J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
30-4 (1990) 671-703

Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions C^∞ I

dédiée au Professeur S. Mizohata avec nos reconnaissances

Par

Keiichiro KITAGAWA

§1. Introduction

Il s'agit du problème de Cauchy *homogène*:

$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} L(t, x ; \partial_t, \partial_x)u(t, x)=0 \\ \partial_t^{j-1}u(0, x)=\varphi_j(x) \qquad j=1, \cdots, m \end{cases} \qquad (t, x)\in[0, T_0]\times \boldsymbol{R}^d$$

pour une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles à coefficients de la classe de Gevrey:

$$L(t, x ; \partial_t, \partial_x)u(t, x)\equiv\left[\partial_t^m-\sum_{j=1}^m a_j(t, x ; \partial_x)\partial_t^{m-j}\right]u(t, x)=0$$

Nous considérons *des conditions nécessaires* pour que ce problème de Cauchy soit bien posé.

Sur ce sujet, nous mentionnons tout d'abord un travail de S. Mizohata [14]. Il y a montré, dans la catégorie de fonctions C^∞, une condition nécessaire pour les équations de *p-évolution*: Cette condition pour $p\leqq 1$ est bien connue comme le *théorème de Lax-Mizohata* [10], [14]. Depuis, les recherches sont approfondies en trois directions différentes indépendamment. Nous en citons des recherches qui nous concernent:

[I] Au cas $p>1$, il y a des recherches sur les équations paraboliques dégénérées dans la catégorie de *fonctions* C^∞ [1], [13], [25]:

[II] Au cas $p\leqq 1$, il y a d'une part des recherches sur le théorème de *Lax-Mizohata* dans la catégorie de *fonctions analytiques* ou de *Gevrey* [3], [4], [9], [17], [24]; celles sur des conditions sur la partie principale de $L(t, x ; \partial_t, \partial_x)$:

[III] Il y a d'autre part des recherches sur la *condition de Levi* (nous citons surtout celles de V. Ya. Ivrii) pour les équations faiblement hyperboliques dans la catégorie de *fonctions* C^∞ ou de *Gevrey* [3], [4], [5], [11], [19], [20], [22], [23]; celles sur des conditions sur la partie inférieure de $L(t, x ; \partial_t, \partial_x)$.

Ces recherches ramifiées en trois directions différentes en apparence, nous pouvons

Communicated by Professor T. Ikebe, January 10, 1989.

les réunifier en un théorème (Théorème 1), par l'introduction du *polygône de Newton,* comme la généralisation au cas *dégénéré* du théorème de S. Mizohata [14]. Remarquons que ce théorème 1 améliore, ça et là, des recherches citées ci-haut (voire Théorèmes 4, 5). Remarquons aussi que cette réunification nous suggère qu'il est aussi intéressant de considérer le problème de Cauchy (PC) dans les classes de Gevrey même pour $L(t, x: \partial_t, \partial_x)$ non kowalevskien: Nous en discuterons à la note ultérieure. Nous voyons que ces conditions recherchées sont *des conditions nécessaires pour l'existence de solution (non nécessairement unique) du problème de Cauchy (PC).*

Sur *l'unicité de solution* du problème de Cauchy (PC), nous citons un autre travail de S. Mizohata [15] sur l'unicité locale de solution: le phénomène de *la propagation à vitesse finie*:

[IV] L'équation non kowalevskienne n'a pas la propriété de la propagation à vitesse finie.

Nous traduisons cette propriété de la propagation à vitesse finie en la propriété d'*une unicité locale* de solution du problème de Cauchy (PC) [6]. Et nous donnons un autre théorème (Théoreme 2) qui décrit *la condition nécéssaire pour l'unicité locale de solution* comme une amèlioration de ce théorème de S. Mizohata (Théorème 3).

Tandisqu'au plus part de ces recherches citées ci-haut, on considérait ou bien le problème de Cauchy *non homogène* (c'est-à-dire que le deuxième membre de l'équation est arbitraire), ou bien les problèmes de Cauchy *uniformes* (dont le plan initial $t=\tau$ est quelconque), *nous considérons le problème de Cauchy homogène* (c'est à dire que le deuxième membre est fixé à zéro), *dont le plan initial est (aussi) fixé à* $t=0$. Parce que nous considérons la condition nécéssaire, le résultat ainsi obtenu est plus fin que ceux ci-haut. Et c'est grâce à l'avantage de la méthode améliorée de l'énergie micro-locale de S. Mizohata ($\alpha_n-\beta$ méthode) qu'on obtient ainsi des résultats plus fins.

Cette méthode de S. Mizohata utilisée pour la première fois pour montrer le théorème cité ci-haut de S. Mizohata [14] est améliorée par lui-même pour montrer le théorème inverse de Cauchy-Kowalevski [16]. Depuis cette méthode est encore améliorée par S. Mizohata lui-même [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22] et Y. Takei [26]. W. Matsumoto [12] a remarqué que la méthode de S. Mizohata fonctionne encore sous l'hypothèse de l'existence (sans unicité) de solution du problème de Cauchy (PC). Ce sont ces améliorations et cette remarque qui nous permettent d'énoncer nos théorèmes.

Etant obligés de diviser ce mémoire en deux parties à cause de sa longueur, nous mettons l'accent, ici à sa première partie, sur la présentation de la méthode améliorée de l'énergie micro-locale et nous nous contentons d'énoncer un cas spéciale du théorème 1, mais nous donnons sa démonstration complète pour qu'on puisse y suivre l'idée de cette méthode. Et à la note qui suit [8], qui constitue la deuxième partie de notre mémoire, nous donnerons nos énoncés en pleine forme.

A cette note, nous énonçons, à la section 2, un cas spécial du théorème 1, avec quelques exemples qui l'illustrent: A la section 3, nous énonçons sous la forme simplifiée la proposition fondamentale, noyau de la méthode d'énergie micro-locale de S. Mizohata: Les sections 4~7 sont consacrées à sa démonstration: Nous démontrons le théorème 1 à la section 8: A l'appendice à la section 9, nous donnerons la démonstration des propositions sur l'expension asymptotique de l'opérateur pseudo-différentiel.

Nous remercions Professeur S. Mizohata à son encouragement et Professeur W. Matsumoto à m'avoir mentionné sa remarque.

§ 2. Enoncé du théorème

Nous commençons par l'explication de notre écriture. Nous considérons en vecteur dans l'espace euclidien réel $\boldsymbol{R}^d$, mais nous l'écrivons comme un scalaire. Pour deux vecteurs $a\equiv(a_1, \cdots, a_d)$ et $b\equiv(b_1, \cdots, b_d)$ nous écrivons:

$$a=b \quad \text{si} \quad a_j=b_j;\ j=1, \cdots, d \qquad a<b \quad \text{si} \quad a_j<b_j;\ j=1, \cdots, d$$

$$a+b\equiv(a_1+b_1, \cdots, a_d+b_d) \qquad ab\equiv(a_1b_1, \cdots, a_db_d)$$

$$a^b\equiv(a_1^{b_1}, \cdots, a_d^{b_d}) \qquad a!\equiv(a_1!, \cdots, a_d!)$$

$$|a|\equiv(|a_1|, \cdots, |a_d|) \qquad \langle a\rangle\equiv(\sqrt{1+a_1^2}, \cdots, \sqrt{1+a_d^2})$$

$$_s(a)\equiv a_1+\cdots+a_d\equiv\sum_{j=1}^d a_j \qquad _p(a)\equiv a_1\cdots a_d\equiv\prod_{j=1}^d a_j$$

$$_v(a)\equiv(a, \cdots, a) \quad \text{pour un scalaire} \quad a\in\boldsymbol{R}$$

Pour la simplicité de l'écriture, nous abrègerons $_v(a)$ par a et aussi $_p(a)$ par a avec la confiance qu'il n'y a pas de confusion: Ainsi on écrit par exemple:

$$a^\alpha={}_p(a^\alpha)=a_1^{\alpha_1}\cdots a_d^{\alpha_d} \quad \text{pour} \quad a\equiv(a_1, \cdots, a_d) \quad \text{et} \quad \alpha\equiv(\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$$

$$a^\alpha={}_p({}_v(a)^\alpha)=a^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} \quad \text{pour} \quad a\in\boldsymbol{R} \quad \text{et} \quad \alpha\equiv(\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$$

De même nous écrivons:

$$\partial_x^\alpha\equiv\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}; \quad D^\alpha\equiv\left(\frac{1}{i}\partial_x\right)^\alpha, \ (i\equiv\sqrt{-1}); \quad f_{(\beta)}^{(\alpha)}(x;\xi)\equiv\partial_\xi^\alpha D_x^\beta f(x;\xi).$$

Soient: $\|f\|\equiv\|f\|_{L^2(R^d)}$ pour une fonction f; $|||f|||\equiv\sum_{j=1}^m\|f_j\|$ pour un vecteur $f\equiv(f_1, \cdots, f_m)$; $\|a(\circ, D)\|\equiv\|a(\circ, D)\|_{L^2(R^d)\to L^2(R^d)}$ pour un opérateur pseudo-différentiel borné $a(x; D)$.

Dans cette note, l'écriture représentant un objet spécifique, telle que α à $\alpha_n(D)$ et β à $\beta_n(x)$, est réservée en principe à cet objet. Et pour la quantité non spécifique dont seule la finitude est comptée, nous utilisons l'écriture générique telle que ${}^\exists C$, ${}^\exists P(n)$. Mais par manque d'écritures, nous abuserons quand-même pour l'usage aux multi-indices les écritures déjà résérvées: Nous utiliserons par exemple α réservée à $\alpha_n(D)$ comme une multi-indice α, soit $\alpha_n^{(\alpha+\mu)}(\xi)$.

Ensuite nous expliquons les espaces fonctionnels que nous utiliserons: les classes de Gevrey. Soient Ω un domaine de $\boldsymbol{R}^d$ et $s\equiv(s_1, \cdots, s_d)$ et $R\equiv(R_1, \cdots, R_d)$ des vecteurs. Quelques-uns des s_j peuvent eventuellement être infinis: soit, pour la simplicité de l'écriture, $s\equiv(s', s'')\equiv(s_1, \cdots, s_l, \infty, \cdots, \infty)$; $1\leqq s_j<\infty(j=1, \cdots, l)$. Nous écrivons $\alpha\equiv(\alpha', \alpha'')\equiv(\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \cdots, \alpha_d)$.

$$\gamma_R^s(\Omega)\equiv\{f(x)\in C^\infty(\Omega);\ {}^\forall K \text{ compact}\subset\Omega,\ {}^\forall\alpha'';\ \sup_{x\in K,\alpha'}|\partial_x^\alpha f(x)|/\alpha'!^{s'}R'^{\alpha'}<\infty\}$$

$$\gamma^{(s)}(\Omega)\equiv\bigcup_{R>0}\gamma^s_R(\Omega),\qquad \gamma^{<s>}(\Omega)\equiv\bigcap_{R>0}\gamma^s_R(\Omega)$$

$$H^s_R(\Omega)\equiv\{f(x)\in H^\infty(\Omega);\ {}^\forall\alpha'';\ \sup_{\alpha'}\|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}/\alpha'!^s R^{\alpha'}<\infty\}$$

$$H^{(s)}(\Omega)\equiv\bigcup_{R>0}H^s_R(\Omega),\qquad H^{<s>}(\Omega)\equiv\bigcap_{R>0}H^s_R(\Omega)$$

où

$$H^\infty(\Omega)\equiv\{f(x)\in C^\infty(\Omega);\ \|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}<\infty\ {}^\forall\alpha\}$$

Ainsi on a $\gamma^{(\infty)}(\Omega)=\gamma^{<\infty>}(\Omega)=C^\infty(\Omega)$ et $H^{(\infty)}(\Omega)=H^{<\infty>}(\Omega)=H^\infty(\Omega)$. Nous disons qu'une fonction de $\gamma^{(s)}(\Omega)$ ou de $H^{(s)}(\Omega)(\gamma^{<s>}(\Omega)$ ou de $H^{<s>}(\Omega)$ respectivement) est d'indice (s) ($\langle s\rangle$ respectivement).

Soit, pour deux espaces vectoriels topologiques E et F, $C^m(E, F)$ l'espace de fonctions m-fois continuellement différentiables, définies dans E et à valeur dans F.

Nous supposons que les coefficients soient des fonctions de la classe de Gevrey d'indice $(s^\sim)$ ou $\langle s^\sim\rangle$ et nous considérons le problème de Cauchy dans la classe de Gevrey d'indice (s) ou $\langle s\rangle$; Sur ces indices nous supposons:

$$1\leqq s^\sim\leqq s\leqq\infty;\ s^\sim<\infty.$$

Nous expliquons ensuite le polygône de Newton $(\varDelta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$ pour le poids (ρ, δ) attaché au point $(\hat{t}, \hat{x})$ qui est introduit dans [20].

Nous considérons le poids (ρ, δ); $\rho\equiv(\rho_1, \cdots, \rho_d)$, $\delta\equiv(\delta_1, \cdots, \delta_d)$ que nous supposons:

$$0\leqq\delta<\rho<\infty.$$

Soient

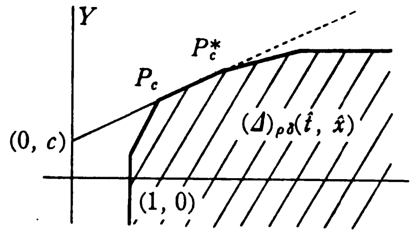
$$L(t, x;\ \partial_t, \partial_x)\equiv\partial_t^m-\sum_{j=1}^m a_j(t, x;\ \partial_x)\partial_t^{m-j}$$

où

$$a_j(t, x;\ \xi)\equiv\sum_\alpha a_{j\alpha}(t, x)\xi^\alpha\equiv\sum_\alpha\sum_k(t-\hat{t})^{\sigma(j\alpha k)}(x-\hat{x})^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(t, x)\xi^\alpha.$$

Nous faisons correspondre à $(j\alpha k)$ le point $\left(1+\dfrac{\sigma(j\alpha k)}{j},\ \dfrac{s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}{j}\right)$ au plan XY. Nous y ajoutons un point $(1, 0)$ exprès. Nous appelons le *polygône de Newton pour le poids* (ρ, δ) *attaché au point* $(\hat{t}, \hat{x})$, noté par $(\varDelta)_{\rho\delta}(\hat{t}, \hat{x})$, le plus petit polygône à côtés de pente *non négative* contenant tous ces points.

Pour un nombre $c\geqq0$ donné, soient P_c, P_c^* le point de contact de la tangente au



(Polygône de Newton)

$(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$, *à pente* σ_c *non négative*, tirée du point $(0, c)$. Quand cette tangente n'a qu'un point de contact, $P_c=P_c^*$ est ce point de contact: et quand ells a un côté commun avec le $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$, P_c est le sommet à l'extrémité *gauche* de ce côté et P_c^* est celui à l'extrémité *droite* de ce côté. Quand il n'y a pas de telle tangente, P_c et P_c^* sont convenus d'être respectivement le sommet P_m *à l'extrême droite* du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$ et le point à l'infini et σ_c est convenu $\sigma_c\equiv-\infty$.

Pour un point P du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$, soient Π_P^- et Π_P^+ les côtés du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$ juste à la gauche et à la droite respectivement de P et σ_P^- et σ_P^+ les pentes de Π_P^- et Π_P^+ respectivement. Ainsi $\sigma_{P_m}^+=0$.

Pour deux sommets P et Q du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$ donnés dont Q est à la droite de P, soit $[P, Q]$ l'ensemble de tous les sommets du $(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$ entre ces deux sommets, P, Q tous les deux inclus: Nous convenons $[P, P]\equiv\{P\}$; $[Q, P]\equiv\phi$.

Soit, pour un sommet $P\equiv(1+q, p)\in(\Delta)_{\rho\delta}(\hat{t},\hat{x})$, le polynôme caractéristique attaché à P:

$$\begin{aligned}&p_P^{\rho\delta}(\lambda)(t, x; \xi; \hat{t}, \hat{x})\\&\equiv\lambda^m-\sum_{(j\alpha k)\in\Gamma_P^+}(t-\hat{t})^{\alpha(j\alpha k)-qj}x^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(\hat{t}, \hat{x}+x_\delta)\xi^\alpha\lambda^{m-j}\end{aligned}$$

où $\Gamma_P^+\equiv\left\{(j\alpha k);\left(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \frac{s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}{j}\right)\in\Pi_P^+\right\}$ et $x_\delta\equiv(x_{\delta 1}, \cdots, x_{\delta d})$: $x_{\delta j}\equiv0$ si $\delta_j\neq 0$, $x_{\delta j}\equiv x_j$ si $\delta_j=0 (j=1, \cdots, d)$.

Remarquons que l'on a

$$p_P^{\rho\delta}(\lambda)(\hat{t}, x; \xi; \hat{t}, \hat{x})\equiv\lambda^m-\sum_{(j\alpha k)\in\mathring{\Gamma}_P}x^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(\hat{t}, \hat{x}+x_\delta)\xi^\alpha\lambda^{m-j}$$

où $\mathring{\Gamma}_P\equiv\left\{(j\alpha k);\left(1+\frac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \frac{s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}{j}\right)=P\right\}$.

Soient enfin:

$$a_{\rho\delta}\equiv\max_j\frac{\rho_j}{s_j},\quad\text{et}\quad b_{\rho\delta}\equiv\operatorname*{Min}_j\frac{\rho_j-\delta_j}{s_j^\sim}.$$

Nous envisageons le problème de Cauchy homogène dont le plan initial est fixé à $t=0$.

$$(\mathrm{PC})\quad\begin{cases}L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x)=0\\ \partial_t^{j-1}u(0, x)=\varphi_j(x)\qquad j=1, \cdots, m\end{cases}$$

Définition 1. Disons que le problème de Cauchy (PC) est (s)-*soluble* s'il existe un domaine Ω_0 et un nombre positif T_0 tels que les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{(s\sim)}(\Omega_0))$ et que, pour toutes les données $\varphi_j(x)\in H^{(s)}(\boldsymbol{R}^d)$, il existe une solution $u(t, x)$ du (PC); $u(t, x)\in C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))$.

Alors on a le théorème qui sera redonné en pleine forme à la deuxième partie de ce mémoire.

Théorème 1. *Soit* $s\neq\infty$. *Pour que le problème de Cauchy* (*PC*) *soit* (*s*)-*soluble, il* *faut que, pour tout* $\hat{x}\in\Omega_0$, *la partie réelle de la racine de* $p_P^{\rho\delta}(0,\ x-x_\delta;\ i\xi;\ 0,\ \hat{x})=0$ *soit non positive pour tous* ${}^\forall(x,\ \xi)\in\boldsymbol{R}^{2d}$, ${}^\forall P\in[P_{a_{\rho\delta}},\ P_{b_{\rho\delta}}]$, ${}^\forall(\rho,\ \delta)$; $0\leqq\delta<\rho<\infty$, $a_{\rho\delta}\leqq b_{\rho\delta}$, $\sigma_{a_{\rho\delta}}\geqq 0$.

Sur l'interprétation de ce théorème 1, nous en discuterons à la deuxième partie. Nous nous contentons ici de montrer quelques exemples qui illustrent ce théorème 1.

Exemples. (1) $L_1(t,\ \partial_t,\ \partial_x)\equiv\partial_t+a(t,\ x)t^k\partial_x^4+b(t,\ x)t^l\partial_x^2+c(t,\ x)\partial_x$ où $a(t,\ x)$, $b(t,\ x)$, $c(t,\ x)$ sont analytiques en x et telles qu'on a $a(0,\ x)\equiv b(0,\ x)\equiv 1$, $c(0,\ x)\neq 0$. D'après M. Miyake [13] ou T. Sadamatsu [25], pour que le (PC) soit (∞)-soluble, il faut que $l\geqq 1$ pour $k=2,\ 3$, et $l\geqq 2$ pour $k\geqq 4$. D'après notre théorème cette condition est améliorée par $3l\geqq k$ pour $k\geqq 4$.

(2) $L_2(t,\ x\ ;\ \partial_t,\ \partial_x)\equiv\partial_t-a(t,\ x)x^k\partial_x^2-b(t,\ x)x^l\partial_x$.

Pour que le (PC) soit (s)-soluble, il faut que l'on ait:

1) Si k est paire, alors on a Re $a(0,\ 0)\geqq 0$, et si k est impaire, alors on a Re $a(0,\ 0)=0$.

2) Si $k>2l$, $s^\sim\leqq\dfrac{k-l-1}{k-l}s$ et $s\geqq\dfrac{k-l}{k-2l}$, alors on a Im $b(0,\ 0)=0$.

(3) $L_3(t,\ x\ ;\ \partial_t,\ \partial_x)\equiv\partial_t-a(t,\ x)t^k\partial_x^2-b(t,\ x)t^l\partial_x$.

Pour que le (PC) soit (s)-soluble, il faut que l'on ait:

1) Si $k\leqq 2l+1$ ou que $k>2l+1$ et $s\leqq\dfrac{k-l}{k-2l-1}$, $\left(\text{sauf } s=s^\sim=\dfrac{k-l}{k-2l-1}\right)$, alors on a Re $a(0,\ 0)\geqq 0$.

2) Si $k>2l+1$ et $s\geqq\dfrac{k-l}{k-2l-1}$, alors on a Im $b(0,\ 0)=0$.

Au cas où $a(x,\ t)\equiv a(t)$ et $b(x,\ t)\equiv b(t)$ sont indépendantes de x, et que l'on a Re $a(0)>0$ et Im $b(0)\neq 0$, pour que le (PC) soit (s)-soluble, il faut et il suffit que l'on ait $s<\dfrac{k-l}{k-2l-1}$.

(4) $L_4(t,\ x\ ;\ \partial_t,\ \partial_x)\equiv\partial_t^2-a(t,\ x)x^{2k}\partial_x^2-b(t,\ x)x^l\partial_x$.

Pour que le (PC) soil (s)-soluble, il faut que l'on ait:

1) $a(0,\ 0)\geqq 0$

2) Si $k>l$, $s^\sim\leqq\dfrac{2k-l-1}{2k-l}s$ et $s\geqq\dfrac{2k-l}{k-l}$, alors on a $b(0,\ 0)=0$.

(5) $L_5(t,\ x\ ;\ \partial_t,\ \partial_x)\equiv\partial_t^2-a(t,\ x)t^{2k}\partial_x^2-b(t,\ x)t^l\partial_x$.

Pour que le (PC) soit (s)-soluble, il faut que l'on ait:

1) Si $k\leqq l+1$ ou que $k>l+1$, $s\leqq\dfrac{2k-l}{k-l-1}$, $\left(\text{sauf } s=s^\sim=\dfrac{2k-l}{k-l-1}\right)$, alors on a $a(0,\ 0)\geqq 0$

2) Si $k>l+1$ et $s\geqq\dfrac{2k-l}{k-l-1}$, alors on a $b(0.\ 0)=0$.

§ 3. Enoncé de la proposition fondamentale

Comme nous avons remarqué à l'introduction, la démonstration du théorème 1, ainsi que celles des théorèmes que nous énoncerons à la deuxième partie de ce mémoire, sont faites par la méthode améliorée d'énergie micro-locale de S. Mizohata [16]. Cette méthode consiste de deux étapes: Etablir d'une part une estimation à priori: Mener à la contradiction par montrer, à l'aide de cette estimation à priori, l'existence d'une solution dont l'énergie micro-locale satisfait à une estimation minorante contradictoire à l'estimation à priori. La diversité des démonstrations de ces théorèmes provient de la première étape et la deuxième étape est commune à toutes ces démonstrations. Nous énonçons cette deuxième étape en une proposition.

Nous rendons le problème de Cauchy (PC) à celui pour un système d'ordre 1 en ∂_t. Soient

$$U(t, x)\equiv {}^t(u_1(t, x), \cdots u_m(t, x)); \ u_j(t, x)\equiv\partial_t^{j-1}u(t, x): \ j=1, \cdots, m$$

$$\Phi(x)\equiv{}^t(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)).$$

Le problème de Cauchy (PC) est équivalent au suivant.

$$\text{(PCS)} \quad \begin{cases} [\partial_t I-\mathcal{A}(t, x ; \partial_x)]U(t, x)=0 \\ U(0, x)=\Phi(x) \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{A}(t, x ; \partial_x)\equiv\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_m(t, x ; \partial_x), & \cdots, & a_1(t, x ; \partial_x) & \end{pmatrix}$$

Nous considérons au voisinage d'un point quelconque $x=\hat{x}$, mais pour la simplicité de l'écriture, nous supposons $\hat{x}=0$:

Soient Ω_0 un voisinage de l'origine et T_0 un nombre positif.

Nous fixons des indices de Gevrey $s^\sim$, s; $1\leqq s^\sim\leqq s\leqq\infty$, $s^\sim<\infty$ que nous supposons, pour la simpicité:

$$s\equiv(s', s'')\equiv(s_1, \cdot, s_l, \infty, \cdot, \infty).$$

Nous écrivons de même $\alpha\equiv(\alpha', \alpha'')\equiv(\alpha_1, \cdot, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \cdot, \alpha_d)$.

Nous fixons aussi un poids (ρ, δ): $0\leqq\delta<\rho<\infty$, en sorte que l'on a:

$$\text{(H-0)}_1 \quad 0<a\equiv a_{\rho\delta}\leqq b\equiv b_{\rho\delta}, \qquad \sigma_{a_{\rho\delta}}\geqq 0.$$

Nous envisageons le polygône de Newton $(\Delta)_{\rho\delta}\equiv(\Delta)_{\rho\delta}(0, 0)$, et fixons un sommet $P\equiv(1+q, p)$:

$$\text{(H-0)}_2 \quad P\in[P_{a_{\rho\delta}}, P_{b_{\rho\delta}}]\subset(\Delta)_{\rho\delta}(0, 0).$$

Soient les coefficients de $C^0([0, T_0], \gamma^{(s^\sim)}(\Omega_0))$. Plus préciément on a:

$$\text{(H-1)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Il existe un nombre } \rho_0>0 \text{ et, pour tout compact } K \text{ de } \Omega_0, \text{ il existe une con-} \\ \text{stante } C \text{ telle qu'on l'on a:} \\ |\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t, x)|\leqq{}^\exists C\nu!^{s^\sim}\rho_0^\nu \qquad {}^\forall(t, x)\in[0, T_0]\times K, \ {}^\forall j, \alpha, k, \nu \end{array} \right.$$

Considérons la condition:

(H-2) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout nombre } A>0 \text{ et pour toute suite des données initiales } \Phi\equiv\{\Phi_n(x)\};\\ \Phi_n(x)\equiv(\varphi_{n1}(x), \cdots, \varphi_{nd}(x)) \text{ où } \varphi_{nj}\in H^{<1>}(\boldsymbol{R}^d), \text{ satisfaisant à}\\ \|\partial_x^\alpha\varphi_{nj}\|\leqq{}^3C_{\Phi\alpha''}\Theta_\Phi(n)(c_\Phi n)^{\rho'\alpha'} \qquad ({}^\forall j,\ n,\ \alpha)\\ \text{avec une certaine constante } c_\Phi \text{ et une certaine fonction en } n\ \Theta_\Phi(n), \text{ il existe}\\ \text{un polynôme en } n\ C_{A\Phi}(n) \text{ et au moins une suite de solutions } U_n^0(t,\ x) \text{ du (PCS),}\\ \text{à données initiales } \Phi_n(x), \text{ ayant l'estimation à priori:}\\ \sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in\Omega_0,\, t\in[0,T_0]} |U_{nj}^0(t,\ x)|\leqq C_{A\Phi}(n)\Theta_\Phi(n)\exp(An^a) \qquad {}^\forall n\gg 1.\end{array}\right.$

où $C_{\Phi\alpha''}$ signifie que c'est une constante ne dépendante que de α'' et que ${}^\forall n\gg 1$ veut dire "pour n suffisamment grand".

Voici la proposition fondamentale:

Proposition fondamentale. *Sous les hypothèses* $(\text{H-0})_1$, $(\text{H-0})_2$, (H-1) *et* (H-2), *la partile réelle de la racine de* $p_{\mathcal{P}}^{\rho_0^0}(\lambda)(0,\ x;\ i\eta;\ 0,\ 0)=0$ *est non négative pour tous* ${}^\forall(x,\ \eta)$; $(x_\delta,\ \eta)\in\Omega_0\times\boldsymbol{R}^d$.

Démonstration. Nous la démontrons par absurde.

Par nier le résultat on peut bien supposer:

(H-3) $\left\{\begin{array}{ll}\multicolumn{2}{l}{\text{Il existe des } x^0(x_\delta^0\in\Omega_0),\ \zeta^0\equiv i\eta^0(\eta^0\neq 0),\ \delta_0(0<\delta_0) \text{ et } m_0(1\leqq m_0) \text{ tels que les racines}}\\ \multicolumn{2}{l}{\lambda_j(x^0;\ \zeta^0) \text{ de } p_{\mathcal{P}}^{\rho_0^0}(\lambda)(0,\ x^0;\ \zeta^0;\ 0,\ 0)=0 \text{ satisfont}}\\ \operatorname{Re}\lambda_j(x^0;\ \zeta^0)\geqq 4\delta_0 & j=1,\ \cdot\ ,\ m_0\\ \operatorname{Re}\lambda_j(x_0;\ \zeta^0)\leqq 0 & j=m_0+1,\ \cdot\ ,\ m.\end{array}\right.$

Par $(\text{H-0})_1$ on a:

(H-4) $a\leqq b$

Par $(\text{H-0})_1$ et $(\text{H-0})_2$, on peut bien supposer qu'il existe des nombres non négatifs γ_1, γ_2 tels qu'en posant, pour la simplicité de l'écriture,

$$p_1\equiv p-\gamma_1 q,$$

l'on a:

(H-5) $0\leqq p_1-\gamma_1(\equiv p-\gamma_1(q+1))$

(H-6) $\sigma_P^+\leqq\gamma_2<\gamma_1<\sigma_P^-$

(H-7) $p_1-\gamma_1<b\equiv\operatorname*{Min}_j\dfrac{\rho_j-\delta_j}{s_j^-}$

(H-8) $a\leqq p-\gamma_2(q+1)$

Nous fixons, une fois choisi, de tels ρ_0, x^0, $\zeta^0\equiv i\eta^0$, δ_0, m_0, γ_1 et γ_2.

§ 4. Micro-localisaton et deux systèmes

Nous localisons l'opérateur: $\partial_t I-\mathcal{A}(t,\ x;\ iD)$ à la direction de $(x^0,\ \zeta^0)$.

Choix de s^*.

Soit $1<s^*$ un vecteur quelconque tel que $s_j^*\equiv s_j^\sim$ si $s_j^\sim>1$.

Choix de ρ_0 et $\hat{\rho}_0$.

Soit ρ_0 celui défini à (H-1). Soit $\hat{\rho}_0$ arbitrairement fixé.

Soient $0<2r<r_0$, $0<2\hat{r}<\hat{r}_0$, $0<\rho_0^\sim<\rho_0$, $0<\hat{\rho}_0^\sim<\hat{\rho}_0$ des nombres tels qu'on a $\{x\,;\ |x-x_0^0|\leqq 6\nu(r_0)\}\subset\Omega_0$, qui seront déterminés ultérieurement mais qui sont d'ailleurs arbitraires pour le moment.

Définition de $\chi_n(x)$. Soient $\chi^k(x)(k=1,\cdot,d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) satisfaisant à

$$\begin{cases} |\partial_x^\alpha(\chi^k(x)-x_k^0)|\leqq 5r_0\alpha!^{s_k^*}\rho_0^{\sim\alpha} & ({}^\forall\alpha,\ {}^\forall x) \\ \chi^k(x)=x_k \quad |x-x_k^0|\leqq 4r_0, & \chi^k(x)=x_k^0 \quad |x-x_k^0|\geqq 5r_0 \end{cases}$$

et $\chi_n(x)\equiv(n^{-\delta_1}\chi^1(n^{\delta_1}x_1),\cdots,n^{-\delta_d}\chi^d(n^{\delta_d}x_d))$.

Définition de $\Xi_n(\eta)$. Soient $\Xi^k(\eta)$ $(k=1,\cdot,d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) satisfaisant à

$$\begin{cases} |\partial_\xi^\alpha(\Xi^k(\eta)-\eta_k^0)|\leqq 5\hat{r}_0\alpha!^{s_k^*}\hat{\rho}_0^{\sim\alpha} & ({}^\forall\alpha,\ {}^\forall\eta) \\ \Xi^k(\eta)=\eta_k \quad |\eta-\eta_k^0|\leqq 4\hat{r}_0, & \Xi^k(\eta)=\eta_k^0 \quad |\eta-\eta_k^0|\geqq 5\hat{r}_0 \end{cases}$$

et $\Xi_n(\eta)\equiv(n^{\rho_1}\Xi^1(n^{-\rho_1}\eta_1),\cdots,n^{\rho_d}\Xi^d(n^{-\rho_d}\eta_d))$.

Micro-localisé de l'opérateur.

Le micro-localisé de l'opérateur différentiel $a(x\,;D)$ à symbole $a(x,\eta)$ est, par définition, l'opérateur $a_{\text{nloc}}(x\,;D)$ à symbole

$$a_{\text{nloc}}(x\,;\eta)\equiv a(\chi_n(x)\,;\Xi_n(\eta))$$

Proposition 1. *Supposons que l'on ait:*

$$5r_0\rho_0^\sim\sum_{l=0}^\infty(l+1)^{s_k^*}\Big(\frac{\rho_0^\sim}{\rho_0}\Big)^l\leqq 1\,;\ 5\hat{r}_0\hat{\rho}_0^\sim\sum_{l=0}^\infty(l+1)^{s_k^*}\Big(\frac{\hat{\rho}_0^\sim}{\hat{\rho}_0}\Big)^l\leqq 1\quad(k=1,\cdot,d) \tag{4-1}$$

Si $a(x,\eta)$ satisfait avec une constante $C(a)$ et un vecteur m^*

$$|a_{(\nu)}^{(\mu)}(x,\eta)|\leqq C(a)\mu!\,\nu!^{s^\sim}\hat{\rho}_0^\mu\rho_0^\nu\langle\eta\rangle^{m^*-\mu}$$

alors $a_{\text{nloc}}(x\,;\eta)$ satisfait

$$|a_{\text{nloc}}{}_{(\nu)}^{(\mu)}(x,\eta)|\leqq C(a)\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^{\sim\mu}\rho_0^{\sim\nu}n^{\rho(m^*-\mu)+\delta\nu}\qquad({}^\forall\mu,\nu,x,\eta)$$

et donc

$$\|a_{\text{nloc}}{}_{(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;D)\|\leqq{}^3C\,C(a)\mu!^{s^*}\nu!^{s^*}\hat{\rho}_0^{\sim\mu}\rho_0^{\sim\nu}n^{\rho(m^*-\mu)+\delta\nu}\qquad({}^\forall\mu,\nu\,;{}^\forall n\gg 1)$$

Preuve. Les variables étants séparées, il suffit de motrer la proposition suivante pour une variable:

Soit: $\rho_0^\sim<\rho_0$: $5r_0\rho_0^\sim\sum_{l=0}^\infty(l+1)^{s^*}\Big(\frac{\rho_0^\sim}{\rho_0}\Big)^l\leqq 1$

Soit $\varphi(x)$ une fonction d'une variable telle que l'on a:

$$|(\varphi(x)-x^0)^{(l)}|\leqq 5r_0 l!^{s*}\rho_0^{\sim l} \qquad ({}^\forall x,\ l).$$

Alors pour toute fonction $f(x)$ d'une variable telle que l'on a :

$$|f^{(l)}(x)|\leqq C_l(f)l!^{s*}\rho_0^l \qquad ({}^\forall x\ ;\ |x-x^0|\leqq 5r_0,\ {}^\forall l)$$

avec des constantes $C_l(f)$: $C_l(f)\leqq C_{l+1}(f)$, on a :

$$|f(\varphi(x))^{(l)}|\leqq C_l(f)l!^{s*}\rho_0^l \qquad ({}^\forall x,\ l).$$

Or, compte tenu de $f(\varphi(x))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$, celle-ci se démontre aisément par récurrence par rapport à l.

Par l'application de l'inégalité de Gårding, on a l'estimation sur la norme d'opérateur.

C. Q. F. D.

Choix de $\rho_0^\sim$ *et* $\hat\rho_0^\sim$.

Compte tenu de cette proposition, pour ρ_0, $\hat\rho_0$, r_0, $\hat r_0$ données, nous choisissons $\rho_0^\sim$ et $\hat\rho_0^\sim$ en sorte que l'on a (4-1) à la proposition 1.

Remarquons que l'on a, pour $a(x\ ;\ \eta)=x^\beta a^\sim(x)\eta^\alpha$

(4-2) $$|n^{-\rho\alpha+\delta\beta}a_{\mathrm{nloc}}(x\ ;\ \eta)-x^{0\beta}a(n^{-\delta}x^0)\eta^{0\alpha}|\longrightarrow 0 \qquad (r_0\longrightarrow 0)$$

A cette analyse, ce qui est fondamental, c'est la microlocalisation de l'opérateur, mais pour la faire fonctionner il faut micro-localiser la solution.

Nous utiliserons la proposition suivante :

Proposition 2. [18] *Il existe une constante absolue $C_0\in\boldsymbol{R}$ telle que, pour tous nombres $s^*(1<s^*)$, ρ_0, r et N donnés, il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable x telle que l'on a* :

$$\varphi(x)=1 \quad (|x|\leqq a), \qquad \varphi(x)=0 \ \left(|x|\geqq a+\frac{1}{2}r\right), \qquad 0\leqq\varphi(x)\leqq 1$$

$$|\partial_x^{p+\mu}\varphi(x)|\leqq{}^\exists C(NC_0r^{-1})^p\mu!^{s*}\rho_0^\mu \qquad ({}^\forall p\leqq N,\ {}^\forall\mu)$$

Définition de $\rho_0(r_0)$, $\hat\rho_0(\hat r_0)$. $\rho_0(r_0)\equiv(\rho_0(r_0)_1,\ \cdot,\ \rho_0(r_0)_d)$ et $\hat\rho_0(\hat r_0)\in\boldsymbol{R}$ soient :

$$\rho_0(r_0)_j\equiv\begin{cases}2\rho_0 & \text{si } s_j^\sim>1\\ \mathrm{Max}\{2\rho_0,\ r_0^{-1}\} & \text{si } s_j^\sim=1.\end{cases} \qquad (j=1,\ \cdot,\ d)$$

$$\hat\rho_0(\hat r_0)\equiv\mathrm{Max}\{2\hat\rho_0,\ \hat r_0^{-1}\}.$$

Choix de N_n, $\hat N_n$.

Soient, pour r_0, $\hat r_0$, r, $\hat r$ et $\kappa>1$ suppoés donner qui seront détérminés ultérieurement ;

$$N_n\equiv(R_0\hat\rho_0(\hat r_0)\kappa e)^{-1}n^{(\rho-\delta)} \quad \text{et} \quad \hat N_n\equiv(\hat R_0\rho_0(r_0)\kappa e)^{-1/s^\sim}n^{(\rho-\delta)/s^\sim}$$

où $R_0\equiv C_0r^{-1}$ et $\hat R_0\equiv C_0\hat r^{-1}$ avec la constante C_0 à la proposition 2.

Définition de $\alpha_n(\eta)$. Soient $\alpha_n^k(\eta)\,(k=1,\ \cdot,\ d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) telles que

$$\begin{cases}0\leqq\alpha_n^k(\eta)\leqq 1, \quad \alpha_n^k(\eta)=1 \quad \text{sur} \ \left\{\eta\ ;\ |\eta-\eta_k^0|\leqq\frac{1}{2}\hat r\right\}\\ \mathrm{Supp}\,\alpha_n^k\subset\{\eta\ ;\ \eta-\eta_k^0|\leqq\hat r\}\\ |\alpha_n^{k(p+\mu)}(\eta)|\leqq{}^\exists C(N_{nk}\hat R_0)^p\mu!^{s_k^*}\hat\rho_0^\mu \qquad ({}^\forall p\leqq N_{nk},\ {}^\forall\mu)\end{cases}$$

et $\alpha_n(\eta)\equiv\alpha_{n1}(\eta)\cdots\alpha_{nd}(\eta)$; $\alpha_{nk}(\eta)\equiv\alpha_n^k(n^{-\rho_k}\eta_k)$, $(k=1,\cdot,d)$.

Définition de $\beta_n(x)$. Soient $\beta_n^k(x)\,(k=1,\cdot,d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) telles que

$$\begin{cases} 0\leqq\beta_n^k(x)\leqq 1, \quad \beta_n^k(x)=1 \quad \text{sur} \quad \left\{x\,;\,|x-x_k^0|\leqq\frac{1}{2}r\right\} \\ \mathrm{Supp}\beta_n^k\subset\{x\,;\,|x-x_k^0|\leqq r\}, \\ |\beta^k_{n\,(q+\nu)}(x)|\leqq{}^{\exists}C(N_{nk}R_0)^q\nu\,!^{s_k^*}\rho_0^\nu \qquad ({}^{\forall}q\leqq N_{nk},\ {}^{\forall}\nu) \end{cases}$$

et $\beta_n(x)\equiv\beta_{n1}(x)\cdots\beta_{nd}(x)$; $\beta_{nk}(x)\equiv\beta_n^k(n^{\delta_k}x_k)$, $(k=1,\cdot,d)$.

Définition de $\nabla_n(x\,;\,D)$. Nous envisageons le localiseur $\nabla_n(x\,;\,D)\equiv\alpha_n(D)\beta_n(x)$.

Alors on a d'une part:

$$\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x,\,D)=\alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\nu)}(x).$$

et d'autre part:

$$|\nabla_{n(q+\nu)}^{(p+\mu)}(x,\,\eta)|\leqq{}^{\exists}C_\nabla(N_n\hat{R}_0)^p(N_nR_0)^q\mu\,!^{s^*}\nu\,!^{s^*}\hat{\rho}_0^\mu\rho_0^\nu n^{-\rho(p+\mu)+\delta(q+\nu)}$$
$$({}^{\forall}p\leqq\hat{N}_n,\ {}^{\forall}q\leqq N_n,\ {}^{\forall}\mu,\,\nu)$$

Nous opérons $\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;\,D)$ de la gauche à

$$[\partial_tI-\mathcal{A}(t,\,x\,;\,iD)]U_n^0(t,\,x)=0.$$

Définition de $\theta_n(x)$. Soient $\theta^k(x)\,(k=1,\cdot,d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) telles que

$$\begin{cases} 0\leqq\theta^k(x)\leqq 1, \quad \theta^k(x)=1 \quad \text{sur} \quad \{x\,;\,|x-x_k^0|\leqq r\}, \\ \mathrm{Supp}\theta^k\subset\{x\,;\,x-x_k^0|\leqq 2r\}, \\ |\theta^k_{(\nu)}(x)|\leqq{}^{\exists}C\nu\,!^{s_k^*}\rho_0^\nu \qquad ({}^{\forall}\nu) \end{cases}$$

et $\theta_n(x)\equiv\theta_{n1}(x)\cdots\theta_{nd}(x)$; $\theta_{nk}(x)\equiv\theta^k(n^{\delta_k}x_k)$, $(k=1,\cdot,d)$.

Alors on a

$$\beta_n(x)\mathcal{A}(t,\,x\,;\,iD)=\beta_n(x)\mathcal{A}(t,\,x\,;\,iD)\theta_n(x)$$

Et on a

$$[0]\quad\begin{cases} [\partial_tI-\mathcal{A}_{n\mathrm{loc}}(t,\,x\,;\,D)]\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;\,D)\theta_n(x)U_n^0(t,\,x)=\mathcal{F}^{\mu\nu}(t,\,x\,;\,D)\theta_n(x)U_n^0(t,\,x) \\ \mathcal{A}_{n\mathrm{loc}}(t,\,x\,;\,\eta)\equiv\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ a_{mn\mathrm{loc}}(t,\,x\,;\,D), & \cdots & , & a_{1n\mathrm{loc}}(t,\,x\,;\,D) \end{pmatrix} \\ a_{jn\mathrm{loc}}(t,\,x\,;\,D)\equiv a_j(t,\,\chi_n(x)\,;\,i\Xi_n(\eta)) \\ \mathcal{F}^{\mu\nu}(t,\,x\,;\,D)\equiv\begin{pmatrix} 0 \\ f_m^{\mu\nu}(t,\,x\,;\,D),\ \cdots\ ,\ f_1^{\mu\nu}(t,\,x\,;\,D) \end{pmatrix} \\ f_j^{\mu\nu}(t,\,x\,;\,D)\equiv\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;\,D)a_j(t,\,x\,;\,iD)-a_{jn\mathrm{loc}}(t,\,x\,;\,D)\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;\,D) \end{cases}$$

Revenons au $(\Delta)_{\rho\delta}$. D'après (H-6) on a

$$s(\rho\alpha-\tilde{\delta}\nu(j\alpha k))-\sigma(j\alpha k)\gamma_1\leqq p_1 j \qquad (^\forall j,\ \alpha,\ k).$$

Donc

$$\begin{aligned} a_j^1(t,\ x,\ \eta\ ;\ n)&\equiv n^{-p_1 j}a_{jn\mathrm{loc}}(t,\ x\ ;\ \eta)\\ &\equiv\sum_{\alpha k}n^{s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))-jp_1}t^{\sigma(j\alpha k)}(x^{0\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(t,\ x_\delta^0)\zeta^{0\alpha}\\ &\quad+n^{-s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}\{(X^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(t,\ X)(i\Xi)^\alpha)|_{X=\chi_n(x),\Xi=\Xi_n(\eta)}\\ &\quad-(n^{-\delta}x^0)^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(t,\ x_\delta^0)(n^\rho\zeta^0)^\alpha\}) \end{aligned}$$

satisfont à

$$\text{(4-3)}\quad \begin{cases} |a_{j(\nu)}^{1(\mu)}(t,\ x,\ \eta\ ;\ n)|\leqq {}^\exists C\mu!\nu!^{s\sim}\hat{\rho}_0^\mu\rho_0^\nu n^{-\rho\mu+\delta\nu} & (^\forall\mu,\ ^\forall\nu)\\ & (^\forall t\in[0,\ B_1 n^{-\gamma_1}])\\ & (^\forall x\ ;\ |x-x^0|\leqq 4r_0,\ ^\forall\eta\ ;\ |\eta-\eta^0|\leqq 4\hat{r}_0)\\ |a_{j(\nu)}^{1(\mu)}(t,\ x,\ \eta\ ;\ n)|\leqq {}^\exists C\mu!^{s*}\nu!^{s*}\hat{\rho}_0^\mu\rho_0^\nu n^{-\rho\mu+\delta\nu} & (^\forall\mu,\ ^\forall\nu,\ ^\forall x,\ ^\forall\eta)\\ & (^\forall t\in[0,\ B_1 n^{-\gamma_1}]) \end{cases}$$

où B_1 sera précisée ultérieurement.

Nous posons

$$U_n^1(t,\ x)\equiv\mathrm{diag}[1,\ n^{-p_1},\ \cdot,\ n^{-p_1(m-1)}]\theta_n(x)U_n^0(t,\ x)$$

Alors on a le premier système:

$$[\mathrm{I}]\quad \begin{cases} \partial_t\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\ ;\ D)U_n^1(t,\ x)=n^{p_1}[\mathcal{A}^1(t,\ x\ ;\ D\ ;\ n)\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\ ;\ D)U_n^1(t,\ x)\\ \qquad\qquad +F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\ ;\ U_n^1)(t,\ x)] \qquad t\in[0,\ B_1 n^{-\gamma_1}]\\ \mathcal{A}^1(t,\ x\ ;\ D\ ;\ n)\equiv\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & \cdot & & \vdots & \\ 0 & & & \cdot\ 0 & \cdot\ \ 1\\ a_m^1(t,\ x\ ;\ D\ ;\ n), & \cdots, & a_1^1(t,\ x\ ;\ D\ ;\ n) & & \end{pmatrix}\\ F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\ ;\ U_n^1)(t,\ x))\equiv\begin{pmatrix} 0\\ n^{-p_1 m}f_m^{\mu\nu}(t,\ x\ ;\ D),\ \cdot,\ n^{-p_1}f_1^{\mu\nu}(t,\ x\ ;\ D) \end{pmatrix}U_n^1(t,\ x) \end{cases}$$

D'après (H-6), nous avons, pour tout $\gamma\in[\gamma_2,\ \gamma_1]$,

$$s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))-\gamma(\sigma(j\alpha k)-qj)\leqq pj \qquad (^\forall j,\ \alpha,\ k)$$

avec l'égalité pour $(j\alpha k)\in\Gamma_P^+$ au cas où $\gamma=\gamma_2=\sigma_P^+$ et pour $(j\alpha k)\in\mathring{\Gamma}_P$ aux autres cas.

Donc

$$\begin{aligned} a_j^2(t,\ x\ ;\ \eta\ ;\ n)&\equiv(n^{pj}t^{qj})^{-1}a_{jn\mathrm{loc}}(t,\ x\ ;\ \eta)\\ &\equiv\sum_{\alpha k}t^{\sigma(j\alpha k)-qj}n^{s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))-pj}(x^{0\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(0,\ x_\delta^0)\zeta^{0\alpha}\\ &\quad+n^{-s(\rho\alpha-\delta\nu(j\alpha k))}\{(X^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(t,\ X)(i\eta)^\alpha|_{X=\chi_n(x),\Xi=\Xi_n(\eta)}\\ &\quad-(n^{-\delta}x^0)^{\nu(j\alpha k)}a_{j\alpha k}(0,\ x_\delta^0)(n^\rho\zeta^0)^\alpha\}) \end{aligned}$$

satisfont à

$$
(4\text{-}4)\quad
\begin{cases}
a_j^2(t,\ x\ ;\ \eta\ ;\ n) = \sum_{(j\alpha k)\in \mathring{\Gamma}_P} x^{0\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(0,\ x_\delta^0)\zeta^{0\alpha} + o_{r_0, \hat{r}_0, B_1, B_2, n}(1) \\
\hfill ({}^\forall t \in [B_1 n^{-\gamma_1},\ B_2 n^{-\gamma_2}]) \\
|a_{j(\nu)}^{2(\mu)}(t,\ x,\ \eta\ ;\ n)| \leqq {}^\exists C \mu ! \nu !^{s\sim} \hat{\rho}_0^\mu \rho_0^\nu n^{-\rho\mu+\delta\nu} \hfill ({}^\forall \mu,\ {}^\forall \nu) \\
\hfill ({}^\forall t \in [B_1 n^{-\gamma_1},\ B_2 n^{-\gamma_2}]) \\
\hfill ({}^\forall x\ ;\ |x - x^0| \leqq 4r_0,\ {}^\forall \eta\ ;\ |\eta - \eta^0| \leqq 4\hat{r}_0) \\
|a_{j(\nu)}^{2(\mu)}(t,\ x,\ \eta\ ;\ n)| \leqq {}^\exists C \mu !^{s*} \nu !^{s*} \tilde{\rho}_0^\mu \rho_0^\nu n^{-\rho\mu+\delta\nu} \hfill ({}^\forall \mu,\ {}^\forall \nu,\ {}^\forall x,\ {}^\forall \eta) \\
\hfill ({}^\forall t \in [B_1 n^{-\gamma_1},\ B_2 n^{-\gamma_2}])
\end{cases}
$$

où $o_{r_0, \hat{r}_0, B_1, B_2, n}(1)$ est la quantité tendant vers zéro quand on fait tendre r_0, $\hat{r}_0$ et B_2 vers zéro et B_1 et n vers ∞.

Soit H une matrice telle que l'on a

$$
H \begin{pmatrix} & 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & & & \cdot & 0 \quad \cdot & 1 \\ & \mathring{a}_m & & & & \mathring{a}_1 \end{pmatrix} H^{-1}
= \begin{pmatrix} \lambda_1(x^0\ ;\ \zeta^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ \mathring{\lambda}_{ij} & & \lambda_m(x^0\ ;\ \zeta^0) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |\mathring{\lambda}_{ij}| \leqq \frac{\delta_0}{2m}
$$

où $\mathring{a}_j \equiv \sum_{(j\alpha k)\in \mathring{\Gamma}_P} x^{0\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(0,\ x_\delta^0)\zeta^{0\alpha}$

Posons

$$
\begin{cases}
U_n^2(t,\ x) \equiv H\,\mathrm{diag}[1,\ (n^p t^q)^{-1},\ \cdots,\ (n^p t^q)^{-(m-1)}]\,\theta_n(x) U_n^0(t,\ x) \\
\qquad \equiv H\,\mathrm{diag}[1,\ (n^{p-p_1} t^q)^{-1},\ \cdots,\ (n^{p-p_1} t^q)^{-(m-1)}]\,U_n^1(t,\ x).
\end{cases}
$$

Alors, l'influence d'irrégularité en t de la transformation

$$
\mathrm{diag}[1,\ (n^p t^q)^{-1},\ \cdot,\ (n^p t^q)^{-(m-1)}]
$$

étant estimée, pour $t \in [B_1 n^{-\gamma_1},\ B_2 n^{-\gamma_2}]$, par

$$
{}^\exists C n^p t^q (n^{-(p-\gamma_1(q+1))} B_1^{-(q+1)}),
$$

compte tenu de (H-5), en choisissant B_1 convenablement grand, elle peut être minimisée autant qu'on veut.

Choix de r_0, $\hat{r}_0$, B_1 et B_2.

Nous choisissons r_0, $\hat{r}_0$, B_1 et B_2 en sorte que l'on a :

$$
\{x\ ;\ |x - x^0| \leqq 6r_0\} \subset \Omega_0, \quad r_0 \leqq \mathrm{Min}\{\rho_0^{-1},\ 1\}, \quad \hat{r}_0 \leqq \mathrm{Min}\{\hat{\rho}_0^{-1},\ 1\}, \quad B_2 \leqq T_0,
$$

$$
|\lambda_{ij}(t,\ x\ ;\ \eta\ ;\ n)| \leqq \frac{\delta_0}{m} \qquad {}^\forall t \in [B_1 n^{-\gamma_1},\ B_2 n^{-\gamma_3}]\, {}^\forall x,\ {}^\forall \eta,\ {}^\forall n \gg 1.
$$

Alors on le deuxième système :

$$[\mathrm{II}]\quad\left\{\begin{array}{l}
\partial_t \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(D) U_n^2(t, x) = n^p t^q [\mathcal{A}^2(t, x; D; n) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) U_n^2(t, x) + F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t, x)] \\
\mathcal{A}^2(t, x; D; n) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1(x^0; \zeta^0) & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & \cdot \\ & & \lambda_m(x^0; \zeta^0) \end{pmatrix} + (\lambda_{ij}(t; x; D; n)) \\
\text{avec } |\lambda_{ij}(t, x; \eta; n)| \leqq \dfrac{\delta_0}{m} \quad \begin{pmatrix} {}^{\exists}B_1, {}^{\exists}B_2; {}^{\forall}t \in [B_1 n^{-\gamma_1}, B_2 n^{-\gamma_2}] \\ {}^{\forall}x, {}^{\forall}\eta, {}^{\forall}n \gg 1 \end{pmatrix} \\
\qquad |\lambda_{ij}{}_{(\nu)}^{(\mu)}(t, x; \eta; n)| \leqq {}^{\exists}C\mu!^{s*}\nu!^{s*}\hat{\rho}_0^{\mu}\rho_0^{\nu} n^{-\rho\mu+\delta\nu} \\
F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t, x) \equiv H \begin{pmatrix} 0 \\ n^{-p_m}t^{-q_m} f_m^{\mu\nu}(t, x; D), \cdot, n^{-p}t^{-q} f_1^{\mu\nu}(t, x; D) \end{pmatrix} \\
\qquad \times H^{-1} U_n^2(t, x).
\end{array}\right.$$

§ 5. Estimation d'énergie

Nous estimons d'abord

$$|||F^i(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^i)(t, \circ))||| \qquad (i=1, 2).$$

Les éléments de $F^i(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^i)(t, x)$ sont des combinaisons linéaires des $f_j^{i\mu\nu}(t, x; D)U_n^i(t, x)(i=1, 2)$.

Or on a:

$$f_j^{i\mu\nu}(t, x; D) = \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) a_j^i(t, x; iD) - a_{j\mathrm{nloc}}^i(t, x; D) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)$$

où $a_j^1(t, x; iD) = n^{-p_1 j} a_j(t, x; iD)$ et $a_j^2(t, x; iD) = n^{-p_j} t^{-q_j} a_j(t, x; iD)$.

Ces opérateurs sont de la forme:

$$\begin{aligned} f(x; D) &\equiv \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) a(x; D) - a_{\mathrm{nloc}}(x; D) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D) \\ &= \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)(a(x; D) - a_{\mathrm{nloc}}(x; D)) + [\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D), a_{\mathrm{nloc}}(x; D)] \end{aligned}$$

Nous avons besoin de l'expension asymptotique délicate de $f(x; D)$ et donc du commutateur $[\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D), a_{\mathrm{nloc}}(x; D)]$: La voici due à S. Mizohata [17], [18] dont la démonstration est envoyée à l'appendice pour que la démonstration actuelle de la proposition fondamentale ne soit pas dérangée par elle.

Soient $\alpha^{k\sim}(\eta)$ $(k=1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable telles que

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leqq \alpha^{k\sim}(\eta) \leqq 1, \quad \alpha^{k\sim}(\eta) = 1 \quad \text{sur} \quad \left\{\eta; |\eta - \eta_k^0| \leqq \dfrac{3}{2}\hat{r}_0\right\}, \\ \mathrm{Supp}\alpha^{k\sim} \subset \{\eta; |\eta - \eta_k^0| \leqq 2\hat{r}_0\} \end{array}\right.$$

et $\alpha_n^{\sim}(\eta) \equiv \alpha_{n1}^{\sim}(\eta) \cdots \alpha_{nd}^{\sim}(\eta)$; $\alpha_{nk}^{\sim}(\eta) \equiv \alpha^{k\sim}(n^{-\rho_k}\eta_k)$, $(k=1, \cdot, d)$.

Soient $\beta^{k\sim}(x)$ $(k=1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable telles que

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leqq \beta^{k\sim}(x) \leqq 1, \quad \beta^{k\sim}(x) = 1 \quad \text{sur} \quad \left\{x; |x - x_k^0| \leqq \dfrac{3}{2}r_0\right\}, \\ \mathrm{Supp}\beta^{k\sim} \subset \{x; |x - x_k^0| < 2r_0\}, \end{array}\right.$$

et $\beta_n^\sim(x)\equiv\beta_{n1}^\sim(x)\cdots\beta_{nd}^\sim(x)$; $\beta_{nk}^\sim(x)\equiv\beta^{k\sim}(n^{\delta_k}x_k)$, $(k=1,\cdot,d)$.

Proposition 3 (cf. §5 de [17]. *Pour un opérateur pseudo-différentiel $a(x;D)$, on a, pour tous $N\equiv(N_1,\cdot,N_d)$ et $\hat N\equiv(\hat N_1,\cdot,\hat N_d)$,*

$$[\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)},a_{\mathrm{nloc}}](x;D)$$
$$=\sum_{\substack{p\le\hat N-\mu,q\le N-\nu\\ p+q\ne0}}\frac{(-1)^q}{p!q!}a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}(x;D)\nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)}(x;D)+R_{N\hat N}^{\mu\nu}(x;D)$$

où

$$R_{N\hat N}^{\mu\nu}(x;\xi)\equiv\alpha_n^\sim(\xi)\beta_n^\sim(x)\sum_{p\le\hat N-\mu,q\le N-\nu}\frac{(-1)^{q-1}}{p!q!}J_{N-\nu-q}(a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)},\nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(x;\xi)$$
$$+\alpha_n^\sim(\xi)\beta_n^\sim(x)J_{\hat N-\mu}(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)},a_{\mathrm{nloc}})(x;\xi)$$
$$+(1-\alpha_n^\sim(\xi)\beta_n^\sim(x))\sum_{\substack{p\le\hat N-\mu,q\le N-\nu\\ p+q\ne0}}\frac{(-1)^{q-1}}{p!q!}a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}\nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)}(x;\xi)$$
$$+(1-\alpha_n^\sim(\xi)\beta_n^\sim(x))[\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)},a_{\mathrm{nloc}}](x;\xi).$$

Ici

$$J_N(a;b)(x;\xi)\equiv\sum_{\substack{l\le N\\ k=1,\cdot,d}}\frac{1}{l(N;k)!}\int_0^1(1-t)^{N_k}dt$$
$$\times os-\iint e^{-iy\eta}a^{(l(N+1;k))}(x;\xi+\eta)b_{(l(N+1;k))}(x+y(t;k);\xi)dyd\eta$$

où $l(N;k)\equiv(l_1,\cdot,l_{k-1},N_k,0,\cdot,0)$ pour $l\equiv(l_1,\cdot,l_d)$ et $N\equiv(N_1,\cdot,N_d)$ et $y(t;k)\equiv(0,\cdot,0,ty_k,y_{k+1},\cdot,y_d)$ pour $y\equiv(y_1,\cdot,y_d)$ et $t\in[0,1]$.

Définition de $M_n^{\mu\nu}(\kappa)$. Soit, pour $\kappa>1$ donné que nous déterminerons ultérieurement :

$$M_n^{\mu\nu}(\kappa)\equiv\hat N_n^{(s^\sim-1)\mu}(\hat\rho_0(\hat r_0)\kappa)^\nu(\rho_0(r_0)\kappa)^\mu n^{-\rho\nu+\delta\mu}$$

Définition de $C(s^\sim)$. Soit :

$$C(s^\sim)\equiv\begin{cases}\displaystyle\operatorname*{Min}_{j;\,b_{\rho\delta}=(\rho_j-\delta_j)/s_j^\sim}\left(\frac{\hat r}{C_0\hat\rho_0(r_0)_j\kappa e}\right)^{1/s_j^\sim} & \text{au cas où il n'y a pas de } j \text{ tel que } b_{\rho\delta}=\rho_j-\delta_j\\[2ex] \displaystyle\operatorname{Min}\left\{\operatorname*{Min}_{j;\,b_{\rho\delta}=(\rho_j-\delta_j)/s_j^\sim}\left(\frac{\hat r}{C_0\rho_0(r_0)_j\kappa e}\right)^{1/s_j^\sim},\left(\frac{r}{C_0\hat\rho_0(\hat r_0)\kappa e}\right)\right\} & \text{au cas où il } y \text{ a au moins un } j \text{ tel que } b_{\rho\delta}=\rho_j-\delta_j\end{cases}$$

où C_0 est la constante à la proposition 1.

Grâce à la proposition 3, on a la proposition suivante due à S. Mizohata dont la démonstration est aussi envoyée à l'appendice.

Proposition 4 [17], [18]. *Supposons que les coefficients satisfassent :*

$$|\partial_x^\nu a_{j\alpha k}(t,x)|\le{}^\exists C_K\nu!^{s^\sim}\rho_0^\nu\quad{}^\forall\nu,\ {}^\forall(t,x)\in[0,T]\times K,\ {}^\forall j,\ \alpha,\ K\ \text{compact}\subset\Omega_0.$$

Il existe une constante C_2 et un polynôme absolu $P(n)$ tels que l'on a :

$$\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||F^i(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;\,U_n^i)(t,\circ))|||$$
$$\le C_2\kappa^{-1}\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^i(t,\circ)\|$$
$$+{}^{\exists}P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b)\|U_n^i(t,\circ)\| \qquad (i=1,2)\ (b\equiv b_{\rho\delta})$$

Ayant préparé ces propositions, nous estimons $U_n^1(t,x)$ au système [I]:
On a:

$$\partial_t|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^1(t,\circ)|||\le n^{p_1}[C_1|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^1(t,\circ)|||$$
$$+|||F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;\,U_n^1)(t,\circ))|||]$$

Or grâce à (H-1) et la proposition 4, on a:

$$\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;\,U_n^1)(t,\circ)|||$$
$$\le C_2\kappa^{-1}\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^1(t,\circ)|||$$
$$+P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b)|||U_n^1(t,\circ)|||$$

Soit:

$$E^1(U_n^1)(t)\equiv\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^1(t,\circ)|||$$

Alora on a:

$$\partial_t E^1(U_n^1)(t)\le n^{p_1}(C_1+C_2\kappa^{-1})E^1(U_n^1)(t)+{}^{\exists}P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b)|||U_n^1(t,\circ)|||$$

Nous estimons ensuite $U_n^2(t,x)$ du système [II]:
On a, compte tenu de (H-3):

$$\partial_t\Big[\sum_{j=1}^{m_0}\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_{nj}^2(t,\circ)\|-\sum_{j=m_0+1}^{m}\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_{nj}^2(t,\circ)\|\Big]$$
$$\ge n^p t^q\Big(2\delta_0\Big(\sum_{j=1}^{m_0}\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_{nj}^2(t,\circ)\|-\sum_{j=m_0+1}^{m}\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_{nj}^2(t,\circ)\|\Big)$$
$$+\delta_0|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^2(t,\circ)|||-|||F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;\,U_n^2)(t,\circ))|||\Big)$$

Soit:

$$E^2(U_n^2)(t)\equiv\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)\Big[\sum_{j=1}^{m_0}\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_{nj}^2(t,\circ)\|$$
$$-\sum_{j=m_0+1}^{m}\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_{nj}^2(t,\circ)\|\Big].$$

Alors on a, grâce à la propsition 4:

$$\partial_t E^2(U_n^2)(t)\ge n^p t^q[2\delta_0 E^2(U_n^2)(t)$$
$$+(\delta_0-C_2\kappa^{-1})\sum_{\mu\le\hat{N}_n,\nu\le N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ\,;\,D)U_n^2(t,\circ)|||]$$
$$-{}^{\exists}P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b)|||U_n^2(t,\circ)|||.$$

Choix de κ.

Nous choisissons ici κ en sorte que l'on a:

$$\delta_0 - C_2\kappa^{-1} \geqq 0, \qquad 1 \leqq \kappa.$$

Alors par les intégrer on a,

$$\text{(5-1)} \quad \begin{cases} E^1(U_n^1)(B_1 n^{-\gamma_1}) \leqq \exp({}^3C n^{p_1-\gamma_1})[E^1(U_n^1)(0) \\ \qquad + {}^3P(n)\exp(-C(s^\sim)n^b) \sup_{t\in[0,B_1 n^{-\gamma_1}]} |||U_n^1(t, \circ)|||] \\ \text{et tant que } E^2(U_n^2)(B_1 n^{-\gamma_1}) > 0, \\ E^2(U_n^2)(B_2 n^{-\gamma_2}) \geqq \exp\Big(\dfrac{2\delta_0}{q+1}[B_2^{q+1} n^{p-\gamma_2(q+1)} - B_1^{q+1} n^{p-\gamma_1(q+1)}]\Big) \\ \qquad \times (E^2(U_n^2)(B_1 n^{-\gamma_1}) - {}^3P(n)\exp(-C(s^\sim)n^b) \sup_{t\in[B_1 n^{-\gamma_1}, B_2 n^{-\gamma_2}]} |||U_n^2(t, \circ)||| \end{cases}$$

Remarquons que pour la solution $W_n(t, x)$ de l'équation microlocalisée:

$$\partial_t W_n(t, x) = n^{p_1}\mathcal{A}^1(t, x; D: n)W_n(t, x),$$

on a avec unec certaine constante C:

$$\text{(5-2)} \qquad |||W_n(t, \circ)||| \lesseqgtr \exp(\pm C n^{p_1} t)|||W_n(0, \circ)|||.$$

Remarquons encore que l'on a:

$$\text{(5-3)} \qquad E^1(U_n^1)(t) \leqq {}^3P(n)|||U_n^1(t, \circ)|||.$$

En effet on a:

$$\begin{aligned} E^1(U_n^1)(t) \leqq & \sum_{\mu\leq \hat{N}_n, \nu\leq N_n} N_n^{(s^\sim-1)\mu}(\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa)^\nu(\rho_0(r^0)\kappa)^\mu n^{-\rho\nu+\delta\mu} \\ & \times {}^3P(n)(\hat{N}_n\hat{R}_0)^\mu n^{-\rho\mu}(N_n R_0)^\nu n^{\delta\nu}|||U_n^1(t, \circ)||| \\ \leqq {}^3P(n) & \sum_{\mu\leq\hat{N}_n}(N_n^{s^\sim}\hat{R}_0\rho_0(r_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^\mu \sum_{\nu\leq N_n}(N_n R_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^\nu |||U_n^1(t, \circ)||| \\ \leqq {}^3P(n) & \sum_\mu e^{-\mu}\sum_\nu e^{-\nu}|||U_n^1(t, \circ)||| \leqq {}^3P(n)|||U_n^1(t, \circ)|||. \end{aligned}$$

§ 6. Construction de la solution et son estimation majorante

Choix de A, r et $\hat{r}$.

Soient r et $\hat{r}$ des nombres quelconque tels que l'on a:

$$\{x;\ |x - x_0^0| \leqq 2r\} \subset \Omega_0, \quad 0 < 2r < r_0, \quad 0 < 2\hat{r} < \hat{r}_0.$$

Nous choissons A tel que l'on a $A < \mathrm{Min}\Big\{C(s^\sim), \dfrac{\delta_0}{q+1}B_2^{q+1}\Big\}$.

Soient $\hat{\varphi}^k(\xi)(k=1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) telles que

$$\text{(6-1)} \quad \begin{cases} 0 \leqq \hat{\varphi}^k(\eta) \leqq 1, \quad \hat{\varphi}^k(\eta) = 1 \quad \text{sur} \quad \Big\{\eta;\ |\eta - \eta_k^0| \leqq \dfrac{1}{4}\hat{r}\Big\}, \\ \mathrm{Supp}\,\hat{\varphi}^k(\eta) \subset \Big\{\eta;\ |\eta - \eta_k^0| \leqq \dfrac{1}{2}\hat{r}\Big\}, \\ |\hat{\varphi}^{k(\alpha)}(\eta)| \leqq {}^3C\alpha!^{s_k^*}\hat{\rho}_0^\alpha \qquad ({}^\forall\alpha) \end{cases}$$

et $\hat{\varphi}_n(\eta) \equiv \hat{\varphi}_{n1}(\eta)\cdots\hat{\varphi}_{nd}(\eta)$; $\hat{\varphi}_{nk}(\eta) \equiv \hat{\varphi}^k(n^{-\rho_k}\eta_k)$, $(k=1, \cdot, d)$.

Et soit

$$(6\text{-}2)\quad \varphi_n(x)\equiv\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i(x-n^{-\delta}x^0)\eta}\hat{\varphi}_n(\eta)d\eta.$$

Soit $W_n(t, x)$ la solution du problème de Cauchy

$$(6\text{-}3)\quad \begin{cases} \partial_t W_n(t, x)=n^{p_1}\mathcal{A}^1(t, x; D; n)W_n(t, x) \\ W_n(B_1 n^{-\gamma_1}, x)=H^{-1t}(\varphi_n(x), 0, \cdots, 0) \end{cases}$$

Soit

$$W_n^0(x)\equiv\mathrm{diag}[1, n^{p_1}, \cdots, n^{p_1(m-1)}]W_n(0, x)$$

Soient $\gamma^k(\xi)(k=1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable de la classe de Gevrey d'indice (s_k^*) telles que

$$\begin{cases} 0\leqq\gamma^k(\eta)\leqq 1, \quad \gamma^k(\eta)=1 \quad \text{sur} \quad \left\{\eta;\ |\eta-\eta_k^0|\leqq\frac{3}{2}\hat{r}_0\right\}, \\ \mathrm{Supp}\,\gamma^k(\eta)\subset\{\eta;\ |\eta-\eta_k^0|\leqq 2\hat{r}_0\}, \\ |\gamma^{k(\alpha)}(\eta)|\leqq C\alpha!^{s_k^*}\rho_0^\alpha \qquad (^\forall\alpha) \end{cases}$$

et $\gamma_n(\eta)\equiv\gamma_{n1}(\eta)\cdots\gamma_{nd}(\eta);\ \gamma_{nk}(\eta)\equiv\gamma^k(n^{-\rho_k}\eta_k),\ (k=1, \cdot, d)$.

On remarque alors que $\gamma_n(D)W_n^0(x)$ est entière, de $H^{<1>}(\boldsymbol{R}^d)^m$ et telle que l'on a pour tout α:

$$(6\text{-}4)\qquad \|\partial_x^\alpha\gamma_n(D)W_{nj}^0(\circ)\|\leqq{}^\exists C(^\exists cn)^{\rho\alpha}\exp(^\exists Cn^{p_1-\gamma_1}).$$

En effect, $W_n(t, x)$ étant la solution du (6-3) dont la valeur initiale est estimée par

$$|||W_n(B_1 n^{-\gamma_1}, \circ)|||\leqq{}^\exists C\|\varphi_n\|\leqq{}^\exists Cn^{\rho/2},$$

on a, grâce à l'inégalité d'énergie (5-2) pour $W_n(t, x)$,

$$\begin{aligned} |||W_n^0(\circ)||| &\leqq{}^\exists Cn^{p_1(m-1)}|||W_n(0, \circ)||| \\ &\leqq{}^\exists Cn^{p_1(m-1)}\exp(^\exists Cn^{p_1-\gamma_1})|||W_n(B_1 n^{-\gamma_1}, \circ)||| \\ &\leqq{}^\exists Cn^{p_1(m-1)+s(\rho)/2}\exp(^\exists Cn^{p_1-\gamma_1}). \end{aligned}$$

Et on a:

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\alpha\gamma_n(D)W_{nj}^0(\circ)\| &= \|\eta^\alpha\gamma_n(\eta)\hat{W}_{nj}^0(\eta)\| \\ &\leqq{}^\exists C\prod_{k=1}^d((|\eta_k^0|+2\hat{r}_0)n^{\rho_k})^{\alpha_k}|||W_n^0(\circ)|||. \end{aligned}$$

Donc on a finalement:

$$\|\partial_x^\alpha\gamma_n(D)W_{nj}^0(\circ)\|\leqq{}^\exists C(^\exists cn)^{\rho\alpha}\exp(^\exists Cn^{p_1-\gamma_1}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Soit $U_n^0(t, x)$ la solution du problème de Cauchy (PCS):

$$(6\text{-}5)\quad \begin{cases} [\partial_t I-\mathcal{A}(t, x; \partial_x)]U_n^0(t, x)=0 \\ U_n^0(0, x)=\gamma_n(D)W_n^0(x) \end{cases}$$

C'est cette solution-ci qui nous mène à la contradiction.

Nous alons faire son estimation majorante:

Souvenons-nous que l'on a défini $U_n^1(t, x)$, $U_n^2(t, x)$ par

$$\text{(6-6)}\quad \left\{\begin{array}{l} U_n^1(t, x)=\text{diag}[1, n^{-p_1}, \cdot, n^{-p_1(m-1)}]\theta_n(x)U_n^0(t, x) \\ U_n^2(t, x)=H\,\text{diag}[1, (n^{p-p_1}t^q)^{-1}, \cdots, (n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}]U_n^1(t, x) \end{array}\right.$$

où $U_n^0(t, x)$ est la solution du (6-5).

Alors, compte tenu de (6-4), grâce aux hypothèses (H-2) et (H-6), on a:

$$\sum_{j=1}^{m} \sup_{\substack{|n^\delta x-x^0|\leq 2r \\ t\in[0, B_2 n^{-\gamma_2}]}} |U_{nj}^0(t, x)| \leqq {}^{\exists}C(n)\exp({}^{\exists}Cn^{p_1-\gamma_1}+An^a) \qquad {}^{\forall}n\gg 1$$

et par suite

$$\text{(6-7)}\qquad \sup_{t\in[0, B_2 n^{-\gamma_2}]} |||U_n^1(t, \circ)||| \leqq {}^{\exists}C(n)\exp({}^{\exists}Cn^{p_1-\gamma_1}+An^a).$$

Alors, grâce à (5-3) et (6-6), on a l'estimation majorante:

$$\text{(6-8)}\qquad E^2(U_n^2)(B_2 n^{-\gamma_2}) \leqq {}^{\exists}C(n)\exp({}^{\exists}Cn^{p_1-\gamma_1}+An^a) \qquad ({}^{\forall}n\gg 1)$$

§ 7. Estimation minorante de la solution

Nous voulons, au premier lieu, assurer la positivité de l'énergie $E^2(U_n^2)(t)$ à $t=B_1 n^{-\gamma_1}$. Celle-ci étant assurée pour $HW_n(t, x)$, il faut estimer $U_n^1(t, x)-W_n(t, x)$. Commençons par ceci.

On a d'une part

$$\left\{\begin{array}{l} (\partial_t I-n^{p_1}\mathcal{A}^1(t, x; D; n))\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)U_n^1(t, x)=n^{p_1}F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, x) \\ U_n^1(0, x)=\theta_n(x)\gamma_n(D)W_n(0, x) \end{array}\right.$$

et d'autre part

$$(\partial_t I-n^{p_1}\mathcal{A}^1(t, x; D; n))\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)W_n(t, x)$$
$$=n^{p_1}G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, x)$$

où $G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, x)\equiv[\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D), \mathcal{A}^1(t, x; D; n)]W_n(t, x)$. Donc

$$(\partial_t-n^{p_1}\mathcal{A}_1(t, x; D; n))\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)(U_n^1(t, x)-W_n(t, x))$$
$$=n^{p_1}[F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, x)-G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, x)].$$

Pareillement à la proposition 4 on a:

Proposition 5. *Il existe des constantes C_0 (celle de la proposition 1) et C_3 et un polynôme absolu $P(n)$ tels que l'on a:*

$$\sum_{\mu\leq\hat{N}_n, \nu\leq N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, \circ))-G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, \circ)|||$$
$$\leqq C_3\kappa^{-1}\sum_{\mu\leq\hat{N}_n, \nu\leq N_n} M_n^{\mu\nu}(\kappa)\|\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D)(U_n^1(t, \circ)-W_n(t, \circ))|||$$
$$+{}^{\exists}P(n)[\exp(-C(s^{\sim})n^b)(\|U_n(t, \circ)\|+\|W_n(t, \circ)\|)$$

Ainsi pareillement à (5-1) on a:

$$E^1(U_n^1-W_n)(B_1n^{-\gamma_1})\leqq\exp({}^3Cn^{p_1-\gamma_1})[E^1(U_n^1-W_n)(0)$$
$$+{}^3P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b)[\sup_{t\in[0,B_1n^{-\gamma_1}]}|||U_n^1(t,\circ)|||+\sup_{t\in[0,B_1n^{-\gamma_1}]}|||W_n(t,\circ)|||].$$

Compte tenu de (5-2), (6-3), (6-7) et (H-7), on a:

$$E^1(U_n^1-W_n)(B_1n^{-\gamma_1})\leqq\exp({}^3Cn^{p_1-\gamma_1})[E^1(U_n^1-W_n)(0)$$
$$+{}^3P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b+An^a+{}^3cn^{p_1-\gamma_1})]$$

Grâce au choix de A et à l'hypothèse (H-4), on a:

$$E^1(U_n^1-W_n)(B_1n^{-\gamma_1})\leqq\exp({}^3Cn^{p_1-\gamma_1})[E^1(U_n^1-W_n)(0)$$
$$+{}^3P(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b)]$$

Or on a:

$$E^1(U_n^1-W_n)(0)=\sum_{\mu\leq\hat{N}_n,\nu\leq N_n}M_n^{\mu\nu}(\kappa)|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ;D)(\theta_n(\circ)\gamma_n(D)-1)W_n(0,\circ)|||.$$

Remarquons que l'on a:

$$\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x:D)(\theta_n(x)\gamma_n(D)-1)=\alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\nu)}(x)(\gamma_n(D)-1),$$

On a la proposition suivante dont la démonstration est envoyée à l'appendice.

Proposition 6. *Il existe une constante c est un polynôme $P(n)$ tels que*

$$\sum_{\mu\leq\hat{N}_n,\nu\leq N_n}M_n^{\mu\nu}(\kappa)\|\alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\nu)}(\circ)(\gamma_n(D)-1)\|$$
$$\leqq{}^3P(n)\exp(-{}^3cn^b)$$

Grâce à cette proposition 6, on a:

$$E^1(U_n^1-W_n)(0)\leqq{}^3P(n)\exp(-{}^3cn^b)$$

Et on a, compte tenus de (H-7):

$$E^2(U_n^2-W_n^{\sim})(B_1n^{-\gamma_1})\leqq{}^3C\,E^1(U_n^1-W_n)(B_1n^{-\gamma_1})\leqq{}^3P(n)\exp(-{}^3cn^b)$$

où $W_n^{\sim}(t,x)=H\,\mathrm{diag}[1,(n^{p-p_1}t^q)^{-1},\cdots,(n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}]W_n(t,x)$. D'autre part on a, pour tout N:

$$E^2(W_n^{\sim})(B_1n^{-\gamma_1})\geqq\|\nabla_n(\circ,D)\varphi_n(\circ)\|\equiv\|\alpha_n(D)\beta_n(\circ)\varphi_n(\circ)\|$$
$$\geqq\|\beta_n(\circ)\alpha_n(D)\varphi_n(\circ)\|-\|J_N(\alpha_n,\beta_n)(\circ;D)\varphi_n(\circ)\|$$

Or on a la proposition dont la démonstration est aussi envoyée à l'appendice:

Proposition 7. *Par choisir $N\equiv N_n^*$ convenablement, on a avec une constante c et un polynôme absolu $P(n)$:*

$$\|J_{N_n^*}(\alpha_n,\beta_n)\|\leqq{}^3P(n)\exp(-{}^3cn^{b*})$$

où $b^*=\operatorname*{Min}_j\dfrac{\rho_j-\delta_j}{s_j^*}$.

Grâce à cette proposition 7, on a:

$$E^2(W_n^{\sim})(B_1 n^{-\gamma_1}) \geqq \|\beta_n \varphi_n\| - {}^3C \exp(-{}^3 c n^{b^*})\|\varphi_n\|.$$

Or ayant:

$$|\varphi_n(n^{-\delta}x^0)| = \frac{1}{(2\pi)^d}\left|\int \hat{\varphi}_n(\eta)d\eta\right| \geqq {}^3Cn^{\rho}$$

et $|\partial_x^\alpha \varphi_n(x)| = \dfrac{1}{(2\pi)^d}\left|\int e^{i(x-n^{-\delta}x^0)\eta}(i\eta)^\alpha \hat{\varphi}_n(\eta)d\eta\right| \leqq {}^3Cn^{2\rho} \quad ({}_s(\alpha)=1)$

on a, avec un ${}^3C>0$ suffisamment petit:

$$|\varphi_n(x)| \geqq {}^3Cn^{\rho} \qquad ({}^\forall x\,;\ |x-n^{-\delta}x^0| \leqq {}^3Cn^{-\rho}).$$

On a par conséquent:

$$\|\beta_n \varphi_n\| \geqq \left(\int_{|x-n^{-\delta}x^0| \leqq {}^3Cn^{-\rho}} |\varphi_n(x)|^2 dx\right)^{1/2} \geqq {}^3Cn^{\rho/2}.$$

Ainsi on a:

$$E^2(W_n^{\sim})(B_1 n^{-\gamma_1}) \geqq {}^3Cn^{\rho/2}$$

et donc

(7-1) $\quad E^2(U_n^2)(B_1 n^{-\gamma_1}) \geqq {}^3Cn^{\rho/2} - {}^3C(n)\exp(-{}^3Cn^b) \geqq {}^3Cn^{\rho/2} > 0 \qquad ({}^\forall n \gg 1).$

Grâce à l'estimation d'énergie (5-1), on a:

$$E^2(U_n^2)(B_2 n^{-\gamma_2}) \geqq \exp\left(\frac{2\delta_0}{q+1}B_2^{q+1}n^{p-\gamma_2(q+1)} - \frac{2\delta_0}{q+1}B_1^{q+1}n^{p-\gamma_1(q+1)}\right)$$
$$\times[E^2(U_n^2)(B_1 n^{-\gamma_1}) - {}^3C(n)\exp(-C(s^{\sim})n^b) \sup_{t\in[B_1 n^{-\gamma_1}, B_2 n^{-\gamma_2}]} |||U_n^2(t, \circ)|||].$$

Et grâce aux (6-6) et (6-7), on a:

$$|||U_n^2(t, \circ)||| \leqq {}^3C(n)\exp({}^3Cn^{p_1-\gamma_1} + An^\alpha).$$

Donc grâce à (7-1), compte tenu des hypothèses (H-2), (H-4), (H-7) et le choix de A, on a finalement:

(7-2) $$E^2(U_n^2)(B_2 n^{-\gamma_2}) \geqq {}^3C(n)\exp\left(\frac{\delta_0}{q+1}B_2^{q+1}n^{p-\gamma_2(q+1)}\right).$$

Cette estimation-ci est, grâce à (H-6), (H-8) et le choix de A, contradictoire à (6-8) et la proposition fondamentale est démontrée. C. Q. F. D.

§ 8. Démonstrations du théorème 1

Nous supposons que le (PC) soit (s)-soluble. Fixons un $R \equiv (R_1, \cdots, R_d)$ arbitrairement choisi une fois.

Soit

$$\mathfrak{N} \equiv \{u(t, x)\,;\ u(t, x) \in C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))\,;\ L(t, x\,;\ \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0,$$
$$\partial_t^{j-1}u(0, x) = 0 \qquad j = 1, \cdot, m\}$$

$\mathfrak{N}$ étant un sous-espace fermé d'un espace de Frechet $C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))$, l'espace quotient $C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))/\mathfrak{N}$ est aussi un espace de Frechet. Or d-après l'hypothèse que le (PC) soit (s)-soluble, pour toutes les données $\varphi_j(x)\in H_R^{(s)}(\boldsymbol{R}^d)$, il existe un et un seulement élément de $C^m([0, T], C^\infty(\Omega_0))/\mathfrak{N}$ dont l'image est la solution du (PC). Et grâce au théorème du graphe fermé de Banach, l'application qui donne aux données initiales de $H_R^{(s)}(\boldsymbol{R}^d)^m$ un et un seule élément de $C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))/\mathfrak{N}$ est continue de $H_R^{(s)}(\boldsymbol{R}^d)^m$ à $C^m([0, T_0], C^\infty(\Omega_0))/\mathfrak{N}$. D'où on a la proposition suivante.

Proposition 8. [12] *Soit* $s\equiv(s', s'')\equiv(s_1, \cdots, s_l, \infty, \cdots, \infty)$; $s_j<\infty$, $j=1, \cdots, l$.

Supposons que le (PC) *soit* (s)*-soluble. Alors, pour tous* $R>0$, N *et compact* $K\subset\Omega_0$ *donnés, il existe des constantes* C *et* M *telles que pour toutes les données* $\{\varphi_j(x);\ \varphi_j(x)\in H_R^{(s)}(\boldsymbol{R}^d)j=1, \cdot, m\}$ *telles que*

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{s(\alpha'')\leq M,\alpha'} \|\partial_x^\alpha\varphi_j\|/\alpha'!^{s'}R'^{\alpha'}\neq 0,$$

il existe une solution $u(t, x)$ *du* (PC) *ayant l'estimation suivante*:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname*{Sup}_{\substack{s(\alpha)\leq N\\ X\in K}} |\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, x)|\leq C\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{s(\alpha'')\leq M,\alpha'} \|\partial_x^\alpha\varphi_j\|/\alpha'!^{s'}R'^{\alpha'}$$

Par l'application de cette proposition 8, on a l'estimation pour la solution du (PCS):

Pour tous $R>0$, N et compact $K\subset\Omega_0$ donnés, il existe des constantes C et M telles que pour toutes les données $\{\Phi_{nj}(x);\ \Phi_{nj}(x)\in H^{(s)}(\boldsymbol{R}^d)j=1, \cdot, m\}$ telles que

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{s(\alpha'')\leq M,\alpha'} \|\partial_x^\alpha\Phi_{nj}\|/\alpha'!^{s'}R'^{\alpha'}\neq 0,$$

il existe une solution $U_n^0(t, x)$ du (PCS) ayant l'estimation:

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{\substack{s(\alpha)\leq N\\ x\in K}} |\partial_x^\alpha U_{nj}^0(t, x)|\leq C\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{s(\alpha'')\leq M,\alpha'} \|\partial_x^\alpha\Phi_{nj}\|/\alpha'!^{s'}R'^{\alpha'}$$

Or pour les données telles que l'on a:

$$\|\partial_x^\alpha\Phi_{nj}\|\leqq {}^\exists C_{\alpha''}\Theta_\Phi(n)(cn)^{\rho'\alpha'}$$

avec une constante $C_{\alpha''}$ dépendante de α'' et une fonction $\Theta_\Phi(n)$ en n, le deuxiéme membre de cette inégalité-ci estimée par

$${}^\exists P(n)\Theta_\Phi(n)\exp\left(es'\left(\frac{c^{\rho'}}{R}\right)^{1/s'}n^{\rho'/s'}\right)\leqq {}^\exists P(n)\Theta_\Phi(n)\exp(An^a)$$

avec un polynôme $P(n)$ en n et $A=\mathrm{Max}\{es_j(c_j^{\rho_j}/R_j)^{1/s_j};\ j=1, \cdots, l\}$. Ainsi, R pouvant être choisi arbitraire, (H-2) de la proposition foundamentale est satisfaite et l'application de la proposition fondamentale donne le théorème 1. C. Q. F. D.

§ 9. Appendice

[1] Preuve de la proposition 3. Nous commençons par remarquer quelques formules d'expension asymptotique.

L'on a une expension de Taylor d'une fonction f:

$$f(x+y)=\sum_{\mu\leq N}\frac{1}{\mu!}\partial_x^\mu f(x)y^\mu$$
$$+\sum_{k=1}^{d}\sum_{l\leq N}\frac{1}{l(N;\ k)!}\int_0^1(1-t)^{N_k}\partial_x^{l(N+1;\ k)}f(x+y(t,\ k))y^{l(N+1;\ k)}dt$$

Par son application à $b(x+y\,;\,\xi)$ à la formule de symbole du produit $a(x\,;\,D)b(x\,;\,D)$:

$$os-\iint e^{-iy\eta}a(x\,;\,\xi+\eta)b(x+y\,;\,\xi)dyd\eta\,,$$

on a:

L'expension en produits des symboles.

(1) $$a(x\,;\,D)b(x\,;\,D)=\sum_{\mu\leq N}\frac{1}{\mu!}a^{(\mu)}\circ b_{(\mu)}(x\,;\,D)+J_N(a,\ b)(x\,;\,D)$$

où $$J_N(a,\ b)(x\,;\,\xi)\equiv\sum_{\substack{l\leq N\\ k=1,..,d}}\frac{1}{l(N;\ k)!}\int_0^1(1-t)^{N_k}dt$$
$$\times os-\iint e^{-iy\eta}a^{(l(N+1;\ k))}(x\,;\,\xi+\eta)b_{(l(N+1;\ k))}(x+y(t\,;\ k);\,\xi)dyd\eta$$

et $a\circ b(x\,;\,\xi)\equiv a(x:\,\xi)b(x\,;\,\xi)$.

Et d'après cette expension (1), on a:

$$a^{(\mu)}(x\,;\,D)b_{(\mu)}(x\,;\,D)=\sum_{\nu\leq N-\mu}\frac{1}{\nu!}a^{(\mu+\nu)}\circ b_{(\mu+\nu)}(x\,;\,D)$$
$$+J_{N-\mu}(a^{(\mu)},\ b_{(\mu)})(x\,;\,D)$$

Donc on a:

L'expension en produits des opérateurs.

(2) $$a\circ b(x\,;\,D)=\sum_{\mu\leq N}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}a^{(\mu)}(x\,;\,D)b_{(\mu)}(x\,;\,D)$$
$$+\sum_{\mu\leq N}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu!}J_{N-\mu}(a^{(\mu)},\ b_{(\mu)})(x\,;\,\xi)$$

Et d'après (1) on a

$$a(x\,;\,D)b(x\,;\,D)=\sum_{\mu\leq\hat{N}}\frac{1}{\mu!}a^{(\mu)}\circ b_{(\mu)}(x\,;\,D)+J_{\hat{N}}(a,\ b)(x\,;\,D)$$

Grâce à (2) on a, compte tenu de $a^{(\mu)}\circ b_{(\mu)}=b_{(\mu)}\circ a^{(\mu)}$:

$$a^{(\mu)}\circ b_{(\mu)}(x\,;\,D)=\sum_{\nu\leq N}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}b_{(\mu)}^{(\nu)}(x\,;\,D)a_{(\nu)}^{(\mu)}(x\,;\,D)$$
$$+\sum_{\nu\leq N}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}J_{N-\nu}(b_{(\mu)}^{(\nu)},\ a_{(\nu)}^{(\mu)})$$

Donc on a:

L'expension du commutateur en produits des opérateurs.

$$[a(x\,;\,D),\,b(x\,;\,D)]=\sum_{\substack{\mu\leq\hat{N},\nu\leq N\\ \mu+\nu\neq 0}}\frac{(-1)^{\nu}}{\mu!\nu!}b^{(\nu)}_{(\mu)}(x\,;\,D)a^{(\mu)}_{(\nu)}(x\,;\,D)$$

$$+\sum_{\mu\leq\hat{N},\nu\leq N}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\mu!\nu!}J_{N-\nu}(b^{(\nu)}_{(\mu)},\,a^{(\mu)}_{(\nu)})(x\,;\,D)+J_{\hat{N}}(a,\,b)(x\,;\,D)$$

Ayant ainsi préparé les formules de l'expension asymptotique, démontrons la proposition 3.

On a pour un opérateur pseudo-différentiel $a(x\,;\,D)$,

$$\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)$$

$$=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{\gamma\leq N-\nu-q}\frac{1}{\gamma!}a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}{}^{(\gamma)}\circ\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q+\gamma)}(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)$$

$$=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)(\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{\gamma\leq N-\nu-q}\frac{1}{\gamma!}a_{\mathrm{nloc}}{}^{(q+\gamma)}_{(p)}\circ\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q+\gamma)}(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)$$

Donc

$$\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu,q\leq N-\nu}\frac{(-1)^{q}}{p!q!}a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)$$

$$=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu}\frac{1}{p!}\sum_{\delta\leq N-\nu}\frac{1}{\delta!}\sum_{q+\gamma=\delta}\frac{\delta!}{q!\gamma!}(-1)^{q}a_{\mathrm{nloc}}{}^{(\delta)}_{(p)}\circ\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+\delta)}(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu,q\leq N-\nu}\frac{(-)^{q}}{p!q!}J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)$$

$$=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu}\frac{1}{p!}\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu)}\circ a_{\mathrm{nloc}(p)}(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu,q\leq N-\nu}\frac{(-1)^{q}}{p!q!}J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)$$

$$=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,\xi)-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)J_{\hat{N}-\mu}(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}\,;\,a_{\mathrm{nloc}})(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu,q\leq N-\nu}\frac{(-1)^{q}}{p!q!}J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)$$

Donc on a:

$$[\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)},\,a_{\mathrm{nloc}}](x\,;\,\xi)=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)[\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)},\,a_{\mathrm{nloc}}](x\,;\,\xi)$$

$$+(1-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x))[\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)},\,a_{\mathrm{nloc}}](x\,;\,\xi)$$

$$=\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{\substack{p\leq\hat{N}-\mu,q\leq N-\nu\\ p+q\neq 0}}\frac{(-1)^{q}}{p!q!}a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)\sum_{p\leq\hat{N}-\mu,q\leq N-\nu}\frac{(-1)^{q-1}}{p!q!}J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)J_{\hat{N}-\mu}(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}\,;\,a_{\mathrm{nloc}})(x\,;\,\xi)$$

$$+(1-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x))[\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)},\,a_{\mathrm{nloc}}](x\,;\,\xi)$$

$$= \sum_{\substack{p\le \hat{N}-\mu, q\le N-\nu \\ p+q\neq 0}} \frac{(-1)^q}{p!q!} a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}} \nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_n(\xi)\beta^{\sim}_n(x) \sum_{p\le \hat{N}-\mu, q\le N-\nu} \frac{(-1)^{q-1}}{p!q!} J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)$$

$$+\alpha^{\sim}_n(\xi)\beta^{\sim}_n(x) J_{\hat{N}-\mu}(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}\,;\,a_{\mathrm{nloc}})(x\,;\,\xi)$$

$$+(1-\alpha^{\sim}_n(\xi)\beta^{\sim}_n(x)) \sum_{\substack{p\le \hat{N}-\mu, q\le N-\nu \\ p+q\neq 0}} \frac{(-1)^{q-1}}{p!q!} a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}} \nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)$$

$$+(1-\alpha^{\sim}_n(\xi)\beta^{\sim}_n(x))[\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}, a_{\mathrm{nloc}}](x\,;\,\xi)$$

C. Q. F. D.

[2] **Preuve de la proposition 4.** Nous notons par $a(x\,;\,D)$ un des opérateurs: $a^1_j(t, x\,;\,D)\equiv n^{-p_1 j} a_j(t, x\,;\,iD)$ dans $[0, B_1 n^{-\gamma_1}]$ ou $a^2_j(t, x\,;\,D)\equiv n^{-p j} t^{-q j} a_j(t, x\,;\,iD)$ dans $[B_1 n^{-\gamma_1}, B_2 n^{-\gamma_2}]$.

Lemme 1. *On a*

$$\sum_{\mu\le \hat{N}_n, \nu\le N_n} M^{\mu\nu}_n \Big\| \sum_{\substack{p\le \hat{N}_n-\mu, q\le N_n-\nu \\ p+q\neq 0}} \frac{(-1)^q}{p!q!} a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}(\circ\,;\,D)\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(\circ\,;\,D)U(\circ)\Big\|$$

$$\leqq {}^3C\kappa^{-1} \sum_{\mu\le \hat{N}_n, \nu\le N_n} M^{\mu\nu}_n \|\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ\,;\,D)U(\circ)\|$$

Preuve.

$$\sum_{\mu\le \hat{N}_n, \nu\le N_n} M^{\mu\nu}_n \Big\| \sum_{\substack{p\le \hat{N}_n-\mu, q\le N_n-\nu \\ p+q\neq 0}} \frac{(-1)^q}{p!q!} a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}(\circ\,;\,D)\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(\circ\,;\,D)U(\circ)\Big\|$$

$$\leqq {}^3C \sum_{\mu\le \hat{N}_n, \nu\le N_n} M^{\mu\nu}_n \sum_{\substack{p\le \hat{N}_n-\mu, q\le N_n-\nu \\ p+q\neq 0}} N_n^{(s^{\sim}-1)} \rho_0^p \rho_0^q n^{\delta p-\rho q} \|\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(\circ\,;\,D)U(\circ)\|$$

$$\leqq {}^3C\kappa^{-1} \sum_{\mu\le \hat{N}_n, \nu\le N_n} M^{\mu\nu}_n \|\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ\,;\,D)U(\circ)\|$$

C. Q. F. D.

Lemme 2. *On a*

$$\sum_{\mu\le \hat{N}_n, \nu\le N_n} M^{\mu\nu}_n \Big\| \alpha^{\sim}_n(\xi)\beta^{\sim}_n(x) \sum_{p\le \hat{N}_n-\mu, q\le N_n-\nu} \frac{(-1)^q}{p!q!}$$

$$\times J_{N-\nu-q}(a^{(q)}_{(p)\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)})(x\,;\,\xi)|_{\xi=D}\Big\|$$

$$\leqq {}^3P(n)\sum_{j=1}^{d} \mathrm{exd}(-N_{n_j})$$

Preuve. Soient $\alpha^{k*}(\eta)(k=1, \cdot, d)$ des fonctions d'une variable telles que

$$0\leqq \alpha^{k*}(\eta)\leqq 1, \quad \alpha^{k*}(\eta)=1 \text{ sur } \{\eta\,;\,|\eta|\leqq \hat{r}_0\}, \quad \mathrm{Supp}\,\alpha^{k*}\subset\{\eta\,;\,|\eta|\leqq 2\hat{r}_0\},$$

et $\alpha^*_n(\eta)\equiv\alpha^*_{n1}(\eta)\cdots\alpha^*_{nd}(\eta)$; $\alpha^*_{nk}(\eta)\equiv\alpha^{k*}(n^{-\rho_k}\eta_k)$, $(k=1, \cdot, d)$.

Remarquons que l'on a

$$os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha^*_n(\eta))a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,\xi+\eta)\nabla_n(x+y : \xi)dyd\eta$$

$$=\sum_{l\leq N}\frac{1}{l!}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_n^*(\eta))a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l)}(x\,;\,\xi)\nabla_{n(l)}(x+y:\xi)dyd\eta$$

$$+\sum_{\substack{l\leq N\\ j=1,..,d}}\frac{1}{l(N;\,j)}\int_0^1(1-t)^{N_j}dt\;os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_n^*(\eta))$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l(N+1;\,j))}(x\,;\,\xi+\eta(t\,;\,j))\nabla_{n(l(N+1:\,j))}(x+y\,;\,\xi)dyd\eta$$

On a donc

$$J_N(a_{\mathrm{nloc}}\,;\,\nabla_n)(x\,;\,\xi)=\sum_{\substack{j=1,..,d\\ l\leq N}}\frac{1}{l(N;\,j)!}\int_0^1(1-t)^{N_j}dt\;os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^*(\eta)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l(N+1;\,j))}(x\,;\,\xi+\eta(t\,;\,j))\nabla_{n(l(N+1:\,j))}(x+y\,;\,\xi)dyd\eta$$

$$+os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_n^*(\eta))a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,\xi+\eta)\nabla_n(x+y:\xi)d\eta d\eta$$

$$-\sum_{l\leq N}\frac{1}{l!}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_n^*(\eta))a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l)}(x\,;\,\xi)\nabla_{n(l)}(x+y:\xi)dyd\eta$$

$$=\sum_{\substack{l\leq N\\ j=1,..,d}}\frac{1}{l(N;\,j)!}\int_0^1(1-t)^{N_j}dt\;os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^*(y)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l(N+1;\,j))}(x\,;\,\xi+\eta(t\,;\,j))\nabla_{n(l(N+1:\,j))}(x+y\,;\,\xi)dyd\eta$$

$$+\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_{nj}^*(\eta))^{\exists}\hat{\alpha}_n^j(\eta')a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,\xi+\eta)\nabla_n(x+y:\xi)dyd\eta$$

$$-\sum_{l\leq N}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_{nj}^*(\eta))\hat{\alpha}_n^j(\eta')a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l)}(x\,;\,\xi)\nabla_{n(l)}(x+y:\xi)dyd\eta$$

$$=\sum_{\substack{l\leq N\\ j=1,..,d}}\frac{1}{l(N;\,j)!}\int_0^1(1-t)^{N_j}dt\;os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^*(\eta)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l(N+1;\,j))}(x\,;\,\xi+\eta(t\,;\,j))\nabla_{n(l(N+1:\,j))}(x+y\,;\,\xi)dyd\eta$$

$$+\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_{nj}^*(\eta_j))^{\exists}\hat{\alpha}_n^j(\eta')\eta_j^{-N_j}a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,\xi+\eta)\nabla_{n(N^j)}(x+y:\xi)dyd\eta$$

$$-\sum_{l\leq N}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_{nj}^*(\eta_j))\hat{\alpha}_n^j(\eta')\eta_j^{-(N-l)_j}a_{\mathrm{nloc}}{}^{(l)}(x\,;\,\xi)$$

$$\times\nabla_{n(l+(N-l)^j)}(x+y:\xi)dyd\eta$$

où $N^j\equiv(0,\cdot,0,N_j,0,\cdot,0)$ et $N\equiv N^j+N'$ etc.

Donc on a:

$$\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{N-\nu-q}(a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\,\nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(x,\,\xi)$$

$$=\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)\sum_{\substack{l\leq N-\nu-q\\ j=1,..,d}}\frac{1}{l(N-\nu-q\,;\,j)!}\int_0^1(1-t)^{(N-\nu-q)^j}dt$$

$$\times os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^*(\eta)a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}{}^{(l(N-\nu-q+1;\,j))}(x\,;\,\xi+\eta(t\,;\,j))$$

$$\times\nabla_{n(\nu+q+l(N-\nu-q+1:\,j))}^{(\mu+p)}(x+y\,;\,\xi)dyd\eta$$

$$+\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha_{nj}^{*}(\eta))^{3}\mathring{\alpha}_n^{j}(\eta')\eta_j^{-(N-\nu-q)j}$$
$$\times a_{(p)\,\mathrm{nloc}}^{(q)}(x\,;\ \xi+\eta)\nabla_{n(\nu+q+(N-\nu-q)^{j})}^{(\mu+p)}(x+y:\ \xi)d\,yd\!\!\bar{}\,\eta$$
$$-\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)\sum_{l\leq N-\nu-q}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\mathring{\alpha}_{nj}^{*}(\eta))\mathring{\alpha}_n^{j}(\eta')$$
$$\times\eta_j^{-(N-\nu-q-l)j}a_{(p)\,\mathrm{nloc}}^{(q)}{}^{(l)}(x\,;\ \xi)\nabla_{n(\nu+q+l+(N-\nu-q-l)^{j})}^{(\mu+p)}(x+y:\ \xi)d\,yd\!\!\bar{}\,\eta$$

Remarquons que l'on peut bien supposer:

$$|\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)\alpha_n^{*}(\eta)a_{(p)\,\mathrm{nloc}}^{(q)}{}^{(l)}|\leqq{}^{\exists}C(n)(q+l)!p!^{s\sim}\hat{\rho}_0^{q+l}\rho_0^{p}n^{-\rho(q+l)+\delta p}$$

Par l'estimation on a:

$$M_n^{\mu\nu}\left|\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{N-\nu-q}(a_{(p)\,\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\ \nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(x,\ \xi)\right|$$
$$\leqq{}^{\exists}CM_n^{\mu\nu}\sum_{\substack{l\leq N-\nu-q\\ j=1,\dots,d}}p!^{s\sim-1}(2\hat{\rho}_0)^{(q+l(N-\nu-q+1;\,j))}\rho_0^{p}n^{\rho\nu-\delta\mu}$$
$$\times(N_nR_0)^{\nu+q+l(N-\nu-q+1;\,j)}(\hat{N}_n\hat{R}_0)^{\mu+p}n^{-(\rho-\delta)(\mu+p+\nu+q+l(N-\nu-q+1;\,j)}$$
$$+{}^{\exists}CM_n^{\mu\nu}\sum_{j=1}^{d}p!^{s\sim-1}\rho_0^{p}\hat{\rho}_0^{q}\hat{r}_0^{-(N-\nu-q)j}(\hat{N}_n\hat{R}_0)^{p+\mu}(N_n\boldsymbol{R}_0)^{\nu+q+(N-\nu-q)j}$$
$$\times n^{-(\rho-\delta)(\mu+p+\nu+q+(N-\nu-q)^{j})}n^{\rho\nu-\delta\mu}$$
$$+{}^{\exists}CM_n^{\mu\nu}\sum_{\substack{l\leq N-\nu-q\\ j=1,\dots,d}}p!^{s\sim-1}\rho_0^{p}\hat{\rho}_0^{q+l}\hat{r}_0^{-(N-\nu-q-l)j}(\hat{N}_n\hat{R}_0)^{\mu+p}$$
$$\times(N_nR_0)^{\nu+q+l+(N-\nu-q-l)^{j}}n^{-(\rho-\delta)(\mu+p+\nu+q+(N-\nu-q-l)^{j}}n^{\rho\nu-\delta\mu}$$

Compte tenu du fait: $\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\hat{r}_0\geqq 1$ et $1\leqq\kappa$, on a

$$M_n^{\mu\nu}\left|\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{N-\nu-q}(a_{(p)\,\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\ \nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(x,\ \xi)\right|$$
$$\leqq{}^{\exists}P(n)(\hat{N}_n^{s\sim}\hat{R}_0\rho_0(r_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\mu+p}$$
$$\times\Big(\sum_{\substack{l\leq N-\nu-q\\ j=1,\dots,d}}(N_nR_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\nu+q+l(N-\nu-q;\,j)}$$
$$+\sum_{j=1}^{d}(N_nR_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\nu+q+(N-\nu-q)^{j}}$$
$$+\sum_{\substack{l\leq N-\nu-q\\ j=1,\dots,d}}(N_nR_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\nu+q+l+(N-\nu-q-l)^{j}}\Big)$$

Compte tenu du choix de N_n, on a

$$M_n^{\mu\nu}\left|\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{N-\nu-q}(a_{(p)\,\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\ \nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(x,\ \xi)\right|$$
$$\leqq{}^{\exists}P(n)e^{-(\mu+p)}\sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{l\leq N-\nu-q}e^{-(\nu+q+l(N-\nu-q;\,j))}$$
$$+e^{-(\nu+q+(N-\nu-q)^{j})}+\sum_{l\leq N-\nu-q}e^{-(\nu+q+l+(N-\nu-q-l)^{j})}\Big)$$

On a la même estimation pour

$$M_n^{\mu\nu}\left|\left(\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{N-\nu-q}(a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\ \nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)}{}')(x,\ \xi)\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right|$$

pour tous $\alpha,\ \beta$; $_s(\alpha),\ _s(\beta)\leqq 2\left[\frac{d}{2}+1\right]$. Donc on a:

$$M_n^{\mu\nu}\left\|\frac{1}{p!q!}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(\circ)J_{N-\nu-q}(a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\ \nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(\circ,\ \xi)|_{\xi=D}\right\|$$

$$\leqq{}^3P(n)e^{-(\mu+p)}\sum_{j=1}^{d}\Big(\sum_{l\leq N-\nu-q}e^{-(\nu+q+l(N-\nu-q;\,j))}$$

$$+e^{-(\nu+q+(N-\nu-q)^j)}+\sum_{l\leq N-\nu-q}e^{-(\nu+q+l+(N-\nu-q-l)^j)}\Big)$$

Et par conséquent on a:

$$\sum_{\mu\leq\hat{N}_n,\nu\leq N_n}M_n^{\mu\nu}\Big\|\sum_{p\leq\hat{N}_n-\mu,q\leq N_n-\nu}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(\circ)\frac{(-1)^q}{p!q!}$$

$$\times J_{N_n-\nu-q}(a_{(p)\mathrm{nloc}}^{(q)}\,;\ \nabla_{n(\nu+q)}^{(\mu+p)})(\circ,\ \xi)|_{\xi=D}\Big\|$$

$$\leqq{}^3P(n)\sum_{\substack{\mu+p\leq\hat{N}_n,\nu+q\leq N_n\\ j=1,\cdot,d}}e^{-(\mu+p)}\Big(\sum_{l\leq N_n-\nu-q}e^{-(\nu+q+l(N_n-\nu-q;\,j))}$$

$$e^{-(\nu+q+(N_n-\nu-q)^j)}+\sum_{l\leq N_n-\nu-q}e^{-(\nu+q+l+(N_n-\nu-q-l)^j)}\Big)$$

$$\leqq{}^3P(n)\sum_{j=1}^{d}\exp(-N_{n_j})$$

C.Q.F.D.

Lemme 3. *On a*

$$\sum_{\mu\leq\hat{N}_n,\nu\leq N_n}M_n^{\mu\nu}\|\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{N-\mu}(\nabla_{n(\mu)}^{(\nu)}\,;\ a_{\mathrm{nloc}})(x\,;\ \xi)|_{\xi=D}\|$$

$$\leqq{}^3P(n)\sum_{j=1}^{d}\exp(-N_{n_j})$$

Preuve. Soient $\beta^{k*}(y)(k=1,\ \cdot,\ d)$ des fonctions d'une variable telles que

$$0\leqq\beta^{k*}(y)\leqq 1,\quad \beta^{k*}(y)=1\ \text{ sur }\ \{y\,;\ |y|\leqq r_0\},\quad \mathrm{Supp}\,\beta^{k*}\subset\{y\,;\ |y|\leqq 2r_0\},$$

et $\beta_n^*(y)\equiv\beta_{n1}^*(y)\cdots\beta_{nd}^*(y)$; $\beta_{nk}^*(y)\equiv\beta^{k*}(n^{\delta_k}y_k)$, $(k=1,\ \cdot,\ d)$.

De même qu'au précédent on remarque

$$os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_n^*(y))\nabla_n(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}}(x+y:\ \xi)dy\bar{d}\eta$$

$$=\sum_{l\leq N}\frac{1}{l!}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_n^*(y))\nabla_n^{(l)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}(l)}(x:\ \xi)dy\bar{d}\eta$$

$$+\sum_{\substack{l\leq N\\ j=1,\cdot,d}}\frac{1}{l(N;\ j)!}\int_0^1(1-t)^{\hat{N}j}dt\ os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_n^*(y))\nabla_n^{(l(\hat{N}+1;\,j))}(x\,;\ \xi+\eta)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}(l(\hat{N}+1:\,j))}(x+y(t\,;\ j))dy\bar{d}\eta$$

On a donc

$$J_{\hat{N}}(\nabla_n\,;\ a_{\mathrm{nloc}})(x\,;\ \xi)=\sum_{\substack{l\leq\hat{N}\\ j=1,\dots,d}}\frac{1}{l(\hat{N};\ j)!}\int_0^1(1-t)^{\hat{N}_j}dt$$

$$\times os-\iint e^{-iy\eta}\beta_n^*(y)\nabla_n^{(l(\hat{N}+1;\,j))}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}(l(\hat{N}+1:\,j))}(x+y(t\,;\ j))dy đ\eta$$

$$+os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_n^*(y))\nabla_n(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}}(x+y:\ \xi)dy đ\eta$$

$$-\sum_{l\leq\hat{N}}\frac{1}{l!}os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_n^*(y))\nabla_n^{(l)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}(l)}(x:\ \xi)dy đ\eta$$

$$=\sum_{\substack{l\leq\hat{N}\\ j=1,\dots,d}}\frac{1}{l(\hat{N};\ j)!}\int_0^1(1-t)^{\hat{N}_j}dt\ os-\iint e^{-iy\eta}\beta_n^*(y)\nabla_n^{(l(\hat{N}+1;\,j))}(x\,;\ \xi+\eta)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}(l(\hat{N}+1:\,j))}(x+y(t\,;\ j))dy đ\eta$$

$$+\sum_{j=1}^d os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_{nj}^*(y))^3\mathring{\beta}_n^j(y')\nabla_n(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}}(x+y:\ \xi)dx đ\eta$$

$$-\sum_{l\leq\hat{N}}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^d os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_{nj}^*(y))\mathring{\beta}_n^j(y')\nabla_n^{(l)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}(l)}(x:\ \xi)dy đ\eta$$

$$=\sum_{\substack{l\leq\hat{N}\\ j=1,\dots,d}}\frac{1}{l(\hat{N};\ j)!}\int_0^1(1-t)^{\hat{N}_j}dt\ os-\iint e^{-iy\eta}\beta_n^*(y)\nabla_n^{(l(\hat{N}+1;\,j))}(x\,;\ \xi+\eta)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}(l(\hat{N}+1:\,j))}(x+y(t\,;\ j))dy đ\eta$$

$$+\sum_{j=1}^d os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_{nj}^*(y))\mathring{\beta}_n^j(y')y_j^{-\hat{N}_j}\nabla_n^{(\hat{N}_j)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}}(x+y:\ \xi)dy đ\eta$$

$$-\sum_{l\leq\hat{N}}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^d os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta_{nj}^*(y))\mathring{\beta}_n^j(y')y_j^{-(\hat{N}-l)_j}$$

$$\times\nabla_n^{(l+(\hat{N}-l)_j)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}(l)}(x:\ \xi)dy đ\eta$$

Et on a

$$\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)J_{\hat{N}-\mu}(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}\,;\ a_{\mathrm{nloc}})(x\,;\ \xi)$$

$$=\sum_{\substack{l\leq\hat{N}-\mu\\ j=1,\dots,d}}\frac{1}{l(\hat{N}-\mu\,;\ j)!}\int_0^1(1-t)^{(\hat{N}-\mu)_j}dt$$

$$\times os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)\beta_n^*(y)\nabla_{n(\nu)}^{(\mu+l(\hat{N}-\mu+1;\,j))}(x\,;\ \xi+\eta)$$

$$\times a_{\mathrm{nloc}(l(\hat{N}-\mu+1:\,j))}(x+y(t\,;\ j))dy đ\eta$$

$$+\sum_{j=1}^d os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)(1-\beta_{nj}^*(y))\mathring{\beta}_n^j(y')y_j^{-(\hat{N}-\mu)_j}$$

$$\times\nabla_{n(\nu)}^{(\mu+(\hat{N}-\mu)_j)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}}(x+y:\ \xi)dy đ\eta$$

$$-\sum_{l\leq\hat{N}-\mu}\frac{1}{l!}\sum_{j=1}^d os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{\sim}(\xi)\beta_n^{\sim}(x)(1-\beta_{nj}^*(y))\mathring{\beta}_n^j(y')y_j^{-(\hat{N}-\mu-l)_j}$$

$$\times\nabla_{n(\nu)}^{(\mu+l(\hat{N}-\mu-l)_j)}(x\,;\ \xi+\eta)a_{\mathrm{nloc}(l)}(x:\ \xi)dy đ\eta$$

Par l'estimation on a

$$M^{\mu\nu}_{n}|\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x)J_{\hat{N}-\mu}(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}\,;\; a_{\text{nloc}})(x\,;\,\xi)|$$

$$\leqq {}^{\exists}P(n)\Big(\sum_{\substack{l\leqq\hat{N}-\mu\\ j-1,\cdot,d}}(\hat{N}^{s\sim}_{n}\hat{R}_{0}\rho_{0}n^{-(\rho-\delta)})^{l(\hat{N}-\mu;\,i)+\mu}$$

$$+\sum_{j=1}^{d}(\hat{N}^{s\sim-1}_{n}\rho_{0}(r_{0})r_{0}\kappa)^{-(\hat{N}-\mu)j}(\hat{N}^{s\sim}_{n}\hat{R}_{0}\rho_{0}(r_{0})\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{(\hat{N}-\mu)j+\mu}$$

$$+\sum_{\substack{l\leqq\hat{N}-\mu\\ j=1,\cdot,d}}(\hat{N}^{s\sim-1}_{n}\rho_{0}(r_{0})r_{0}\kappa)^{-(\hat{N}-\mu-l)j}(\hat{N}^{s\sim}_{n}\hat{R}_{0}\rho_{0}(r_{0})\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{(\hat{N}-\mu-l)j+\mu+l}\Big)$$

$$\times(N_{n}R_{0}\hat{\rho}_{0}(\hat{r}_{0})\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\nu}$$

Ainsi compte teun du fait: $\hat{N}^{s\sim-1}_{n}\rho_{0}(r_{0})r_{0}\geqq 1$ et $1\leqq\kappa$, pareillement à la précédente, on a le résultat voulu. C. Q. F. D.

Lemme 4. *On a*

$$\sum_{\mu\leqq\hat{N}_{n},\nu\leqq N_{n}}M^{\mu\nu}_{n}\Big\|(1-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x))\sum_{\substack{p\leqq\hat{N}-\mu,q\leqq N-\nu\\ p+q\neq 0}}\frac{(-1)^{q}}{p\,!\,q\,!}a^{(q)}_{(p)\text{nloc}}\nabla^{(\mu+p)}_{n(\nu+q)}(x\,;\,\xi)|_{\xi=D}\Big\|$$

$$\leqq {}^{\exists}P(n)\sum_{j=1}^{d}\exp(-\hat{N}_{n_j})+\exp(-N_{n_j})$$

$$\sum_{\mu\leqq\hat{N}_{n},\nu\leqq N_{n}}M^{\mu\nu}_{n}\|(1-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x))[\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)},\, a_{\text{nloc}}](x\,;\,\xi)|_{\xi=D}\|$$

$$\leqq {}^{\exists}P(n)\sum_{j=1}^{d}\exp(-\hat{N}_{n_j})+\exp(-N_{n_j})$$

Preuve. Remarquons qu'on a

$$(1-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x))a_{\text{nloc}}\nabla_{n}(x\,;\,\xi)\quad\text{et}\quad(1-\alpha^{\sim}_{n}(\xi)\beta^{\sim}_{n}(x))[\nabla_{n},\, a_{\text{nloc}}](x\,;\,\xi)$$

sont des combinaisons linéaires de ceux de la forme:

$$os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha^{\sim}_{nj}(\xi))^{\exists}\mathring{\gamma}^{j}_{n}(x,\,\xi)a_{\text{nloc}}(x\,;\,\xi+\eta)\beta_{n}(x+y)\alpha_{n}(\xi+\eta)dy\text{đ}\eta$$

$$os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta^{\sim}_{nj}(\xi))^{\exists}\mathring{\gamma}^{j}_{n}(x,\,\xi)a_{\text{nloc}}(x\,;\,\xi+\eta)\beta_{n}(x+y)\alpha_{n}(\xi+\eta)dy\text{đ}\eta$$

$$os-\iint e^{-iy\eta}(1-\alpha^{\sim}_{nj}(\xi))^{\exists}\mathring{\gamma}^{j}_{n}(x,\,\xi)\alpha_{n}(\xi+\eta)\beta_{n}(x+y)a_{\text{nloc}}(x+y\,;\,\xi)dy\text{đ}\eta$$

$$os-\iint e^{-iy\eta}(1-\beta^{\sim}_{nj}(\xi))^{\exists}\mathring{\gamma}^{j}_{n}(x,\,\xi)\alpha_{n}(\xi+\eta)\beta_{n}(x+y)a_{\text{nloc}}(x+y\,;\,\xi)dy\text{đ}\eta$$

Remarquons que $\beta_{n}(x+y)a_{\text{nloc}}(x+y\,;\,\xi)=\beta_{n}(x+y)a(x+y\,;\,\Xi_{n}(\xi))$ et que sa dérivation par rapport à y a l'estimation pareille à celle de $a(x\,;\,\xi)$. On peut procéder pareillement aux précédents. C. Q. F. D.

Lemme 5. *On a*

$$\sum_{\mu\leqq\hat{N}_{n},\nu\leqq N_{n}}M^{\mu\nu}_{n}\|\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ\,;\,D)(a(\circ\,;\,D)-a_{\text{nloc}}(\circ\,;\,D))\|$$

$$\leqq {}^{3}P(n)\sum_{j=1}^{d}\exp(-\hat{N}_{n_j})+\exp(-N_{n_j})$$

Preuve. On a

$$a(x\,;\,\xi)-a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,\xi)=a(x\,;\,\xi)-a(\chi_n(x)\,;\,\Xi_n(\xi))$$
$$=a(x\,;\,\xi)-a(\chi_n(x)\,;\,\xi)+a(\chi_n(x)\,;\,\xi)-a(\chi_n(x)\,;\,\Xi_n(\xi))$$

et on a donc

$$\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x\,;\,D)(a(x\,;\,D)-a_{\mathrm{nloc}}(x\,;\,D))$$
$$=\alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\mu)}(x)[a(x\,;\,D)-a(\chi_n(x)\,;\,D)+a(\chi_n(x)\,;\,D)-a(\chi_n(x)\,;\,\Xi_n(D))]$$
$$=\alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\mu)}(x)]a(\chi_n(x)\,;\,D)-a(\chi_n(x)\,;\,\Xi_n(D))]$$

On a ainsi

$$(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(a-a_{\mathrm{nloc}}))(x\,;\,\xi)$$
$$=os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{(\mu)}(\xi+\eta)\beta_{n(\mu)}(x+y)[a(\chi_n(x+y)\,;\,\xi)-a(\chi_n(x+y)\,;\,\Xi_n(\xi))]dy\bar{d}\eta$$

Alors le raisonnement est pareil au précédent. Et on a le résultat voulu. C.Q.F.D.

Ces lemmes étant préparés les démonstrations de la proposition 4 est déja claire.

[3] La démonstration de la proposition 5 est toute pareille à celle de la proposition 4.

[4] **Preuve de la proposition 6.** On a

$$\alpha_n^{(\mu)}\beta_{n(\nu)}(\gamma_n-1)(x\,;\,\xi)$$
$$=os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{(\mu)}(\xi+\eta)\beta_{n(\nu)}(x+y)(\gamma_n(\xi)-1)dy\bar{d}\eta$$
$$=\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{(\mu)}(\xi+\eta)\beta_{n(\nu)}(x+y)(\gamma_{nj}(\xi)-1)^{3}\mathring{\gamma}_n^{j}(\xi')dy\bar{d}\eta$$

Et on a

$$\alpha_n^{(\mu)}\beta_{n(\nu)}(\gamma_n-1)(x\,;\,\xi)$$
$$=\sum_{j=1}^{d}os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{(\mu)}(\xi+\eta)\beta_{n(\nu+(N_n-\nu)^j)}(x+y)$$
$$\times(\gamma_{nj}(\xi)-1)^{3}\mathring{\gamma}_n^{j}(\xi')\eta_j^{-(N-\nu)j}dy\bar{d}\eta$$

Par l'estimation on a

$$|\alpha_n^{(\mu)}\beta_{n(\nu)}(\gamma_n-1)(x\,;\,\xi)|$$
$$\leqq {}^{3}C\sum_{j=1}^{d}(\hat{N}_n^{s\sim}\hat{R}_0\rho_0(r_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\mu}(N_nR_0\hat{\rho}_0(\hat{r}_0)\kappa n^{-(\rho-\delta)})^{\nu+(N_n-\nu)^j}(M_n^{\mu\nu})^{-1}$$

Donc on a

$$\sum_{\mu\leq\hat{N}_n,\,\nu\leq N_n}M_n^{\mu\nu}\|\alpha_n^{(\mu)}(D)\beta_{n(\nu)}(\circ)(\gamma_n(D)-1)\|$$

$$\leqq {}^{\exists}P(n)\sum_{j=1}^{d}\exp(-N_j)$$

C. Q. F. D.

[5] Preuve de la proposition 7. On a

$$J_N(\alpha_n;\ \beta_n)(x;\ \xi)=\sum_{\substack{l\leq N\\ k=1,\cdot,d}}\frac{1}{l(N;\ k)!}\int_0^1(1-t)^{N_k}dt$$

$$\times os-\iint e^{-iy\eta}\alpha_n^{(l(N+1;\ k))}(\xi+\eta)\beta_{n(l(N+1;\ k))}(x+y(t;\ k))dy\bar{d}\eta$$

Par l'estimation on a

$$|J_N(\alpha_n;\ \beta_n)(x;\ \xi)|\leqq {}^{\exists}P(n)\sum_{\substack{l\leq N\\ k=1,\cdot,d}} l(N;\ k)!^{2s*-1}(\rho_0\hat{\rho}_0)^{l(N;\ k)}n^{-(\rho-\delta)l(N;\ k)}$$

$$\leqq {}^{\exists}P(n)\sum_{\substack{l\leq N\\ k=1,\cdot,d}}(N^{2s*-1}\rho_0\hat{\rho}_0 n^{-(\rho-\delta)})^{l(N;\ k)} \qquad {}^{\forall}N$$

Nous choisissons $N\equiv(N_1,\ \cdot,\ N_d)$ en sorte que l'on a:

$$N^{2s*-1}\rho_0\hat{\rho}_0 n^{-(\rho-\delta)}=e^{-1}$$

Alors on a

$$|J_N(\alpha_n;\ \beta_n)(x;\ \xi)|\leqq {}^{\exists}P(n)\sum_{k=1}\exp(-N_j)$$

Par la remarque usuelle, on a le résultat voulu. C. Q. F. D.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université d'Ehimé

Bibliographie

[1] K. Igari, Well-Posedness of the Cauchy Problem for Some Evolution Equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **9** (1974), 613-629.

[2] S. Itoh and H. Uryu, Conditions for Well-posedness in Gevrey Classes of the Cauchy Problems for Fuchsian Hyperbolic Operators II, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 23-2 (1987), 215-241.

[3] V. Ya. Ivrii and V.M. Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Uspehi Mat. Nauk, **29** (1974), 3-70. (Russian Math. Surveys, **29** (1974), 1-70.

[4] V. Ya. Ivrii, Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Math. J., **17** (1976), 422-435. (Sib. Mat. Z. **17**-3 (1976), 547-563.

[5] V. Ya. Ivrii, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevray classes, Sib. Math. J., **17**-4-6 (1976), 921-931. (Sib. Mat. Z. **17**-6 (1976), 1256-1270.

[6] K. Kajitani, On the $\mathcal{E}$-well posed evolution equations, Comm. Partial Differential Equations, 4-6 (1979), 595-608.

[7] K. Kitagawa, Sur le théorème de Cauchy-Kowalevski—Une remarque sur le mémoire du même titre de S. Mizohata, J. Math. Kyoto Univ. (à paraître).

[8] K. Kitagawa, Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de fonctions C^∞ 11. (à paraître)

[9] H. Komatu, Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1977), 233-245.

[10] P.D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., **24**

(1957), 627-646.

[11] T. Mandai, Generalized Levi conditions for weakly hyperbolic equations—An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables, Publ. Res. Inst. Math. Sci.. 22-1 (1986), 1-23.

[12] W. Matsumoto, Problème de Cauchy pour des systèmes d'équations à retard croissant avec le temps—A la mémoire de C. Goulaouic, Comm. Partial Differential Equations, **10**(12) (1985), 1427-1450.

[13] M. Miyake, Degenerate parabolic differential equations—Necessity of the well-posedness of the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974), 461-476.

[14] S. Mizohata, Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., **1**-1 (1961), 109-127.

[15] S. Mizohata, On evolution equations with finite propagation speed, Israel J. Math., **13**-1-2 (1972), 173-187.

[16] S. Mizohata, On the Cauchy-Kowalevski theorem, Math. Anal. & Appl. part B Advances in Math. Suppl. Studies vol 7B (1981) (Acad. Press), 617-652.

[17] S. Mizohata, On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes, Hokkaido Math. J., **12**-3 (1983), 298-310.

[18] S. Mizohata, On analytic regularities, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J. Vaillant), Hermann, (1985), 82-105.

[19] S. Mizohata, Sur l'indice de Gevrey, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs differentiels (J. Vaillant), Hermann, 1985, 106-120.

[20] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyperbolic equations in C^∞ and Gevrey classes, Proc. of VIII Escola Latino-Americana de Matematica, Springer, 1986.

[21] S. Mizohata, On the Cauchy problem, Lecture note at Wuhau, Acad. Press, 1986.

[22] S. Mizohata, On the Cauchy problem tor hyperbolic equations and related problems (micro-local energy method) Taniguchi Symposium "Hyperbolic Equations and Related Topics", 1984, 193-233.

[23] S. Mizohata, On the Levi condition, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes (J. Vaillant), 1986.

[24] T. Nishitani, On the Lax-Mizohata Theorem in the Analytic and Gevrey Classes, Proc. Japan Acad., **53**-A-3 (1977), 88-90.

[25] T. Sadamatsu, On a necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for evolution equations. J. Math. Kyoto Univ. **29**-2 (1989) 221-231.

[26] Y. Takei, Mizohata's micro-localization, Master Thesis, Kyoto Univ., 1986.