partial h(z,w)}{\partial w}$ est holomorphe en z et w dans tout le domaine Ω. Par l'argument qu'on a fait au cas où $\partial\mathscr{D}(z)$ se meut doucement avec z, on sait que la famille $\mathscr{D}$ est triviale.

Cas 2: $g=0$, $n=1$, $q>2$. Alors, grâce à T. Nishino [II] on peut immédiatement construire une famille $\bar{\mathscr{D}}=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}(z))$ de façon qu'il y ati q sections holomorphes $\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^q$ dans $\bar{\mathscr{D}}$ définies sur Δ telles que $\bar{\mathscr{D}}-\bigcup_{i=1}^q a_i$ soit équivalente à $\mathscr{D}$ par une transformation analytique de la forme $z=z$, $w'=\eta(z, w)$. Par $q\geqq 2$ on peut construire un domaine $\bar{\bar{\mathscr{D}}}$ multivalent en deux étalé au-dessus de $\bar{\mathscr{D}}$ dont les surfaces de ramification consistent en $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$. Il est une variété de Stein et toute fibre $\bar{\bar{\mathscr{D}}}(z)$ est équivalente l'un à l'autre qui est de type: $g=0$, $n=2$, $q=0$. D'après le cas 1 la famille $\bar{\bar{\mathscr{D}}}$ est équivalente à celle triviale $\bar{\bar{\mathscr{D}}}'=\Delta\times(1<|w''|<r)$ par $z=z$, $w''=f(z, w')$. Posons $f(z, a_i(z))=a_i(z)$ pour $i=1, 2$. Par le calcul simple on aura $|a_1(z)|=$ *une constante et* $a_2(z)=-a_1(z)$. Donc $a_i(z)$ doit être une constante. Sans perdre la généralité on pose $a_1(z)=r_0$ et $a_2(z)=-r_0$. Il en résulte que $\bar{\mathscr{D}}(z)$ est équivalente à une surface qui est construite de $(1<|w''|<r)$ par l'identification: $w''\approx r_0^2/w''$. Par suite $\bar{\mathscr{D}}$ est équivalente à la famille triviale: $\bar{\bar{\mathscr{D}}}'/\approx\,=\Delta\times(r<|w''|<1/\approx)$. Donc la famille originale $\mathscr{D}$ l'est aussi.

Cas 3: $g=0$, $n\geqq 3$, $q\geqq 0$. Il ne suffit de voir que le cas où $g=0$, $n\geqq 3$, $q=0$ et où la frontière $\partial\mathscr{D}(z)$ se meut doucement avec z. On pose $\partial\mathscr{D}(z)=\alpha_1(z)\cup\cdots\cup\alpha_n(z)$. Considérons la fonction harmonique $h(z, w)$ dans $\mathscr{D}(z)$ qui est $=0$ sur $\alpha_1(z)$, $=1$ sur α_2, $=c_i(z)$ (*une constante*) sur $\alpha_i(z)$ et satisfait $\int_{\alpha_i(z)} d^*h(z, w)=0$ pour $i=3,\dots, n$. Désignons par $D(z)$ l'intégrale de Dirichlet de $h(z, w)$ étendue à $\mathscr{D}(z)$ qui est d'après l'hypothèse une constante k. Par le même procédé qu'on a fait dans le §2 on a $\frac{\partial^2 D(z)}{\partial z\,\partial\bar{z}}\geqq 8\iint_{\mathscr{D}(z)}\left|\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\right|^2 du\,dv$, d'où $\frac{\partial^2 h(z, w)}{\partial\bar{z}\,\partial w}\equiv 0$ dans $\mathscr{D}$ et donc $\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}dw$ est holomorphe par rapport à z et w dans $\mathscr{D}$. Comme d'habitude formons la fonction sur $\mathscr{D}(z)$: $f(z, w)=\exp\left\{\frac{4\pi}{k}\int_{O_z}^{w}\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}dw\right\}$ qui transforme $\mathscr{D}(z)$ conformément en un domaine univalent fendu circulairement: $\mathscr{D}'(z)=\{r_1(z)<|w'|<r_2(z)\}-\bigcup_{i=3}^{n}\{r_i(z)\exp(\sqrt{-1}\theta)\colon \Theta_{i1}(z)\leqq\theta\leqq\Theta_{i2}(z)\}$ où $r_1(z)<r_i(z)<r_2(z)$ et $f(z, O_z)=1$. Puisque $f(z, w)$ est analytique en z et w, $\mathscr{D}'=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}'(z))$ doit être un domaine pseudoconvexe dans l'espace (z, w'). D'après *Kanten Satz* (H. Behnke [1]), pour $i=3,\dots, n$ et j

$=1, 2$ la fonction $r_i(z)\exp(\sqrt{-1}\Theta_{ij}(z))$ est holomorphe de z dans Δ qu'on désigne par $\xi_{ij}(z)$. D'abord on a immédiatement $\xi_{i2}(z)=\exp(\sqrt{-1}\varphi_i)\xi_{i1}(z)$, φ_i étant une constante. Ecrivons pour $i=3,\dots, n$ et $j=1, 2$ $\{P_{ij}(z)\}$ les zéros de la différentielle abélienne $\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\mathrm{d}w$ sur $\partial\mathscr{D}(z)$ qui sont invariants par tout automorphisme de $\mathscr{D}(z)$. Ils forment $2(n-2)$ sections holomorphes dans la fermeture de $\mathscr{D}$ définies sur $|z|<\rho$, car $P_{ij}(z)$ correspond à $\xi_{ij}(z)$. Quand on transforme $\mathscr{D}'$ par une transformation analytique $z=z$, $w''=(\xi_{31}(z))^{-1}f(z, w')$ en une famille $\mathscr{D}''=\bigcup_{z\in\Delta}(z, \mathscr{D}''(z))$, alors $\mathscr{D}''$ est triviale. En effet, soit $l_i(z)$ pour $4\leqq i\leqq n$ un arc sur $\mathscr{D}(z)$ partant de $P_{31}(z)$ et arrivant à $P_{i1}(z)$. D'après l'hypothèse l'intégrale $\int_{l_i(z)}\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\mathrm{d}w \mod (\sqrt{-1}k/2)$ ne dépand pas à z. $(\xi_{31}(z))^{-1}\cdot\xi_{i1}(z)$ en est une constante indépendante de z qu'on désigne par $R_i\exp(\sqrt{-1}\psi_i)$. Ensuite $L_k(z)$ pour $k=1, 2$ un arc sur $\mathscr{D}(z)$ partant de $P_{31}(z)$ et arrivant à un point de $\alpha_k(z)$. Puisque $\mathrm{Re}\left\{\int_{L_k(z)}\frac{\partial h(z, w)}{\partial w}\mathrm{d}w\right\}$ ne dépend pas à z, $|\xi_{31}(z)|^{-1}\cdot r_k(z)$ est une constante: R_k. Nous avons donc pour $z\in\Delta$, $\mathscr{D}''(z)=\{R_1<|w''|<R_2\}-\bigcup_{i=1}^{n}\{R_i\exp(\sqrt{-1}\theta)\colon \psi_i\leqq\theta\leqq\psi_i+\varphi_i\}$ où $R_3=1$ et $\psi_3=0$.

Cas 4: $g\geqq 1$, $n\geqq 1$, $q\geqq 0$. Il suffit de voir le cas où $\mathscr{D}(z)$ est de type $g\geqq 1$, $n=1$, $q=0$ et que $\partial\mathscr{D}(z)$ se meut doucement avec z. Comme $g\geqq 1$ il y a un cycle fermé $C(z)$ sur $\mathscr{D}(z)$ tel que $\mathscr{D}(z)-C(z)$ est connexe et que $C(z)$ se meut continuellement avec z. On peut alors construire la différentielle harmonique $\sigma(C_z, w)$ $(=\mathrm{d}u(z, w))$ sur $\mathscr{D}(z)$ (voir le §2). D'après l'hypothèse et l'inégalité (4') on sait que $\frac{\partial u(z, w)}{\partial w}\mathrm{d}w$ est holomorphe par rapport à z et w. Désignons par $\{P_i(z)\}$ $(1\leqq i\leqq m)$ les zéros de $\frac{\partial u(z, w)}{\partial w}\mathrm{d}w$ qui se trouvent au-dessus de $\partial\mathscr{D}(z)$. Par le même procédé dans le cas précédent Kanten Satz nous fournit que $\bigcup_{z\in\Delta}(z, P_i(z))$ définit une section holomorphe dans $[\mathrm{Cl}]\mathscr{D}$. Formons pour z fixé une fonction dans $\mathscr{D}(z)$: $w'=g(z, w)=\int_{P_i(z)}^{w}\frac{\partial u(z, w)}{\partial w}\mathrm{d}w$ et soit S l'image de $\mathscr{D}(z)$ par $g(z, w)$. S est un domaine multivalent étalé au-dessus du plan w' et elle ne dépend pas de z. Traçons comme d'habitude $2g$ cycles sur $\mathscr{D}(z)$: $\{A_i(z), B_i(z)\}_{i=1}^{g}$ continuellement avec z et considérons $2g$ automorphismes $\{\varphi_{A_i}, \varphi_{B_i}\}_{i=1}^{g}$ de S tels que φ_{A_i}:

$w' \to w' + \int_{A_i(z)} \frac{\partial h(z, w)}{\partial w} dw$. Ils sont indépendants de z. Il en résulte que la famille $\mathscr{D}$ est équivalente à celle triviale: $(|z|<\rho) \times (S/\{\varphi_{A_i}, \varphi_{B_i}\}_{i=1}^{q})$. Le théorème 3 est complètement démontré. C.Q.F.D.

On donnera une remarque sur le cas exceptionnel. Supposons que $\mathscr{D} = \bigcup_{z \in \Delta} (z, \mathscr{D}(z))$ est de type (H) et que $\mathscr{D}(z)$ se meut doucement avec $z \in \Delta$. Soit $f(z, w)$ la fonction d'uniformisation de $\mathscr{D}(z)$ par rapport à O_z: $\mathscr{D}(z) \to |W| < R(z)$. Alors par le §1 dans le mémoire [5] on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\log R(z)) \leqq -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathscr{D}(z)} \left| \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\, \partial w} (\log |f(z, w)|)\right|^2 du\, dv\,.$$

Ici supposons que $R(z)$ soit une constante. Alors il en vient que $f(z, w)$ est holomorphe par rapport à z et w. En répétant le procédé d'approximation qu'on fait dans le cas 1 il est vrai même au cas où $\partial\mathscr{D}(z)$ ne se meut pas doucement avec $z \in \Delta$. Si l'on considère la fonction inverse de $f(z, w)$, on aura une

Remarque. *Pour chaque z fixé: $|z|<\rho$ soit donnée la série entière de la variable W de la forme: $\zeta(z, W) = W + a_2(z)W^2 + a_3(z)W^3 + \cdots$ telle que ce rayon de convergence soit toujours $\geqq 1$. Soit $\Omega = (|z|<\rho) \times (|W|<1)$ et soit $T: (z, W) \to (z, \zeta(z, W))$ la transformation de Ω en l'espace (z, w). L'image $T(\Omega)$ est un ensemble multivalent étalé au-dessus du dicylindre $(|z|<\rho) \times (|w|<\infty)$. Cela posé, si l'ensemble multiplié $T(\Omega)$ est une variété de Stein, alors T doit être holomorphe par rapport à deux variables z et W dans Ω. La réciproque est évidemment vraie.*

Faculté des Enseignement
Université de Shiga (Japon)

Bibriographies

[1] H. Behnke, Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. **4** (1926) 347–365.

[2] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen mehrerer unabhängigen Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Varänderlichen fortschreiten, Math. Ann. **62** (1906) 1–88.

[3] F. Iversen, Rechrches sur les fonctinons inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors (1914) 67 pp.

[4] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes [I], [II], [III], J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968) 49–100, **9** (1969 221–274, 10 (1970) 245–271.

[5] H. Yamaguchi, Parabolicité d'une fonction entiére, J. Math. Kyoto Univ. 16(1976)71–92.