NOETHERSCHE GRUPPEN MIT ENDLICHER HYPERZENTRUMSFAKTORGRUPPE

VON
HERMANN SIMON

Einleitung

Bekanntlich gibt es gruppentheoretische Eigenschaften E, so dass endlich erzeugte E-Gruppen noethersch sind. Beispiele hierfür sind die endlich erzeugten, abelschen oder überauflösbaren Gruppen; dagegen gilt diese Aussage nicht mehr, wenn man anstelle der soeben erwähnten Gruppenklassen die diese beiden Klassen umfassende Klasse der endlich erzeugten, auflösbaren Gruppen betrachtet. Diese Bemerkungen legen die folgende, allgemeine Fragestellung nahe: Welche Beschaffenheit muss eine abstrakte, gruppentheoretische Eigenschaft E haben, damit endlich erzeugte E-Gruppen noethersch sind?

In der vorliegenden Arbeit wird dieses Problem hinsichtlich der Charakterisierung der Klasse der noetherschen Gruppen mit endlicher Hyperzentrumsfaktorgruppe behandelt.

Der tragende Satz beim Beweis des Hauptsatzes ist dabei ein Satz über das Noetherschsein endlich erzeugter Gruppen, die in einem schwachen Sinne auflösbar sind, unter einer weiteren, geeigneten Zusatzbedingung:

SATZ A (s. §1). *G ist noethersch und fastauflösbar, wenn gilt:*

(a) *G ist endlich erzeugt.*

(b) *Jede unendliche Faktorgruppe von G besitzt einen torsionsfreien, abelschen Normalteiler $A \neq 1$.*

(c) *Für jedes Elementepaar x, y aus G ist $\{x, y\}/\{x, y\}''$ pseudohomogen.*

Dabei heisst eine Gruppe G *pseudohomogen*, wenn es eine unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ derart gibt, dass die endlichen Faktorgruppen E von G in ihren p-Normalteilern (mit p aus $\mathfrak{P}$) p-Automorphismengruppen induzieren.

Herrn Professor R. Baer danke ich für seine wertvollen Anregungen bei der Anfertigung dieser Arbeit sehr herzlich.

Grundbegriffe und Bezeichnungen

$o(a)$ = Ordnung des Elementes a in G.

$\{a\}$ ist die durch das Element a aus G erzeugte zyklische Gruppe.

Ist U eine Untergruppe der Gruppe G, dann ist $[G:U]$ der Index von U in G.

$\mathfrak{C}(U)$ bzw. $\mathfrak{N}(U)$ ist der Zentralisator bzw. Normalisator der Untergruppe U in G. Ist a ein Element aus G, dann ist $\mathfrak{C}(a)$ der Zentralisator von a in G.

dir $\prod$ = direktes Produkt.

Received September 2, 1962; received in revised form March 8, 1963.

$A \triangleleft G$ bedeutet: A ist ein (nicht notwendig echter) Normalteiler von G, und $A \triangleleft\neq G$ bedeutet: A ist ein echter Normalteiler von G (oder gleich 1).

$Z(G)$ = Zentrum von G. Sei $Z_0(G) = 1, Z_k(G)/Z_{k-1}(G) = Z(G/Z_{k-1}(G))$ für $k \geqq 1$ und $Z_\sigma(G) = \bigcup_{\nu<\sigma} Z_\nu(G)$ für Limeszahlen σ. Dann existiert bekanntlich eine kleinste Kardinalzahl λ mit $Z(G/Z_\lambda(G)) = 1$. Dabei heisst $Z_\lambda(G)$ das *Hyperzentrum* von G.

Sind x, y Elemente aus G, dann ist $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$; sind A, B Komplexe aus G, dann ist $A \circ B$ das Erzeugnis aller Kommutatoren $a \circ b$ mit a aus A und b aus B.

${}^0G = G, \quad {}^{n+1}G = {}^nG \circ G \quad$ für $n \geqq 0$.

$G^{(0)} = G, \quad G^{(n+1)} = G^{(n)} \circ G^{(n)} \quad$ für $n \geqq 0$.

G heisst *auflösbar*, wenn jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G einen abelschen Normalteiler $A \neq 1$ enthält.

G heisst *nilpotent*, wenn jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G ein Zentrum $Z(H) \neq 1$ besitzt.

Noethersche Gruppen sind solche, deren sämtliche Untergruppen endlich erzeugt sind. *Lokal-noethersch* heisst eine Gruppe, wenn ihre endlich erzeugten Untergruppen noethersch sind.

Nach Baer [1; S. 299, Satz B] ist eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe noethersch. Daher existiert in diesem Fall eine natürliche Zahl n mit: $G = Z_n(G)$. Die Zahl n heisst die *Nilpotenzklasse* oder kurz die *Klasse* von G. Bekanntlich gilt: $G = Z_n(G)$ ist äquivalent mit ${}^nG = 1$. Ist G noethersch und auflösbar, dann existiert eine natürliche Zahl n, so dass $G^{(n)} = 1$ ist.

Ein homomorphes Bild einer Untergruppe von G heisst *Faktor von G*.

In den Bezeichnungen wurde nach folgendem Prinzip verfahren: Die Gruppe G heisse "e", wenn für alle Faktorgruppen von G die Aussage "A" zutrifft. Die Gruppe heisse "halb-e", wenn für alle *unendlichen* Faktorgruppen von G die Aussage "A" zutrifft.

1. Die Haupthilfssätze

LEMMA 1.1. *Die Gruppe G habe folgende Eigenschaften:*

(a) $B = \text{dir} \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \{a_i\}$ *sei Normalteiler von G und alle* $\{a_i\}$ *seien zyklisch der Ordnung* 0.

(b) G/B *sei zyklisch.*

(c) *Ist* $G/B = \{gB\}$ *so ist* $a_i^g = g^{-1}a_i g = a_{i+1}$ *für* $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Dann gilt: Es gibt zu jedem Primzahlpaar p, q mit $p \neq q$ *eine endliche, nicht abelsche Faktorgruppe von G, welche Erweiterung einer elementarabelschen p-Gruppe durch eine zyklische Gruppe der Ordnung q ist.*

Beweis. Aus $a_i^g = a_{i+1}$ für alle i folgt $o(g) = 0$. Da B abelsch und G/B zyklisch ist, so werden die durch G in B induzierten Automorphismen bereits durch Potenzen von g induziert.

Aus (a) folgt: $B = \{a_0^G\} \triangleleft\neq G$ und $G = \{a_0, g\}$.

Sei p eine beliebige Primzahl. Da B direktes Produkt unendlicher zyklischer Gruppen ist, so gilt $B^p < B$ und da B^p eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers B von G ist, so ist auch B^p normal in G.

Sei $H = G/B^p$ und $P = B/B^p$, dann gilt: $1 \neq P \triangleleft\neq H$ und H/P ist unendlich zyklisch wegen $H/P \cong G/B$.

Sei $b_i = a_i B^p$ und $h = gB^p$, dann ist $P = \{\cdots, b_i, \cdots\}$, $o(b_i) = p$, $b_{i+1} = b_i^h$, $o(h) = 0$, $H = \{b_0, h\} = \{P, h\}$ und $P^p = 1$.

Sei α der Automorphismus von P mit $b_i^\alpha = b_{i+1}$, dann ist $P = \{\cdots, b_0^{\alpha^i}, \cdots\}$.

Sei q eine weitere beliebige Primzahl. Man bilde das Element $s(v) = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{v-1}$ aus dem Endomorphismenring von P. $V = P^{s(q)}$ ist wegen $q > 1$ eine echte Untergruppe von P und wegen der Unabhängigkeit der b_i gilt: $b_i^{s(v)}$ liegt nicht in V für $v < q$; weiter ist $P = \{V, b_0, \cdots, b_{q-2}\}$ und $V \triangleleft\neq H$.

Wegen $b_i^{s(q)} \equiv 1 \pmod V$ und wegen $(1 - \alpha)s(q) = 1 - \alpha^q$ gilt: $b_i^{1-\alpha^q} \equiv 1 \pmod V$, so dass folgt:

$$(+) \qquad b_i^{\alpha^q} \equiv b_i \pmod V.$$

Diese Kongruenz bedeutet, dass die Ordnung von α modulo V, sie werde mit $o_V(\alpha)$ bezeichnet, gleich 1 oder q ist.

(I) $o_V(\alpha) = 1$. Diese Aussage ist äquivalent mit $b_i^\alpha \equiv b_i \pmod V$. Aus $s(q) = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{q-1}$, $b_i^\alpha = b_{i+1}$ und $b_i^{s(q)} \equiv 1 \pmod V$ folgt dann: $b_i^{s(q)} \equiv b_i^q \equiv 1 \pmod V$. Da $b_i \not\equiv 1 \pmod V$ ist, so gilt $o(b_i V) = q$. Da q eine Primzahl und $o(b_i) = p$ ist, so folgt $q \mid p$, also $q = p$.

Von jetzt an sei q eine beliebige, aber von p verschiedene Primzahl. Dann gilt notwendig:

(II) $o_V(\alpha) = q$. Man bilde $F = \{b_0 V, \cdots, b_{q-2} V\} = \{c_0, \cdots, c_{q-2}\}$ wobei $o(c_i) = p \neq q$ ist.

Nun ist $\{V, h^q\} \triangleleft\neq H = \{P, h\} = \{b_0, h\}$. Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, dass $b_0 h^q b_0^{-1}$ in $\{V, h^q\}$ liegt; aber das folgt sofort aus $(+)$ für $i = 0$:

$$b_0^{\alpha^q} b_0^{-1} = h^{-q} b_0 h^q b_0^{-1} = f \in V$$

oder

$$b_0 h^q b_0^{-1} = h^q f \in \{V, h^q\}.$$

Aus $\{V, h^q\} \triangleleft\neq \{V, b_0, \cdots, b_{q-2}, h\} = \{P, h\} = H$ folgt:

$$G^* = H/\{V, h^q\} = \{V, b_0, \cdots, b_{q-2}, h\}/\{V, h^q\} \quad \text{und}$$

$$F^* = \{V, b_0, \cdots, b_{q-2}, h^q\}/\{V, h^q\} \cong F = P/V.$$

Wegen $F^* \cong F$ ist F^* eine endliche, elementarabelsche, von 1 verschiedene p-Gruppe; wegen $G^*/F^* \cong \{h\}/\{h^q\}$ ist G^*/F^* eine zyklische Gruppe der Ordnung $q \neq p$ und G^* ist daher endlich als Erweiterung einer endlichen, elementarabelschen p-Gruppe durch eine zyklische Gruppe der Ordnung q. Wegen $o_V(\alpha) = q$ ist G^* nicht abelsch und als Faktorgruppe einer Faktorgruppe von G ist G^* selbst eine Faktorgruppe von G, Q.E.D.

HILFSSATZ 1.1. *Besitzt jedes unendliche, homomorphe Bild H der Gruppe G einen von 1 verschiedenen, torsionsfreien Normalteiler $T \lhd H$ und ist E ein endlicher Normalteiler von G, dann gibt es eine endliche Faktorgruppe G^* von G und einen zu E isomorphen Normalteiler $E^* \lhd G^*$, so dass die von G in E induzierte Automorphismengruppe isomorph zu der von G^* in E^* induzierten ist.*

Beweis. Die Menge der $E \cap X = 1$ erfüllenden Normalteiler X von G ist nicht leer und daher gibt es in ihr einen maximalen Normalteiler M mit $E \cap M = 1$. Angenommen, G/M sei unendlich. Dann existiert ein torsionsfreier Normalteiler $1 \neq S/M \lhd G/M$. Hieraus und aus der Maximalität von M folgt $S \cap E \neq 1$. Nun gilt:

$$S/M \geqq M(S \cap E)/M \cong S \cap E/M \cap S \cap E \cong S \cap E \neq 1.$$

S/M ist torsionsfrei und $S \cap E$ ist endlich und ungleich 1. Dies ist ein Widerspruch, also ist $G^* = G/M$ endlich. Weiter ist

$$E^* = EM/M \cong E/E \cap M \cong E.$$

Ist xM aus $\mathfrak{C}(E^*)$, dann folgt $x \circ E \leqq M$ und $x \circ E \leqq E$, so dass $x \circ E = 1$, also $x \in \mathfrak{C}(E)$ gilt. Hieraus folgt $\mathfrak{C}(E^*) \cong \mathfrak{C}(E)/\mathfrak{C}(E) \cap M$ und wegen $M \cap E = 1$, also $M \leqq \mathfrak{C}(E)$, folgt $\mathfrak{C}(E^*) \cong \mathfrak{C}(E)/M$, so dass

$$G^*/\mathfrak{C}(E^*) \cong G/\mathfrak{C}(E)$$

ist, wie behauptet.

DEFINITION 1. Die Gruppe G heisst *pseudohomogen*, wenn eine zu G gehörige unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ existiert, so dass für alle endlichen Faktorgruppen E von G gilt: Ist P ein p-Normalteiler von E mit p aus $\mathfrak{P}$, dann induziert E in P eine p-Automorphismengruppe.

Bemerkung. Pseudohomogenität von G überträgt sich trivialerweise auf die Faktorgruppen von G.

HILFSSATZ 1.2. *Ist die Gruppe H pseudohomogen und besitzt H einen torsionsfreien, abelschen Normalteiler $B \neq 1$ mit unendlicher, zyklischer Faktorgruppe $H/B = \{gB\}$ und ist $B = \{b^H\}$ für geeignetes b aus B, dann ist H nilpotent von endlicher Klasse und noethersch.*

Beweis. (1) B wird von den Elementen b^{g^i} mit $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (ad inf.) erzeugt, da $B = \{b^H\}$ ein abelscher Normalteiler von H und $H/B = \{gB\}$ zyklisch ist. Die Pseudohomogenität von H zusammen mit Lemma 1.1 ergibt die Unmöglichkeit der Unabhängigkeit der b^{g^i}. Hieraus folgt die Existenz einer kleinsten natürlichen Zahl n, so dass je $n + 1$ Elemente der Form b^{g^i} abhängig sind; also gilt eine Relation der Form:

$$(\mathrm{R}_0) \qquad b^{g^n e(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} b^{g^i e(i)}$$

mit geeigneten ganzen Zahlen $e(i)$ und $e(0)e(n) \neq 0$; letzteres, da andernfalls bereits je n Elemente b^{g^i} abhängig wären, was der Definition von n widerspräche. Die Transformation von (R_0) mit g^k liefert:

$$(\mathrm{R}_k) \qquad b^{g^{n+k}e(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} b^{g^{i+k}e(i)}.$$

Setzt man $F = \{b, b^g, \cdots, b^{g^{n-1}}\}$, so ist B/F eine Torsionsgruppe; genauer gilt sogar: ist $t = e(0)e(n)$ und ist $y = xF$ ein Element aus B/F, dann ist $y^{t^s} = 1$ für genügend grosses s; dies folgt sofort aus der Darstellung:

$$x = \prod_{j=1}^{r} b^{g^{i+j}f(j)}$$

für alle x aus der abelschen Gruppe B, wobei $f(j)$ geeignete ganze Zahlen sind, der Bildung von $x^{t^{|i|+|i+1|+\cdots+|i+r|}} = w$ und der Benutzung der Relation (R_k), welche nämlich $w \in F$ liefert.

Die torsionsfreie, abelsche Gruppe B hat also folgende Eigenschaft: B enthält eine endlich erzeugbare Untergruppe F derart, dass B/F eine Torsionsgruppe ist, deren Elemente t-Potenzordnung (für ein festes t) haben. Hieraus folgt, dass die p-Komponenten für fast alle Primzahlen p gleich 1 sind. Sei jetzt $\mathfrak{P}$ eine unendliche Menge von Primzahlen, so dass B/F keine Elemente der Ordnung p enthält (mit p aus $\mathfrak{P}$).

Ist p aus $\mathfrak{P}$, so folgt aus $a^p \in F$, dass bereits a in F liegt. Daher folgt die Inklusion $B^p \cap F \leqq F^p$, die $B^p \cap F = F^p$ impliziert, eine Gleichung, die für alle p aus $\mathfrak{P}$ gilt. Zur Abkürzung sei im Folgenden $D = \bigcap_{p \in \mathfrak{P}} B^p$ gesetzt.

Da F eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so gilt sicherlich $\bigcap_{p \in \mathfrak{P}} F^p = 1$. Hieraus und zusammen mit $B^p \cap F = F^p$ für alle p aus $\mathfrak{P}$ folgt $F \cap D = \bigcap_{p \in \mathfrak{P}} F^p = 1$, eine Beziehung, die

$$B \geqq D \cong D/F \cap D \cong FD/F \leqq B/F$$

impliziert, d.h. die torsionsfreie Gruppe D ist isomorph in die Torsionsgruppe B/F eingebettet, woraus $D = \bigcap_{p \in \mathfrak{P}} B^p = 1$ folgt.

(2) Bezeichnet man den Rang von F mit n und ist $\mathfrak{P}$ wieder eine unendliche Menge von Primzahlen p derart, dass die Torsionsgruppe B/F keine p-Elemente enthält, dann gilt $(B/F)^p = B/F$ für alle p aus $\mathfrak{P}$, woraus $B = B^pF$ folgt, was $B/B^p \cong F/B^p \cap F = F/F^p$ impliziert, d.h.

$$o(B/B^p) = o(F/F^p) = p^n$$

ür alle p aus $\mathfrak{P}$.

Da B^p als charakteristische Untergruppe des Normalteilers B von H ebenfalls normal in H ist, und da deswegen H/B^p als zyklische Erweiterung der endlichen, elementarabelschen p-Gruppe B/B^p noethersch und auflösbar ist, so folgt nach K. Hirsch [1] die Existenz eines torsionsfreien Normalteilers $T/B^p \lhd H/B^p$ von endlichem Index $[H:T]$; aus der Unendlichkeit von H/B^p und der Endlichkeit von $[H:T]$ folgt $T/B^p \neq 1$. Die Torsionsfreiheit von T/B^p und die Endlichkeit von B/B^p implizieren $T/B^p \cap B/B^p = 1$, was mit $T \cap B = B^p$ äquivalent ist. Für die endliche Faktorgruppe H/T folgt dann: $H/T \rhd TB/T \cong B/T \cap B = B/B^p$.

Da für fast alle Primzahlen p die p-Komponenten von B/F gleich 1 sind, so können wir annehmen, dass die unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ nur Primzahlen mit dieser Eigenschaft enthält und ausserdem mit einer der in der Pseudohomogenität von H geforderten identisch ist.

Sei von nun an T ein maximaler Normalteiler von H hinsichtlich der Eigenschaft $T \cap B = B^p$ mit p aus $\mathfrak{P}$; dabei ist T natürlich von p abhängig. Da p aus $\mathfrak{P}$ und H/T endlich ist, so folgt aus der Pseudohomogenität von H, dass H/T in $BT/T \cong B/B^p$ eine p-Automorphismengruppe induziert. Sei C/T der Zentralisator von BT/T in H/T; dann ist also $[H:C] = p^m$.

Aus der Zyklizität von H/B folgt die von C/BT. Hieraus ergibt sich die Kommutativität von C/T. Zusammen mit der Maximalität von T, hinsichtlich $T \cap B = B^p$, ergibt sich $[H:T] = p^k$, also ist die endliche Gruppe H/T nilpotent. Dies gilt für jedes p aus $\mathfrak{P}$. Daher existiert für alle p aus $\mathfrak{P}$ eine (von p abhängige) natürliche Zahl $c = c(p)$ derart, dass ${}^{c(p)}H \leqq T$ gilt. Da H/B zyklisch ist, so folgt ${}^{c(p)}H \leqq H' \leqq B$, was zusammen mit ${}^{c(p)}H \leqq T$ die Inklusion ${}^{c(p)}H \leqq T \cap B = B^p$ impliziert. Aus der Zyklizität von H/B folgt die von H/C wegen $C \geqq BT \geqq B$; und da also H/T nilpotent und zyklische Erweiterung der (endlichen) elementarabelschen p-Gruppe BT/T der Ordnung p^n mit festem n für alle p aus $\mathfrak{P}$ ist, so gilt sicher ${}^{n+1}H \leqq {}^{c(p)}H \leqq B^p$ für alle p aus $\mathfrak{P}$ was wegen $\bigcap_{p \in \mathfrak{P}} B^p = 1$ die Endlichkeit der Nilpotenzklasse von H und zusammen mit der endlichen Erzeugbarkeit von H das Noetherschsein von H ergibt, Q.E.D.

KOROLLAR 1.1. *Besitzt G einen torsionsfreien, abelschen Normalteiler A mit zyklischer Faktorgruppe $G/A = \{Ag\}$ und ist $\{a, g\}$ pseudohomogen für alle a aus A, dann ist G lokal-noethersch.*

Bemerkung. Wegen Hilfssatz 1.2 ist G sogar lokal nilpotent von endlicher Klasse.

Beweis. Nach Hilfssatz 1.2 ist für alle a aus A die Untergruppe $\{a, g\}$ noethersch, so dass insbesondere $\{a^G\} \leqq \{a, g\}$ noethersch ist. Sei E eine endliche Teilmenge von G. Da A Normalteiler von G ist, so gilt für jedes e aus E: $e = a_0 g^s$ (mit a_0 aus A und s ganzrational). Also existiert eine endliche Menge $F \leqq A$ mit $\{E\} \leqq \{F, g\}$. Nun ist $\{F^G\} \lhd G$ und $\{F^G\} \lhd A$. Aus dem Noetherschsein $\{a^G\}$ für jedes a aus A, der Endlichkeit von F und der Kommutativität von A folgt, dass $\{F^G\}$ noethersch ist. Da $\{F^G\} \lhd \{F, g\}$ und da $\{F, g\}/\{F^G\}$ zyklisch ist, so ist $\{F, g\}$ als Erweiterung der noetherschen (abelschen) Gruppe $\{F^G\}$ durch die zyklische Gruppe $\{F, g\}/\{F^G\}$ selbst noethersch, und daher ist wegen $\{E\} \leqq \{F, g\}$ auch $\{E\}$ noethersch, d.h. G ist lokal-noethersch.

DEFINITION 2 (Baer [2; S. 275]. Die Gruppe G heisst *fastauflösbar*, wenn alle Faktorgruppen $F \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit *endlichem* N' besitzen.

KOROLLAR 1.2. *Besitzt G einen torsionsfreien, abelschen Normalteiler A mit lokal-noetherscher, fastauflösbarer Faktorgruppe G/A und ist $\{a, g\}$ pseudohomogen für alle a aus A und g aus G, dann ist G selbst lokal-noethersch.*

Der Beweis folgt sofort aus Korollar 1.1 und Baer [3; S. 356, Satz 4].

SATZ A. *Die Gruppe G ist noethersch (und fastauflösbar), wenn gilt:*

(a) *G ist endlich erzeugt.*

(b) *Jede unendliche Faktorgruppe von G besitzt einen von* 1 *verschiedenen, torsionsfreien, abelschen Normalteiler.*

(c) *Für jedes Elementepaar x, y aus G ist $\{x, y\}/\{x, y\}''$ pseudohomogen.*

Anmerkung. Gruppen mit der Eigenschaft (b) werden später *t-halbauflösbar* genannt.

Beweis. Wegen (b) ist nach Definition 2 die Gruppe G fastauflösbar. Angenommen, die Gruppe G sei nicht noethersch. Aus Baer [2; S. 270, Satz 1, S. 273/274 und S. 276, Satz 3] folgt dann die Existenz eines homomorphen Bildes H von G mit den Eigenschaften:

(1) H ist nicht noethersch.

(2) Jedes echte, homomorphe Bild von H ist noethersch.

Wegen (1) ist H nicht endlich. Daher existiert wegen (b) ein torsionsfreier, abelscher Normalteiler $A \neq 1$ von H. Wegen (2) ist H/A noethersch. Sei $1 \neq a \in A$ und $g \in H$. Für $U = \{a, g\}$ gilt $U'' = 1$, da $\{a^U\} \triangleleft U \cap A \leqq A$ und $U/\{a^U\}$ zyklisch ist. Zu U gibt es zwei Elemente x, y aus G, so dass U isomorph zu einer Faktorgruppe von $\{x, y\}/\{x, y\}''$ ist. Nach (c) ist U pseudohomogen. Wegen (2) ist nach Korollar 1.2 die endlich erzeugte Gruppe H noethersch, ein Widerspruch, der den Satz beweist.

Anmerkung. Wie Lemma 2.1 unten zeigt, sind die Bedingungen (a) und (b) aus Satz A auch notwendig; nicht notwendig dagegen ist (c), wie das folgende Beispiel zeigt: $G = \{a, b\}$ mit $(ab)^2 = b^2 = 1$. Hieraus folgt $A = \{a\} \triangleleft\neq G$, $G'' = 1$, und G ist als zyklische Erweiterung einer zyklischen Gruppe noethersch. Ist $p \neq 2$ eine beliebige Primzahl, dann ist $[G:A^p] = 2p$, also ist G/A^p nicht p-homogen.

2. Die Klasse der noetherschen Gruppen mit endlicher Hyperzentrumsfaktorgruppe

DEFINITION 3. Die Gruppe G heisst *halbauflösbar*, wenn alle unendlichen Faktorgruppen von G einen von 1 verschiedenen, abelschen Normalteiler besitzen.

DEFINITION 4. Die Gruppe G heisst *torsionsfrei-halbauflösbar* (kurz: *t-halbauflösbar*), wenn jedes unendliche, homomorphe Bild von G einen torsionsfreien, abelschen, von 1 verschiedenen Normalteiler enthält.

Bemerkung. Dass *halbauflösbar* aus *t-halbauflösbar* folgt, ist klar.

HILFSSATZ 2.1. *Ist H ein unendliches, homomorphes Bild der fastauflösbaren Gruppe G und gilt in H die Maximalbedingung für Normalteiler, dann besitzt H sogar einen unendlichen Normalteiler N mit endlichem N'.*

Beweis. Ist E ein maximaler, endlicher Normalteiler von H, der wegen der Gültigkeit der Maximalbedingung für Normalteiler in H existiert, dann ist H/E n-torsionsfrei. Aus der Unendlichkeit von H und der Endlichkeit von E folgt die Unendlichkeit von H/E, also gibt es wegen der Fastauflösbarkeit von H/E, die natürlich aus der von G folgt, einen Normalteiler $A/E \neq 1$ von H/E mit endlichem $(A/E)' = A'E/E$. Aus der n-Torsionsfreiheit von H/E folgt die Unendlichkeit von A/E und $A'E/E = 1$, was mit $A' \leqq E$ äquivalent ist; also ist A' endlich und A ist unendlich, da A/E unendlich und E endlich ist (und die Normalität von A in H folgt aus der von A/E in H/E), Q.E.D. (G ist n-torsionsfrei, d.h. $N \lhd H$ und N endlich impliziert $N = 1$.)

LEMMA 2.1. *Bei einer noetherschen Gruppe G sind folgende Eigenschaften äquivalent*:

(I) *G ist fastauflösbar.*

(II) *G enthält eine torsionsfreie, auflösbare, charakteristische Untergruppe C von endlichem Index $[G:C]$.*

(III) *Jedes unendliche, homomorphe Bild H von G enthält einen freien abelschen Normalteiler $A \neq 1$ (von endlichem Rang).*

Beweis. Dass (II) aus (III) folgt ist klar. Anwendung von Baer [4; S. 148, Lemma 1] ergibt sofort, dass (I) und (III) aus (II) folgen. Also bleibt zu zeigen:

(I) $\Rightarrow$ (II). Nach Hilfssatz 2.1 und Baer [4; S. 149, Satz 1] folgt die Existenz einer charakteristischen, auflösbaren Untergruppe K von endlichem Index $[G:K]$. Aus der Auflösbarkeit und dem Noetherschsein von K folgt nach K. Hirsch [1] die Existenz eines torsionsfreien Normalteilers $T \lhd K$ mit endlichem Index $[K:T]$. Nun ist T eine torsionsfreie, auflösbare Untergruppe der noetherschen Gruppe G und $[G:T]$ ist endlich, woraus nach Baer [1; S. 331, Folgerung 3] die Existenz einer charakteristischen Untergruppe C von G mit $C \leqq T$ und endlichem Index $[G:C]$ folgt, also gilt (II).

DEFINITION 5. Die Gruppe G heisst *quasihomogen*, wenn eine unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{P}$ existiert, so dass jeder endliche Faktor E von G in jedem seiner p-Normalteiler $P \lhd E$ eine p-Automorphismengruppe induziert (mit p aus $\mathfrak{P}$).

Bemerkung. Quasihomogenität impliziert natürlich Pseudohomogenität.

SATZ 2.1. *Folgende Eigenschaften einer Gruppe G sind äquivalent*:

(I)
- (a1) *G ist noethersch.*
- (b1) *G besitzt eine endliche Hyperzentrumsfaktorgruppe.*

(II)
- (a2) *G ist noethersch.*
- (b2) *G ist fastauflösbar.*
- (c2) *G ist quasihomogen.*

(III)
- (a3) *G ist endlich erzeugt.*
- (b3) *G besitzt eine t-halbauflösbare Untergruppe U von endlichem Index $[G:U]$.*
- (c3) *G ist quasihomogen.*

Beweis. Aus Lemma 2.1 folgt die Äquivalenz von (II) mit

	(a2′)	gleich (a2).
(II′)	(b2′)	G ist halbauflösbar.
	(c2′)	gleich (c2).

Die Äquivalenz von (I) und (II′) verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Professor R. Baer und sie wird so bewiesen:

(I) $\Rightarrow$ (II′). Ist $G/Z_n(G)$ endlich, dann gilt auch für alle homomorphen Bilder H von G, dass die Hyperzentrumsfaktorgruppe $H/Z_k(H)$ von H endlich ist. Ist H ein unendliches homomorphes Bild von G, dann folgt aus der Endlichkeit von $H/Z_k(H)$, dass $Z(H) \neq 1$ ist, also ist ($b2'$) sicherlich erfüllt.

Sei U irgendeine Untergruppe von G. Dann ist $U/U \cap Z_n(G)$ endlich und $U \cap Z_n(G) \leqq Z_n(U)$, so dass also auch U eine endliche Hyperzentrumsfaktorgruppe $U/Z_r(U)$ besitzt und weiter folgt $o(U/U \cap Z_n(G))$ teilt $o(G/Z_n(G))$, so dass also die Ordnung von $U/Z_r(U)$ nur Primteiler der Ordnung von $G/Z_n(G)$ besitzt. Ist E eine endliche Faktorgruppe einer Untergruppe U von G, dann folgt sofort dass auch $o(E/Z_s(E))$ nur durch Primzahlen teilbar ist, die auch in $o(G/Z_n(G))$ aufgehen (und $Z_s(E)$ ist das Hyperzentrum von E). Sei nun $\mathfrak{P}$ die Menge aller $[G:Z_n(G)]$ *nicht* teilenden Primzahlen. Ist p aus $\mathfrak{P}$, dann sind die p-Elemente einer endlichen Faktorgruppe E einer Untergruppe U von G im Hyperzentrum $Z_s(E)$ enthalten, und da bekanntlich jedes Element aus $Z_s(E)$ mit jedem Element teilerfremder Ordnung aus E vertauschbar ist, so folgt, dass E in einem p-Normalteiler $P \triangleleft E$ (für p aus $\mathfrak{P}$) eine p-Automorphismengruppe induziert, somit gilt (c2′). Also folgt (II′) aus (I).

(II′) $\Rightarrow$ (I). Da G noethersch ist, so endet die aufsteigende Zentrenkette nach endlich vielen Schritten, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n, so dass $Z_n(G)$ gleich dem Hyperzentrum von G ist.

Angenommen, $H = G/Z_n(G)$ sei unendlich. Dann gilt $Z(H) = 1$ und H erfüllt die Bedingungen von Lemma 2.1. Also existiert ein von 1 verschiedener, freier abelscher Normalteiler endlichen Ranges in H und $1 \neq M \triangleleft\neq H$ sei ein solcher mit minimalem Rang.

Ist p aus der nach (c2′) existierenden, unendlichen Primzahlmenge $\mathfrak{P}$, dann bilde man die charakteristische Untergruppe M^p des Normalteilers M von H, die ebenfalls Normalteiler in H ist. Man betrachte $H/M^p \triangleright M/M^p \neq 1$. Aus Lemma 2.1 folgt die Existenz eines torsionsfreien Normalteilers $T/M^p \triangleleft H/M^p$ mit endlichem Index $[H:T]$. Aus der Endlichkeit von M/M^p und der Torsionsfreiheit von T/M^p folgt: $T/M^p \cap M/M^p = 1$, was mit $T \cap M = M^p$ äquivalent ist. Nun gilt:

$$H/T \triangleright TM/T \cong M/M \cap T = M/M^p,$$

so dass also wegen (c2′) die Gruppe H/T in TM/T eine p-Automorphismengruppe induziert, und es folgt sofort, dass dann auch H/M^p in M/M^p eine p-Automorphismengruppe ϕ induziert. Betrachtet man ϕ und $P = M/M^p$, dann ist der Holomorph von P bezüglich ϕ eine endliche p-Gruppe und also nilpotent. Aus dieser Bemerkung erschliesst man leicht die folgende echte Ungleichung:

$$(H \circ M)M^p < M/M^p.$$

Daher ist $M/(H \circ M)M^p \neq 1$ eine p-Gruppe und es gilt weiter:

$$H \circ M \leqq (H \circ M)M^p < M.$$

Da diese Beziehung für die unendlich vielen p aus $\mathfrak{P}$ gilt, so ist $M/H \circ M$ unendlich und $H \circ M \triangleleft\neq H$. Aus der Unendlichkeit von $M/H \circ M$ folgt, dass der Rang von $H \circ M$ kleiner ist als der von M, und aus der Minimalität des Ranges von M folgt dann $H \circ M = 1$, d.h. $1 \neq M \leqq Z(H) = 1$; dieser Widerspruch zeigt die Unmöglichkeit der Unendlichkeit von $H = G/Z_n(G)$, also ist die Hyperzentrumsfaktorgruppe $G/Z_n(G)$ endlich.

(II) $\Rightarrow$ (III). Aus Lemma 2.1 folgt die Gültigkeit von (III) unter der Voraussetzung (II).

(III) $\Rightarrow$ (II). Gilt (III), so ist wegen (a3) und der Endlichkeit von $[G:U]$ die Untergruppe U von G endlich erzeugt (s. Baer [5; S. 409]). Wegen (c3) sind für U die Voraussetzungen von Satz A erfüllt, so dass U also noethersch ist. Wegen der Endlichkeit von $[G:U]$ folgt das Noetherschsein von G, also gilt (II′) und damit (II).

Satz 2.2. *Bei einer torsionsfreien Gruppe G sind folgende Eigenschaften äquivalent*:

(I) *G ist noethersch und nilpotent* (*von endlicher Klasse*).

(II) *G ist eine endlich erzeugbare, quasihomogene Gruppe, die eine t-halbauflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzt.*

Beweis. Dass aus (I) die Aussage (II) folgt, ist klar.

(II) $\Rightarrow$ (I). Aus Satz 2.1 folgt die Endlichkeit der Hyperzentrumsfaktorgruppe $G/Z_n(G)$, wobei n eine geeignete natürliche Zahl ist. Aus Baer [6; S. 173, Zusatz zum Endlichkeitssatz], folgt die Endlichkeit von ${}^nG$, so dass wegen der Torsionsfreiheit von G sogar ${}^nG = 1$ ist, also gilt (I).

Literaturverzeichnis

Reinhold Baer

1. *Das Hyperzentrum einer Gruppe. III*, Math. Zeitschrift, Bd. 59 (1953), S. 299–338.
2. *Noethersche Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 66 (1956), S. 269–288.
3. *Lokal-Noethersche Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 66 (1957), S. 341–363.
4. *Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung*, Math. Ann., Bd. 129 (1955), S. 139–173.
5. *Nilgruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 62 (1955), S. 402–437.
6. *Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen*, Math. Ann., Bd. 124, S. 161–177.

K. A. Hirsch

1. *On infinite soluble groups (II)*, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 44 (1938), pp. 336–344.

Universität
Frankfurt am Main, Deutschland