

**Sur les représentations de l'unité par les formes binaires
biquadratiques du premier rang**

Par TRYGVE NAGELL

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. Les formes binaires à coefficients entiers	478
1. Équivalence	478
2. Représentations	478
3. Équivalence de deux formes données	479
4. Les formes binaires biquadratiques du premier rang	480
§ 2. Classification des corps biquadratiques du premier rang	482
5. Résumé de certains résultats antérieurs	482
§ 3. Les unités binaires dans les corps biquadratiques du premier rang	484
6. Introduction	484
7. Les équations (16), (16'), (17) et (18) pour $v \neq 0$	486
8. Les équations (17) et (18) pour $v = 0$	490
§ 4. Sur la résolubilité simultanée de certaines équations du paragraphe précédent	492
9. Le cas $\Delta = 1$	492
10. Le cas $\Delta = 3$	494
§ 5. Le nombre de représentations de l'unité dans les différents cas	498
11. Résumé des résultats établis dans les numéros 7-10	498
12. Les formes des catégories 2, 8, 9, 10, 11, 12 et 13	504
13. Les formes des catégories 3 et 14	504
14. Les formes de la catégorie 4	504
15. Les formes des catégories 5 et 7	504
16. Les formes de la catégorie 6	505
17. Remarques sur les résultats obtenus dans les numéros 11-16	509
18. Les formes engendrées par une unité	511
19. Le calcul numérique	513
20. Le nombre de représentations de l'unité après une transformation linéaire	515
§ 6. Sur la possibilité de généraliser les résultats précédents	516
21. Les formes binaires cyclotomiques	516
22. Cas général des formes binaires de degré supérieur	520
Index bibliographique.	521

§ 1. Les formes binaires à coefficients entiers

1. **Équivalence.** Soit donnée la forme binaire du degré $n(\geq 3)$

$$F(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a_ny^n, \tag{1}$$

à coefficients entiers a_0, a_1, \dots, a_n , et irréductible dans le domaine rationnel. Nous désignerons cette forme par le symbole $((a_0, a_1, \dots, a_n))$. Par la transformation linéaire

$$x = eu + fv, \quad y = gu + hv, \tag{2}$$

où e, f, g, h sont des nombres entiers tels que $eh \neq fg$, la forme (1) sera transformée dans la forme

$$G(u, v) = a'_0u^n + a'_1u^{n-1}v + \dots + a'_nv^n, \tag{3}$$

qui sera également irréductible et aura les coefficients entiers. On a évidemment $a'_0 = F(e, g)$ et $a'_n = F(f, h)$. Si η est une racine de l'équation $F(x, -1) = 0$, il existe une racine η_1 de l'équation $G(u, -1) = 0$ telle qu'on ait

$$\eta_1 = \frac{f + h\eta}{e + g\eta}. \tag{4}$$

Entre les discriminants $D(F)$ et $D(G)$ des deux formes (1) et (3) on a la relation

$$D(G) = (eh - fg)^{n(n-1)} D(F). \tag{5}$$

Les formes (1) et (3) sont dites *équivalentes* ou de même *classe* quand la transformation (2) est unimodulaire, c'est-à-dire lorsque $eh - fg = \pm 1$. Deux formes équivalentes ont le même discriminant. Cependant, deux formes ayant le même discriminant n'appartiennent pas nécessairement à la même classe. Or, on a le résultat fondamental de Hermite (voir [1]¹, p. 191-216) :

Il n'y a qu'un nombre fini de classes de formes binaires du n-ième degré à discriminant donné.

Pour les formes cubiques Arndt (voir [2], p. 309-321) a développé une méthode effective pour déterminer les classes à discriminant positif donné. Berwick et Mathews ont résolu le problème correspondant pour les classes à discriminant négatif donné (voir [3], p. 48-53, et [4], p. 128-138). Pour les formes d'un degré ≥ 4 il n'existe pas encore de méthode pratique pour déterminer les classes.

2. **Représentations.** D'après un théorème bien connu d'Axel Thue on a le résultat :

Le nombre de représentations d'un nombre entier donné par une forme binaire, irréductible, de degré ≥ 3 , est limité.

Cependant, la méthode de Thue ne donne aucun procédé général pour effectivement déterminer toutes les représentations éventuelles d'un nombre entier donné par une forme donnée; elle ne donne non plus aucun moyen pour reconnaître si un entier est représentable par la forme ou non. Cela est une conséquence d'une certaine supposition qui est nécessaire dans la démonstration de Thue.

¹ Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire.

Il est évident que les formes équivalentes représentent les mêmes nombres; et le nombre des représentations est le même pour toutes les formes de la même classe.

Lagrange a montré qu'on peut se borner à étudier la représentation de l'unité par les formes binaires (voir [5], p. 265).

Considérons l'équation

$$F(x, y) = 1, \tag{6}$$

où la forme est donnée par l'équation (1). Supposons que cette équation possède la solution en nombres entiers $x = x_0, y = y_0$. Alors, par la transformation unimodulaire

$$x = x_0 u + f v, \quad y = y_0 u + h v,$$

avec $x_0 h - y_0 f = \pm 1$, h et f étant des entiers convenables, la forme sera transformée dans une forme $G(u, v)$, où le coefficient de u^n est égal à 1. Ainsi on peut supposer que le coefficient de x^n dans (6) est égal à 1. Alors toute racine η de l'équation $F(x, -1) = 0$ est un nombre algébrique entier du n -ième degré. Le problème de résoudre l'équation diophantienne (6) en entiers x et y reviendra donc à déterminer toutes les unités de la forme $x + y\eta$ appartenant à l'anneau $\mathbf{R}(\eta)$ du corps algébrique engendré par η . Seulement dans des cas particuliers on a pu résoudre ce problème complètement. Il s'agit alors surtout de certains cas où la forme est cubique ou biquadratique.

Les unités $x + y\eta$ seront appelées *unités binaires* de l'anneau $\mathbf{R}(\eta)$, même si $xy = 0$.

Lorsque toutes les racines de l'équation $F(x, -1) = 0$ sont imaginaires, il est évident qu'on peut toujours déterminer toutes les solutions de (6), ou, éventuellement, montrer qu'il n'y a aucune solution. Pour cela on n'a pas besoin du théorème de Thue.

Soit η un nombre algébrique entier du n -ième degré, et désignons par $N(\alpha)$ la norme du nombre α appartenant au corps $K(\eta)$. Alors, nous entendons par la *forme binaire correspondant à η* la forme $N(x - \eta y)$ du n -ième degré.

3. Équivalence de deux formes données. Soient données les deux formes binaires irréductibles du n -ième degré $F(x, y)$ et $G(u, v)$. Comment reconnaître si celles-ci sont équivalentes ou non? D'abord il faut déterminer si les équations $F(x, -1) = 0$ et $G(u, -1) = 0$ définissent les mêmes corps algébriques ou non. Cela peut être effectué par une méthode développée dans Nagell [6], p. 183. Soient maintenant ξ une racine de l'équation $F(x, -1) = 0$ et η une racine de l'équation $G(u, -1) = 0$, et supposons que ξ et η appartiennent au même corps. Soit de plus

$$\eta = r_0 + r_1 \xi + \dots + r_{n-1} \xi^{n-1}$$

et

$$\xi^n = s_0 + s_1 \xi + \dots + s_{n-1} \xi^{n-1},$$

où les coefficients $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ sont rationnels. Le problème revient alors à déterminer des nombres entiers a, b, d et d tels que $ad - bc = \pm 1$, et tels qu'on ait

$$\eta = \frac{b + d\xi}{a + c\xi}. \tag{7}$$

En comparant les coefficients de ξ^h dans la relation

$$\eta(a + c\xi) = (r_0 + r_1 \xi + \dots)(a + c\xi) = b + d\xi$$

on aura alors le système suivant d'équations linéaires dans les inconnues a, b, c et d :

$$\begin{aligned} r_{n-1}s_0c + r_0a &= b, \\ r_{n-1}s_1c + r_1a + r_0c &= d, \\ r_{n-1}s_2c + r_2a + r_1c &= 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Il est évident que le problème d'équivalence peut être résolu par cette méthode. Cependant, il faut observer que η doit parcourir tous les conjugués qui engendrent le même corps que ξ . Pour l'équivalence il faut naturellement que les discriminants des formes soient égaux; or cela n'est pas suffisant.

Supposons qu'on connaît toutes les représentations d'un nombre entier donné N , $\neq 0$, de chacune des deux formes. Soient p. ex. $x = x_i$, $y = y_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$) les solutions en nombres entiers de

$$F(x, y) = N$$

et $u = u_j$, $v = v_j$ ($j = 1, 2, \dots, \mu$) les solutions en nombres entiers de

$$G(u, v) = N.$$

Si les formes sont équivalentes il faut que $\mu = m$, et qu'on ait

$$u_j = ax_i + by_i, \quad v_j = cx_i + dy_i,$$

où a , b , c et d sont des nombres entiers tels que $ad - bc = \pm 1$. Pour déterminer a , b , c et d il faut, bien entendu, varier les indices i et j de toutes les manières possibles. D'ailleurs, l'existence de ces quatre nombres n'assure pas l'équivalence des formes. En général, on peut, par la méthode envisagée, seulement constater que les formes ne sont pas équivalentes.

Si, dans $F(x, y)$ et $G(u, v)$, les coefficients de x^n et de u^n sont tous les deux = 1, et si les formes sont reliées par la transformation $u = ax + by$, $v = cx + dy$, il est évident que le nombre $a + c\xi$ est une unité.

4. Les formes binaires biquadratiques du premier rang. Soit donnée la forme binaire biquadratique

$$a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4,$$

à coefficients entiers rationnels, et irréductible dans le domaine rationnel. Si toutes les quatre racines de l'équation

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

sont imaginaires, nous dirons que les corps biquadratiques engendrés par celles-ci sont du *premier rang*. De même, nous dirons que la forme biquadratique est du *premier rang*.

Dans le présent travail nous allons nous occuper des représentations de l'unité par une forme pareille. Nous nous proposons de déterminer les solutions en nombres entiers x et y de l'équation diophantienne

$$x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + sy^4 = 1,$$

où p , q , r et s sont des nombres entiers. Si θ est une racine de l'équation biquadratique irréductible

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0,$$

ce problème revient à déterminer les unités binaires $x - \theta y$ dans l'anneau $\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$ appartenant au corps $\mathbf{K}(\theta)$. Le nombre de celles-ci est évidemment fini, et dans un cas numériquement donné elles peuvent être déterminées par un procédé élémentaire d'évaluation numérique. Or, cette méthode est, bien entendu, sans intérêt scientifique, ne donnant aucune idée du caractère arithmétique des solutions. Le problème doit être traité par les méthodes de la théorie des nombres algébriques.

Un but principal, entre autres, est d'établir le

Théorème 1. *Désignons par M le nombre des représentations de l'unité par une forme binaire biquadratique du premier rang qui n'est pas de la catégorie 1; voir le § 2. Alors, M est au plus égal à 8. Ce nombre maximum n'est atteint que pour deux classes de formes. Il y a une infinité de classes de formes pour lesquelles $M = 6$.*

Le premier résultat sur le nombre de représentations de l'unité est dû à Adolf af Ekenstam qui a démontré le théorème suivant :

Soient p, q et r des nombres entiers tels que l'équation

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + 1 = 0$$

ait quatre racines imaginaires du quatrième degré, et soit le discriminant de l'équation > 1024 . Les corps biquadratiques engendrés par cette équation doivent satisfaire aux conditions suivantes : L'unité fondamentale est du quatrième degré. Les corps ne contiennent aucune racine de l'unité en dehors de ± 1 .

Cela posé, l'équation diophantienne

$$x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + y^4 = 1$$

admet au plus deux solutions en nombres entiers x et y outre les quatre solutions triviales $x = \pm 1, y = 0$ et $x = 0, y = \pm 1$.

La démonstration, qui n'a pas été publiée, repose sur une méthode que j'ai développée dans mes travaux sur les formes cubiques à discriminant négatif.

Dans la suite *forme* signifiera toujours, sauf dans le § 6, une forme binaire biquadratique, $((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4))$, à coefficients entiers rationnels, du premier rang; les coefficients a_0 et a_4 sont supposés positifs.

Dans le chapitre suivant nous allons donner une classification des corps biquadratiques du premier rang.

Remarque 1. Nous aurons souvent besoin de calculer les discriminants des formes. Pour cela, notons que le discriminant de la forme $((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4))$ a pour expression

$$4(4a_0a_4 - a_1a_3 + \frac{1}{3}a_2^2)^3 - \frac{1}{3}(24a_0a_2a_4 + 3a_1a_2a_3 - \frac{2}{3}a_2^3 - 9a_0a_3^2 - 9a_1^2a_4)^2,$$

formule qui est valable pour toutes les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 , indépendamment du rang de la forme.

Remarque 2. Une autre expression pour le discriminant s'obtiendra de la manière suivante : Soient

$$\theta = a + bi, \quad \theta' = a - bi, \quad \theta'' = c + di, \quad \theta''' = c - di$$

les quatre racines d'une équation biquadratique, les nombres a, b, c et d étant réels, $bd \neq 0$. Alors on a

$$\theta - \theta' = 2bi, \quad \theta'' - \theta''' = 2di,$$

$$\theta - \theta'' = a - c + (b - d)i, \quad \theta' - \theta''' = a - c - (b - d)i,$$

$$\theta - \theta''' = a - c + (b + d)i, \quad \theta' - \theta'' = a - c - (b + d)i.$$

Il en résulte que le discriminant du polynome

$$(x - \theta)(x - \theta')(x - \theta'')(x - \theta''')$$

sera exprimé en fonction des nombres a, b, c et d ainsi qu'il suit

$$16b^2d^2[(a - c)^2 + (b - d)^2]^2 \cdot [(a - c)^2 + (b + d)^2]^2.$$

Il est évident que cette formule est valable seulement lorsque toutes les racines du polynome sont imaginaires. Dans ce cas le discriminant est toujours positif, pourvu que les racines soient différentes entre elles.

Remarque 3. On doit à W. Ljunggren un grand nombre de résultats sur la représentation d'un nombre entier par une forme binaire biquadratique de *second rang*; rang d'une forme binaire irréductible = rang des corps algébriques engendrés par les zéros de la forme. Parmi ces résultats, notons surtout la proposition suivante :

Soit donnée la forme irréductible à coefficients entiers p et q

$$F(x, y) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - pxy^3 + y^4,$$

où $F(x, 1)$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires. Désignons par M le nombre de solutions de l'équation

$$F(x, y) = 1$$

en nombres entiers x et y . Alors, si $q \neq 2|p| - 3$, on a $M \leq 8$. Si $q = 2|p| - 3$, on a $M \leq 10$.

Pour la démonstration voir Ljunggren [12], p. 51-59. D'ailleurs, Ljunggren a aussi établi un grand nombre de résultats sur les équations diophantiennes du type

$$Ax^4 - By^4 = C,$$

où A et B sont des nombres naturels, et où $C = 1, 2, 4$ ou 8 . Chacune de ces équations admet au plus une solution en nombres entiers positifs x et y . La méthode de démonstration permet de reconnaître s'il y a une solution ou non, et, dans le cas affirmatif, de déterminer la solution; voir Ljunggren [13].

§ 2. Classification des corps biquadratiques du premier rang

5. **Résumé de certains résultats antérieurs.** Soit \mathbf{K} un corps biquadratique du rang 1, c'est-à-dire tous les quatre corps conjugués sont imaginaires. Il est évident que l'unité fondamentale η de \mathbf{K} peut être choisie de façon qu'on ait $|\eta| > 1$. Il peut arriver que \mathbf{K} admet un sous-corps \mathbf{U} quadratique réel. Dans ce cas nous désignons

par ε l'unité fondamentale de \mathbf{U} ; celle-ci sera choisie >1 . Pour indiquer le type des corps nous employons les raccourcissements suivants : μ signifie le nombre des sous-corps quadratiques réels. ν signifie le nombre des sous-corps quadratiques imaginaires. \mathbf{N} signifie que le corps n'est pas un corps de Galois. \mathbf{A} signifie que le corps est abélien, non-cyclique. \mathbf{C} signifie que le corps est cyclique. \mathbf{K}_n signifie que le corps est engendré par une racine primitive n -ième de l'unité. \mathbf{S} signifie que le sous-corps réel n'est pas engendré par $\sqrt{3}$. $\mathbf{R}(x^m=1)$ signifie que les racines de l'unité du corps sont les racines de l'équation $x^m-1=0$. $N(\alpha)$ signifie la norme de α dans \mathbf{K} .

Les corps en question se répartissent en quatorze classes caractérisées de la façon suivante :

- 1°) $\mu = \nu = 0$. $\mathbf{R}(x^2=1)$. \mathbf{N} .
- 2°) $\mu = 0$; $\nu = 1$. $\mathbf{R}(x^2=1)$. \mathbf{N} .
- 3°) $\mu = 0$; $\nu = 1$. $\mathbf{R}(x^4=1)$. \mathbf{N} .
- 4°) $\mu = 0$; $\nu = 1$. $\mathbf{R}(x^6=1)$. \mathbf{N} .
- 5°) $\mu = 1$; $\nu = 0$. $\mathbf{R}(x^2=1)$. \mathbf{N} . $\eta = \varepsilon$.
- 6°) $\mu = 1$; $\nu = 0$. $\mathbf{R}(x^{10}=1)$. \mathbf{K}_5 . \mathbf{C} . $\eta = \varepsilon = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.
- 7°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^2=1)$. \mathbf{A} . $\eta = \varepsilon$.
- 8°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^2=1)$. \mathbf{A} . $\eta = \sqrt{-\varepsilon}$. $\varepsilon \geq 2 + \sqrt{3}$. $N(\varepsilon) > 0$.
- 9°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^4=1)$. \mathbf{A} . $\eta = \varepsilon$. \mathbf{S} .
- 10°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^4=1)$. \mathbf{A} . $\eta = \sqrt{\varepsilon i} = \frac{1}{2}\alpha(1+i)$, où α est un nombre du sous-corps $\mathbf{K}(\varepsilon)$. $\varepsilon \geq 5 + 2\sqrt{6}$. $N(\varepsilon) > 0$. \mathbf{S} .
- 11°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^6=1)$. \mathbf{A} . $\eta = \varepsilon$. \mathbf{S} .
- 12°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^6=1)$. \mathbf{A} . $\eta = \sqrt{-\varepsilon}$. \mathbf{S} . $\varepsilon \geq 4 + \sqrt{15}$. $N(\varepsilon) > 0$.
- 13°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^8=1)$. \mathbf{K}_8 . \mathbf{A} . $\eta = \varepsilon = 1 + \sqrt{2}$.
- 14°) $\mu = 1$; $\nu = 2$. $\mathbf{R}(x^{12}=1)$. \mathbf{K}_{12} . \mathbf{A} . $\eta = \sqrt{\varepsilon i} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(1+i)$.

A propos de la démonstration des résultats présentés dans ce tableau nous renvoyons à Nagell [7], p. 351–361 et Nagell [8], p. 345. La classification que nous venons de donner ici, est la même que dans le travail [8]. Les classes 6, 13 et 14 ne contiennent qu'un seul corps chacune. Il y a évidemment une infinité de corps dans chacune des autres classes. L'unité fondamentale η est choisie de la manière la plus simple et la plus pratique. Dans la classe 6 il est possible de choisir η de vingt manières différentes; en effet, il y a les possibilités suivantes :

$$\pm \varepsilon, \quad \pm \varepsilon^{-1}, \quad \pm \xi \varepsilon, \quad \pm \xi \varepsilon^{-1},$$

où ξ est une racine primitive cinquième de l'unité, et où $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Dans les classes 1, 2, 5, 7 et 8 il y a quatre possibilités. Dans les classes 3, 9 et 10 il y a huit possibilités. Dans les classes 4, 11, 12, 13 et 14 il y a douze possibilités.

Lorsque les corps biquadratiques du premier rang engendrés par l'équation irréductible

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

appartiennent à la classe Z nous dirons que la forme $((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4))$ appartient à la catégorie Z .

Le résultat de Ekenstam est évidemment limité à certaines formes particulières appartenant aux catégories 1, 2 et 8.

Dans les chapitres suivants nous allons examiner les formes des catégories 2-14. Il faut varier les méthodes selon la catégorie à laquelle appartient la forme.

Correction au travail [8]. Page 351, la ligne 7 à partir d'en bas doit être

$$1 + \xi^{-1} - \xi^2 \eta^{-1} = 0, \quad 1 - \xi^2 \eta - \xi^{-2} \eta = 0, \quad 1 + \xi - \xi^{-2} \eta^{-1} = 0.$$

§ 3. Les unités binaires dans les corps biquadratiques du premier rang

6. Introduction. Soit donnée l'équation

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0, \tag{8}$$

irréductible dans $\mathbf{K}(1)$, où p, q, r et s sont des nombres entiers rationnels. Les quatre racines $\theta, \theta', \theta''$ et θ''' de (8) sont supposées imaginaires. Nous nous proposons de déterminer le nombre exact et le caractère arithmétique des solutions de l'équation diophantienne

$$N(x - y\theta) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + sy^4 = 1 \tag{9}$$

en nombres entiers rationnels x et y , c'est-à-dire les propriétés des unités binaires $x - \theta y$.

Si $x = x_0, y = y_0$ est une solution, l'équation (9) est aussi satisfaite par $x = -x_0, y = -y_0$. On a toujours les deux solutions triviales $y = 0, x = \pm 1$. En négligeant ces solutions nous pouvons supposer que $y > 0$. Il faut que $(x_0, y_0) = 1$.

En général, dans nos recherches, une forme donnée peut être remplacée par une forme équivalente. Par une transformation linéaire unimodulaire de la forme dans (9), le coefficient p peut être réduit modulo 4. Ainsi il suffit de supposer que p a l'une des valeurs 0, +1 ou +2. La valeur -1 peut être supprimée; en effet, si $p \equiv -1 \pmod{4}$ on peut remplacer θ par $-\theta$. Le nombre s est toujours positif.

Nous nous bornerons aux cas où $\mathbf{K}(\theta)$ contient un sous-corps quadratique \mathbf{U} . Ainsi les cas appartenant à la classe 1 ne seront pas traités dans ce travail. Supposons d'abord qu'il y a un sous-corps quadratique \mathbf{U} engendré par le nombre $\sqrt{-\Delta}$, où Δ est un nombre entier rationnel > 0 qui n'est divisible par aucun carré > 1 .

θ est du second degré relativement à \mathbf{U} . Ainsi θ est racine d'une équation quadratique $x^2 - ax + b = 0$, irréductible dans \mathbf{U} , où les coefficients a et b sont des nombres entiers dans \mathbf{U} . Soit θ'' l'autre racine de cette équation. Si $-\Delta$ n'est pas $\equiv 1 \pmod{4}$ nous avons alors

$$\left. \begin{aligned} \theta + \theta'' &= u + v\sqrt{-\Delta}, \\ \theta\theta'' &= u_1 + v_1\sqrt{-\Delta}, \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

où u, v, u_1 et v_1 sont des nombres entiers rationnels. Pour les autres nombres conjugués on a les relations

$$\left. \begin{aligned} \theta' + \theta''' &= u - v\sqrt{-\Delta}, \\ \theta'\theta''' &= u_1 - v_1\sqrt{-\Delta}. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Ainsi, il est évident qu'on peut supposer $v \geq 0$. En effet, si v est négatif on peut passer du corps $\mathbf{K}(\theta)$ au corps $\mathbf{K}(\theta')$.

De l'identité

$$(x - \theta)(x - \theta')(x - \theta'')(x - \theta''') = [x^2 - (u + v\sqrt{-\Delta})x + u_1 + v_1\sqrt{-\Delta}][x^2 - (u - v\sqrt{-\Delta})x + u_1 - v_1\sqrt{-\Delta}]$$

on obtient les relations

$$p = 2u, \tag{12}$$

$$q = u^2 + \Delta v^2 + 2u_1, \tag{13}$$

$$r = 2uu_1 + 2\Delta vv_1, \tag{14}$$

$$s = u_1^2 + \Delta v_1^2. \tag{15}$$

D'après ce que nous venons de dire sur le coefficient p , il suffit de supposer que $u = 0$ ou $u = 1$ lorsqu'on ne distingue pas entre les formes de la même classe.

Lorsque $-\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ les formules (10)–(15) seront remplacées par les formules

$$\left. \begin{aligned} \theta + \theta'' &= \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-\Delta}), \\ \theta\theta'' &= \frac{1}{2}(u_1 + v_1\sqrt{-\Delta}), \end{aligned} \right\} \tag{10'}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta' + \theta''' &= \frac{1}{2}(u - v\sqrt{-\Delta}), \\ \theta'\theta''' &= \frac{1}{2}(u_1 - v_1\sqrt{-\Delta}), \end{aligned} \right\} \tag{11'}$$

$$p = u, \tag{12'}$$

$$q = \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}\Delta v^2 + u_1, \tag{13'}$$

$$r = \frac{1}{2}uu_1 + \frac{1}{2}\Delta vv_1, \tag{14'}$$

$$s = \frac{1}{4}u_1^2 + \frac{1}{4}\Delta v_1^2, \tag{15'}$$

où u, v, u_1 et v_1 sont des nombres entiers rationnels tels que $u \equiv v \pmod{2}$ et $u_1 \equiv v_1 \pmod{2}$. Il suffit évidemment de supposer que u a l'une des valeurs 0, +1 ou +2. Même ici on peut supposer $v \geq 0$.

Nous désignerons la forme biquadratique définie par les relations (10), (11) ou par les relations (10'), (11') par le symbole

$$[u, v, u_1, v_1; \sqrt{-\Delta}].$$

A l'aide de ces relations on trouvera aisément le discriminant D du nombre θ et de la forme. Si $-\Delta$ n'est pas $\equiv 1 \pmod{4}$ on aura

$$D = 16\Delta^2 D_1 D_2,$$

où $D_1 = (u^2 - \Delta v^2 - 4u_1)^2 + \Delta(2uv - 4v_1)^2$

et $D_2 = (uvv_1 - v_1^2 - u_1v^2)^2.$

Si $-\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ il faut, dans cette formule, remplacer u, v, u_1 et v_1 par $\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u_1$ et $\frac{1}{2}v_1$.

Il est évident que cette formule est valable même pour un sous-corps réel, c'est-à-dire pour $\Delta < 0$. Aussi les formules (10)–(15) et (10')–(15') subsistent pour $\Delta < 0$.

Pour toutes les valeurs de Δ , il est évident que les nombres v et v_1 ne peuvent pas = 0 en même temps.

L'équation (9) entraîne

$$x - \theta y = E, \quad x - \theta' y = E', \quad x - \theta'' y = E'', \quad x - \theta''' y = E''',$$

où E, E', E'' et E''' sont des unités conjuguées. Nous aurons donc

$$(x - \theta y)(x - \theta'' y) = x^2 - (\theta + \theta'') xy + \theta\theta'' y^2 = EE'',$$

où EE'' est une unité dans U . Examinons d'abord le cas $EE'' = \pm 1$, dans lequel on aura

$$x^2 - (u + v\sqrt{-\Delta})xy + (u_1 + v_1\sqrt{-\Delta})y^2 = \pm 1, \quad (16)$$

lorsque $\Delta + 1$ n'est pas divisible par 4, et

$$x^2 - \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-\Delta})xy + \frac{1}{2}(u_1 + v_1\sqrt{-\Delta})y^2 = \pm 1 \quad (16')$$

lorsque $\Delta + 1$ est divisible par 4.

Lorsque $\Delta = 1$ il faut aussi examiner le cas $EE'' = \pm i = hi$, c'est-à-dire l'équation

$$x^2 - (u + vi)xy + (u_1 + v_1i)y^2 = hi. \quad (17)$$

Lorsque $\Delta = 3$ on aura de plus à examiner le cas $EE'' = \pm \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$, c'est-à-dire l'équation

$$x^2 - \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-3})xy + \frac{1}{2}(u_1 + v_1\sqrt{-3})y^2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2\sqrt{-3}), \quad (18)$$

où h_1 et h_2 , indépendamment l'un de l'autre, prennent les valeurs $+1$ ou -1 .

7. Les équations (16), (16'), (17) et (18) pour $v \neq 0$. De l'équation (16) on obtient les deux relations

$$x^2 - uxy + u_1y^2 = \pm 1, \quad (19)$$

$$xv = yv_1. \quad (20)$$

D'après les suppositions faites plus haut nous avons $y > 0$ et $v > 0$. On a $(x, y) = 1$. Si nous posons $d = (v, v_1)$ nous aurons de (20)

$$x = \frac{v_1}{d}, \quad y = \frac{v}{d}. \quad (21)$$

Pour que ces valeurs de x et y satisfassent à l'équation (9) il faut et il suffit que celles-ci satisfassent à l'équation (19) pour l'un ou l'autre des signes ± 1 .

Lorsque $-\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ on obtient de (16'), au lieu de (19), la relation

$$x^2 - \frac{1}{2} uxy + \frac{1}{2} u_1 y^2 = \pm 1, \tag{19'}$$

et les solutions éventuelles seront toujours données par les formules (21).

Soit ensuite $\Delta = 1$. Alors on aura de (17)

$$x^2 - uxy + u_1 y^2 = 0, \tag{22}$$

$$- vxy + v_1 y^2 = h. \tag{23}$$

On en conclut que $y = +1$. Ainsi les valeurs correspondantes de x seront déterminées par

$$x = \frac{1}{v} (v_1 - h). \tag{24}$$

Cependant, ces valeurs de x doivent satisfaire à l'équation (22), c'est-à-dire à l'équation

$$x^2 - ux + u_1 = 0 \tag{25}$$

En général, on n'aura qu'une seule valeur entière de x qui satisfait à la fois à (24) et à (25). Seulement lorsque ou θ ou $\theta - 1$ est une racine primitive douzième de l'unité on obtiendra deux valeurs entières de x qui satisfont à ces conditions. En effet, supposons que tous les deux nombres

$$x_1 = \frac{1}{v} (v_1 + 1) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{v} (v_1 - 1)$$

sont entiers. Alors il faut évidemment que $v = 1$ ou $= 2$. Si $u = 0$ on aura nécessairement

$$x_1 = \frac{1}{v} (v_1 + 1) = \sqrt{-u_1}, \quad x_2 = \frac{1}{v} (v_1 - 1) = -\sqrt{-u_1}.$$

Donc $v_1 = 0, v = 1, u_1 = -1, x_1 = +1, x_2 = -1$. Par conséquent θ est une racine de l'équation $x^4 - x^2 + 1 = 0$, et le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 14. Il en résulte que l'équation

$$x^4 - x^2 y^2 + y^4 = 1$$

admet les 8 solutions suivantes : $x = \pm 1, y = 0$; $x = 0, y = +1$ (solution provenant de (21) et (19)); $x = 0, y = -1$; $x = +1, y = +1$; $x = \pm 1, y = -1$ (les dernières quatre solutions dérivent de (24) et (25)). Il n'y a pas d'autres solutions.

Soit ensuite $u = 1$. Alors on aura

$$2x_1 + 1 = \frac{2}{v} (v_1 + 1) - 1 = \sqrt{1 - 4u_1},$$

$$2x_2 - 1 = \frac{2}{v} (v_1 - 1) - 1 = -\sqrt{1 - 4u_1}.$$

Donc $v = 2, v_1 = 1, u_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0$. On en conclut que θ est une racine de l'équation

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$$

En y remplaçant x par $(z + 1)^{-1}$ on aura $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Cela démontre l'assertion.

Soit enfin $\Delta = 3$. Alors on obtiendra de (18)

$$x^2 - \frac{1}{2}uxy + \frac{1}{2}u_1y^2 = \frac{1}{2}h_1, \quad (26)$$

$$-\frac{1}{2}vxy + \frac{1}{2}v_1y^2 = \frac{1}{2}h_2, \quad (27)$$

où $h_1 = \pm 1$ et $h_2 = \pm 1$. On en conclut que $y = +1$. Ainsi les valeurs correspondantes de x seront déterminées par

$$x = \frac{1}{v}(v_1 - h_2). \quad (28)$$

Ces valeurs de x doivent satisfaire à la relation

$$x^2 - \frac{1}{2}ux + \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}h_1. \quad (29)$$

Seulement dans des cas particuliers la formule (28) rend deux valeurs entières de x qui satisfont à l'équation (29). Supposons maintenant que tous les deux nombres

$$x_1 = \frac{1}{v}(v_1 + 1) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{v}(v_1 - 1) \quad (30)$$

sont entiers. Cette hypothèse entraîne évidemment ou $v = 1$ ou $v = 2$. Si $u = 0$ il faut que $v = 2$, vu que $u \equiv v \pmod{2}$. Dans ce cas les quatre valeurs de x satisfaisant à (29) sont

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_1} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_1}.$$

Vu que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(v_1 + 1) + \frac{1}{2}(v_1 - 1) = v_1$ ne peut pas être $= 0$, on obtiendra

$$x_1^2 = \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}u_1 \quad \text{et} \quad x_2^2 = -\frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}u_1,$$

donc

$$x_1^2 - x_2^2 = h_1 = \pm 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 = -u_1.$$

On en conclut qu'on aura l'un des deux cas : 1°) $x_1 = 1, x_2 = 0$, correspondant à $v_1 = 1$, et 2°) $x_1 = 0, x_2 = -1$, correspondant à $v_1 = -1$. Dans tous les deux cas on aura $u_1 = -1$. Pour $v_1 = 1$ le nombre θ est une racine de l'équation

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 1 = 0. \quad (31)$$

Si $v_1 = -1$ on aura seulement à remplacer $-3x$ par $+3x$. Il résulte de ce qui précède que l'équation

$$x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + y^4 = 1 \quad (32)$$

admet les 8 solutions suivantes : $x = \pm 1, y = 0$; $x = 1, y = 2$ (solution provenant de (21) et (19')); $x = -1, y = -2$; $x = 1, y = 1$; $x = -1, y = -1$; $x = 0, y = \pm 1$ (les dernières quatre solutions dérivent de (28) et (29)). Il n'y a pas d'autres solutions.

Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet la résolvante cubique de (31) donnée par

$$z^3 + 4z^2 - 9 = 0$$

n'admet pas d'autres racines rationnelles que $z = -3$.

Considérons ensuite le cas $u=2, v=2$. Alors les quatre valeurs de x satisfaisant à (29) sont

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}u_1} \quad (\text{pour } h_1 = 1) \tag{33}$$

et
$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}u_1} \quad (\text{pour } h_1 = -1). \tag{34}$$

Si nous posons

$$\frac{1}{2}(v_1 + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}u_1}, \quad \frac{1}{2}(v_1 - 1) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}u_1},$$

nous aurons $1 = 3 - 2u_1$, d'où $u_1 = 1, v_1 = 1, x_1 = 1$ et $x_2 = 0$. Le nombre θ sera une racine de l'équation

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Or, nous venons de voir que, dans ce cas, $\theta^{-1} - 1$ est une racine de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

Il faut aussi examiner la possibilité

$$\frac{1}{2}(v_1 + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}u_1}, \quad \frac{1}{2}(v_1 - 1) = \frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}u_1}.$$

Il en résulte que $u_1 = -1, v_1 = 1$. Donc $\theta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$.

Il reste encore à considérer la possibilité que tous les quatre nombres (33) et (34) soient entiers à la fois. Dans ce cas on aurait

$$3 - 2u_1 = t^2, \quad -1 - 2u_1 = t_1^2,$$

où t et t_1 sont entiers. Or, cela entraîne $t_1 = 0$, ce qui est évidemment impossible.

Considérons finalement le cas $u=v=1$. Alors les quatre valeurs de x satisfaisant à (29) sont

et
$$\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}u_1} \quad (\text{pour } h_1 = 1) \tag{35}$$

$$\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{7}{16} - \frac{1}{2}u_1} \quad (\text{pour } h_1 = -1). \tag{36}$$

Il est évident que les deux nombres (35) ne peuvent pas être entiers en même temps, vu que leur somme est $= \frac{1}{2}$. Même chose pour les deux nombres (36). Est-il possible que l'un des nombres (35) soit entier en même temps que l'un des nombres (36)? Pour cela il faut qu'on ait

$$9 - 8u_1 = t^2 \quad \text{et} \quad -7 - 8u_1 = t_1^2$$

où t et t_1 sont des nombres naturels. Ce système est satisfait seulement pour $t=5, t_1=3$ et $u_1 = -2$. Alors, en posant

$$x_1 = v_1 - 1 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{9 - 8u_1}),$$

$$x_2 = v_1 + 1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{-7 - 8u_1}),$$

on aura $x_1 = -1, x_2 = +1$ correspondant à $y = +1$, et encore $v_1 = 0$. Dans ce cas le nombre θ est une racine de l'équation

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$$

Par conséquent, l'équation

$$x^4 - x^3y - x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 1$$

admet les 8 solutions suivantes : $x = \pm 1, y = 0$; $x = 0, y = \pm 1$; $x = 1, y = \pm 1$; $x = -1, y = \pm 1$. Il n'y a pas d'autres solutions.

Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet, on a

$$\theta = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{-3}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{14 + 2\sqrt{-3}}.$$

Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ est évidemment engendré par le nombre

$$\alpha = 2\theta - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}),$$

qui est une racine de l'équation

$$x^4 - 7x^2 + 13 = 0.$$

La résolvante cubique de celle-ci est donnée par l'équation

$$z^3 - 14z^2 - 3z = 0,$$

qui n'admet aucune solution rationnelle autre que $z = 0$.

8. Les équations (17) et (18) pour $v = 0$. Supposons que $v = 0$. Alors les équations (16), (16') et (20) conduisent aux solutions $y = 0, x = \pm 1$. Ainsi, en faisant abstraction de ces solutions triviales, on peut se borner à considérer les équations (17) et (18).

Soit $\Delta = 1$ et considérons l'équation (17). Celle-ci conduit à (22) et (23). De la dernière relation on aura pour $v = 0, y = +1$ et $v_1 = \pm 1$. Les valeurs de x s'obtiendront de l'équation

$$x^2 - ux + u_1 = 0. \tag{37}$$

La condition nécessaire et suffisante pour une solution rationnelle de celle-ci est que $\frac{1}{4}u^2 - u_1$ soit le carré d'un nombre rationnel. Si cette condition est remplie il y a deux valeurs entières de x qui correspondent à $y = +1$.

Soit d'abord $u = 0$. Alors $-u_1$ doit être un carré. En posant $u_1 = -t^2$ on voit que θ est une racine de l'équation

$$x^4 - 2t^2x^2 + 1 + t^4 = 0.$$

Si $t = 0$ le corps $K(\theta)$ appartient à la classe 13, et l'équation

$$x^4 + y^4 = 1$$

admet les quatre solutions $x = \pm 1, y = 0$; $x = 0, y = \pm 1$. Si $t \neq 0$ le corps $K(\theta)$ appartient évidemment à la classe 3, et l'équation

$$x^4 - 2t^2x^2y^2 + (1 + t^4)y^4 = 1$$

admet les six solutions $x = \pm 1, y = 0$; $x = \pm t, y = +1$; $x = \pm t, y = -1$. Il n'y a pas d'autres solutions.

Soit ensuite $u = 1$. En posant $1 - 4u_1 = t^2$, où t est un nombre naturel impair, on aura, vu que $v_1 = \pm 1, p = 2, q = \frac{1}{2}(3 - t^2), r = \frac{1}{2}(1 - t^2)$ et $s = \frac{1}{16}(1 - t^2)^2 + 1$. Les nombres $\theta, \theta', \theta''$ et θ''' seront donnés par

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 4i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - 4i}.$$

On vérifie aisément que le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 3. La solution complète de l'équation

$$x^4 - 2x^3y + \frac{1}{2}(3 - t^2)x^2y^2 - \frac{1}{2}(1 - t^2)xy^3 + \left[\frac{1}{16}(1 - t^2)^2 + 1\right]y^4 = 1$$

est donnée par le tableau suivant:

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = \frac{1}{2}(1 \pm t), \quad y = +1; \quad x = -\frac{1}{2}(1 \pm t), \quad y = -1.$$

Ainsi, il y a exactement six solutions.

Soit maintenant $\Delta = 3$ et considérons l'équation (18). Celle-ci conduit à (22') et (23'). De la dernière relation on aura pour $v = 0$, $y = +1$ et $v_1 = h_2$. Les valeurs de x s'obtiendront de l'équation

$$x^2 - \frac{1}{2}ux + \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}h_1. \tag{38}$$

u est pair vu que $v = 0$, donc $u = 0$ ou $u = 2$; u_1 est impair vu que v_1 est impair. La condition nécessaire et suffisante pour une solution rationnelle de (38) est que le nombre $\frac{1}{16}u^2 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}h_1$ soit le carré d'un nombre rationnel. Si cette condition est remplie pour une valeur donnée de h_1 , il y a deux valeurs entières de x qui correspondent à $y = +1$. On peut se demander s'il est possible d'avoir à la fois

$$u^2 - 8u_1 + 8 = 4t^2 \quad (\text{pour } h_1 = +1)$$

et
$$u^2 - 8u_1 - 8 = 4t_1^2 \quad (\text{pour } h_1 = -1),$$

où t et t_1 sont des nombres entiers. Cela entraîne $t = 2$ et $t_1 = 0$, donc, pour $u = 0$, on aura $u_1 = -1$, tandis que $u = 2$ donnera la valeur impossible $u_1 = -\frac{1}{2}$. Lorsque $u = v = 0$, $u_1 = -1$, $v_1 = h_2 = \pm 1$, le nombre θ sera une racine primitive douzième de l'unité. Or, nous avons déjà traité ce cas dans le numéro précédent. Exception faite de ce cas, l'équation (38) rend deux valeurs entières de x correspondant à $y = +1$ seulement pour l'une des deux valeurs de h_1 lorsque θ est donné.

Soit d'abord $u = 0$. Supposons que $u_1 = h_1 - 2t^2$, où t est un nombre entier. Alors θ est une racine de l'équation

$$x^4 + (h_1 - 2t^2)x^2 + \frac{1}{4}[(h_1 - 2t^2)^2 + 3] = 0.$$

Cette équation est irréductible sauf pour $h_1 = 1$, $t = 0$. Dans les trois cas $h_1 = -1$, $t = 0$ et $h_1 = +1$, $t = \pm 1$, l'équation deviendra $x^4 - x^2 + 1 = 0$ que nous pouvons négliger ici. Dans les autres cas on vérifie aisément que le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet, la résolvante cubique de l'équation biquadratique aura la forme

$$z^3 + (2h_1 - 4t^2)z^2 - 3z = 0,$$

et il est évident que l'équation

$$z^2 + (2h_1 - 4t^2)z - 3 = 0$$

est irréductible sauf dans les cas d'exception envisagés plus haut. La solution complète de l'équation

$$x^4 + (h_1 - 2t^2)x^2y^2 + \frac{1}{4}[(h_1 - 2t^2)^2 + 3]y^4 = 1$$

est donnée par le tableau suivant :

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = t, \quad y = \pm 1; \quad x = -t, \quad y = \pm 1.$$

Ainsi, il y a exactement six solutions, abstraction faite des quatre cas d'exception.

Soit ensuite $u = 2$. Supposons que

$$1 + 2h_1 - 2u_1 = t^2,$$

où t est un nombre entier impair. Alors θ est une racine de l'équation

$$x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}(3 + 2h_1 - t^2)x^2 - \frac{1}{2}(1 + 2h_1 - t^2)x + \frac{1}{16}[(1 + 2h_1 - t^2)^2 + 12] = 0.$$

Cette équation est toujours irréductible, vu que le nombre

$$1 - 2u_1 + 2\sqrt{-3} = t^2 - 2h_1 + 2\sqrt{-3}$$

ne peut pas être un carré dans le corps $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$. On vérifie aisément que le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet, le corps est engendré par l'un ou l'autre des deux nombres

$$\alpha = \sqrt{t^2 - 2h_1} \pm \sqrt{-3}.$$

La résolvante cubique de l'équation biquadratique de laquelle α est une racine, a la forme

$$z^3 + 4(2h_1 - t^2)z^2 - 48z = 0,$$

et on voit sans peine que celle-ci n'admet pas d'autres racines rationnelles que $z = 0$. Donc le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4.

La solution complète de l'équation

$$x^4 - 2x^3y + \frac{1}{2}(3 + 2h_1 - t^2)x^2y^2 - \frac{1}{2}(1 + 2h_1 - t^2)xy^3 + \frac{1}{16}[(1 + 2h_1 - t^2)^2 + 12]y^4 = 1$$

est donnée par le tableau suivant:

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = \frac{1}{2}(1 \pm t), \quad y = +1; \quad x = \frac{1}{2}(-1 \pm t), \quad y = -1.$$

Ainsi, il y a exactement six solutions.

§ 4. Sur la résolubilité simultanée de certaines équations du paragraphe précédent

Dans la présente section nous continuons les recherches sur les unités binaires commencées dans le § 3. Les conditions imposées sur l'équation (8) et sur les racines $\theta, \theta', \theta''$ et θ''' restent les mêmes. Ainsi le coefficient p a une des valeurs 0, +1 ou +2 avec les conséquences pour le nombre u . Le nombre v est supposé positif. Nous ne considérons que les solutions positives y de l'équation (9), sauf s'il s'agit de rendre compte du nombre total de solutions de cette équation.

Nous aurons à traiter les cas $\Delta = 1$ et $\Delta = 3$.

9. Le cas $\Delta = 1$. Nous avons besoin de déterminer les cas dans lesquels le système (19), (20), (21) est résoluble, avec $v \neq 0$, en même temps que le système (24), (25);

bien entendu, pour des valeurs différentes de x, y . Si nous excluons les formes équivalentes à $x^4 - x^2y^2 + y^4$, il résulte du numéro 7 que le système (24), (25) ne peut admettre qu'une seule solution $x = \xi, y = +1$ (pour y positif). Ce système sera alors

$$\xi = \frac{1}{v}(v_1 - h), \tag{37}$$

$$\xi^2 - u\xi + u_1 = 0. \tag{38}$$

Il en résulte que $(v, v_1) = d = 1$. Le système (19), (20), (21) deviendra

$$v_1^2 - uv_1v + u_1v^2 = \pm 1. \tag{39}$$

En éliminant ξ entre les équations (37) et (38) on obtient

$$v_1^2 - 2hv_1 + 1 - uvv_1 + huv + u_1v^2 = 0. \tag{40}$$

Des équations (39) et (40) on aura par soustraction

$$-2hv_1 + 1 + huv = \mp 1. \tag{41}$$

Supposons d'abord $u = 0$. Alors, le signe inférieur dans le membre à droite entraîne $v_1 = 0$. Donc, on obtient de (37) $\xi = -h$ et de (38) $u_1 = -1$. Par conséquent, le nombre θ est une racine de l'équation $x^4 - x^2 + 1 = 0$. Or, nous avons exclu ce cas.

Supposons toujours $u = 0$ et prenons le signe supérieur dans (41). Alors on aura $v_1 = h$. Donc $\xi = 0$ et $u_1 = 0$. Par conséquent, le nombre θ est une racine de l'équation

$$x^4 + v^2x^2 \mp 2vx + 1 = 0.$$

Le corps $K(\theta)$ appartient à la classe 3, vu que la résolvante cubique

$$z^3 + 2v^2z^2 + (v^4 - 4)z - 4v^2 = 0$$

n'admet aucune racine rationnelle autre que $z = -v^2$. La solution complète de l'équation

$$x^4 + v^2x^2y^2 - 2vxy^3 + y^4 = 1 \tag{42}$$

est donnée par le tableau

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = 0, \quad y = \pm 1; \quad x = 1, \quad y = v; \quad x = -1, \quad y = -v.$$

Vu que $v \neq 0$ il y a six solutions dans ce cas-ci.

Supposons ensuite que $u = 1$, et prenons le signe inférieur dans (41). Alors, on aura $2v_1 = v$, et, vu que $(v, v_1) = 1$ et $v > 0$, $v = 2$ et $v_1 = 1$. Donc, il résulte de (39) que $u_1 = 0$. Par conséquent, le nombre θ est une racine de l'équation

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0,$$

et la forme correspondante est équivalente à $x^4 - x^2y^2 + y^4$.

Supposons enfin $u = 1$, et prenons le signe supérieur dans (41). Alors, de cette relation on obtient

$$v = 2(v_1 - h).$$

Or, cela entraîne $\xi = \frac{1}{2}$, impossible.

10. Le cas $\Delta = 3$. Nous avons besoin de déterminer les cas dans lesquels le système (19'), (20), (21) est résoluble, avec $v \neq 0$, en même temps que le système (28), (29); bien entendu, pour des valeurs différentes de x, y . Si nous excluons les formes équivalentes à une quelconque des formes

$$\left. \begin{aligned} x^4 - x^2y^2 + y^4, \\ x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + y^4, \\ x^4 - x^3y - x^2y^2 + xy^3 + y^4, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

il résulte du numéro 7 que le système (28), (29) ne peut admettre qu'une seule solution $x = \xi, y = +1$. Ce système sera alors

$$\xi = \frac{1}{v}(v_1 - h_2), \quad (44)$$

$$\xi^2 - \frac{1}{2}u\xi + \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}h_1. \quad (45)$$

Il en résulte que $(v, v_1) = d = 1$. Le système (19'), (20), (21) deviendra

$$v_1^2 - \frac{1}{2}uv_1v + \frac{1}{2}u_1v^2 = \pm 1. \quad (46)$$

En éliminant ξ entre les équations (44) et (45) on obtient

$$v_1^2 - 2h_2v_1 + 1 - \frac{1}{2}uvv_1 + \frac{1}{2}uvh_2 + \frac{1}{2}u_1v^2 = \frac{1}{2}h_1v^2. \quad (47)$$

Des équations (46) et (47) on aura par soustraction

$$-2h_2v_1 + 1 + \frac{1}{2}uvh_2 = \frac{1}{2}h_1v^2 \mp 1. \quad (48)$$

I. $u = 0$. Dans ce cas le nombre v est pair, et les nombres u_1 et v_1 sont impairs. Le nombre v est, comme toujours dans ce numéro, supposé positif. Dans ce cas-ci on peut même supposer que $v_1 \geq 0$. En effet, si $v_1 < 0$ on peut remplacer θ par $-\theta'$, θ'' par $-\theta'''$, θ' par $-\theta$ et θ''' par $-\theta''$.

Le signe inférieur dans (48) donne la relation

$$-2h_2v_1 = \frac{1}{2}h_1v^2.$$

Cela entraîne $v = 2$ et $v_1 = -h_1h_2 = +1$. De (46) on obtient $u_1 = -1$. Par conséquent, le nombre θ est une racine de l'équation

$$x^4 + 2x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Or, nous avons exclu la forme correspondante.

Le signe supérieur dans (48) donne la relation

$$v_1 - h_2 = -h_1h_2 \cdot \frac{1}{4}v^2.$$

v_1 étant ≥ 0 il en résulte que $h_1h_2 = -1$. De plus il est évident que v est divisible par 4, et nous posons $t = \frac{1}{4}v$. Donc, nous obtenons

$$u=0, \quad v=4t, \quad u_1=h_1-2t^2, \quad v_1=-h_1+4t^2, \quad \xi=t.$$

Par conséquent, θ est une racine de l'équation

$$x^4 + x^2(h_1 + 10t^2) - x(24t^3 - 6h_1t) + 1 - 7h_1t^2 + 13t^4 = 0.$$

On vérifie aisément que cette équation est irréductible vu que $t \neq 0$. Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet, si on pose $\alpha = \theta - t\sqrt{-3}$, le nombre α engendre le corps $\mathbf{K}(\theta)$ et est une racine de l'équation

$$x^4 + (4t^2 + h_1)x^2 + (2t^2 + \frac{1}{2}h_1)^2 + \frac{3}{4}(4t^2 - h_1)^2 = 0.$$

La résolvante cubique de celle-ci est

$$z^3 + (8t^2 + 2h_1)z^2 - 3(4t^2 - h_1)^2z = 0.$$

On voit aisément que cette équation, pour $t \neq 0$, n'admet aucune racine rationnelle autre que $z=0$. La solution complète de l'équation

$$x^4 + (h_1 + 10t^2)x^2y^2 - (24t^3 - 6h_1t)xy^3 + (1 - 7h_1t^2 + 13t^4)y^4 = 1$$

est donnée par le tableau suivant, où $t > 0$:

$$\begin{aligned} x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = 4t^2 - h_1, \quad y = 4t; \quad x = -4t^2 + h_1, \quad y = -4t; \\ x = t, \quad y = +1; \quad x = -t, \quad y = -1. \end{aligned}$$

Ainsi il y a six solutions dans ce cas-ci.

II. $u=2$. Dans ce cas le nombre v est pair, et les nombres u_1 et v_1 sont impairs. Le signe inférieur dans (48) donne la relation

$$-2h_2v_1 + h_2v = \frac{1}{2}h_1v^2.$$

Il en résulte que $v=2$. Donc $-h_2v_1 + h_2 = h_1$,

ce qui est impossible v_1 étant impair.

Le signe supérieur dans (48) donne la relation

$$1 - h_2v_1 + \frac{1}{2}vh_2 = \frac{1}{4}h_1v^2,$$

d'où en posant $v=2t$, t nombre naturel,

$$v_1 = h_2 - h_1h_2t^2 + t.$$

Donc $\xi = \frac{1}{v}(v_1 - h_2) = \frac{1}{2}(-h_1h_2t + 1)$.

Il en résulte que t est impair. De plus, nous aurons de (46)

$$u_1 = h_1 - \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

Par conséquent, θ est une racine de l'équation

$$\left. \begin{aligned} x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}(2h_1 + 3 + 5t^2)x^2 \\ - \frac{1}{2}(2h_1 + 1 + 6h_2t + 5t^2 - 6h_1h_2t^3)x \\ + \frac{1}{18}(4h_1 + 17 + 24h_2t + 10t^2 - 28h_1t^2 - 24h_1h_2t^3 + 13t^4) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

On vérifie aisément que cette équation est irréductible pour toutes les valeurs de t . En effet, on aura

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\sqrt{-3} \pm \alpha,$$

où
$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}h_1 + (\frac{1}{2}h_1h_2t^2 - \frac{1}{2}h_2)\sqrt{-3}}.$$

Supposons d'abord que $\frac{1}{2}h_1h_2t^2 - \frac{1}{2}h_2 = 0$. Alors on obtient $t^2 = 1$ et $h_1 = 1$. Donc $\alpha = i$, et $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 14. Si $t = \pm 1$, θ est une racine de l'équation

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Or, nous avons montré plus haut que la forme correspondante est équivalente à $x^4 - x^2y^2 + y^4$. Supposons ensuite que $t^2 \neq 1$. Alors, on peut montrer que α engendre le corps $\mathbf{K}(\theta)$. En effet, on vérifiera qu'une relation de la forme

$$-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}(h_1h_2t^2 - h_2)\sqrt{-3} = \left[\frac{A + B\sqrt{-3}}{2} \right]^2$$

pour des valeurs entières de A et B est impossible. Celle-ci entraînerait

$$A^2 - 3B^2 = -2t^2 - 2h_1, \quad AB = h_1h_2t^2 - h_2.$$

Donc, A et B sont pairs et $h_1 = +1$. En posant $A = 2A_1$ et $B = 2B_1h_2$, où A_1 et B_1 sont des entiers, on aura l'équation

$$A_1^2 - 3B_1^2 + 2A_1B_1 = (A_1 + 3B_1)(A_1 - B_1) = -1,$$

ce qui est impossible. Donc $\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}(\theta)$. Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet, le nombre α est une racine de l'équation

$$(x^2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}h_1)^2 + 3(\frac{1}{2}h_1t^2 - \frac{1}{2})^2 = 0,$$

dont la résolvante cubique a l'équation

$$z^3 + (2t^2 + 2h_1)z^2 - 3(h_1t^2 - 1)^2z = 0,$$

qui n'admet pas d'autres racines rationnelles que $z = 0$.

Si $f(x, y)$ désigne la forme biquadratique correspondant à l'équation (49), l'équation

$$f(x, y) = 1$$

admet les solutions suivantes (pour $t^2 \neq 1$) :

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = h_2 + t - h_1h_2t^2, \quad y = 2t; \quad x = -h_2 - t + h_1h_2t^2, \quad y = -2t;$$

$$x = \frac{1}{2}(1 - h_1h_2t), \quad y = +1; \quad x = -\frac{1}{2}(1 - h_1h_2t), \quad y = -1.$$

Ainsi il y a exactement six solutions. Il faut observer que t est un nombre *impair* > 1 . Il est facile de voir qu'on peut mettre $h_2 = 1$ dans (49) et dans les autres formules ci-dessus, si on permet que t prenne des valeurs entières négatives, impaires < 1 ; dans ce cas v est négatif.

III. $u = 1$. Dans ce cas v est aussi impair. Le signe inférieur dans (48) donne la relation

$$-2h_2v_1 + \frac{1}{2}vh_2 = \frac{1}{2}h_1v^2.$$

Il en résulte que $v = 1$. Donc

$$-4h_2v_1 + h_2 = h_1.$$

Cela entraîne $h_1 = h_2$ et $v_1 = 0$. Alors, nous aurons de (46) $u_1 = -2$. Dans ce cas θ est une racine de l'équation

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$$

Or, nous avons exclu la forme biquadratique correspondante.

Le signe supérieur dans (48) donne la relation

$$v_1 = \frac{1}{4}(v - h_1h_2v^2 + 4h_2).$$

Il en résulte que $v \equiv h_1h_2 \pmod{4}$, et de plus

$$u_1 = \frac{1}{8}(1 + 8h_1 - v^2),$$

$$\xi = \frac{1}{4}(1 - h_1h_2v).$$

Par conséquent, θ est une racine de l'équation

$$\left. \begin{aligned} x^4 - x^3 + \frac{1}{8}(3 + 8h_1 + 5v^2)x^2 - \frac{1}{16}(1 + 8h_1 + 24h_2v + 5v^2 - 6h_1h_2v^3)x \\ + \frac{1}{256}(257 + 16h_1 + 96h_2v + 10v^2 - 112h_1v^2 - 24h_1h_2v^3 + 13v^4) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

On vérifie aisément que cette équation est irréductible pour toutes les valeurs de v . En effet, on aura

$$\theta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}v\sqrt{-3} \pm \frac{1}{2}\alpha,$$

où
$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2}v^2 - 2h_1 + (\frac{1}{2}h_1h_2v^2 - 2h_2)\sqrt{-3}}.$$

Le nombre v étant impair on a évidemment

$$\frac{1}{2}h_1h_2v^2 - 2h_2 \neq 0.$$

Alors, on peut montrer que α engendre le corps $\mathbf{K}(\theta)$. En effet, si on avait une relation de la forme

$$-\frac{1}{2}v^2 - 2h_1 + (\frac{1}{2}h_1h_2v^2 - 2h_2)\sqrt{-3} = \left[\frac{A + B\sqrt{-3}}{2} \right]^2,$$

pour des valeurs entières de A et B , on aurait

$$A^2 - 3B^2 = -2v^2 - 8h_1, \quad AB = h_1h_2v^2 - 4h_2.$$

En éliminant v^2 on conclut de là que

$$A^2 - 3B^2 + 2h_1h_2AB = -16h_1.$$

Donc, A et B sont impairs. Si $h_1 = h_2$ on obtient

$$(B - A)(3B + A) = +16h_1,$$

relation impossible. Si $h_1 = -h_2$ on aura la relation

$$(B + A)(3B - A) = +16h_1,$$

qui est également impossible. Donc, on a $\mathbf{K}(x) = \mathbf{K}(\theta)$.

Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. En effet, le nombre α est une racine de l'équation

$$(x^2 + \frac{1}{2}v^2 + 2h_1)^2 + 3(\frac{1}{2}h_1v^2 - 2)^2 = 0,$$

dont la résolvante cubique a l'équation

$$z^3 + 2(v^2 + 4h_1)z^2 - 3(h_1v^2 - 4)^2z = 0,$$

qui n'admet aucune racine rationnelle outre $z = 0$.

Si $f(x, y)$ désigne la forme biquadratique correspondant à l'équation (50), l'équation

$$f(x, y) = 1$$

admet les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = \frac{1}{4}(v - h_1h_2v^2 + 4h_2), \quad y = v; \\ x = -\frac{1}{4}(v - h_1h_2v^2 + 4h_2), \quad y = -v; \quad x = \frac{1}{4}(1 - h_1h_2v), \quad y = +1; \\ x = -\frac{1}{4}(1 - h_1h_2v), \quad y = -1. \end{aligned}$$

Ainsi il y a exactement six solutions. Il faut observer que v est un nombre *impair positif* congru à $h_1h_2 \pmod{4}$. Il est facile de voir qu'on peut mettre $h_2 = 1$ dans (50) et dans les autres formules ci-dessus, si on permet que v prenne des valeurs entières négatives, congrues à $h_1 \pmod{4}$.

§ 5. Le nombre de représentations de l'unité dans les différents cas

11. Résumé des résultats établis dans les numéros 7-10. Il faut observer que ces résultats sont obtenus sous la condition qu'il y ait un sous-corps quadratique *imaginaire*. Notons pour commencer que le nombre de représentations de l'unité est au plus égal à 8. Ce nombre *maximum* est atteint seulement quand la forme est équivalente à l'une des trois formes suivantes

$$((1, 0, -1, 0, 1)), \quad ((1, 0, 2, -3, 1)), \quad ((1, -1, -1, 1, 1)).$$

D'ailleurs, on peut montrer que les deux dernières formes sont équivalentes. En effet, soit η une racine de l'équation

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$$

Alors, on vérifie aisément que $E=1/(1-\eta)$ est une racine de l'équation

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Les deux équations ont le même discriminant, à savoir 117, ce qui est la valeur *minimum* des discriminants des corps biquadratiques du premier rang; voir Hasse [9], 453. On montrera sans peine que η peut être choisi pour unité fondamentale dans $\mathbf{K}(\eta)$, et qu'on a la relation $E = -\rho^2\eta^2$, ρ étant une racine de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Par conséquent, à condition qu'il existe un sous-corps imaginaire, nous avons démontré le

Théorème 2. *Le nombre M des représentations de l'unité est au plus égal à 8. La condition nécessaire et suffisante pour que M soit égal à 8, est que la forme soit équivalente à l'une ou à l'autre des deux formes*

$$((1, 0, -1, 0, 1)) \quad \text{et} \quad ((1, -1, -1, 1, 1)).$$

La première de ces formes, qui a le discriminant 144, appartient à la catégorie 14. La seconde forme qui a le discriminant 117 appartient à la catégorie 4.

Il est aussi possible de donner une caractéristique complète des formes ayant exactement 6 représentations de l'unité. En effet, nous avons vu que les formes de ce type appartiennent ou à la catégorie 3 ou à la catégorie 4. Les formes de la catégorie 3 doivent être équivalentes à l'une des trois formes suivantes :

$$((1, 0, -2t^2, 0, 1 + t^4)), \quad t \text{ nombre naturel quelconque;}$$

$$((1, 0, v^2, -2v, 1)), \quad v \text{ nombre naturel quelconque;}$$

$$((1, -2, \frac{1}{2}(3 - t^2), -\frac{1}{2}(1 - t^2), \frac{1}{16}(1 - t^2)^2 + 1)), \quad \text{nombre naturel impair quelconque.}$$

Maintenant, supposons que, dans la forme

$$x^4 + v^2x^2y^2 - 2vxy^3 + y^4, \tag{51}$$

v est pair, $v = 2t$. Alors, par la transformation unimodulaire

$$x = z, \quad y = z_1 + tz,$$

on aura la forme en z_1 et z

$$z_1^4 - 2t^2z_1^2z^2 + (1 + t^4)z^4.$$

Supposons ensuite que v est impair. Alors, par la transformation unimodulaire

$$x = z, \quad y = z_1 + \frac{1}{2}(v - 1)z,$$

on aura la forme

$$z_1^4 - 2z_1^3z + \frac{1}{2}(3 - v^2)z_1^2z^2 - \frac{1}{2}(1 - v^2)z_1z^3 + [\frac{1}{16}(1 - v^2)^2 + 1]z^4.$$

Il en résulte qu'il suffit de prendre la forme (51).

Pour les formes appartenant à la catégorie 4 nous avons trouvé cinq types admettant 6 représentations.

Premier type

$$((1, 0, h_1 - 2t^2, 0, t^4 - h_1 t^2 + 1)),$$

où t est un nombre naturel quelconque et où $h_1 = \pm 1$, exception faite du cas $t = h_1 = +1$. Le discriminant a la valeur

$$144(t^4 - h_1 t^2 + 1).$$

Second type

$$((1, -2, \frac{1}{2}(3 + 2h_1 - t^2), -\frac{1}{2}(1 + 2h_1 - t^2), \frac{1}{16}[(1 + 2h_1 - t^2)^2 + 12])),$$

où t est un nombre naturel impair quelconque et où $h_1 = \pm 1$. Le discriminant est égal à

$$9(t^4 - 4h_1 t^2 + 16).$$

En posant $h_1 = +1$ et $t = 1$ on aura la forme

$$x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

qui a le discriminant 117. Désignons, comme tout à l'heure, par η une racine de l'équation

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0. \quad (52)$$

Alors, on vérifie sans peine que le nombre $E_1 = -\rho\eta$ est une racine de l'équation

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0, \quad (53)$$

lorsque ρ désigne une racine de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Il s'ensuit un résultat intéressant. Quoique les équations (52) et (53) engendrent les mêmes corps biquadratiques et que les discriminants soient égaux, les formes $((1, -1, -1, 1, 1))$ et $((1, -2, 2, -1, 1))$ ne sont pas équivalentes. En effet, le nombre de représentations de l'unité n'est pas le même.

Troisième type

$$((1, 0, h_1 + 10t^2, -24t^3 + 6h_1 t, 1 - 7h_1 t^2 + 13t^4)),$$

où t est un nombre naturel quelconque et où $h_1 = \pm 1$. Dans ce cas le discriminant a la valeur

$$144(16t^4 - 4h_1 t^2 + 1).$$

Quatrième type

$$((1, -2, \frac{1}{2}(2h_1 + 3 + 5t^2), -\frac{1}{2}(2h_1 + 1 + 6t + 5t^2 - 6h_1 t^3),$$

$$\frac{1}{16}[4h_1 + 17 + 24t + 10t^2 - 28h_1 t^2 - 24h_1 t^3 + 13t^4]))$$

où t est un nombre impair quelconque $\neq \pm 1$ et où $h_1 = \pm 1$. Le discriminant a la valeur

$$144(t^4 - h_1 t^2 + 1).$$

Cinquième type

$$\left((1, -1, \frac{1}{8}(8h_1 + 3 + 5v^2), -\frac{1}{16}(8h_1 + 1 + 24v + 5v^2 - 6h_1 v^3), \right. \\ \left. \frac{1}{256}[257 + 16h_1 + 96v + 10v^2 - 112h_1 v^2 - 24h_1 v^3 + 13v^4] \right),$$

où v est un nombre entier $\equiv h_1 \pmod{4}$ et où $h_1 = \pm 1$. Pour le discriminant on trouvera la valeur

$$9(v^4 - 4h_1 v^2 + 16).$$

Si on prend $v = h_1 = 1$ on aura la forme $((1, -1, 2, -2, 1))$ au discriminant $D = 117$.

Nous allons montrer qu'il est possible de réduire ces cinq types à un seul type. En effet, si nous remplaçons, dans la forme du premier type

$$x^4 + (h_1 - 2t^2)x^2y^2 + \dots,$$

la variable x par $x + ty$, nous aurons la forme

$$x^4 + 4tx^3y + (4t^2 + h_1)x^2y^2 + 2h_1txy^3 + y^4.$$

Si nous remplaçons, dans la forme du deuxième type

$$x^4 - 2x^3y + \frac{1}{2}(3 + 2h_1 - t^2)x^2y^2 + \dots,$$

la variable x par $x + \frac{1}{2}(1 + t)y$, nous aurons la forme

$$x^4 + 2tx^3y + (t^2 + h_1)x^2y^2 + h_1txy^3 + y^4.$$

Si nous remplaçons, dans la forme du troisième type

$$x^4 + (h_1 + 10t^2)x^2y^2 + \dots,$$

la variable x par $x + h_1ty$, nous aurons la forme

$$x^4 + 4h_1tx^3y + (16t^2 + h_1)x^2y^2 + 8txy^3 + y^4.$$

Si nous remplaçons, dans la forme du quatrième type

$$x^4 - 2x^3y + \frac{1}{2}(2h_1 + 3 + 5t^2)x^2y^2 + \dots,$$

la variable x par $x - \frac{1}{2}(1 - h_1t)y$, nous aurons la forme

$$x^4 + 2h_1tx^3y + (4t^2 + h_1)x^2y^2 + 4txy^3 + y^4.$$

Si nous remplaçons, dans la forme du cinquième type

$$x^4 - x^3y + \frac{1}{8}(8h_1 + 3 + 5v^2)x^2y^2 + \dots,$$

la variable x par $x + \frac{1}{4}(1 - h_1 v)y$, nous aurons la forme

$$x^4 - h_1 v x^3 y + (v^2 + h_1) x^2 y^2 - 2v x y^3 + y^4.$$

Il résulte de tout cela qu'il suffit de prendre la forme

$$x^4 + 2t x^3 y + (t^2 + h_1) x^2 y^2 + h_1 t x y^3 + y^4, \quad (54)$$

où $h = \pm 1$ et où t est un nombre entier quelconque > 0 , exception faite du cas $t = 2$, $h_1 = +1$, qui donne une forme de la catégorie 14 admettant huit représentations de l'unité.

Ainsi, à condition qu'il existe un sous-corps imaginaire, nous avons établi le

Théorème 3. *Désignons par M le nombre des représentations de l'unité. Seulement pour une forme appartenant ou à la catégorie 3 ou à la catégorie 4 nous pouvons avoir $M = 6$. Pour une forme de la catégorie 3 nous avons : La condition nécessaire et suffisante pour $M = 6$ est que la forme soit équivalente à la forme (51). Pour une forme de la catégorie 4 nous avons : La condition nécessaire et suffisante pour $M = 6$ est que la forme soit équivalente à la forme (54).*

La forme (51) a le discriminant

$$16(v^4 + 16).$$

Cela fait voir que toutes les formes (51) sont inéquivalentes lorsque le nombre v varie.

Le discriminant de (54) a la valeur

$$9(t^4 - 4h_1 t^2 + 16).$$

On en conclut que toutes les formes (54) sont inéquivalentes lorsque les nombres t et h_1 varient.

Par conséquent, il y a une infinité de classes de formes pour lesquelles $M = 6$ dans chacune des deux catégories 3 et 4.

Les corps engendrés par les formes du type (51) appartiennent à la classe 3. Cependant, ces corps constituent une sous-classe moins étendue de cette classe. En effet, les racines de l'équation

$$x^4 + v^2 x^2 - 2vx + 1 = 0$$

dépendent d'un seul paramètre v . Or, nous savons (comparez [7], théorème 4) qu'un corps quelconque de la classe 3 est engendré par un nombre du type

$$\sqrt{-a - bi},$$

dépendant des deux paramètres a et b , avec la condition que $a^2 + b^2$ ne soit pas un carré.

Il est facile de voir que la forme (51) ne peut engendrer le même quadruplet de corps que pour un nombre fini de valeurs de v . En effet, soit donné le nombre naturel D , discriminant d'un corps engendré par (51). Alors, le nombre

$$\frac{1}{D} \cdot 16(v^4 + 16)$$

est le carré d'un nombre naturel. Or, il est bien connu que l'équation

$$16(v^4 + 16) = Dw^2$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers v et w ; voir Thue [14].

Les corps engendrés par les formes du type (54) appartiennent à la classe 4. Cependant, ces corps constituent une sous-classe moins étendue de cette classe. En effet, les racines de l'équation

$$x^4 + 2tx^3 + (t^2 + h_1)x^2 + h_1tx + 1 = 0$$

dépendent d'un seul paramètre t , vu qu'on peut négliger le nombre h_1 . Or, nous savons (comparez [7], théorème 4) qu'un corps quelconque de la classe 4 est engendré par un nombre du type

$$\sqrt{\frac{1}{2}(-a - b\sqrt{-3})}$$

dépendant des deux paramètres a et b , avec la condition que $a^2 + 3b^2$ ne soit pas un carré.

Il est possible de montrer que la forme (54) ne peut engendrer le même quadruplet de corps que pour un nombre fini de valeurs de t et h_1 . En effet, soit donné le nombre naturel D , discriminant d'un corps engendré par (54). Alors, le nombre

$$\frac{1}{D} \cdot 9(t^4 - 4h_1t^2 + 16)$$

est le carré d'un nombre naturel. Or, il est évident que la courbe algébrique $F(t, w) = 0$ définie par l'équation

$$9(t^4 - 4h_1t^2 + 16) = Dw^2,$$

où $h_1 = \pm 1$, est du premier genre. Donc, d'après un théorème général de Siegel, celle-ci n'admet qu'un nombre fini de points à coordonnées entières t et w ; voir Siegel [15], p. 43.

Considérons ensuite une forme qui n'est équivalente à aucune des formes paraissant dans les théorèmes 2 et 3. Lesquelles sont les conditions pour qu'elle admette 4 représentations de l'unité? D'après ce que nous venons de montrer dans les paragraphes précédents nous pouvons formuler le

Théorème 4. *Soit F une forme qui n'est équivalente à aucune des formes figurant dans les théorèmes 2 et 3. Pour que F ait 4 représentations de l'unité il faut et il suffit que F soit équivalente à une forme*

$$f(x, y) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + sy^4$$

ayant les propriétés suivantes : Le coefficient p a une des valeurs 0, +1 ou +2. Il y a pour $f(x, y)$ les quatre possibilités que voici :

1°) $v \neq 0$. L'équation $f(x, y) = 1$ admet une solution x, y donnée par (21) et satisfaisant à l'équation (19) ou éventuellement à l'équation (19').

2°) $v \neq 0$, $\Delta = 1$. L'équation $f(x, y) = 1$ admet une solution $x, y = 1$, où x satisfait aux équations (22) et (24).

3°) $v \neq 0$, $\Delta = 3$. L'équation $f(x, y) = 1$ admet une solution $x, y = 1$, où x satisfait aux équations (26) et (28).

4°) $v = 0$. La forme $f(x, y)$ est $= x^4 + y^4$.

On vérifie aisément qu'il y a une infinité de classes de formes dans chacune des trois premiers cas. On peut supprimer le dernier cas vu que la forme $x^4 + y^4$ se présente aussi comme $[0, 1, -1, 0; \sqrt{-2}]$ dans le premier cas. Il faut observer que le théorème 4 est valable sous la condition qu'il existe un sous-corps imaginaire.

12. Les formes des catégories 2, 8, 9, 10, 11, 12 et 13. D'après le § 2 il y a dans tous les corps des classes 2, 8, 9, 10, 11, 12 et 13 un sous-corps quadratique imaginaire différent des corps $\mathbf{K}(i)$ et $\mathbf{K}(i\sqrt{3})$.

Il en résulte le

Théorème 5. *Pour toutes les formes appartenant aux catégories 2, 8, 9, 10, 11, 12 et 13 il y a au plus 4 représentations de l'unité. Les conditions pour 4 représentations sont données dans le théorème 4.*

13. Les formes des catégories 3 et 14. Les corps des classes 3 et 14 contiennent le sous-corps $\mathbf{K}(i)$. Alors, nous obtenons le

Théorème 6. *Désignons par M le nombre de représentations de l'unité par la forme. Pour une forme de la catégorie 3 le nombre M est au plus égal à 6. Si $M = 6$ elle est équivalente à la forme (51). Les conditions pour $M = 4$ sont données dans le théorème 4.*

Supposons que la forme appartient à la catégorie 14. Alors, pour que $M = 8$ il faut et il suffit que la forme soit équivalente à $x^4 - x^2y^2 + y^4$. On ne peut pas avoir $M = 6$. Les conditions pour $M = 4$ sont indiquées dans le théorème 4.

14. Les formes de la catégorie 4. Dans ce cas le seul sous-corps quadratique est $\mathbf{K}(i\sqrt{3})$, et nous aurons le

Théorème 7. *Désignons par M le nombre de représentations de l'unité par la forme. Pour que $M = 8$ il faut et il suffit que la forme soit équivalente à $((1, -1, -1, 1, 1))$. Pour que $M = 6$ il faut et il suffit que la forme soit équivalente à (54). On a $M = 4$ dans les cas indiqués dans le théorème 4.*

15. Les formes des catégories 5 et 7. Dans ces cas il y a un sous-corps quadratique réel. Soit ε l'unité fondamentale de ce corps quadratique. Alors, ε est aussi l'unité fondamentale du corps biquadratique.

Supposons que la forme est donnée par

$$x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + sy^4,$$

et que θ est une racine de l'équation irréductible

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Si $x - y\theta$ est une unité binaire on a nécessairement

$$x - y\theta = \pm e^h,$$

où h est un nombre entier. Or, cette relation subsiste seulement pour $y=0$ et $h=0$, vu que ε est réel, tandis que θ est imaginaire.

Ainsi nous avons établi le

Théorème 8. *Pour les formes des catégories 5 et 7 il y a au plus 2 représentations de l'unité.*

16. Les formes de la catégorie 6. Dans ce cas il faut employer une méthode tout à fait différente des méthodes appliquées jusqu'ici. Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad \text{et} \quad \xi = e^{2\pi i/5}$$

Alors, on a la relation $\varepsilon^{-1} = \xi + \xi^{-1}$.

Soit θ un nombre entier du quatrième degré appartenant au corps $\mathbf{K}(\xi)$. Si $x - \theta y$ est une unité binaire on a évidemment

$$x - \theta y = \xi^h E, \tag{55}$$

où E est une unité (réelle) du corps $\mathbf{K}(\varepsilon)$, et où h a l'une des valeurs 0, 1, -1, 2 ou -2. En passant à la relation imaginairement conjuguée on aura de (55)

$$x - \theta' y = \xi^{-h} E, \tag{56}$$

le nombre θ' étant conjugué à θ . Nous avons

$$\theta = a + b\xi,$$

où a et b sont des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\varepsilon)$. En effet, si nous posons

$$a = l + m\varepsilon, \quad b = l_1 + m_1\varepsilon,$$

où l, m, l_1 et m_1 sont des nombres rationnels, nous aurons, vu que $-\varepsilon = \xi^2 + \xi^3$,

$$\theta = l + m_1 + (l_1 + m_1)\xi + (m_1 - m)\xi^2 - m\xi^3.$$

De là on conclut que les nombres m, m_1, l et l_1 sont des nombres entiers rationnels, vu que les nombres 1, ξ, ξ^2 et ξ^3 constituent une base des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\xi)$. Donc, a et b sont des entiers dans $\mathbf{K}(\varepsilon)$.

Des équations (55) et (56) il résulte que

$$(-\theta + \theta')y = (\xi^h - \xi^{-h})E,$$

d'où

$$-by = \frac{\xi^h - \xi^{-h}}{\xi - \xi^{-1}} \cdot E. \tag{57}$$

Si $h=0$ on obtient $y=0$, ce qui entraîne $x = E = \pm 1$. Dans ce qui suivra nous supposons que y est positif.

Pour $h=1$ on obtient de (57) : $-by = E$, donc $y=1$ et $b = -E$. Il en résulte que

$$x = \theta - b\xi = a + b\xi - b\xi = a.$$

Donc, le nombre entier a doit être rationnel dans ce cas.

Pour $h = -1$ on obtient $by = E$, donc $y = 1$, $b = E$. Il en résulte que

$$x = \theta + b\xi^{-1} = a + b\xi + b\xi^{-1} = a + b\varepsilon^{-1}.$$

Donc, le nombre $a + b\varepsilon^{-1}$ doit être rationnel dans ce cas.

Pour $h = 2$ on obtient : $-by = (\xi + \xi^{-1})E$, donc $y = 1$, $b = -\varepsilon^{-1}E$. Il en résulte que

$$x = \theta - b\varepsilon\xi^2 = a + b\xi - b\varepsilon\xi^2 = a + b\varepsilon.$$

Donc, le nombre $a + b\varepsilon$ doit être rationnel dans ce cas.

Pour $h = -2$ on obtient de (57) : $by = (\xi + \xi^{-1})E$, donc $y = 1$, $b = \varepsilon^{-1}E$. Il en résulte que

$$x = \theta + b\varepsilon\xi^{-2} = a + b\xi + b\varepsilon\xi^{-2} = a - b.$$

Donc, le nombre $a - b$ doit être rationnel dans ce cas.

Ainsi, dans tous les cas b est une unité dans $\mathbf{K}(\varepsilon)$ et y est égal à 1.

Par conséquent, le nombre d'unités binaires dépend du nombre d'entiers *rationnels* parmi les nombres

$$a, \quad a + b\varepsilon^{-1}, \quad a + b\varepsilon, \quad a - b.$$

Il y a au moins un nombre irrationnel parmi ces nombres, vu que $\varepsilon^{-1} + \varepsilon = \sqrt{5}$. Encore, au plus deux de ces nombres peuvent être rationnels. En effet, si a et $a - b$ sont rationnels il est clair que les deux autres nombres sont irrationnels. Si a et $a + b\varepsilon^{-1}$ sont rationnels, il est évident que $a + b\varepsilon$ est irrationnel. En effet, la différence $a + b\varepsilon - (a + b\varepsilon^{-1}) = b(\varepsilon - \varepsilon^{-1}) = b$. En examinant les autres possibilités on voit que trois de ces nombres ne peuvent pas être rationnels en même temps.

Nous aurons ainsi à distinguer onze cas différents.

1°) a est rationnel; $a + b\varepsilon^{-1}$ et $a + b\varepsilon$ sont irrationnels; $a - b$ est rationnel.

Dans ce cas il faut que $b = \pm 1$. Donc $\theta = a \pm \xi$, où a est un nombre entier rationnel quelconque. Il y a 2 unités binaires avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 6.

2°) a et $a + b\varepsilon^{-1}$ sont rationnels; $a + b\varepsilon$ et $a - b$ sont irrationnels.

Dans ce cas il faut que $b = \pm\varepsilon$. Donc

$$\theta = a \pm \varepsilon\xi = a \pm \frac{\xi^2}{1 + \xi^2},$$

a étant un nombre entier rationnel quelconque. Il y a 2 unités binaires avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 6.

3°) a et $a + b\varepsilon$ sont rationnels; $a + b\varepsilon^{-1}$ et $a - b$ sont irrationnels.

Dans ce cas il faut que $b = \pm\varepsilon^{-1}$. Donc

$$\theta = a \pm \varepsilon^{-1}\xi = a \pm (1 + \xi^2),$$

a étant un nombre entier rationnel quelconque. Il y a 2 unités binaires avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 6.

4°) a et $a + b\varepsilon^{-1}$ sont irrationnels; $a + b\varepsilon$ et $a - b$ sont rationnels.

Dans ce cas il faut que $b = \pm\varepsilon^{-2}$. Donc

$$\theta = a \pm \varepsilon^{-2}\xi = z \pm \frac{\xi}{1 + \xi},$$

$z = a - b$ étant un nombre entier rationnel quelconque. Il y a 2 unités binaires avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 6.

5°) a et $a - b$ sont irrationnels; $a + b\varepsilon^{-1}$ et $a + b\varepsilon$ sont rationnels.

Dans ce cas il faut que $b = \pm 1$. Donc

$$\theta = a \pm \xi = z \mp \frac{1 + \xi}{\xi},$$

$z = a + b\varepsilon$ étant un nombre entier rationnel quelconque. Il y a 2 unités binaires avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 6.

6°) a et $a + b\varepsilon$ sont irrationnels; $a + b\varepsilon^{-1}$ et $a - b$ sont rationnels.

Dans ce cas il faut que $b = \pm\varepsilon^{-1}$. Donc

$$\theta = a \pm \varepsilon^{-1}\xi = z \pm \xi^3,$$

où $z = a - b$ est un nombre entier rationnel quelconque. Il y a 2 unités binaires avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 6.

7°) a est rationnel; $a + b\varepsilon^{-1}$, $a + b\varepsilon$ et $a - b$ sont irrationnels.

Dans ce cas il faut évidemment que $b = \pm\varepsilon^N$, où N est un nombre entier rationnel tel que $|N| > 1$. On a donc $\theta = a \pm \varepsilon^N\xi$, où a est un nombre entier rationnel quelconque. Il y a une seule unité binaire avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 4.

8°) a , $a + b\varepsilon^{-1}$ et $a + b\varepsilon$ sont irrationnels; $a - b$ est rationnel.

Dans ce cas on a évidemment $b = \pm\varepsilon^N$, où N est un nombre entier rationnel, différent de 0, -1 et -2. On a donc

$$\theta = a \pm \varepsilon^N\xi = z \pm \varepsilon^N(1 + \xi) = z \mp \varepsilon^{N+1}\xi^3,$$

où $z = a - b$ est un nombre entier rationnel quelconque. Il y a une seule unité binaire avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 4. En posant $N_1 = N + 1$ on aura la condition $|N_1| > 1$.

9°) a , $a + b\varepsilon$ et $a - b$ sont irrationnels; $a + b\varepsilon^{-1}$ est rationnel.

Dans ce cas on a évidemment $b = \pm\varepsilon^N$, où N est un nombre entier rationnel tel que $|N| > 1$. On a donc

$$\theta = a \pm \varepsilon^N\xi = z \pm \varepsilon^N(\xi - \varepsilon^{-1}) = z \mp \varepsilon^N\xi^{-1},$$

où $z = a + b\varepsilon^{-1}$ est un nombre entier rationnel quelconque. Il y a une seule unité binaire avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 4.

10°) a , $a + b\varepsilon^{-1}$ et $a - b$ sont irrationnels; $a + b\varepsilon$ est rationnel.

Dans ce cas on a évidemment $b = \pm \varepsilon^N$, où N est un nombre entier rationnel, différent de 0, -1 et -2 . On a donc

$$\theta = a \pm \varepsilon^N \xi = z \pm \varepsilon^N (\xi - \varepsilon) = z \pm \varepsilon^{N+1} \xi^2,$$

où $z = a + b\varepsilon$ est un nombre entier rationnel quelconque. Il y a une seule unité binaire avec $y = +1$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 4. En posant $N_1 = N + 1$ on aura la condition $|N_1| > 1$.

11°) a , $a + b\varepsilon^{-1}$, $a + b\varepsilon$ et $a - b$ sont tous irrationnels.

Dans ce cas il n'y a que les possibilités $x = \pm 1$, $y = 0$. Le nombre total d'unités binaires est égal à 2.

Soit $N(x - \theta y)$ la forme biquadratique correspondant au nombre θ . Alors, il est évident que, dans les six premiers cas, cette forme est équivalente à la forme

$$N(x - \xi y) = x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4.$$

Dans les cas 7-10 les formes sont équivalentes à

$$N(x - \varepsilon^n \xi^h y), \tag{58}$$

où n est un nombre entier tel que $|n| > 1$, et où h prend les valeurs $h = -2, -1, +1$ et $+2$. Il est évident que les formes

$$N(x - \varepsilon^n \xi^h y) \quad \text{et} \quad N(x - \varepsilon^{-n} \xi^{-h} y)$$

sont équivalentes. Donc, il suffit dans (58) de supposer $n \geq 2$. Encore, il suffit de prendre $h = 1$. En effet, les formes

$$N(x - \varepsilon^n \xi y) \quad \text{et} \quad N(x - \varepsilon^n \xi^h y)$$

sont équivalentes. Il suffit de le montrer pour $h = 2$. Les nombres conjugués de $\varepsilon^n \xi^2$ sont

$$\varepsilon^n \xi^2, \quad \varepsilon^n \xi^{-2}, \quad (-\varepsilon)^{-n} \xi, \quad (-\varepsilon)^{-n} \xi^{-1}.$$

En prenant les inverses de ces nombres et en multipliant ceux-ci par $(-1)^n$ on aura les nombres

$$(-\varepsilon)^{-n} \xi^{-2}, \quad (-\varepsilon)^{-n} \xi^2, \quad \varepsilon^n \xi^{-1}, \quad \varepsilon^n \xi,$$

qui sont évidemment les conjugués de $\varepsilon^n \xi$.

Pour le discriminant du nombre $\varepsilon^n \xi$ on trouvera aisément, à l'aide des formules du numéro 6, l'expression

$$D(\varepsilon^n \xi) = 5[(\varepsilon^{2n} + \varepsilon^{-2n} + \frac{1}{2}(-1)^n)^2 - \frac{5}{4}]^2, \tag{59}$$

valable pour toutes les valeurs entières de n . Vu que

$$\varepsilon^{2n} - \varepsilon^{2n_1} > 2$$

lorsque $n > n_1 \geq 1$, on montrera à l'aide de (59), que

$$D(\varepsilon^n \xi) > D(\varepsilon^{n_1} \xi). \tag{60}$$

Il en résulte qu'il y a une infinité de classes de formes du type

$$N(x - \varepsilon^n \xi y). \tag{61}$$

En résumant nous aurons le

Théorème 9. *Désignons par M le nombre des représentations de l'unité par une forme de la catégorie 6. Alors, on a $M=6$ lorsque celle-ci est équivalente à la forme $N(x - \xi y)$ et seulement dans ce cas. On a $M=4$ lorsque la forme est équivalente à une forme $N(x - \varepsilon^n \xi y)$, où n est un nombre naturel ≥ 2 , et seulement dans ce cas. Dans tous les autres cas on a $M \leq 2$. Les formes $N(x - \varepsilon \xi y)$ et $N(x - \varepsilon^{-1} \xi y)$ sont équivalentes à $N(x - \xi y)$. Le discriminant de $N(x - \xi y)$ est égal à 125.*

Soit θ un nombre entier du quatrième degré appartenant à $\mathbf{K}(\xi)$. Alors, il n'y a pour les solutions y de l'équation $N(x - \theta y) = 1$ que les trois possibilités $y = 0, +1$ et -1 .

Il résulte de l'inégalité (60) qu'il y a une infinité de classes de formes pour lesquelles $M = 4$.

17. Remarques sur les résultats obtenus dans les numéros 11–16. Par les théorèmes 2–9 le problème des unités binaires est résolu pour les formes des catégories 2–14. Le théorème 1 du n° 4 se trouve démontré; et nous avons pu caractériser arithmétiquement les cas dans lesquels il y a 4, 6 et 8 représentations de l'unité. Le théorème 1 peut être complété de la façon suivante :

Théorème 10. *Désignons par M le nombre des représentations d'une forme des catégories 2–14. Alors on a $M \leq 8$. Pour que $M = 8$ il faut et il suffit que la forme soit équivalente à l'une des deux formes*

$$((1, 0, -1, 0, 1)) \quad \text{et} \quad ((1, -1, -1, 1, 1)).$$

Pour que $M = 6$ il faut et il suffit que la forme soit équivalente à l'une des trois formes

$$((1, 0, v^2, -2v, 1)), \quad ((1, 2t, t^2 + h_1, h_1 t, 1)) \quad \text{et} \quad ((1, 1, 1, 1, 1))$$

où v et t sont des nombres naturels et $h_1 = \pm 1$, le cas $t = 2, h_1 = 1$ étant exclu. Il y a une infinité de classes de formes pour lesquelles $M = 6$ dans chacune des catégories 3 et 4.

Soit donnée la forme $((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4))$. Si le corps \mathbf{K} est engendré par l'équation

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

nous dirons que la forme est *construite sur \mathbf{K}* . Si \mathbf{K} appartient à la classe Z , la forme appartient alors à la catégorie Z .

Nous pouvons ajouter au théorème précédent le

Théorème 11. *La possibilité $M = 4$ est réalisée dans toutes les catégories des formes, exception faite des catégories 5 et 7. La condition nécessaire et suffisante pour que $M = 4$ est donnée dans les théorèmes 4 et 9.*

Soit \mathbf{K} un corps quelconque appartenant à une classe qui est différente des deux classes 5 et 7. Alors, il y a une infinité de classes de formes construites sur \mathbf{K} pour lesquelles on a $M = 4$.

Démonstration. Il suffit de démontrer la dernière partie. Il résulte du théorème 9 que notre assertion est vraie lorsque \mathbf{K} est le corps de la classe 6. Soit maintenant ξ un nombre entier qui engendre le corps \mathbf{K} , et considérons les anneaux entiers \mathbf{R} de \mathbf{K} dans lesquels l'unité fondamentale E est du quatrième degré.

Considérons ensuite la forme

$$N(x - yE). \quad (62)$$

Celle-ci a évidemment 4 représentations triviales de l'unité, à savoir pour $x = \pm 1$, $y = 0$ et pour $x = 0$, $y = \pm 1$. Nous allons d'abord montrer que \mathbf{R} peut être choisi de façon qu'il n'y ait pas d'autres représentations. Cela est évident si \mathbf{K} appartient à une des classes 2, 8, 9, 10, 11, 12 ou 13 (d'après le théorème 5). D'après les théorèmes 2, 3, 6 et 7 on a la même chose si \mathbf{K} appartient à une des classes 3, 4 ou 14, sauf si \mathbf{K} est engendré par un nombre ξ , racine de l'une des quatre équations

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \text{ (classe 14), } \quad x^4 + v^2x^2 - 2vx + 1 = 0 \text{ (classe 3),}$$

$$x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \text{ (classe 4), } \quad x^4 + 2tx^3 + (x^2 + h_1)x^2 + h_1tx + 1 = 0 \text{ (classe 4).}$$

Supposons que \mathbf{K} est engendré par ξ . Si η est une racine de la première de ces équations (classe 14), il suffit que la forme (62) ne soit pas équivalente à la forme $((1, 0, -1, 0, 1))$. D'après le théorème 6 on a donc $M = 4$.

Si ξ est une racine de la seconde équation (classe 3) il suffit de prendre $\mathbf{R} = \mathbf{R}(3\xi)$. En effet, dans ce cas le discriminant de la forme (62) aura la valeur $16h^2 \cdot 3^{12}(v^4 + 16)$, où h est un nombre naturel. Vu que le nombre 3 ne divise pas $w^4 + 16$, on ne peut pas avoir

$$D(E) = 16(w^4 + 16).$$

D'après le théorème 3 on a donc $M = 4$.

Si ξ est une racine de la troisième équation (classe 4), il suffit de prendre $\mathbf{R} = \mathbf{R}(5\xi)$. En effet, dans ce cas le discriminant de la forme (62) sera égal à $117h^25^{12}$, où h est un nombre naturel. Alors, on ne peut pas avoir $M = 8$ (théorème 2). Pour que $M = 6$ il fallait que

$$D(E) = 9(t^4 - 4h_1t^2 + 16).$$

Or, cela est impossible vu que le nombre $t^4 - 4h_1t^2 + 16$ n'est jamais divisible par 5. On a donc $M = 4$.

Si ξ est une racine de la dernière équation (classe 4), il suffit de prendre $\mathbf{R} = \mathbf{R}(5\xi)$ pour obtenir une forme (62) pour laquelle $M = 4$. On le reconnaît par le même raisonnement que dans le cas précédent.

Par conséquent, si nous prenons l'anneau $\mathbf{R}(15\xi)$, la forme (62) admet exactement 4 représentations. Pour le discriminant de l'unité fondamentale de $\mathbf{R}(15\xi)$ nous avons

$$D(E) = h^2 D(15\xi) = h^2 15^{12} D(\xi),$$

où h est un nombre naturel. Soit maintenant $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(15hc_1\xi)$ un anneau contenu dans $\mathbf{R}(15\xi)$, où c_1 est un nombre naturel > 1 , et soit E_1 l'unité fondamentale de \mathbf{R}_1 , laquelle peut être supposée d'avoir le degré 4. Alors nous aurons

$$D(E_1) = h_1^2 D(15hc_1\xi) = h_1^2 h^{10} c_1^{12} D(E),$$

h_1 étant un nombre naturel. Nous en concluons que la forme

$$N(x - yE_1) \tag{63}$$

admet exactement 4 représentations vu que le discriminant $D(E_1)$ est divisible par 15. De plus, on a

$$D(E_1) > D(E),$$

c_1 étant > 1 . Ainsi les formes (62) et (63) ne sont pas équivalentes. On peut continuer ce procédé en passant de l'anneau $\mathbf{R}(15hc_1\xi)$ à un troisième anneau $\mathbf{R}(15hh_1c_1c_2\xi)$, où c_2 est un nombre naturel > 1 . Cela démontre le théorème 11.

18. Les formes engendrées par une unité. Considérons les formes qui admettent 8 ou 6 représentations. C'est un fait intéressant qu'une forme de ce type est toujours équivalente à une forme $((1, -p, q, -r, 1))$, c'est-à-dire à une forme engendrée par une unité (théorème 10). Cela est vrai même pour les formes de la catégorie 6 qui admettent 4 représentations (théorème 9). Nous allons montrer que les formes de la catégorie 13 qui admettent 4 représentations ont la même propriété.

La catégorie 13 contient un seul corps, à savoir celui qui est engendré par $\xi = e^{\pi i/4}$. L'unité fondamentale du corps est $\varepsilon = \sqrt{2} + 1$. Soit θ un nombre entier du quatrième degré appartenant à $\mathbf{K}(\xi)$. Alors on a

$$\theta = a + b\xi,$$

où a et b sont des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\sqrt{2})$. En effet, si nous posons

$$a = l + m\sqrt{2}, \quad b = l_1 + m_1\sqrt{2},$$

où l, m, l_1 et m_1 sont des nombres rationnels, nous aurons, vu que $\sqrt{2} = \xi + \xi^{-1}$,

$$\theta = l + m_1 + (l_1 + m)\xi + m_1\xi^2 - m\xi^3.$$

Vu que les nombres 1, ξ , ξ^2 et ξ^3 constituent une base des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\xi)$, on en conclut que les nombres m, m_1, l_1 et l sont des nombres entiers rationnels. Donc, a et b sont des entiers dans $\mathbf{K}(\sqrt{2})$.

Si $x - \theta y$ est une unité binaire on a évidemment

$$x - \theta y = \xi^h E, \tag{64}$$

où E est une unité (réelle) du corps $\mathbf{K}(\sqrt{2})$, et où h a une des valeurs 0, 1, -1 ou 2. En passant à la relation imaginairement conjuguée on aura

$$x - \theta' y = \xi^{-h} E, \tag{65}$$

le nombre θ' étant conjugué à θ . Des équations (64) et (65) il résulte que

$$\begin{aligned} (-\theta + \theta') y &= (\xi^h - \xi^{-h}) E, \\ -by &= \frac{\xi^h - \xi^{-h}}{\xi - \xi^{-1}} \cdot E. \end{aligned} \tag{66}$$

$h=0$ correspond à $y=0$. Il suffit de supposer y positif. Pour $h=1$ on obtient de (66) : $-by=E$, donc $y=1$. Pour $h=-1$ on obtient : $by=E$, donc $y=1$. Pour $h=2$ on obtient

$$-by = (\xi + \xi^{-1})E = \sqrt{2}E.$$

ce qui entraîne $y=1$.

Dans tous les cas il faut donc que $y=1$.

Soit $x_0 - \theta$ la valeur correspondante de l'unité binaire. En exécutant la transformation unimodulaire

$$x = X + x_0 Y, \quad y = Y$$

sur la forme

$$N(x - \theta y)$$

nous aurons évidemment une forme du type

$$((1, -p, q, -r, 1)).$$

Notre assertion se trouve ainsi démontrée et nous pouvons énoncer le

Théorème 12. *Les formes admettant 8 ou 6 représentations de l'unité sont équivalentes à des formes du type $((1, -p, q, -r, 1))$.*

Les formes des catégories 6 et 13 qui admettent 4 représentations de l'unité sont équivalentes à des formes du type $((1, -p, q, -r, 1))$.

Dans ce travail nous n'avons pas traité les formes de la catégorie 1. Évidemment, il faut traiter celles-là par des méthodes qui diffèrent essentiellement de celles que nous avons appliquées ici. Nous allons retourner sur cette question prochainement.

Le seul résultat sur les formes de la catégorie 1 est contenu dans le théorème de Ekenstam que nous avons mentionné dans le n° 4. Ce théorème regarde seulement des formes particulières appartenant aux catégories 1, 2 et 8. Ekenstam montre qu'il y a au plus 6 représentations de l'unité. Or, nous avons montré que, pour les catégories 2 et 8, il y a au plus 4 représentations (théorème 5). Donc, le résultat de Ekenstam se réduit à la proposition suivante :

Pour les formes $((1, -p, q, -r, 1))$ appartenant à la catégorie 1, il y a 4 ou 6 représentations de l'unité, pourvu que le discriminant soit > 1024 .

Remarque. Il n'est pas difficile de voir comment on peut procéder pour reconnaître si la forme générale du premier rang

$$F(x, y) = a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4,$$

où a_0 et a_4 sont tous les deux > 1 , peut représenter un nombre naturel donné A ou non. En effet, soient $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, $\gamma + \delta i$ et $\gamma - \delta i$, les nombres α , β , γ et δ étant réels, les racines de l'équation

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Alors, la forme peut s'écrire

$$a_0 [(x - \alpha y)\delta \pm (x - \gamma y)\beta]^2 + a_0 [(x - \alpha y)(x - \gamma y) \mp \beta\delta]^2.$$

Donc, si on a approximé les nombres α , β , γ et δ avec une exactitude suffisante, il est évidemment possible de calculer des bornes supérieures et inférieures pour les solutions entières éventuelles de l'équation $F(x, y) = A$.

Il est vraisemblable que cette méthode laborieuse et peu gracieuse puisse être remplacée par un critère arithmétique.

19. Le calcul numérique. Soit donnée la forme biquadratique du premier rang

$$f(x, y) = x^4 - px^3y + qx^2y^2 - rxy^3 + sy^4. \tag{67}$$

Supposons qu'on a vérifié par les méthodes conventionnelles qu'elle est irréductible et du rang 1.

Soit θ une racine de l'équation biquadratique

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Pour déterminer la classe à laquelle appartient le corps $\mathbf{K}(\theta)$ il faut déterminer les sous-corps quadratiques éventuels. Pour effectuer cela on peut former la résolvante cubique et chercher les racines rationnelles de celle-ci; voir p. ex. Nagell [7], p. 347–352. D'ailleurs, il est aussi possible de déterminer les sous-corps à l'aide des formules (12)–(15) et (12')–(15'); cette dernière méthode est souvent plus avantageuse, et on déterminera en même temps les nombres u, v, u_1 et v_1 . En voici le procédé :

Si $-\Delta \not\equiv 1 \pmod{4}$ on aura à résoudre le système d'équations

$$p = 2u, \quad q = u^2 + \Delta v^2 + 2u_1, \quad r = 2uu_1 + 2\Delta v v_1, \quad s = u_1^2 + \Delta v_1^2,$$

où p, q, r et s sont connus. En éliminant u des trois premières relations on aura l'équation

$$\frac{1}{4}p^3 - pq + 2r = \Delta v(4v_1 - pv). \tag{68}$$

Si le côté gauche n'est pas $=0$ on aura de cette équation un nombre limité de possibilités pour les entiers Δ, v et v_1 ; v peut être choisi positif. Finalement on aura à contrôler si les valeurs ainsi trouvées satisfont à la relation $s = u_1^2 + \Delta v_1^2$ ou non.

Si le côté gauche dans (68) est $=0$, on aura ou $v=0$ ou $pv=4v_1$. Dans le premier cas le système à résoudre sera

$$q - \frac{1}{4}p^2 = 2u_1, \quad r = pu_1, \quad s = u_1^2 + \Delta v_1^2.$$

Donc, si $p=0$, on aura $u=0, r=0, u_1 = \frac{1}{2}q$ et $s - \frac{1}{4}q^2 = \Delta v_1^2$; de la dernière relation on aura un nombre fini de possibilités pour Δ et v_1 ; en effet, on ne peut pas avoir $s = \frac{1}{4}q^2$, puisque l'équation biquadratique est irréductible. Si $p \neq 0$, on aura

$$u_1 = \frac{r}{p} = \frac{1}{2}q - \frac{1}{8}p^2, \quad s - \frac{r^2}{p^2} = \Delta v_1^2,$$

où la dernière relation donnera un nombre fini de valeurs de Δ et de v_1 ; en effet, v_1 ne peut pas être $=0$ lorsque $v=0$.

Considérons ensuite le cas $pv=4v_1$. Si $p=0$, on aura alors $v_1=0, r=0, s=u_1^2$ et

$$q - 2u_1 = q - 2\sqrt{s} = \Delta v^2,$$

d'où résultera un nombre fini de possibilités pour Δ et v . Si enfin $p \neq 0$, on obtiendra, en éliminant v ,

$$p^2(sp^2 - r^2) = \Delta v_1^2(64\Delta v_1^2 - 16pr + p^4),$$

$$u_1 = \frac{1}{p^2}(pr - 8\Delta v_1^2).$$

Si $sp^2 - r^2 \neq 0$, on aura un nombre fini de possibilités pour Δ et v . Si $sp^2 - r^2 = 0$, il faut que

$$64\Delta v_1^2 - 16pr + p^4 = 0.$$

Cette équation donnera un nombre limité de possibilités pour Δ et v , sinon $p^4 = 16pr$. Or, cela entraînerait

$$q = \frac{3}{8}p^2, \quad r = \frac{1}{16}p^3 \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{256}p^4.$$

Donc, le polynôme biquadratique aurait le zéro $x = \frac{1}{4}p$.

Si finalement $-\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ on procédera d'une façon analogue avec le système

$$p = u, \quad q = \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}\Delta v^2 + u_1, \quad r = \frac{1}{2}uu_1 + \frac{1}{2}\Delta vv_1, \quad s = \frac{1}{4}u_1^2 + \frac{1}{4}\Delta v_1^2.$$

Exemple 1. Considérons la forme

$$f(x, y) = x^4 - x^3y + 2xy^3 + y^4.$$

Vu que p est impair on doit avoir $\Delta \equiv -1 \pmod{4}$. Nous aurons le système

$$1 = u, \quad 0 = \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}\Delta v^2 + u_1, \quad -2 = \frac{1}{2}uu_1 + \frac{1}{2}\Delta vv_1, \quad 1 = \frac{1}{4}u_1^2 + \frac{1}{4}\Delta v_1^2.$$

On trouvera aisément que ce système est satisfait par les nombres

$$u = 1, \quad v = 1, \quad u_1 = -1, \quad v_1 = -1, \quad \Delta = 3,$$

et seulement par ces nombres. Le seul sous-corps est $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$, et la forme appartient à la catégorie 4. La forme a le discriminant 189. Donc, elle n'est pas équivalente à la forme $((1, -1, -1, 1, 1))$, et le nombre de représentations de l'unité est au plus égal à 6. Alors, il faut examiner si la forme est équivalente à la forme

$$x^4 + 2tx^3y + (t^2 + h_1)x^2y^2 + h_1txy^3 + y^4.$$

Le discriminant de celui-ci est égal à

$$9(t^4 - 4h_1t^2 + 16).$$

Ce dernier nombre est égal à 189 pour $t = 1$, $h_1 = -1$, et on voit immédiatement que les deux formes sont équivalentes. Il en résulte que l'équation $f(x, y) = 1$ admet, outre les 4 solutions triviales, les solutions $x = -1$, $y = +1$ et $x = +1$, $y = -1$.

Exemple 2. Considérons la forme

$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y^2 + 12xy^3 + 19y^4.$$

Dans ce cas nous allons nous servir de la résolvante cubique. Celle-ci sera

$$z^3 + 8z^2 - 60z - 144 = 0$$

avec les racines $z = -2$, 6 et -12 , correspondant aux sous-corps

$$\mathbf{K}(\sqrt{-2}), \mathbf{K}(\sqrt{6}) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}(\sqrt{-3}).$$

Ainsi, la forme appartient ou à la catégorie 11 ou à la catégorie 12. Pour vérifier qu'on a la dernière catégorie des deux, il suffit de montrer que les corps biquadratiques engendrés par la forme soient aussi engendrés par les nombres

$$\sqrt{-5 \mp 2\sqrt{6}}, \tag{69}$$

où $5 + 2\sqrt{6}$ est l'unité fondamentale de $\mathbf{K}(\sqrt{6})$. Les nombres (69) sont racines de l'équation

$$x^4 + 10x^2 + 1 = 0,$$

dont la résolvante cubique est

$$z^3 + 20z^2 + 96z = 0.$$

Cette équation admet les trois racines rationnelles $z=0, -8$ et -12 , lesquelles correspondent aux sous-corps $\mathbf{K}(\sqrt{6}), \mathbf{K}(\sqrt{-2})$ et $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$.

Il reste à examiner si la forme admet 4 représentations. Pour cela nous prenons $\Delta=2$, ce qui entraîne $u=0, v=1, u_1=1, v_1=-3$; formules (12)–(15). D'après la formule (21) on obtient pour une solution éventuelle $x=v_1/d=-3, y=v/d=1$. Or, cela n'est pas une solution de $f(x, y)=1$. Donc les seules solutions sont $x = \pm 1, y=0$.

Exemple 3. Considérons la forme

$$f(x, y) = x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2 - 6xy^3 + 3y^4.$$

Si Δ n'est pas $\equiv -1 \pmod{4}$ on aura le système

$$u = 1, \quad 4 = \Delta v^2 + 2u_1, \quad 3 = u_1 + \Delta v v_1, \quad 3 = u_1^2 + \Delta v_1^2.$$

Il en résulte $2 = \Delta v(2v_1 - v)$;

et on trouvera comme seule solution

$$u = 1, \quad v = 1, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 1, \quad \Delta = 2.$$

Si $\Delta \equiv -1 \pmod{4}$ on aura le système

$$u = 2, \quad 16 = \Delta v^2 + 4u_1, \quad 12 = 2u_1 + \Delta v v_1, \quad 12 = u_1^2 + \Delta v_1^2.$$

En éliminant u_1 , il résulte de là

$$8 = \Delta v(2v_1 - v).$$

Or, cette équation ne donnera aucune solution. Donc, il y a le seul sous-corps $\mathbf{K}(\sqrt{-2})$, et la forme appartient à la catégorie 2.

D'après la formule (21) on obtient $x = v_1/d = 1, y = v/d = 1$. Donc, l'équation $f(x, y) = 1$ admet 4 solutions.

20. Le nombre de représentations de l'unité après une transformation linéaire. Considérons de nouveau la forme binaire générale du n -ième degré ($n \geq 3$)

$$F(x, y) = x^n + a_1 x^{n-1}y + \dots + a_n y^n,$$

à coefficients entiers et irréductible. Supposons que l'équation

$$F(x, y) = 1 \tag{70}$$

a les solutions suivantes en nombres entiers : x_i, y_i pour $i = 1, 2, \dots, m$. Par la transformation linéaire

$$x = eX + fY, \quad y = gX + hY,$$

où e, f, g et h sont des nombres entiers tels que le déterminant $eh - fg = \delta$ soit différent de zéro, la forme sera transformée dans la forme $G(X, Y)$. Les solutions éventuelles en nombres entiers X_i, Y_i de l'équation transformée

$$G(X, Y) = 1 \tag{71}$$

seront données par les relations

$$X_i = \frac{1}{\delta}(hx_i - fy_i), \quad Y_i = \frac{1}{\delta}(-gx_i + ey_i). \tag{72}$$

Désignons par m^* le nombre de solutions entières de (71). Alors on a $m \geq m^*$. Pour qu'on ait $m = m^*$ il faut que les nombres g et h soient divisibles par δ . En effet, à la solution $x = 1, y = 0$ de (70) correspond la solution $X = h/\delta, Y = g/\delta$ de (71). Vu que $y_i = gX_i + hY_i$, on en conclut que toutes les solutions y_i de (70) sont divisibles par δ . La condition nécessaire et suffisante pour $m = m^*$ est donc qu'on ait

$$g \equiv h \equiv y_i \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Supposons maintenant que, dans la forme $F(x, y)$, le dernier coefficient a_n est $= 1$. Alors, si $|\delta| > 1$ et si $m = m^*$ on aurait en outre la condition $e \equiv f \equiv 0 \pmod{\delta}$ ce qui est impossible. Dans ce cas on a donc $m > m^*$. Ce résultat peut être appliqué à nos formes biquadratiques des catégories 2-14. En tirant profit du théorème 12 nous aurons : Si une forme biquadratique F admettant $m > 4$ représentations de l'unité subit une transformation linéaire non-unimodulaire, le nombre m^* des représentations de la forme résultante G est $< m$. Si la forme F appartient à l'une des catégories 6 et 13 et si $m = 4$, le nombre m^* sera au plus égal à 2.

§ 6. Sur la possibilité de généraliser les résultats précédents

21. Les formes binaires cyclotomiques. On peut se demander s'il est possible d'étendre à des formes binaires de degré supérieur les résultats obtenus dans les pages précédentes. Alors, il faut observer que le succès dans nos recherches sur les formes biquadratiques $f(x, y)$ dépendait surtout des deux faits suivants : 1°) Les racines de l'équation $f(x, 1) = 0$ sont toutes imaginaires; 2°) les corps engendrés par cette équation contiennent des sous-corps quadratiques. Nous n'avons pas l'intention d'aborder la question dans toute son étendue ici. Nous nous contenterons de montrer qu'il est réellement possible de faire des généralisations dans certaines directions. Il y a un type particulier de formes qui se présentent d'une façon naturelle, à savoir les formes binaires cyclotomiques.

La forme $G(x, y)$ sera appelée *forme binaire cyclotomique d'index n* lorsque'elle jouit des propriétés suivantes : Les coefficients sont des entiers rationnels. L'équation $G(x, 1) = 0$ est irréductible, et les racines de celle-ci engendrent le corps $\mathbf{K}(\xi)$, où ξ est une racine n -ième primitive de l'unité. Cette forme, qui est de degré $\varphi(n)$, possède les qualités dont il s'agit. Le cas le plus simple est la forme définie par la relation

$$F_n(x, y) = \prod_{\xi} (x - \xi y), \tag{73}$$

le produit étant étendu à toutes les racines n -ièmes primitives de l'unité. Celle-ci sera appelée la *forme binaire cyclotomique fondamentale d'index n* . Nous venons de traiter trois formes de ce type dans les pages précédentes, à savoir les formes du quatrième degré $F_5(x, y)$, $F_8(x, y)$ et $F_{12}(x, y)$.

Il est facile d'établir le résultat suivant :

Théorème 13. Désignons par M le nombre des solutions de l'équation diophantienne

$$F_n(x, y) = 1$$

en nombres entiers x, y . Alors, on a

- 1°) pour $n = p^\alpha$, p nombre premier impair, $\alpha \geq 1$, $M = 6$;
- 2°) pour $n = 2p^\alpha$, p nombre premier impair, $\alpha \geq 1$, $M = 6$;
- 3°) pour $n = 2^\beta$, $\beta \geq 2$, $M = 4$;
- 4°) dans tous les autres cas $M = 8$.

Dans tous les cas on a les quatre solutions $x=0, y = \pm 1$; $x = \pm 1, y = 0$; dans le premier cas on a encore $x = -y = \pm 1$; dans le second cas on a encore $x = y = \pm 1$; et dans le dernier cas on a encore $x = 1, y = \pm 1$; $x = -1, y = \pm 1$.

Pour la démonstration voir Nagell [10], p. 153-156. Nous profitons de l'occasion pour aviser les corrections suivantes au travail [10] : La formule (18), page 159, doit être

$$D_n = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_p p^{\varphi(n) \left[\alpha - \frac{1}{p-1} \right]}.$$

Page 160, ligne 5, à partir d'en bas, il faut ajouter *de* après le mot entiers. Page 164, ligne 2, à partir d'en bas, on doit lire K_n au lieu de K_N . Page 165, ligne 3, à partir d'en bas, il faut lire

$$e^{2\pi i/11} \quad \text{et} \quad e^{2\pi i/13} + e^{-2\pi i/13}.$$

Page 170, dans la formule (33) il faut remplacer ε_1 (par $(\varepsilon_1$. Page 171, la ligne 5 doit être $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r = -1$. Page 178, ligne 13, on doit lire $\left(\frac{f}{\Delta} \right) = +1$.

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. Soit ξ une racine n -ième primitive de l'unité, $n > 4$, et soit θ un nombre entier du corps $\mathbf{K}(\xi)$. Alors, on a $\theta = a + b\xi$, où a et b sont des nombres entiers du corps $\mathbf{K}(\xi + \xi^{-1})$.

Démonstration. Soit θ' le nombre imaginairement conjugué de θ . Alors on a $\theta' = a + b\xi^{-1}$, d'où

$$\theta - \theta' = b(\xi - \xi^{-1}).$$

Vu que les nombres $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{\varphi-1}$, où $\varphi = \varphi(n)$, constituent une base des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\xi)$, nous avons

$$\theta = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots + c_{\varphi-1} \xi^{\varphi-1},$$

les nombres c_0, c_1, c_2 etc. étant des entiers rationnels. Donc

$$\theta - \theta' = c_1(\xi - \xi^{-1}) + c_2(\xi^2 - \xi^{-2}) + \dots + c_{\varphi-1}(\xi^{\varphi-1} - \xi^{-\varphi+1}).$$

Il en résulte que le nombre

$$b = \frac{\theta - \theta'}{\xi - \xi^{-1}}$$

est un entier réel. Alors, le nombre

$$a = \frac{1}{2}(\theta + \theta') - \frac{1}{2}b(\xi + \xi') = \theta - b\xi$$

est aussi un entier réel.

Dans les exposés sur la théorie des corps cyclotomiques on trouve la proposition suivante :

Lemme 2. *Soit $n = p^\alpha$, où p est un nombre premier impair, et soit $\xi = e^{2\pi i/n}$. Alors, toute unité du corps $\mathbf{K}(\xi)$ est égale au produit d'une unité réelle de ce corps par une racine n -ième de l'unité.*

Pour la démonstration voir Hilbert [11], p. 335.

Nous allons établir le théorème que voici :

Théorème 14. *Soient n et ξ définis comme dans le lemme 2. Encore, soit θ un nombre entier de degré $\varphi(n)$ appartenant à $\mathbf{K}(\xi)$, et considérons la forme binaire de degré $\varphi(n)$*

$$G(x, y) = N(x - \theta y),$$

où N signifie la norme dans le corps $\mathbf{K}(\xi)$.

Désignons par M le nombre de solutions de l'équation

$$G(x, y) = 1 \tag{74}$$

en nombres entiers rationnels x, y . Alors, M est au plus égal à 6. Pour qu'on ait $M \geq 4$ il faut et il suffit que $G(x, y)$ soit équivalente à une forme $N(x - \eta y)$, où η est une unité de degré $\varphi(n)$ du corps $\mathbf{K}(\xi)$. Le cas $M = 6$ est possible seulement pour un nombre fini de classes de formes, p. ex. pour la classe représentée par $F_n(x, y)$.

Si $G(x, y)$ n'est pas équivalente à une forme du type $N(x - \eta y)$ on a $M = 2$.

Pour les solutions y de (74), il n'y a que les trois possibilités $y = 0, +1$ et -1 .

Démonstration. Si $x - \theta y$ est une unité binaire, avec $y \neq 0$, on a, d'après le lemme 2 :

$$x - \theta y = \xi^h E, \tag{75}$$

où E est une unité réelle, et où h est un entier rationnel, qui n'est pas divisible par n . D'après le lemme 1 nous avons $\theta = a + b\xi$, où a et b sont des nombres entiers du corps $\mathbf{K}(\xi + \xi^{-1})$. En passant de (75) à la relation imaginairement conjuguée nous aurons

$$x - \theta' y = \xi^{-h} E. \tag{75'}$$

Il en résulte, vu que $\theta' = a + b\xi^{-1}$,

$$-by = \frac{\xi^h - \xi^{-h}}{\xi - \xi^{-1}} E = \eta E. \tag{76}$$

Ici η est une unité, si h n'est pas divisible par p . Supposons ensuite que $h = p^\beta h_1$, où h_1 n'est pas divisible par p ; h n'est pas divisible par $n = p^\alpha$, donc $\beta < \alpha$. Alors, nous avons les relations d'idéaux suivantes

$$(p) = (1 - \xi)^{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad (1 - \xi^h) = (1 - \xi)^{p^\beta}.$$

Il en résulte que l'idéal

$$(\eta) = \left(\frac{\xi^h - \xi^{-h}}{\xi - \xi^{-1}} \right) = (1 - \xi)^{p^\beta - 1}$$

n'est pas divisible par (p) , vu que $p^\beta - 1 < \varphi(n)$. Donc, on conclut de (76) que $y = \pm 1$ dans toutes les unités binaires $\neq \pm 1$. Si x_0 est une valeur entière correspondant à $y = +1$ nous aurons

$$\theta = x_0 - \xi^h E.$$

Donc, la forme $N(x - \theta y)$ est équivalente à la forme $N(x - \xi^h E y)$. Considérons l'équation

$$N(x - \xi^h E y) = 1. \tag{77}$$

Celle-ci a les quatre solutions triviales : $x=0, y = \pm 1; x = \pm 1, y = 0$. S'il y en a d'autres, il faut que $y = \pm 1$. Soit $x = x_1, y = +1$ et $x = -x_1, y = -1$ une paire de solutions de (77) avec $x_1 \neq 0$. Si nous exécutons sur la forme $N(x - \xi^h E y)$ la transformation unimodulaire

$$x = x_1 X - (x_1 - 1) Y, \quad y = X - Y,$$

nous aurons une autre forme $N(X - \theta_1 Y)$,

où θ_1 est un nombre entier de degré $\varphi(n)$ appartenant à $\mathbf{K}(\xi)$.

La correspondance entre les solutions des deux équations (77) et

$$N(X - \theta_1 Y) = 1 \tag{78}$$

est mise en évidence par le tableau suivant :

x	0	0	1	-1	x_1	$-x_1$
y	-1	1	0	0	1	-1
X	$x_1 - 1$	$1 - x_1$	1	-1	1	-1
Y	x_1	$-x_1$	1	-1	0	0

Ici il faut que $|Y| \leq 1$. Il en résulte que $x_1 = \pm 1$, le signe de x_1 dépendant de l'unité $\xi^h E$. On en conclut qu'il y a au plus 2 solutions de (77) outre les quatre solutions triviales. Les deux solutions additionnelles seront $x = -y = \pm 1$, si $x_1 = -1$, et $x = y = \pm 1$, si $x_1 = +1$.

La forme $F_n(x, y)$ représente évidemment une classe ayant $M=6$. Dans le cas de $n=5$ nous avons montré que cette classe est la seule pour laquelle $M=6$ (théorème 9). Dans le cas plus général, que nous avons ici, nous pouvons seulement montrer qu'il y a un nombre fini de classes de formes avec $M=6$. En effet, la condition nécessaire et suffisante pour $M=6$ est que le nombre

$$x_1 - \xi^h E = \pm 1 - \xi^h E$$

soit une unité. Or, nous avons montré que cela est possible seulement dans un nombre fini de cas; voir Nagell [8], théorème 8.

Le théorème 14 se trouve ainsi démontré. Dans le cas de $n=5$ nous avons obtenu un résultat plus complet. Il est facile d'établir un résultat analogue dans le cas de $n=2^\beta, \beta \geq 3$. Nous avons déjà traité le cas de $n=8$ (théorèmes 5, 11 et 12). On peut

aussi trouver des résultats analogues dans les cas suivants : 1°) $n=4n_1$, n_1 étant divisible par un nombre premier impair; 2°) n est divisible par deux nombres premiers impairs différents. Le cas de $n=12$ se trouve résolu dans les théorèmes 2, 6 et 11.

22. Cas général des formes binaires de degré supérieur. Soit $F(x, y)$ une forme binaire construite sur le corps \mathbf{K} , à coefficients entiers rationnels et irréductible dans le domaine rationnel. Supposons que \mathbf{K} contient un sous-corps quadratique imaginaire engendré par le nombre $\sqrt{-\Delta}$, où Δ est un nombre naturel, qui n'est divisible par aucun carré > 1 . Cela étant, on peut évidemment, en généralisant les raisonnements du § 3, trouver une limite supérieure du nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$F(x, y) = 1.$$

Nous nous contentons d'illustrer cela par l'exemple où $F(x, y)$ est du sixième degré. Soit θ un nombre entier qui engendre le corps \mathbf{K} du sixième degré, et soit

$$F(x, y) = N(x - \theta y),$$

où N désigne la norme dans le corps \mathbf{K} .

Alors, θ est racine d'une équation cubique

$$x^3 - \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-\Delta})x^2 + \frac{1}{2}(u_1 + v_1\sqrt{-\Delta})x - \frac{1}{2}(u_2 + v_2\sqrt{-\Delta}) = 0,$$

où u, v, u_1, v_1, u_2 et v_2 sont des nombres entiers rationnels, tels que $u \equiv v \pmod{2}$, $u_1 \equiv v_1 \pmod{2}$, $u_2 \equiv v_2 \pmod{2}$; si Δ n'est pas $\equiv -1 \pmod{4}$ tous les nombres u, v, u_1, v_1, u_2 et v_2 sont pairs.

Maintenant, soit $x - \theta y$ une unité binaire avec $y \neq 0$. Pour plus de simplicité nous supposons que $\Delta \neq 1$ et $\neq 3$. Alors, on aura évidemment

$$x^3 - \frac{1}{2}(u + v\sqrt{-\Delta})x^2y + \frac{1}{2}(u_1 + v_1\sqrt{-\Delta})xy^2 - \frac{1}{2}(u_2 + v_2\sqrt{-\Delta})y^3 = \pm 1.$$

Il en résulte

$$x^3 - \frac{1}{2}ux^2y + \frac{1}{2}u_1xy^2 - \frac{1}{2}u_2y^3 = \pm 1, \tag{79}$$

$$-vx^2y + v_1xy^2 - v_2y^3 = 0. \tag{80}$$

Soit d'abord $vv_2 \neq 0$. Alors, on aura de (80) au plus deux valeurs rationnelles de x/y , donc deux paires de valeurs x, y . Ainsi, l'équation $F(x, y) = 1$ a au plus 4 solutions avec $y \neq 0$. Nombre total de solutions ≤ 6 .

Si ensuite $v = 0$ et $v_2 \neq 0$, on aura $v_1x - v_2y = 0$, donc les solutions $x = v_2/d, y = v_1/d$ et $x = -v_2/d, y = -v_1/d$, où $d = (v_1, v_2)$. Nombre total de solutions ≤ 4 .

Si $v_2 = 0$ et $v \neq 0$, on aura ou $x = 0$ correspondant à $y = \pm 1$, ou $-vx + v_1y = 0$, d'où les solutions $x = v_1/d, y = v/d$ et $x = -v_1/d, y = -v/d$, avec $d = (v, v_1)$. Nombre total de solutions ≤ 4 .

Si enfin $v_2 = v = 0$, il faut que $x = 0$, valeur correspondant à $y = \pm 1$. Nombre total de solutions ≤ 4 .

Nous avons ainsi établi le

Théorème 15. *Soit θ un nombre algébrique entier du sixième degré. Supposons que le*

corps $\mathbf{K}(\theta)$ contient un sous-corps quadratique imaginaire, différent des corps $\mathbf{K}(\sqrt{-1})$ et $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$. Alors le nombre de solutions en nombres entiers rationnels de l'équation

$$N(x - \theta y) = 1$$

est au plus égal à 6.

Pour les formes d'un degré supérieur à 6 on aura une limite dépassant 6.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. HERMITE, CH., Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres, Journ. f. Math. Bd. 41 (1851).
2. ARNDT, A., Zur Theorie der binären kubischen Formen, Journ. f. Math. Bd. 53 (1858).
3. BERWICK, W. E. H. and G. B. MATHEWS, On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant, Proc. London Math. Soc. 10 (1912).
4. MATHEWS, G. B., On the reduction and classification of binary cubics which have a negative determinant, *ibid.* 10 (1912).
5. LAGRANGE, J. L., Œuvres, t. II.
6. NAGELL, T., Zur algebraischen Zahlentheorie, Math. Zeitschrift, Bd. 34, Berlin 1931.
7. NAGELL, T., Sur quelques questions dans la théorie des corps biquadratiques, Arkiv för matematik, Bd. 4, nr. 26, Stockholm 1961.
8. NAGELL, T., Sur une propriété des unités d'un corps algébrique, Arkiv för matematik, Bd. 5, nr. 25, Stockholm 1964.
9. HASSE, H., Zahlentheorie, Berlin 1949.
10. NAGELL, T., Contributions à la théorie des corps et des polynomes cyclotomiques, Arkiv för matematik, Bd. 5, nr. 10, Stockholm 1963.
11. HILBERT, D., Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Mathem. Vereinigung, Bd. 4, Berlin 1898.
12. LJUNGGREN, W., Om fremstilling av hele tal ved binære bikvadratiske former av en speciell klasse, Norsk Matem. Tidsskrift, Bd. 26, Oslo 1944.
13. LJUNGGREN, W., Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein-biquadratischer Zahlkörper, Skrifter Norske Vidensk. Akad. Oslo. I Matem.-Naturv. Klasse, no. 12, 1936.
14. THUE, A., Über die Unlösbarkeit der Gleichung $ax^2 + bx + c = dy^n$ in grossen ganzen Zahlen x und y , Archiv for matem. og naturvid. B XXXIV, Nr. 16, Kristiania 1917.
15. SIEGEL, C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abhdl. Preuss. Akad. d. Wissensch. Berlin. Jahrg. 1929. Phys.-Math. Klasse, Nr. 1.

Tryckt den 19 januari 1965

Uppsala 1965. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB