ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 44, Number 4, Winter 2000

INÉGALITÉ DE LOJASIEWICZ EN GÉOMÉTRIE PFAFFIENNE

JEAN-MARIE LION

ABSTRACT. We give a Lojasiewicz inequality for the o-minimal structure generate by Rolle leaves over the globally subanalytic sets. We obtain uniform estimates in the iterated exponentials scale.

Dans la suite, les espaces $\mathbf{R}^n$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques. Si $n, m \in \mathbf{N}$ et $n \leq m$, on note $\iota_{m,n}$ l'injection canonique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ et $\pi_{m,n}$ la projection canonique de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$. Si $N \in \mathbf{N}$, on désigne par $\exp_N$ la N-ième itérée de l'exponentielle. Si $A \subset \mathbf{R}^n$, $\overline{A}$ et $\mathrm{int}(A)$ sont l'adhérence et l'intérieur de A. On note $d(x, A)$ la distance de x à A et si $\varepsilon > 0$ on pose $\mathrm{Tub}(A, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$. Un borélien de $\mathbf{R}^n$ est dit négligeable s'il est de mesure de Lebesgue nulle. Enfin, le barbarisme "à l'infini" est synonyme de l'expression "au voisinage de $+\infty$".

Introduction

Les *feuilles de Rolle* considérées par [MR] à la suite de [Kh] sont des feuilles particulières de feuilletages analytiques réels de codimension un d'ouverts semi-analytiques de $\mathbf{R}^n$. Entre autre, toute courbe transverse au feuilletage associé à une feuille de Rolle rencontre cette dernière en un point au plus. Il en résulte une remarquable propriété de finitude: les *ensembles pfaffiens* qui sont les intersections d'un nombre fini de feuilles de Rolle relativement compactes (associées à des feuilletages différents) possèdent un nombre fini de composantes connexes [MR]. Il est montré dans [LR1] que les feuilles de Rolle relativement compactes sont des éléments d'une *structure o-minimale* [Dr1], la famille $\mathbf{T}^\infty$ des T^∞*-pfaffiens*. Ceci implique que ces sous-ensembles vérifient une inégalité de Lojasiewicz [Dr1]. L'objet de ce travail est de montrer le théorème suivant qui la précise.

THÉORÈME 1. *Soit A et B deux T^∞-pfaffiens compacts de $\mathbf{R}^n$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que*

$$1/\exp_N(1/d(x, A \cap B)) \leq d(x, B) \ \ si \ \ x \in A \setminus B.$$

Cet énoncé est optimal car l'ensemble $\overline{\{(x, 1/\exp_N(1/x)) \mid x \in]0, 1]\}}$ est un T^∞-pfaffien. Il généralise des inégalités obtenues par [Dr2], [Loi], [Ro], [To] et [Gr1,2].

Received May 26, 1999; received in final form January 11, 2000.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 14P10, 58A17; Secondary 03C99.
Travaux finances par le CNRS et l'UIUC.

La première partie est une brève introduction aux structures et familles o-minimales dans laquelle nous rappelons les inégalités de Lojasiewicz classiques (i.e., pour les sous-analytiques). A la fin de cette partie nous énonçons un lemme qui fait le lien entre les corps de Hardy et les familles o-minimales qui contiennent les sous-analytiques globaux. Une définition des T^∞-pfaffiens est donnée dans la deuxième partie. Nous montrons que les T^∞-pfaffiens ainsi définis coïncident avec ceux de [LR1]. Nous donnons aussi un énoncé "uniforme" des principaux résultats de ce précédent travail (Théorème 2). Nous en déduisons des propriétés de finitude uniforme pour les exposants de Lojasiewicz associés à des sous-ensembles pfaffiens (ceux-ci sont localement sous-analytiques au voisinage de chacun de leurs points). La dernière partie est consacrée à la preuve du théorème 1. Les deux outils principaux auront été introduits au paravant (lemmes 1 et 3). Ils permettent de se ramener à une situation décrite dans [Ro]. Nous concluons en donnant une version "uniforme" du théorème 1 (théorème 3).

L'auteur remercie Lou van den Dries pour ses encouragements lors de la réalisation de ce travail et l'UIUC pour son accueil. Il remercie aussi Patrick Speissegger qui lui a permis de mettre au point une preuve exacte du théorème principal.

I. Familles et structures o-minimales

On appelle *famille o-minimale* une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles des espaces $\mathbf{R}^n$ qui vérifie les trois propriétés suivantes:
(i) La famille $\mathcal{A}$ est stable par produit, projection, intersection, réunion et différence.
(ii) Les semi-algébriques bornés sont des éléments de $\mathcal{A}$.
(iii) Tout élément de $\mathcal{A}$ a un nombre fini de composantes connexes.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *$\mathcal{A}$-sous-ensembles*. Une application d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ est une *$\mathcal{A}$-application* si son graphe est un $\mathcal{A}$-sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+m}$.

Remarquons que si $\mathcal{A}$ est une famille o-minimale, la famille $\overline{\mathcal{A}}$ suivante en est également une: un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est un élément de $\overline{\mathcal{A}}$ si et seulement s'il existe deux $\mathcal{A}$-sous-ensembles B et C de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ tels que $A = B \cup \{x \mid \|x\| > 1 \text{ et } x/\|x\|^2 \in C\}$.

Le théorème de Tarski-Seidenberg donne un sens à cette définition. Les semi-algébriques forment une famille o-minimale. Voici trois autres exemples "classiques" de telles familles. La famille $\mathcal{S}$ des sous-analytiques bornés (les projetés des semi-analytiques bornés) est une famille o-minimale [Ga1]. Les éléments de la famille o-minimale $\overline{\mathcal{S}}$ associée sont habituellement appelés *sous-analytiques globaux*. Le graphe $\{(x, \exp x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ appartient à une famille o-minimale [Wi]. Il appartient aussi à une famille o-minimale qui contient les sous-analytiques globaux [DMM]. Ces familles o-minimales sont des sous-familles de la famille $\overline{\mathbf{T}^\infty}$ des T^∞-pfaffiens globaux pour lesquelles les conclusions du théorème 1 sont déjà connues [DMM].

Ces quatres exemples sont des exemples de familles o-minimales $\mathcal{A}$ dont les éléments admettent des stratifications de Whitney par des sous-variétés analytiques appartenant à $\mathcal{A}$. C'est encore vrai pour les T^∞-pfaffiens globaux [LS]. Pour l'instant, on ne connaît pas de famille o-minimale qui ne vérifie pas cette affirmation.

La définition de famille o-minimale qui précède n'est pas équivalente à celle de *structure o-minimale* de [Dr1]. En particulier il faut remplacer l'hypothèse de stabilité par différence par celle de stabilité par passge au complémentaire. Cependant, si $\mathcal{A}$ est une famille o-minimale selon notre point de vue, alors la famille $\overline{\mathcal{A}}$ associée est une structure o-minimale selon [Dr1]. De plus, une structure o-minimale suivant [Dr1] qui contient les semi-algébriques est une famille o-minimale. C'est pourquoi, à l'exception de la stabilité par passage au complémentaire, les propriétés générales des structures o-minimales selon [Dr1] restent vraies pour les familles o-minimales. Voici les plus classiques.

THÉORÈME [Dr1], [DM]. *Si $\mathcal{A}$ est une famille o-minimale alors*:

(1) *Soit $A \subset \mathbf{R}^{n+m}$ un élément de $\mathcal{A}$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ qui majore uniformément le nombre de composantes connexes des sous-ensembles $\{y \in \mathbf{R}^m \mid (x, y) \in A\}$, $x \in \mathbf{R}^n$. De plus ces composantes connexes appartiennent à $\mathcal{A}$.*

(2) *Soient $A_1, \ldots, A_q \subset \mathbf{R}^n$ appartenant à $\mathcal{A}$ et soit $k \in \mathbf{N}$. Le sous-ensemble $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_q}$ admet une stratification de Whitney en sous-variétés de classe C^k qui appartiennent à $\mathcal{A}$. Chaque A_i est la réunion de certaines strates.*

(3) *Soient A et B deux compacts de $\mathbf{R}^n$ appartenant à $\mathcal{A}$. Il vérifient des inégalités de Lojasiewicz: il existe $\eta > 0$ et $f\colon\ ]0, \eta[\to]0, 1]$ une $\mathcal{A}$-fonction telle que*

$$\text{(L)}\quad f(d(x, A \cap B)) < d(x, B) \ \text{ si } \ x \in A \setminus B \ \text{ et } \ d(x, A \cap B) < \eta.$$

La difficulté du théorème réside dans les deux premières propriétés. Pour montrer la propriété (3) il suffit de remarquer que la fonction g définie par

$$g(t) = \inf\{u \mid \exists x \in A \setminus B, d(x, A \cap B) = t, d(x, B) = u\} \cup \{1\} \ \text{ si } \ t > 0$$

est une $\mathcal{A}$-fonction strictement positive. On l'appelle *fonction de Lojasiewicz associée à A et B*. On retrouve les inégalités de Lojasiewicz classiques de la géométrie analytique [Lo] à partir de la propriété (3). Il suffit d'utiliser la représentation de Puiseux des germes à l'origine des fonctions sous-analytiques globales d'une variable [Lo]. On obtient: si A et B sont deux sous-analytiques de $\mathbf{R}^n$ et si a est un point de l'intersection $A \cap B$, alors la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\inf(\{\log d(x, \overline{A} \cap \overline{B}) / \log d(x, \overline{B}) \mid x \in \overline{A} \setminus \overline{B}, \|x - a\| < \varepsilon\} \cup \{1\}))$$

est un rationnel $r_{A,B}(a)$ appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ et appelé *exposant de Lojasiewicz*. Nous reviendrons sur ces exposants dans la deuxième partie.

Un *corps de Hardy* est un ensemble $\mathbf{K}$ de germes en $+\infty$ de fonctions réelles et dérivables qui est stable par dérivation et qui forme un corps ordonné pour l'addition et la multiplication [Ro]. Un élément de $\mathbf{K}$ admet en $+\infty$ une limite dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. D'après [Ro], deux éléments f et g de $\mathbf{K}$ qui tendent vers $+\infty$ à l'infini sont dits *comparables* si et seulement s'il existe r, s des rationnels strictement positifs tels que $f^r \leq g \leq f^s$ à l'infini. Etre comparables est une relation d'équivalence. Le nombre de classe de comparabilité dans le corps de Hardy $\mathbf{K}$ s'appelle le *rang* de $\mathbf{K}$. L'ensemble des germes en $+\infty$ des fonctions réelles dont les graphes appartiennent à une famille o-minimale donnée est un exemple de corps de Hardy.

Considérons maintenant une famille o-minimale $\mathcal{A}$ qui contient la famille $\overline{\mathcal{S}}$ des sous-analytiques globaux. Si $T \mapsto f(T) \in \mathbf{R}^m$ est une $\mathcal{A}$-fonction définie à l'infini et si A est un sous-analytique global de $\mathbf{R}^m$, il existe $K > 0$ tel que $f(]K, +\infty[)$ est contenu dans A ou disjoint de A. Grâce à cette remarque, le lemme suivant est un corollaire immédiat du théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales de [Pa] et [LR2]. C'est une variante du corollaire 3.7 de [DMM] qui ramène le théorème 1 aux résultats de [Ro].

LEMME 1. *Soit $\mathcal{A}$ une famille o-minimale qui contient les sous-analytiques globaux et soient $g_1, \dots, g_m$ des $\mathcal{A}$-fonctions définies à l'infini. On suppose que les limites de ces fonctions à l'infini sont toutes nulles. Il existe des fonctions sous-analytiques globales $\alpha_1 \equiv 0$ et $\alpha_i(x_1, \dots, x_{i-1})$, $i = 2, \dots, m$ vérifiant les conclusions suivantes.*

– Pour chaque $i = 2, \dots, m$, la limite à l'infini de $\alpha_i(g_1, \dots, g_{i-1})/g_i$ est 1 *ou la fonction α_i est identiquement nulle.*

– Si θ: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ est une fonction sous-analytique globale, et si la fonction $f = \theta(g_1, \dots, g_m)$ n'est pas identiquement nulle à l'infini il existe $r_1, \dots, r_m \in \mathbf{Q}$ et $A \neq 0$ tels que la limite $\lim_{+\infty} f(T)G_1(T)^{r_1} \dots G_m(T)^{r_m}$ *existe et soit égale à A avec $G_i = |\alpha_i(g_1, \dots, g_{i-1}) - g_i|$ pour $i = 1, \dots, m$.*

Preuve. On prouve ce lemme en faisant une récurrence sur m. Si $m = 1$ on trouve l'exposant r_1 en faisant un développement de Puiseux de θ en $\lim_{+\infty} g_1 \in \overline{\mathbf{R}}$.

Soit $m > 1$ et supposons le lemme prouvé jusqu'au rang $m - 1$. Soit θ: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ une fonction sous-analytique globale telle que $f = \theta(g_1, \dots, g_m)$ ne soit pas identiquement nulle à l'infini. D'après le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales de [Pa] et [LR2] il existe $r \in \mathbf{Q}$ et des fonctions sous-analytiques globales β, Θ: $\mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}$ tels que

$$\lim_{+\infty} f(T)/(|\beta(g_1, \dots, g_{m-1}) - g_m|^r \Theta(g_1, \dots, g_{m-1})) = 1$$

et $\beta \equiv 0$ ou $\lim_{+\infty} \beta(g_1, \dots, g_{m-1})/g_m = 1$.

Considérons le sous-ensemble E de germes de fonctions de la forme $G = |\alpha(g_1, \dots, g_{m-1}) - g_m|$ avec α sous-analytique globale et $\lim_{+\infty} \alpha(g_1, \dots, g_{m-1})/g_m = 1$. On discute suivant la nature de E et celle de β.

Si E est vide on pose $\alpha_m \equiv 0$ et $G_m = |g_m|$. La fonction $f(T)/G_m(T)^r$ est équivalente à l'infini à $\Theta(g_1, \dots, g_{m-1})$. On conclut avec l'hypothèse de récurrence.

On suppose maintenant E non vide.

Si E admet un élément $\tilde{G} = |\tilde{\alpha}(g_1, \ldots, g_{m-1}) - g_m|$ tel que pour tout G dans E le quotient $\tilde{G}/G$ est borné à l'infini on pose $\alpha_m = \tilde{\alpha}$ et $G_m = \tilde{G}$. Si $\beta \equiv 0$ alors f est équivalent à l'infini à $|\alpha_m|^r \Theta(g_1, \ldots, g_{m-1})$. On conclut avec l'hypothèse de récurrence. Sinon $C = \lim_{+\infty} G_m/|\beta(g_1, \ldots, g_{m-1}) - g_m|$ appartient à $\mathbf{R}$. Si $C = 0$ alors f est équivalent à l'infini à $|\beta(g_1, \ldots, g_{m-1}) - \alpha_m(g_1, \ldots, g_{m-1})|^r \Theta(g_1, \ldots, g_{m-1})$. Si $C \neq 0$ alors $C^r f/G_m(T)^r$ est équivalent à l'infini à $\Theta(g_1, \ldots, g_{m-1})$. On conclut chaque fois avec l'hypothèse de récurrence.

Enfin, si E est non vide et pour tout $\tilde{G} \in E$ il existe $G \in E$ tel que $\lim_{+\infty} \tilde{G}/G = +\infty$ alors g_m et tous les germes de E sont équivalents à l'infini à des fonctions de la forme $\alpha(g_1, \ldots, g_{m-1})$ et on pose $\alpha_m \equiv 0$ et $r_m = 0$. On conclut encore avec l'hypothèse de récurrence.

Remarque. D'après la version algébrique du théorème de préparation [LR3] la conclusion du lemme est vrai pour toute famille o-minimale si θ est semi-algébrique.

Le corollaire suivant se déduit immédiatement du lemme 1 et de [Ro].

COROLLAIRE 1. *Soit $\mathcal{A}$ et $g_1, \ldots, g_m$ comme dans le lemme* 1. *Si l'ensemble* $\mathbf{K}$ *des germes de fonctions de la forme $\theta(g_1, \ldots, g_m)$ avec θ sous-analytique globale est un corps de Hardy alors il est de rang au plus m.*

II. Feuilles de Rolle et T^∞-pfaffiens

Un *couple de Pfaff de* $\mathbf{R}^n$ est la donnée (M, ω) d'un ouvert sous-analytique borné $M \subset \mathbf{R}^n$ et d'une 1-forme différentielle analytique $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ définie sur M, à coefficients analytiques et sous-analytiques bornés, intégrable et sans singularité dans M (si $x \in M$, $\omega \wedge d\omega(x) = 0$ et $\omega(x) \neq 0$). La forme ω définit donc un feuilletage analytique de codimension 1 de M noté $\mathcal{F}(M, \omega)$. Si de plus M est semi-analytique et ω admet une extension analytique au voisinage de $\overline{M}$ le couple de Pfaff est dit *ancien.*

Un sous-ensemble V de $\mathbf{R}^n$ est appelé *feuille de Rolle* s'il existe un couple de Pfaff (M, ω) tel que V soit une feuille de $\mathcal{F}(M, \omega)$ qui ne rencontre aucun lacet γ de classe C^1, inclus dans M et transverse à $\mathcal{F}(M, \omega)$.

Un T^∞-*système* $\mathcal{H} = ((M_i, \omega_i)_{i \leq q}, X)$ de $\mathbf{R}^m$ est la donnée d'une famille finie de couples de Pfaff (M_i, ω_i) de $\mathbf{R}^m$ et d'un sous-analytique X inclus dans les M_i. Il est dit *ancien* si les couples (M_i, ω_i) sont anciens et si X est semi-analytique. Un *pfaffien* associé à $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m$ de la forme $X \cap (\cap_i V_i)$ où les V_i sont des feuilles de Rolle associées aux couples de Pfaff (M_i, ω_i). Soit $n \leq m$. Un T^∞-*pfaffien de* $\mathbf{R}^n$ associé à $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ de la forme suivante. Il existe une famille $(W_{k,j})_{k,j \in \mathbf{N}}$ de pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}$ tels que:

(i) A j fixé, la suite de $(W_{k,j})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers un compact A_j.

(ii) Les A_j forment une suite croissante de compacts de $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ de réunion $\iota_{m,n}(A)$.

Pour définir un *ancien* T^∞*-pfaffien de* $\mathbf{R}^n$ on suppose que $\mathcal{H}$ est un ancien T^∞-système et on remplace la condition ii par:

(ii′) Les $\pi_{m,n}(A_j)$ forment une suite croissante de compacts de $\mathbf{R}^n$ de réunion A.

On note $\mathbf{T}^\infty$ la famille des T^∞-pfaffiens. Les éléments de $\overline{\mathbf{T}}^\infty$ sont appelés T^∞-*pfaffiens globaux.*

Ces définitions appellent un commentaire. Les anciens couples de Pfaff, les anciens T^∞-systèmes et les anciens T^∞-pfaffiens sont ceux considérés par [LR1]. La proposition suivante montre que les T^∞-pfaffiens et les anciens T^∞-pfaffiens coïncident.

PROPOSITION 1. *Si $\mathcal{H}$ est un T^∞-système, il existe un ancien T^∞-système $\mathcal{H}'$ tel que tout T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{H}$ est aussi un ancien T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{H}'$. La réciproque est aussi vraie.*

Preuve. Elle reprend et précise des arguments de [CLM]. Nous allons montrer:

($*$) Le théorème de finitude uniforme [MR] est vrai pour les T^∞-systèmes.

($**$) Soit (M, ω) un couple de Pfaff de $\mathbf{R}^n$ et $X \subset M$ un sous-analytique. Il existe
- des sous-analytiques lisses $X_1, \dots, X_s$ inclus dans M et tangents à la distribution d'hyperplans $\ker \omega_{|M}$,
- des anciens couples de Pfaff $(M_1, \omega_1), \dots, (M_d, \omega_d)$ de $\mathbf{R}^{n_1}, \dots, \mathbf{R}^{n_d}$,
- des applications G_i à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et analytiques au voisinage des $\overline{M_i}$

tels que
- $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_s) = G_1(M_1) \cup \dots \cup G_d(M_d)$,
- $\omega_{i|M_i} = (G_{i|M_i})^*(\omega)$ si $i = 1, \dots, d$.

($* * *$) Soit $n \leq m$ et $\mathcal{H} = ((M_i, \omega_i)_{i \leq q}, X)$ un T^∞-système de $\mathbf{R}^m$. Il existe un T^∞-système $\mathcal{H}'$ de $\mathbf{R}^{m+1}$ vérifiant les propriétés suivantes. Si $(W_{k,j})_{k,j \in \mathbf{N}}$ sont des pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}$ tels que
- à j fixé, $(\pi_{m,n}(W_{k,j}))_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers un compact A_j,
- les ensembles A_j forment une suite croissante de réunion A,

alors A est un T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{H}'$ et les ensembles

$$W'_{i,j}(\varepsilon) = \{(x, y, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n} \times \mathbf{R} \mid t = \varepsilon, (x, y/t) \in W_{i,j}\}, \ \varepsilon \in]0, 1[$$

sont des pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}'$.

Ces affirmations prouvent la proposition. En effet, les affirmations ($*$) et ($**$) garantissent qu'une feuille de Rolle V associée à un couple de Pfaff (M, ω) et si $X \subset M$ est un sous-analytique alors $X \cap V$ est l'image par des projections d'un nombre fini de feuilles de Rolle asociées à des couples de Pfaff anciens ne dépendant que de (M, ω) et de X. Il en résulte que si $\mathcal{H}$ est un T^∞-système il existe un ancien T^∞-système $\mathcal{H}'$ tel que tout T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{H}$ est aussi un ancien T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{H}'$. L'affirmation ($* * *$) assure alors la réciproque.

L'affirmation ($*$) est prouvée dans [Sp]. Le lecteur peut la retrouver en adaptant les preuves de [MR] ou [LR1]. Il suffit d'utiliser les propriétés suivantes des sous-analytiques [DS]. Ils sont stratifiables en sous-variétés analytiques et sous-analytiques et si X une sous-variété analytique de $\mathbf{R}^n$ qui est aussi un sous-analytique borné alors son espace tangent est un sous-analytique global. De plus, la restriction δ à X de la fonction $d(\cdot, \overline{X} \setminus X)$ est sous-analytique, elle est analytique en dehors d'un sous-analytique X' de dimension strictement plus petite que $\dim(X)$ et la différentielle de $\delta_{X \setminus X'}$ est sous-analytique globale.

Prouvons l'affirmation $(**)$. On note Ω le graphe de la restriction à X de l'application $(a_1, \ldots, a_n)$ où $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$. C'est un sous-analytique borné de dimension n de $\mathbf{R}^{2n}$. Il existe $m \geq 2n$ et un semi-analytique borné $\Omega' \subset \mathbf{R}^m$ de dimension n tel que $\Omega = \pi_{m,2n}(\Omega')$. On applique le théorème d'uniformisation à Ω' (voir [Hi], [AHV] et [DD]). Il existe $d \in \mathbf{N}$ et pour $i = 1, \ldots, d$ il existe $n_i \leq n$ et une application analytique g_i définie au voisinage de la fermeture $\overline{N_i}$ d'un ouvert semi-analytique borné $N_i \in \mathbf{R}^{n_i}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ tels que Ω' soit la réunion des sous-analytiques $g_1(N_1), \ldots, g_d(N_d)$. Si $i = 1, \ldots, d$ on pose $G_i = \pi_{m,n} \circ g_i$. La 1-forme $(G_{i|N_i})^*(\omega)$ admet un prolongement analytique ω_i au voisinage de $\overline{N_i}$. On pose $M_i = \{x \in N_i | \omega_i(x) \neq 0\}$ et $Y_i = G_i(N_i \setminus M_i)$. Les données $(M_i, \omega_i), G_i$ associées à une stratification de la réunion des Y_i vérifient les conclusions de $(**)$.

L'affirmation $(***)$ résulte d'un simple calcul. □

Les démonstrations de [LR1] permettent d'obtenir des conclusions légèrement plus fortes que celles énoncées dans ce précédent travail. Plus précisément elles prouvent le théorème "uniforme" suivant.

THÉORÈME 2 (version "uniforme" de [LR1]). *Les* T^∞*-pfaffiens forment une famille o-minimale qui contient les sous-analytiques bornés et les feuilles de Rolle. Si* $n \in \mathbf{N}$, *les* T^∞*-pfaffiens de* $\mathbf{R}^n$ *sont des boréliens. De plus si* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ *et* $\mathcal{H}'$ *sont trois* T^∞*-systèmes, il existe un* T^∞*-système* $\mathcal{K}$, $d \in \mathbf{N}$ *et* $K > 0$ *vérifiant les propriétés suivantes*:

(i) *Tout* T^∞*-pfaffien associé à* $\mathcal{K}$ *a au plus* d *composantes connexes.*

Soient $A_1 \subset \mathbf{R}^n$, $A_2 \subset \mathbf{R}^n$, *et* $A' \subset \mathbf{R}^{n'}$ *des* T^∞*-pfaffiens associés à* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, *et* $\mathcal{H}'$.

(ii) *Il existe un* T^∞*-pfaffien négligeable* $B \subset \mathbf{R}^n$ *associé à* $\mathcal{K}$ *tel que* $\overline{A_1} \setminus \mathrm{int}(A_1) \subset B$ *et le volume du tube* $\mathrm{Tub}(B, \varepsilon)$ *est inférieur à* $K\varepsilon$ *si* $\varepsilon < 1$.

(iii) *Les ensembles* A_1, $\overline{A_1}$, $\pi_{n,n-1}(A_1)$, $(\{x\} \times [0,1]) \cap A_1, x \in \mathbf{R}^{n-1}$, $A_1 \times A'$, $A_1 \cap A_2$, *et* $A_1 \cup A_2$ *sont des* T^∞*-pfaffiens associés à* $\mathcal{K}$.

(iv) *Les ensembles* $A_1 \setminus A_2$ *et les composantes connexes de* A_1 *sont des* T^∞*-pfaffiens associés à* $\mathcal{K}$.

Nous allons donner au lecteur des indications pour qu'il puisse déduire cet énoncé de [LR1]. Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux T^∞-systèmes, il peut rapidement construire un T^∞-système $\mathcal{H}_{1,2}$ tel que tout T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ est aussi associé à $\mathcal{H}_{1,2}$. On déduit alors facilement de cette remarque, des propositions 1, 2, 3 de [LR1] et du théorème de Sard-Wilkie pfaffien de [LR1]:

PROPOSITION 2. *Il existe* d' *et* $\mathcal{K}'$ *vérifiant toutes les conclusions du théorème exepté la condition* (*iv*).

Il est montré dans [LR1] que les composantes connexes d'un T^∞-pfaffien et la différence de deux T^∞-pfaffiens sont des T^∞-pfaffiens (démonstration du théorème 2 de [LR1]). Pour gagner le caractère "uniforme" par rapport à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ de l'affirmation (iv) il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2 de [LR1] en utilisant la proposition 2 et le lemme ensembliste-topologique "uniforme" suivant.

LEMME 2. *Si $n, N \in \mathbf{N}$, il existe M et des semi-linéaires $Z_1, \dots, Z_M$ tels que pour tout $A \subset]0,1[^n$ et tout $C \subset]0,1[^{n-1}$ les sous-ensembles suivants de $[0,1]^{n-1}$ et $[0,1]^n$ sont obtenus à partir de A, C et des Z_k en faisant au plus M différences dans $[0,1]^{n-1}$, projections canoniques, intersections produits et passage à l'adhérence*:

$$C^{N+1} = \{c \in]0,1[^{n-1} \mid \mathrm{Card}((\{x\} \times [0,1]) \cap A) \geq N+1\},$$
$$C_0 =]0,1[^{n-1} \setminus \pi_{n,n-1}(A),$$

et si $1 \leq i \leq N$,

$$C_i = \{c \in]0,1[^{n-1} \mid \mathrm{Card}((\{x\} \times [0,1]) \cap A) = i\},$$
$$A_{i,0} = C_i \times \{0\},$$
$$A_{i,j} = \{(c,t) \mid c \in C_i, \exists t_1 < \cdots < t_i,\ t = t_j \text{ et } (c,t_1), \dots, (c,t_i) \in A\},\ 1 \leq j \leq i,$$
$$A_{i,i+1} = C_i \times \{1\},$$
$$S_i = \{c \in C_i \mid \exists j \text{ tel que } \mathrm{Card}((\{x\} \times [0,1]) \cap \overline{A_{i,j}}) \geq 2\},$$
$$CA_{i,k} = \{(c,t) \mid c \in C,\ \exists s < t < u,\ (x,s) \in A_{i,k},\ (x,u) \in A_{i,k+1}\},\ 0 \leq k \leq i.$$

Ce lemme est à la base des décompositions cellulaires: si C est une composante connexe de $C_i \setminus S_i$ alors les $(C \times [0,1]) \cap A_{i,j}$ et les $CA_{i,k}$ sont connexes. On trouve des énoncés équivalents dans [Lo], [Dr1], [BCR], [Ga1,2] par exemple.

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux T^∞-systèmes de $\mathbf{R}^m$. Si W_1 et W_2 sont deux pfaffiens associés à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ alors W_1 et W_2 sont localement sous-analytiques au voisinage de chaque point a de l'intersection $W_1 \cap W_2$. En un tel point $\overline{W_1}$ et $\overline{W_2}$ satisfont les inégalités de Lojasiewicz classiques. L'exposant de Lojasiewicz $r_{W_1,W_2}(a)$ est bien défini et c'est un rationnel appartenant à l'intervalle $]0,1]$. Or le graphe R_{W_1,W_2} de la fonction $a \in W_1 \cap W_2 \mapsto r_{W_1,W_2}(a)$ est un T^∞-pfaffien. Plus précisément, on déduit du théorème 2 qu'il existe un T^∞-système $\mathcal{K}$ tel que R_{W_1,W_2} est un T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{K}$ si W_1 et W_2 sont associés à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Il résulte alors des propriétés de finitude uniforme des T^∞-pfaffiens:

PROPOSITION 3. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux T^∞-systèmes de $\mathbf{R}^m$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ qui majore le cardinal du sous-ensemble $R_{W_1,W_2}(W_1 \cap W_2)$ quelque soient les pfaffiens W_1 et W_2 associés à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.*

Cette proposition est une version analytique très partielle de résultats de [Ga3]. Une question reste ouverte. Existe-t-il un sous-ensemble fini de $\mathbf{Q}$ qui contienne tous les sous-ensembles $R_{W_1,W_2}(W_1 \cap W_2)$ lorsque W_1 et W_2 sont des pfaffiens associés à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$?

Les résultats de [LS] appliqués aux courbes T^∞-pfaffiennes donnent l'énoncé suivant qui est fort important pour démontrer le théorème 1.

LEMME 3 [LS]. *Soit $\mathcal{H}$ un* T^∞*-système. Il existe* $n, m \in \mathbf{N}, m \neq 0$ *et un champ de vecteurs analytique* D *défini sur une sous-variété analytique* X *de dimension* m *de* $\mathbf{R}^{1+n}$ *et de graphe sous-analytique global vérifiant les propriétés suivantes. Si* u: $]0,1[\to]0,1]$ *est une fonction de graphe* T^∞*-pfaffien associé à* $\mathcal{H}$*, alors il existe* $\eta > 0$ *tel que la restriction de* u *à l'intervalle* $]0,\eta[$ *est analytique. Le champ* D *admet une trajectoire qui est un* T^∞*-pfaffien de la forme*

$$\{(t, u(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) \mid t \in \,]0, \eta[\}.$$

De plus on peut supposer que si $x \in X$ *alors* $\pi_{1+n,1}(D(x)) = \partial/\partial t$.

III. Démonstration du théorème 1

D'après la version o-minimale des inégalités de Lojasiewicz (propriété 3 des familles o-minimales) le théorème 1 est un simple corollaire de la proposition suivante.

PROPOSITION 4. *Soit* u: $]0,1[\to\,]0,1]$ *une fonction de graphe* T^∞*-pfaffien. Il existe* $N \in \mathbf{N}$ *tels que*

$$u(t) > 1/\exp_N(1/t) \quad \textit{si} \quad t > 0 \quad \textit{est assez petit.}$$

La preuve de cette proposition utilise le corollaire 1 et le lemme 3 qui permettent de ce ramener au théorème 2 de [Ro].

Preuve de la proposition 4. Par o-minimalité, la famille des germes en $+\infty$ des fonctions analytiques de graphes T^∞-pfaffiens forme un corps de Hardy.

On applique le lemme 3 à la fonction u. Soient $\eta > 0$, $n, m \in \mathbf{N}$, $m \neq 0$, X la sous-variété et D le champ de vecteurs ainsi obtenus.

Si $n = 0$ ou $m = 1$, alors u est une fonction sous-analytique bornée. Elle vérifie donc les conclusions voulues. On suppose maintenant que $n > 0$ et $m > 1$. On note f_0 la restriction à X de la seconde coordonnée de $\mathbf{R}^{1+n}$ et si $k \geq 0$ on note f_{k+1} la dérivée de Lie de f_k par rapport à D: $f_{k+1} = L_D(f_k) = df_k \cdot D$. Ces fonctions sont analytiques, sous-analytiques globales et sont définies en tout point $w = (t, v_1, \ldots, v_n)$ de X. On note $\mathbf{D}$ le sous-ensemble

$$\mathbf{D} = \{(t, v_1, f_1(w), \ldots, f_{m-1}(w), v_2, \ldots, v_n) \mid w = (t, v_1, \ldots, v_n) \in X\}.$$

C'est un sous-analytique global de dimension m de $\mathbf{R}^{m+n}$. On note $\mathcal{D}$ le projeté de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{R}^{1+m}$. C'est un sous-analytique global de codimension au moins un de $\mathbf{R}^{1+m}$. Par construction, le sous-ensemble $\mathcal{D}$ contient la courbe T^∞-pfaffienne

$$\{(t, u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(m-1)}(t)) \mid t \in \,]0, \eta[\}.$$

On pose $U(T) = 1/u(1/T)$ si $T > 1/\eta$. Par ce changement de variables, le sous-analytique global $\mathcal{D}$ se transforme en un sous-analytique global $\mathcal{E}$ de dimension au plus m qui contient la courbe T^∞-pfaffienne

$$\gamma = \{(T, U(T), U^{(1)}(T), \ldots, U^{(m-1)}(T)) \mid T \in]1/\eta, +\infty[\}.$$

Considérons une décomposition cellulaire en cellules sous-analytiques globales et analytiques de $\mathcal{E}$ adaptée aux projections $\pi_{1+m,i}$. Il existe une cellule C qui contient le germe de γ à l'infini. Soit $m' \leq m$ tel que $\dim(\pi_{1+m,m'}(C)) = \dim(\pi_{1+m,1+m'}(C)) = m'$. Quitte à remplacer $\mathcal{E}$ par $\pi_{1+m,1+m'}(C)$ et m par m' on peut supposer que $\mathcal{E}$ est de la forme suivante. Il existe un ouvert E de $\mathbf{R}^m$ et une fonction analytique θ: $E \to \mathbf{R}$ de graphe $\mathcal{E}$. En d'autres termes *La fonction U est solution d'une équation différentielle sous-analytique globale d'ordre au plus $m-1$: $U^{(m-1)} = \theta(T, U, \ldots, U^{(m-2)})$.*

Il en résulte que l'ensemble $\mathbf{K}$ des germes à l'infini de fonctions de la forme $f(T) = \Theta(T, U, \ldots, U^{(m-2)})$ avec Θ sous-analytique globale est un corps de Hardy. La structure de corps est claire. Montrons pourquoi $\mathbf{K}$ est stable par dérivation. Etant donnée un germe $f(T) = \Theta(T, U, \ldots, U^{(m-2)})$ de $\mathbf{K}$, il existe une sous-variété analytique Γ de $\mathbf{R}^m$ qui est un sous-analytique global et telle que:

– La restriction $\Theta_{|\Gamma}$ de Θ à Γ est analytique et son graphe est un sous-analytique global.

– Le germe à l'infini $\{(T, U, \ldots, U^{(m-2)})\}$ est inclus dans Γ.

La dérivée df/dT est donc égale à

$$df/dT = d\Theta_{|\Gamma}(T, U, \ldots, U^{(m-2)}) \cdot (1, U^{(1)}, \ldots, U^{(m-2)}, \theta(T, U, \ldots, U^{(m-2)})).$$

Puisque l'application qui vaut $d\Theta_{|\Gamma}$ en tout point de Γ et qui est nulle hors de Γ est sous-analytique globale, la fonction df/dT est bien de la forme voulue.

D'après le corollaire 1 appliqué aux fonctions $1/T, 1/U, \ldots, 1/U^{(m-2)}$ et à $\mathbf{K}$, le rang de ce corps de Hardy est au plus m. On achève la preuve de la proposition 4 en utilisant le théorème 2 de [Ro]. □

On déduit de la démonstration précédente et du théorème 2 de [Ro]:

PROPOSITION 5. *Soit $\mathcal{A}$ une famille o-minimale qui contient les sous-analytiques globaux et soit $\mathcal{E}$ un sous-analytique global de dimension inférieure ou égale à $m+1$ de $\mathbf{R}^{2+m}$. Si $T \in]K, +\infty[\mapsto U(T) \in \mathbf{R}$ est une $\mathcal{A}$-fonction de classe C^m et qui vérifie*

$$\{(T, U(T), U^{(1)}(T), \ldots, U^{(m)}(T)) \mid T \in]K, +\infty[\} \subset \mathcal{E}$$

alors il existe $r > 1$ tel que $U(T) < \exp_{m+1}(T^r)$ à l'infini.

Patrick Speissegger m'a fait remarquer que les conclusions du théorème 1 sont vraies si A et B sont deux compacts appartenant à la clôture pfaffienne des sous-analytiques globaux. En effet d'après [Sp], c'est une famille o-minimale et d'après [LS], la conclusion du lemme 3 est vraie dans cette situation.

Pour conclure, donnons une version "uniforme" du théorème 1. D'après le théorème 2, si $\mathcal{H}$ est un T^∞-système, il existe un T^∞-système $\mathcal{K}$ tel que pour tout couple (A, B) de T^∞-pfaffiens compacts associés à $\mathcal{H}$, le graphe de la fonction de Lojasiewicz $R_{A,B}$ associée (voir partie 2) est un T^∞-pfaffien associé à $\mathcal{K}$. Ceci implique, d'après le lemme 3 et la proposition 5 la version "uniforme" suivante du théorème 1.

THÉORÈME 3. *Soit $\mathcal{H}$ un T^∞-système. Il existe N tel que si A et B sont deux T^∞-pfaffiens compacts de $\mathbf{R}^n$ associés à $\mathcal{H}$ alors*

$$1/\exp_N(1/d(x, A \cap B)) \leq d(x, B) \;\; si \;\; x \in A \setminus B.$$

BIBLIOGRAPHIE

[AHV] J. M. Aroca, H. Hironaka et J. L. Vicente, *Desingularization theorems*, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, no. 30, CSIC, Madrid 1977; *The theory of the maximal contact*, ibid, no. 29, 1975.

[BCR] J. Bochnak, M. Coste et F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Erg. Mat. (3), no. 12, Springer-Verlag, New York, 1987.

[CLM] F. Cano, J.-M. Lion et R. Moussu, *Frontière d'une hypersurface pfaffienne*, Ann. ENS **28** (1995), 591–646.

[DD] J. Denef, L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. of Math. **128** (1988), 79–138.

[DM] L. van den Dries et C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497–540.

[DMM] L. van den Dries, A. Macintyre et D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. of Math. **140** (1994), 183–205.

[Dr1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London. Math. Soc. Lecture Note Ser., no. 248, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[Dr2] ———, *Bounding the rate of growth of solutions of algebraic differential equations and exponential equations in Hardy fields*, preprint, 1982.

[DS] S. Denkowska et J. Stasica, *Ensemble sous-analytiques à la polonaise*, preprint, 1985.

[Ga1] A. M. Gabrielov, *Projections of semi-analytic sets*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), 282–291.

[Ga2] A. M. Gabrielov, *Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions*, Invent. Math. **125** (1996), 1–12.

[Ga3] A. M. Gabrielov, *Multiplicities of Pfaffian intersections, and the Lojasiewicz inequality*, Selecta Math. (N. S.) **1** (1995), 113–127.

[Gr1] D. Grigoriev, *Deviation theorems for pfaffian sigmoids*, Algebra i Analiz **6** (1994), 127–131.

[Gr2] ———, *Deviation theorems for solutions of linear ordinary differential equations and applications to parallel complexity of sigmoids*, Algebra i Analiz **6** (1994), 110–126.

[Hi] H. Hironaka, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Istituto Matematico "L. Tonelli", Pisa, 1973.

[Kh] A. G. Khovanskii, *Real analytic varieties with the finitness property and complex abelian integrals*, Funct. Anal. Appl. **18** (1984), 119–127.

[Lo] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, preprint, IHES, 1965.

[LR1] J.-M. Lion et J.-P. Rolin, *Volumes, Feuilles de Rolle de Feuilletages analytiques et Théorème de Wilkie*, Annales de Toulouse **7** (1998), 93–112.

[LR2] ———, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier **47** (1997), 859–884.

[LR3] ———, *Théorème de Gabrielov et fonctions log-exp-algébriques*, CRAS **324** (1997), 1027–1030.

[LS] J.-M. Lion et P. Speissegger, *The pfaffian closure: analytic stratifications*, preprint (version de mars 1999).

[MR] R. Moussu et C. A. Roche, *Théorie de Hovanskii et problème de Dulac*, Invent. Math. **105** (1991), 431–441.

[Pa] A. Parusiński, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. ENS **27** (1994), 661–996.

[Ro] M. Rosenlicht, *The rank of a Hardy field*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 659–671.

[Sp] P. Speissegger, *The Pfaffian closure of an o-minimal structure*, J. Reine Angew. Math. **508** (1999), 189–211.

[To] J.-C. Tougeron, *Inégalités de Lojasiewicz globales*, Ann. Inst. Fourier **41** (1991), 841–866.

[Wi] A. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 1051–1094.

Laboratoire de Topologie, UMR5584-CNRS, Université de Bourgogne, BP47870, 21078 Dijon cedex, France
lion@u-bourgogne.fr