Communiqué le 13 Avril 1961

Sur quelques questions dans la théorie des corps biquadratiques

Par TRYGVE NAGELL

§ 1. Les sous-corps quadratiques d'un corps biquadratique

1. Nous prendrons pour domaine de rationalité fondamental un corps quelconque donné $\mathbf{\Omega}$, et nous entendons ici, sauf avis contraire, par nombre rationnel un nombre appartenant à $\mathbf{\Omega}$.

Désignons par α, α', α'' et α''' les racines de l'équation biquadratique

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

à coefficients rationnels et irréductible dans $\mathbf{\Omega}$. La résolvante cubique de (1), représentée par l'équation en z

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0, \tag{2}$$

a les racines distinctes.

Considérons le corps $\mathbf{K}(\alpha)$ biquadratique relativement á $\mathbf{\Omega}$. Supposons que $\mathbf{K}(\alpha)$ admet le sous-corps $\mathbf{K}(\sqrt{u})$ quadratique relativement à $\mathbf{\Omega}$, u étant un nombre rationnel. Vu que le nombre α est du second degré relativement à $\mathbf{K}(\sqrt{u})$ on a

$$\alpha^2 - (2a + 2b\sqrt{u})\,\alpha + c + d\sqrt{u} = 0, \tag{3}$$

où a, b, c et d sont rationnels. On aura par suite

$$\alpha = a + b\sqrt{u} + \sqrt{c_1 + d_1\sqrt{u}},$$

les nombres c_1 et d_1 étant rationnels. Les trois autres racines de (1) sont évidemment

$$\alpha' = a + b\sqrt{u} - \sqrt{c_1 + d_1\sqrt{u}},$$

$$\alpha'' = a - b\sqrt{u} + \sqrt{c_1 - d_1\sqrt{u}},$$

$$\alpha''' = a - b\sqrt{u} - \sqrt{c_1 - d_1\sqrt{u}}.$$

Il en résulte que $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = 4a = 0$. Par conséquent, les quatre racines sont

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= b\sqrt{u}+\sqrt{b^2u-c-d\sqrt{u}},\\ \alpha' &= b\sqrt{u}-\sqrt{b^2u-c-d\sqrt{u}},\\ \alpha'' &= -b\sqrt{u}+\sqrt{b^2u-c+d\sqrt{u}},\\ \alpha''' &= -b\sqrt{u}-\sqrt{b^2u-c+d\sqrt{u}},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

où b, c et d sont les nombres définis par l'équation (3). Les nombres (4) sont évidemment les racines de l'équation

$$x^4+(2c-4ub^2)x^2+4ubdx+c^2-ud^2=0.$$

En comparant les coefficients de cette équation avec ceux de l'équation (1) on aura les relations

$$\left.\begin{aligned}p &= 2c-4ub^2,\\ q &= 4ubd,\\ r &= c^2-ud^2.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

2. Supposons d'abord que $q \neq 0$. Alors on a $b \neq 0$. En éliminant c et d des relations (5) et en posant $4ub^2=z$ on verifie aisément que z est une racine de la résolvante cubique (2). Par conséquent, pour que $\mathbf{K}(\alpha)$ admette un sous-corps quadratique il faut que la résolvante cubique soit réductible en $\mathbf{\Omega}$. Inversement, si $z=4ub^2$ est une racine rationnelle $\neq 0$ de l'équation (2), les nombres rationnels c et ud^2 sont déterminés par les relations (5). Alors il résulte de la relation

$$\sqrt{u}=\frac{\alpha^2+c}{2b\alpha-d}$$

que $\mathbf{K}(\sqrt{u})$ est un sous-corps quadratique de $\mathbf{K}(\alpha)$. Ainsi le nombre des sous-corps quadratiques est au plus égal à 3. Si la résolvante cubique n'a qu'une seule racine rationnelle, il n'y a qu'un seul sous-corps quadratique. Supposons maintenant que toutes les trois racines z_1, z_2, z_3 de la résolvante sont rationnelles. Vu que $q \neq 0$ aucune de ces racines n'est égale à zéro. Les corps $\mathbf{K}(\sqrt{z_1})$, $\mathbf{K}(\sqrt{z_2})$ et $\mathbf{K}(\sqrt{z_3})$ sont des sous-corps quadratiques. Nous allons montrer qu'ils sont différents entre eux. En effet, si nous supposons $\mathbf{K}(\sqrt{z_1})=\mathbf{K}(\sqrt{z_2})$, il faut que $\sqrt{z_2}=t\sqrt{z_1}$, où t est rationnel. Nous avons

$$2\alpha=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}$$

et $z_1z_2z_3=q^2$. Donc on aurait

$$2\alpha=\sqrt{z_1}+t\sqrt{z_1}-\frac{q}{z_1t},$$

ce qui est impossible, α étant du quatrième degré.

3. Soit ensuite $q=0$. Dans ce cas les racines de la résolvante (2) sont

$$z_1=-p+2\sqrt{r},\quad z_2=-p-2\sqrt{r},\quad z_3=0.$$

On aura donc

$$2\alpha = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} = \sqrt{-p + 2\sqrt{r}} + \sqrt{-p - 2\sqrt{r}}, \tag{6}$$

d'où

$$2\alpha = \sqrt{-2p + 2\sqrt{p^2 - 4r}}. \tag{7}$$

Ainsi il y a toujours le sous-corps quadratique $\mathbf{K}(\sqrt{p^2-4r})$. Si $\mathbf{K}(\sqrt{u})$ est un sous-corps quadratique, on aura de (5) ou $b=0$ ou $d=0$. (Les nombres b et d ne peuvent pas s'annuler tous les deux à la fois vu que α est du quatrième degré.) Dans le premier cas on obtient

$$u d^2 = c^2 - r = \frac{1}{4}(p^2 - 4r),$$

c'est-à-dire, nous aurons le même sous-corps que ci-dessus, engendré par $\sqrt{p^2-4r}$. Quand $d=0$ il suit de (5) que $r=c^2$. Alors on conclut de la relation (6) que les deux corps engendrés par

$$\xi = \sqrt{-p + 2\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{-p - 2\sqrt{r}}$$

sont des sous-corps quadratiques de $\mathbf{K}(\alpha)$. En effet, vu que α est du quatrième degré, les nombres ξ et η engendrent deux corps différents du second degré. Puisque

$$(\xi + \eta)(\xi - \eta) = 4\sqrt{r},$$

le nombre $\xi - \eta$ appartient à $\mathbf{K}(\alpha)$, et, par conséquent, les deux nombres ξ et η appartiennent à ce corps.

4. Nous résumons les résultats obtenus dans les numéros précédents sous la forme suivante:

Théorème 1. *Le nombre des sous-corps quadratiques d'un corps biquadratique engendré par une racine de l'équation* (1) *est égal au nombre des racines rationnelles de la résolvante cubique* (2). *Si z est une racine rationnelle $\neq 0$ de* (2), *le corps $\mathbf{K}(\sqrt{z})$ est un sous-corps quadratique. Si $z=0$ est une racine de* (2), *le corps $\mathbf{K}(\sqrt{p^2-4r})$ est un sous-corps quadratique.*

Nous pouvons y ajouter le résultat.

Théorème 2. *Tout corps biquadratique admettant le sous-corps quadratique $\mathbf{K}(\sqrt{u})$, u rationnel, peut être engendré par un nombre de la forme*

$$\beta = \sqrt{f + g\sqrt{u}}, \tag{8}$$

où f et g sont rationnels.

Démonstration. Supposons que le corps biquadratique est engendré par le nombre α dans (4). Soit d'abord $d \neq 0$. Alors on peut prendre

$$\beta = \alpha - b\sqrt{u}, \quad f = b^2 u - c, \quad g = -d.$$

Soit ensuite $d=0$. Nous venons de montrer que, dans ce cas, il y a trois sous-corps quadratiques. Si deux de ces corps sont engendrés par $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$, u et v rationnels, le troisième sous-corps sera engendré par $\sqrt{uv}$. Alors le corps biquadratique sera évidemment engendré par le nombre

$$\beta = \sqrt{v} + \sqrt{uv}.$$

En posant
$$f = v + uv, \quad g = 2v,$$
on aura
$$\beta = \sqrt{f + g\sqrt{u}}.$$

Le théorème **2** se trouve ainsi démontré.

Si le même corps biquadratique est engendré par les deux nombres β, donné par (8), et

$$\beta_1 = \sqrt{f_1 + g_1\sqrt{u}},$$

où f_1 et g_1 sont rationnels, on a évidemment

$$\beta_1 = \beta\gamma^2,$$

où γ est un nombre appartenant à $\mathbf{K}(\sqrt{u})$.

5. Désignons par m le nombre des sous-corps quadratiques du corps biquadratique $\mathbf{K}(\alpha)$. Lorsque $m = 3$, il est évident que $\mathbf{K}(\alpha)$ est un corps de Galois relativement à $\boldsymbol{\Omega}$. Aussi pour $m = 1$ il existe une catégorie de corps $\mathbf{K}(\alpha)$ qui sont des corps de Galois. Si $m = 0$, $\mathbf{K}(\alpha)$ n'est jamais un corps de Galois. Nous allons le montrer. Soit α une racine de l'équation (1). Soient de plus z_1, z_2 et z_3 les racines de la résolvante (2). Alors on a

$$2\alpha = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

avec les formules analogues pour les conjugués de α. On en conclut : si $\mathbf{K}(\alpha)$ est un corps de Galois, il doit contenir tous les trois nombres $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ et $\sqrt{z_3}$. Il en résulte que les nombres z_1, z_2 et z_3 ne peuvent pas être du troisième degré. Ainsi la résolvante cubique est réductible en $\boldsymbol{\Omega}$. Nous avons déjà traité le cas que toutes les racines de la résolvante sont rationnelles. Supposons maintenant qu'il n'y a qu'une seule racine rationnelle. En vertu du théorème **2** il est permis de supposer $q = 0$, c'est-à-dire

$$z_1 = -p + 2\sqrt{r}, \quad z_2 = -p - 2\sqrt{r} \quad \text{et} \quad z_3 = 0,$$

où $\sqrt{r}$ n'est pas rationnel. Donc

$$2\alpha = \sqrt{-p + 2\sqrt{r}} + \sqrt{-p - 2\sqrt{r}} = \sqrt{-2p + 2\sqrt{p^2 - 4r}}.$$

Si $\mathbf{K}(\alpha)$ est un corps de Galois, il faut évidemment que

$$\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}\left(\sqrt{-p + 2\sqrt{r}}\right) = \mathbf{K}\left(\sqrt{-p - 2\sqrt{r}}\right).$$

Les corps quadratiques engendrés par $\sqrt{r}$ et par $\sqrt{p^2 - 4r}$ sont contenus dans $\mathbf{K}(\alpha)$ et doivent conséquemment coïncider. Il faut donc que

$$p^2-4r=4rt^2,$$

où t est rationnel. Inversement, si cette relation est satisfaite on a

$$\sqrt{-p+2\sqrt{r}}\cdot\sqrt{-p-2\sqrt{r}}=\sqrt{p^2-4r}=2t\sqrt{r},$$

d'où l'on conclut que $\mathbf{K}(\alpha)$ est un corps de Galois.

En résumant nous aurons :

Théorème 3. *Pour qu'un corps biquadratique soit un corps de Galois il faut et il suffit qu'on ait l'un ou l'autre des deux cas : 1° le corps est engendré par deux nombres du second degré; 2° le corps est engendré par un nombre de la forme*

$$\sqrt{s\left(1+t^2+\sqrt{1+t^2}\right)}, \tag{9}$$

où s et t sont rationnels.

Les corps engendrés par les nombres de la forme (9) sont les corps *cycliques* du quatrième degré, relativement à $\mathbf{\Omega}$.

A propos des recherches antérieures sur les sujets de cette section comparez les travaux suivants : Nagell [1], v. d. Waerden [2] et Weber [3]. Les numéros figurant entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce mémoire.

6. Les résultats des numéros précédents nous prêtent des moyens pour classifier les corps biquadratiques $\mathbf{K}(\alpha)$ relativement au domaine fondamental $\mathbf{\Omega}$.

Désignons par m le nombre des sous-corps quadratiques (relativement à $\mathbf{\Omega}$). Si $\mathbf{\Omega}$ est quelconque, on aura évidemment la classification suivante :

1) $m=0$. $\mathbf{K}(\alpha)$ n'est jamais un corps de Galois.
2) $m=1$. $\mathbf{K}(\alpha)$ n'est pas un corps de Galois.
3) $m=1$. $\mathbf{K}(\alpha)$ est cyclique, engendré par un nombre de la forme (9).
4) $m=3$. $\mathbf{K}(\alpha)$ est un corps de Galois; jamais cyclique.

Soit ensuite $\mathbf{\Omega}$ réel, et désignons par ϱ le nombre des corps conjugués réels et par μ le nombre des sous-corps quadratiques réels. Toutes les définitions sont, bien entendu, relativement à $\mathbf{\Omega}$. Dans ce cas une classification est donnée dans le tableau ci-dessous. Pour le type des corps nous employons les raccourcissements suivants : N signifie que le corps n'est pas un corps de Galois. G signifie corps de Galois non cyclique. C signifie corps cyclique.

Classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m	0	0	0	1	1	1	1	1	1	3	3
ϱ	0	2	4	0	0	0	2	4	4	0	4
μ	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	3
Type	N	N	N	N	N	C	N	N	C	G	G

Tout corps appartenant à une quelconque des huit dernières classes contient (au moins) un sous-corps quadratique, engendré par une racine carrée $\sqrt{\Delta}$, où Δ

appartient à $\mathbf{\Omega}$. Alors, d'après le Théorème **2** le corps biquadratique peut être engendré par un nombre de la forme

$$\theta = \sqrt{a + b\sqrt{\Delta}}, \tag{10}$$

où a et b sont des nombres dans $\mathbf{\Omega}$ tels que $a + b\sqrt{\Delta}$ ne soit pas un carré dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Il y a toujours un sous-corps quadratique *réel*, sauf quand $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 4. Ainsi nous pouvons supposer que Δ est positif quand il s'agit des classes 5–11. En vertu des résultats précédents on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 4. *Les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les nombres a, b et* Δ *dans* (10) *pour que le corps* $\mathbf{K}(\theta)$ *appartienne à une classe donnée sont indiquées dans le tableau suivant.*

Classe	4	5	6	7	8	9	10	11
Δ	<0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0
$a+b\sqrt{\Delta}$		<0	<0		>0	>0	<0	>0
$a^2-\Delta b^2$		>0	>0	<0	>0	>0	>0	>0
	A	A	A	A	A	A	B	B
$\frac{1}{\Delta}(a^2-\Delta b^2)$	A	A	B	A	A	B	A	A

La lettre A *indique que le nombre en question n'est pas un carré dans* $\mathbf{\Omega}$*; la lettre* B *indique qu'il est un carré dans ce corps.*

En variant les sous-corps quadratiques on voit aisément comment on peut construire une infinité de représentants en $\mathbf{K}(1)$ de chacune des huit classes 4–11.

Pour les trois premières classes il faut une autre méthode pour obtenir un résultat analogue. Nous allons montrer qu'il y a aussi dans ces cas une infinité de représentants en $\mathbf{K}(1)$. Cela résulte du théorème suivant :

Théorème 5. *Soit t un nombre premier impair. Alors, tout corps engendré par une racine de l'équation*

$$x^4 + 2tx + 2t^2 = 0 \tag{11}$$

est un représentant de la première classe.

Tout corps engendré par une racine de l'équation

$$x^4 + 2tx - 2t^2 = 0 \tag{12}$$

est un représentant de la deuxième classe.

Tout corps engendré par une racine de l'équation

$$x^4 - 2tx^2 + tx + t = 0 \tag{13}$$

est un représentant de la troisième classe, pourvu que $t \neq 5$.

Nous aurons ainsi une infinité de corps dans chacune des trois classes.

Démonstration. Considérons d'abord les équations (11) et (12). Celles-ci sont évidemment irréductibles (théorème d'Eisenstein). Toutes les racines de (11) sont imaginaires; l'équation (12) a exactement deux racines réelles. La résolvante de (11) est

$$z^3 - 8t^2 z - 4t^2 = 0,$$

et celle de (12) est

$$z^3 + 8t^2 z - 4t^2 = 0.$$

On voit immédiatement que ces équations sont irréductibles. Il résulte des équations (11) et (12) que l'idéal principal (t) est divisible par le carré d'un idéal premier dans le corps biquadratique engendré par une racine α de (11) ou de (12). En effect, dans le cas contraire le nombre α serait divisible par t. Alors on aurait, en posant $\alpha = t\beta$, l'une ou l'autre des équations $t^2\beta^4 + 2\beta \pm 2 = 0$. Or cela est impossible, vu que β est un nombre entier. Ainsi t divise le discriminant du corps. On montre d'ailleurs sans difficulté que (t) est le bicarré d'un idéal premier.

Considérons ensuite l'équation (13). Il est évident que celle-ci est irréductible, et que toutes les racines sont réelles. On montre aisément que la résolvante

$$z^3 - 4tz^2 + (4t^2 - 4t)z - t^2 = 0$$

est irréductible, sauf pour $t = 5$. Dans le corps biquadratique engendré par une racine α de (13) l'idéal principal (t) est forcément divisible par le carré d'un idéal premier. En effect, dans le cas contraire le nombre α serait divisible par t. Alors on aurait, en posant $\alpha = t\beta$, l'équation $t^3\beta^4 - 2t^2\beta^2 + t\beta + 1 = 0$. Or cela est impossible, vu que β est un nombre entier. Il en résulte que t divise le discriminant du corps. Il est d'ailleurs facile à voir que (t) est le bicarré d'un idéal premier.

Il reste seulement à montrer que chacune des équations (11), (12) et (13) engendre une infinité de corps distincts quand t varie. En effect, soient $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ ... $\mathbf{K}_s$ des corps engendrés par quelqu'une de ces équations, et soient $D_1, D_2, \ldots, D_s$ les discriminants corréspondants. Soit T un nombre premier qui ne divise aucun de ces discriminants. Alors, si nous prenons dans l'équation en question $t = T$, celle-ci engendre des corps certainement différents de chacun des corps $\mathbf{K}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Car le discriminant est évidemment différent de chacun des discriminants D_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, vu qu'il est divisible par T.

7. Nous finissons ce chapitre par la proposition suivante.

Théorème 6. *Soit* $\mathbf{K}(\alpha)$ *un corps biquadratique qui n'est pas un corps de Galois, relativement à* $\mathbf{\Omega}$. *Alors la condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathbf{K}(\alpha)$ *soit identique à l'un des corps conjugués est qu'il admette un sous-corps quadratique. Si* $\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}(\alpha')$, *on a* $\mathbf{K}(\alpha'') = \mathbf{K}(\alpha''')$.

Démonstration. Il résulte du théorème **2** que la condition est suffisante. Considérons maintenant le cas général d'un corps $\mathbf{K}(\alpha)$ qui n'admet aucun sous-corps quadratique. Si z_1, z_2 et z_3 sont les racines de la résolvante cubique, le nombre α et ses conjugués sont donnés par les relations

$$2\alpha = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$2\alpha' = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$

$$2\alpha'' = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},$$
$$2\alpha''' = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}.$$

Les nombres z_1, z_2 et z_3 sont du troisième degré. D'aprés le théorème de Capelli (voir [4]) le nombre $\sqrt{z_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ est ou du sixième degré ou du troisième degré. Ainsi les nombres $\alpha + \alpha'$, $\alpha + \alpha''$ et $\alpha + \alpha'''$ sont ou du sixième degré ou du troisième degré. Il en résulte que le corps $\mathbf{K}(\alpha)$ ne peut jamais être identique à un corps conjugué.

Dans sa dissertation, H. Bergström, a donné une classification des corps biquadratiques, relativement à $\mathbf{K}(1)$, d'un autre point de vue; voir [5].

§ 2. Sur les unités dans un corps biquadratique

8. Dans la suite le domaine fondamental est toujours le corps $\mathbf{K}(1)$ de rationalité ordinaire.

Soit $\mathbf{K}(\theta)$ un corps algébrique quelconque engendré par le nombre algébrique entier θ du n^e degré. Posons comme d'ordinaire $r = r_1 + r_2 - 1$, où r_1 signifie le nombre des corps conjugués réels, et où $2r_2$ signifie le nombre des corps conjugués imaginaires. J'ai montré ailleurs comment on peut effectivement déterminer un système fondamental d'unités de $\mathbf{K}(\theta)$; voir Nagell [6], p. 187–188. Le procédé se fera en trois pas. 1° Il faut d'abord calculer un certain nombre (au moins r) d'unités appartenant au corps et qui ne sont pas des racines de l'unité. On peut les obtenir par essai en déterminant des nombres entiers rationnels x_i qui satisfont à l'équation diophantienne

$$N(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n) = \pm 1,$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ est une base des entiers du corps. Quelquefois on les obtiendra à l'aide des diviseurs premiers du discriminant du corps. La connaissance des unités dans des sous-corps de $\mathbf{K}(\theta)$ facilite le procédé. 2° Si le nombre d'unités ainsi obtenues est assez grand, on peut trouver parmi celles-ci un système de r unités indépendantes. Pour reconnaître l'indépendance on a le critère du déterminant des logarithmes. Il y a d'ailleurs aussi d'autres méthodes pour cela. 3° Finalement, si $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ est un système de r unités indépendantes, un système fondamental d'unités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ est donné par les équations suivantes

$$\varepsilon_m = \sqrt[M]{\eta_1^{t_{m1}} \eta_2^{t_{m2}} \dots \eta_m^{t_{mm}}}, \tag{14}$$

pour $m = 1, 2, \dots, r$. Ici M est un nombre naturel qui dépend des unités η_i, et qui peut être déterminé. t_{mk} sont des nombres entiers rationnels $\geqslant 0$. t_{mm} est le plus petit nombre naturel tel qu'une unité de la forme (14) existe dans le corps; on a evidemment $t_{mm} \leqslant M$. Pour $m \neq k$ les nombres t_{mk} peuvent être choisis de manière qu'on ait

$$0 \leqslant t_{mk} < t_{kk}. \tag{15}$$

Dans les calculs numériques qui se présentent à propos des unités, on a besoin d'un algorithme pour reconnaître si un nombre entier donné α est une puissance d'un autre nombre entier β dans le corps ou non, et cela sans supposer la connaissance d'un système fondamental d'unités.

Soit $\alpha = \beta^m$, où m est un nombre naturel $\geqslant 2$. Désignons par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ une base des nombres entiers dans $\mathbf{K}$. Posons

$$\beta = \sqrt[m]{\alpha} = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \cdots + x_n \omega_n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres entiers rationnels. Les n relations conjuguées sont alors

$$\beta^{(i)} = \sqrt[m]{\alpha^{(i)}} = x_1 \omega_1{}^{(i)} + x_2 \omega_2{}^{(i)} + \cdots + x_n \omega_n{}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\alpha^{(1)} = \alpha$, $\beta^{(1)} = \beta$ et $\omega_j{}^{(1)} = \omega_j$. En résolvant ce système par rapport aux nombres x_k nous aurons

$$\pm x_k \sqrt{D(\alpha)} = D_k, \tag{16}$$

où D_k est le déterminant qu'on obtiendra en substituant, dans le déterminant $|\omega_j^{(i)}|$, la colonne (ou ligne) $\omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}, \ldots, \omega_k^{(n)}$ par les nombres $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(n)}$. Lorsque l'on connaît des bornes supérieures de tous les nombres $|\alpha^{(i)}|$ et $|\omega_k^{(i)}|$, on trouvera facilement une borne supérieure des nombres $|D_k|$ et par conséquent des nombres entiers rationnels $|x_k|$. On peut, par exemple, procéder de la manière suivante : Désignons par A le maximum des nombres $|\alpha^{(i)}|$ et par B le maximum des nombres $|\omega_k^{(i)}|$. Vu que $A > 1$ on peut prendre $m = 2$. Alors on aura pour tous les $k = 1, 2, \ldots, n$ l'inégalité

$$|\sqrt{D(\alpha)}| \cdot |x_k| < n! \sqrt{A} \cdot B^{n-1}. \tag{17}$$

On en conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les x_i et par conséquent un nombre fini de valeurs de β. Finalement il faut, pour toutes les valeurs de β, examiner si le quotient

$$\frac{\log \alpha}{\log \beta}$$

est un nombre naturel ou non. Pour des calculs numériques il est opportun de remplacer (17) par des inégalités plus étroites.

Considérons l'ensemble du corps $\mathbf{K}(\theta)$ et ses conjugués, désignons par

$$\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(2)}, \ldots, \mathbf{K}^{(r_1)}$$

les corps réels de cet ensemble, par

$$\mathbf{K}^{(r_1+1)}, \mathbf{K}^{(r_1+2)}, \ldots, \mathbf{K}^{(r_1+r_2)}$$

des corps pris chacun respectivement dans un des r_2 couples de corps imaginaires du même ensemble; soient E_i une des unités d'un système de r unités indépendantes du corps $\mathbf{K}(\theta)$, et $E_i^{(s)}$ la valeur conjuguée de E_i dans $\mathbf{K}^{(s)}$; désignons par $l_s(E_i)$ le nombre $\log|E_i^{(s)}|$ si $s \leqslant r_1$, ou le nombre $2\log|E_i^{(s)}|$ si $s > r_1$. Désignons par $R(E_1, E_2, \ldots, E_r)$ la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} l_1(E_1) & l_1(E_2) & \dots & l_1(E_r) \\ l_2(E_1) & l_2(E_2) & \dots & l_2(E_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_r(E_1) & l_r(E_2) & \dots & l_r(E_r) \end{vmatrix}.$$

Le nombre $R(E_1, E_2, \dots, E_r)$ aura sa *valeur minimum* quand le systéme $E_1, E_2, \dots, E_r$ est un système fondamental d'unités. Dans ce dernier cas il est évident que aucune des unités E_i ne peut être de la forme ϱH^m, où H est une unité du corps, m un nombre naturel $\geqslant 2$, ϱ une racine de l'unité. On peut d'ailleurs montrer que, inversement, toute unité qui n'est pas de cette forme peut faire partie d'un système fondamental d'unités du corps.

9. Ainsi il est théoriquement clair comment on doit résoudre effectivement les problèmes relatifs aux unités dans un corps quelconque donné. Cependant, les calculs numériques nécessaires pour y parvenir deviennent en général trop vastes. On peut se demander si l'on peut faciliter les calculs de quelque manière dans le cas d'un corps biquadratique.

Soit donné le corps biquadratique $\mathbf{K}(\theta)$ engendré par la racine θ de l'équation

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0,$$

où a, b et c sont des nombres entiers rationnels. Le nombre r d'unités dans un système fondamental peut avoir l'une des trois valeurs 1, 2 ou 3. Pour les classes 1, 4, 5, 6 et 10 du premier tableau dans le n° **6** on a $r=1$. On a $r=2$ pour les classes 2 et 7. Pour les classes 3, 8, 9 et 11 on a $r=3$.

Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ contient une racine de l'unité du quatrième degré seulement dans les cas suivants :

1° Le corps est engendré par une racine primitive huitième de l'unité. Celui-ci peut aussi être engendré par le nombre $\sqrt{-3+2\sqrt{2}}$ ou bien par le nombre $\sqrt{1+2\sqrt{-2}}$. Ce corps appartient à la classe 10, et on a $r=1$. Les sous-corps quadratiques sont $\mathbf{K}(\sqrt{-1})$, $\mathbf{K}(\sqrt{-2})$ et $\mathbf{K}(\sqrt{2})$. On peut prendre pour unité fondamentale le nombre $\sqrt{2}+1$; voir le n° **11**.

2° Le corps est engendré par une racine primitive douzième de l'unité. Celui-ci peut aussi être engendré par le nombre $\sqrt{-4+2\sqrt{3}}$ ou bien par le nombre $\sqrt{3i}$. Aussi dans ce cas le corps appartient à la classe 10, et on a $r=1$. Les sous-corps quadratiques sont $\mathbf{K}(\sqrt{-1})$, $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$ et $\mathbf{K}(\sqrt{3})$. On peut prendre pour unité fondamentale le nombre $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(1+i)$; voir le n° **11**.

3° Le corps engendré par une racine primitive cinquième de l'unité. Celui-ci peut aussi être engendré par le nombre $\sqrt{\frac{1}{2}(-5+\sqrt{5})}$. Ce corps appartient à la classe 6, et on a $r=1$. Le seul sous-corps quadratique est $\mathbf{K}(\sqrt{5})$. Nous allons montrer qu'on peut prendre pour unité fondamentale le nombre $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$; voir le n° **11**.

Si un corps contient les nombres $\pm i$, il doit appartenir à l'une des classes 4 ou 10; même chose pour les nombres $\pm \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

Nous allons montrer comment on peut, dans chacune des classes 5-11, déterminer un système fondamental d'unités à l'aide des unités fondamentales des sous-corps réels. Dans les autres classes nous allons illustrer le procédé corréspondant par des exemples numériques. Dans les classes 4–11 nous supposons que le nombre générateur est un nombre *entier* de la forme

$$\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(c + d\sqrt{\Delta}\right)}, \tag{18}$$

où c, d et Δ sont des nombres entiers rationnels. Δ n'est divisible par aucun carré >1, dans $\mathbf{K}(1)$. Δ est positif, sauf dans la classe 4.

Le lemme suivant nous sera très utile pour construire des exemples numériques dans la suite.

Lemme 1. *Soit θ donné par* (18). *Supposons que c et Δ sont divisibles par le nombre premier impair p, tandis que d n'est pas divisible par p. Si ξ est un nombre entier dans $\mathbf{K}(\theta)$ on a*

$$H\xi = x + y\theta + z\theta^2 + w\theta^3,$$

où x, y, z et w sont des nombres entiers rationnels, et où H est un nombre naturel qui divise le discriminant $D(\theta)$. Alors on peut supposer que H n'est pas divisible par p.

Démonstration. Supposons que H est divisible par p. Alors il suffit évidemment de montrer que x, y, z et w sont divisibles par p. Si nous posons $\alpha = \sqrt[4]{p}$, le nombre

$$\frac{\theta}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{p}\sqrt{p} + d\sqrt{\frac{\Delta}{p}}\right)}$$

est un entier algébrique. Vu que H est divisible par p, le nombre

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{H}{\alpha}\xi - y\frac{\theta}{\alpha} - z\frac{\theta^2}{\alpha} - w\frac{\theta^3}{\alpha}$$

est entier, donc x est divisible par p. L'idéal $(\theta/\alpha, p)$ est évidemment l'idéal unité dans un corps convenable. Donc il résulte de l'équation

$$\frac{y}{\alpha}\cdot\frac{\theta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\left(H\xi - x - z\theta^2 - w\theta^3\right)$$

que y/α est un nombre entier. Il en résulte que y est divisible par p. D'une manière analogue on montre que les nombres z et w sont aussi divisibles par p.

10. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. *Soit $\mathbf{K}(\theta)$ un corps biquadratique appartenant à l'une des classes* 5, 6 *et* 10 *et engendré par le nombre* (18). *Ainsi il y a exactement un sous-corps réel $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$, et on a $r=1$. Soient E l'unité fondamental de $\mathbf{K}(\theta)$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}(x_1 + y_1\sqrt{\Delta})$ l'unité fondamentale de $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Nous supposons que $\varepsilon > 1$ et $|E| > 1$ et, si E est réel, que $E > 1$. Les nombres ε et E sont reliés par une relation*

$$\varepsilon\eta = E^m, \tag{19}$$

où m est un nombre naturel, et où η est une racine de l'unité. Dans cette relation les *seules valeurs admissibles de m sont 1 et 2, et les seules valeurs admissibles de η sont* ± 1, $\pm i$ *et* $\pm \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

Quand $m=1$, on peut choisir $E=\varepsilon$. Quand $m=2$, on peut prendre $E=\sqrt{-\varepsilon}$, sauf dans le cas de $\eta = \pm i$ dans lequel on aura $E=\sqrt{\varepsilon i}$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\eta = \pm 1$. D'après le théorème de Capelli le nombre $(\pm\varepsilon)^{1/m}$ est du $2m^e$ degré. Ainsi, quand E est du second degré, on aura $m=1$ et $E=\varepsilon$, et quand E est du quatrième degré, on aura $m=2$ et $E^2 = -\varepsilon$, E étant imaginaire.

Supposons ensuite que $\eta = \pm i$. Dans ce cas le corps appartient à la classe 10. Le nombre εi est évidemment du quatrième degré. Donc le nombre E est aussi du quatrième degré. Si le nombre ξ appartient à $\mathbf{K}(\theta)$, nous désignons par ξ' le nombre conjugué relativement à $\mathbf{K}(i)$. Alors nous avons les deux relations

$$\pm\varepsilon i = E^m \quad \text{et} \quad \mp\varepsilon i = E'^m,$$

d'où par multiplication

$$\varepsilon^2 = (EE')^m.$$

Le nombre EE' est une unité positive appartenant à $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Par suite on aura

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^{nm},$$

où n est un nombre entier rationnel, d'où $2=nm$. Ainsi on a ou $m=1$ ou $m=2$. Il *y a* donc les possibilités : $E = \pm\varepsilon i$ et $E^2 = \pm\varepsilon i$, ou, ce qui revient au même : $E=\varepsilon$ et $E^2=\varepsilon i$. On voit de l'exemple suivant que le dernier cas existe réellement :

$$(8+3\sqrt{7})\,i = [\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{7})(1+i)]^2.$$

Supposons ensuite que $\eta = \pm\varrho$, où ϱ est une racine primitive troisième de l'unité. Dans ce cas le corps appartient à la classe 10. Le nombre $\varepsilon\varrho$ est évidemment du quatrième degré. Donc le nombre E est aussi du quatrième degré. Si le nombre ξ appartient à $\mathbf{K}(\theta)$, nous désignons par ξ' le nombre conjugué relativement à $\mathbf{K}(\sqrt{-3})$. Alors on a les deux relations

$$\pm\varepsilon\varrho = E^m \quad \text{et} \quad \pm\varepsilon\varrho^2 = E'^m,$$

d'où par multiplication

$$\varepsilon^2 = (EE')^m.$$

Le nombre EE' est une unité positive appartenant à $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Par suite on aura

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^{nm},$$

où n est un nombre entier rationnel, d'où $2=nm$. Ainsi on a ou $m=1$ ou $m=2$. Si $m=1$ on aura $E = \pm\varepsilon\varrho$ ou bien $E=\varepsilon$. Si $m=2$ on aura $E^2 = \pm\varepsilon\varrho$, d'où, en remplaçant E par $E\varrho^2$, $E^2 = -\varepsilon$.

Supposons finalement que $\eta = \pm\varrho$, où ϱ est une racine primitive cinquième, huitième ou douzième de l'unité. Désignons par ε' le nombre $\frac{1}{2}(x_1 - y_1\sqrt{\Delta})$ et par ϱ, ϱ^a, ϱ^{-a} et ϱ^{-1} les quatre nombres conjugués de ϱ, a étant un nombre naturel convenable. Alors les huit nombres

$$\varepsilon\varrho, \varepsilon'\varrho, \varepsilon\varrho^a, \varepsilon'\varrho^a, \varepsilon\varrho^{-a}, \varepsilon'\varrho^{-a}, \varepsilon\varrho^{-1}, \varepsilon'\varrho^{-1}$$

sont évidemment distincts entre eux. Il en résulte que le nombre $\varepsilon\eta$ est du huitième degré dans ce cas. Vu que le nombre E est au plus du quatrième degré, la relation (19) est impossible dans ce cas. Le lemme se trouve ainsi démontré.

11. *Les classes* 5 *et* 6. Dans ces cas on a $r=1$. Il n'y a qu'un seul corps qui contient une racine de l'unité $\neq \pm 1$, à savoir le corps engendré par une racine primitive cinquième de l'unité. Donc, d'après le lemme du numéro précédent on a ou $E=\varepsilon$ ou $E=\sqrt{-\varepsilon}$, E et ε désignant les mêmes nombres que ci-dessus. Or, on peut montrer que le cas $E=\sqrt{-\varepsilon}$ est impossible. En effet, les quatre conjugués de E dans $\mathbf{K}(\theta)$ sont dans ce cas $\pm\sqrt{-\varepsilon}$ et $\pm\sqrt{-\varepsilon'}$ où $\varepsilon'=\frac{1}{2}(x_1-y_1\sqrt{\Delta})$. Il faut donc que $\varepsilon\varepsilon'=+1$. Il en résulte

$$\sqrt{-\varepsilon}=\tfrac{1}{2}\sqrt{-x_1+2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-x_1-2}.$$

Par conséquent le corps $\mathbf{K}(\theta)$ serait engendré par les deux racines carrées $\sqrt{-x_1+2}$ et $\sqrt{-x_1-2}$ et appartiendrait à la classe 10, contre l'hypothèse. Dans tous les cas on a donc $E=\varepsilon$.

La classe 4. Ici on a $r=1$. Vu que le sous-corps quadratique est imaginaire on ne peut pas procéder comme dans les cas précédents. Considérons un exemple numérique et prenons

$$\theta=\sqrt{\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{-3})}.$$

On vérifie aisément que le nombre $\theta+1$ est une unité, qui n'est pas de la forme ϱE^m, où E est une unité dans le corps biquadratique, où m est un nombre naturel $\geqslant 2$, et où ϱ est une racine sixième de l'unité. Donc toute unité du corps est de la forme

$$\varrho(\theta+1)^M,$$

où M est un nombre entier rationnel quelconque.

On aura un autre exemple en prenant

$$\theta=\sqrt{1+i}.$$

Dans ce cas on peut choisir pour unité fondamentale le nombre $1+\theta$. Donc toute unité du corps est de la forme

$$i^h(\theta+1)^M,$$

où M est un nombre entier rationnel quelconque, et où h a une des valeurs 0, 1, 2 et 3.

Quand $\Delta\neq -1$ et $\neq -3$, le corps ne contient aucune racine de l'unité autre que ± 1.

La classe 10. Dans ce cas $r=1$. Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ peut contenir les nombres i et $\varrho=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. Les deux corps suivants sont les seuls qui contiennent des racines de l'unité du quatrième degré : le corps engendré par une racine primitive huitième de l'unité, et le corps engendré par une racine primitive douzième de l'unité. Les nombres ε et E ont la même signification que dans le numéro précédent.

Supposons d'abord que $\mathbf{K}(\theta)$ ne contient aucun des nombres i et ϱ. Alors on a d'après le lemme **2** ou $E=\varepsilon$ ou $E=\sqrt{-\varepsilon}$. Dans le dernier cas on peut supposer que $\theta=E$.

Supposons ensuite que $\mathbf{K}(\theta)$ contient le nombre i. Alors on a $\mathbf{K}(\theta)=\mathbf{K}(\sqrt{\Delta},i)$ $=\mathbf{K}(\sqrt{\Delta},\sqrt{-\Delta})$. Les corps de ce type appartiennent à la catégorie des *corps de Dirichlet*. D'après le lemme **2** on a ou $E=\varepsilon$ ou $E=\sqrt{\varepsilon i}$. Le dernier cas ne se présente que sous des conditions spéciales. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3. *Soit Δ un nombre naturel >1 qui n'est divisible par aucun carré >1. Si α est un nombre entier dans le corps $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta},i)$, le nombre 2α appartient à l'anneau* $\mathbf{R}(1,i,\sqrt{\Delta},i\sqrt{\Delta})$.

Démonstration. Supposons que

$$\alpha=x+x_1 i+x_2\sqrt{\Delta}+x_3 i\sqrt{\Delta},$$

où x, x_1, x_2 et x_3 sont rationnels. Les nombres conjugués sont

$$\alpha'=x-x_1 i+x_2\sqrt{\Delta}-x_3 i\sqrt{\Delta},$$
$$\alpha''=x+x_1 i-x_2\sqrt{\Delta}-x_3 i\sqrt{\Delta},$$
$$\alpha'''=x-x_1 i-x_2\sqrt{\Delta}+x_3 i\sqrt{\Delta}.$$

Vu que $\alpha+\alpha''=2x+2x_1 i$, les nombres $2x$ et $2x_1$ sont entiers. Si $\Delta\equiv2$ ou $\equiv 3 \pmod 4$, on conclut de $\alpha+\alpha'=2x+2x_2\sqrt{\Delta}$, que $2x_2$ est entier. Donc il résulte de

$$2\alpha-2x-2x_1 i-2x_2\sqrt{\Delta}=2x_3 i\sqrt{\Delta}$$

que $2x_3$ est entier. Si $\Delta\equiv1 \pmod 4$, on conclut de $\alpha+\alpha'''=2x+2x_3 i\sqrt{\Delta}$ que $2x_3$ est entier. Enfin il résulte de

$$2\alpha-2x-2x_1 i-2x_3 i\sqrt{\Delta}=2x_2\sqrt{\Delta}$$

que $2x_2$ est entier. Cela démontre le lemme.

Supposons maintenant que $E=\sqrt{\varepsilon i}$. D'après le lemme **3** on a alors

$$i\varepsilon=\tfrac{1}{4}\left[x+yi+z\sqrt{\Delta}+wi\sqrt{\Delta}\right]^2, \tag{20}$$

où x, y, z et w sont des nombres entiers rationnels. Il en résulte

$$-i\varepsilon=\tfrac{1}{4}\left[x-yi+z\sqrt{\Delta}-wi\sqrt{\Delta}\right]^2.$$

Ainsi
$$i\varepsilon=\tfrac{1}{4}\left[ix+y+zi\sqrt{\Delta}+w\sqrt{\Delta}\right]^2,$$

d'où en comparant avec (20)

$$y=\pm x \quad \text{et} \quad w=\pm z.$$

On en conclut
$$i\varepsilon=\tfrac{1}{4}\left[(1+i)(x+z\sqrt{\Delta})\right]^2, \tag{21}$$

c'est-à-dire $$2\varepsilon = (x + z\sqrt{\Delta})^2. \tag{22}$$

Par conséquent, pour qu'on ait la relation (20) il faut que l'idéal (2) est le carré d'un idéal principal dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Inversement, si (2) est le carré d'un idéal principal dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$ et si $\Delta \neq 2$, il est évident qu'une relation de la forme (22) subsiste. Si l'on a (22), on a aussi (21). Nous avons ainsi trouvé la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $E = \sqrt{\varepsilon i}$. Ajoutons qu'il faut pour cela $\Delta \equiv 2$ ou $\equiv 3 \pmod 4$. Il est évident que, dans ce cas le nombre $\sqrt{-2\varepsilon}$ engendre le corps $\mathbf{K}(\theta)$.

Dans le corps $\mathbf{K}(\sqrt{3}, i)$ on a évidemment

$$E = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(1+i).$$

Ainsi, on aura toutes les unités de ce corps par la formule

$$\pm \eta\,[\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(1+i)]^m,$$

où η est une racine douzième quelconque de l'unité, et où m est un nombre entier rationnel quelconque.

Dans le corps $\mathbf{K}(\sqrt{2}, i)$ on a

$$E = \sqrt{2} + 1.$$

Ainsi, on aura toutes les unités de ce corps par la formule

$$\pm\, \eta\,(\sqrt{2}+1)^m,$$

η parcourant toutes les racines huitièmes de l'unité, et m parcourant tous les nombres entiers rationnels.

Supposons enfin que $\mathbf{K}(\theta)$ contient le nombre ϱ et non le nombre i. Alors on a, d'après le lemme **2**, ou $E = \varepsilon$ ou $E = \sqrt{-\varepsilon}$. On voit de l'exemple numérique suivant que le dernier cas existe vraiment :

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{21})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Les corps de la classe 10 ont été traités par plusieurs auteurs; voir surtout Kubota [7], comparez aussi Värmon [9] et Hilbert [10]. On trouvera une étude détaillée des corps cycliques de la classe 6 dans Hasse [8]. Fjellstedt [11] a traité les corps de la classe 4.

On a $r = 1$ aussi pour les corps de la classe 1. Dans ce cas on ne peut pas profiter de l'existence d'un sous-corps quadratique pour déterminer l'unité fondamentale. Nous allons retourner sur ces corps plus tard; nous nous contentons ici d'un exemple numérique. Si θ est une racine de l'équation $x^4 + x + 1 = 0$, on montre aisément que θ est l'unité fondamentale dans le corps $\mathbf{K}(\theta)$.

12. *La classe* 7. Ici on a $r = 2$. Nous supposons que le nombre générateur θ est réel et positif. Soit ε l'unité fondamentale du sous-corps quadratique engendré par $\sqrt{\Delta}$; nous supposons que $\varepsilon > 1$. Toute unité du second degré dans $\mathbf{K}(\theta)$ est évidemment de la forme $\pm\varepsilon^m$, m entier rationnel. Il y a nécessairement dans $\mathbf{K}(\theta)$ des unités du quatrième degré attendu que $r = 2$. Désignons par E_1 et E_2 un système fondamental d'unités du corps et soient

$$\pm E_3 = E_1^a E_2^b, \quad \pm E_4 = E_1^c E_2^d,$$

où a, b, c et d sont des entiers rationnels. Alors, pour que les unités E_3 et E_4 forment un système fondamental d'unites, il faut et il suffit qu'on ait

$$a d - b c = \pm 1. \tag{23}$$

Si α est un nombre entier dans le corps tel que

$$\alpha = \beta^m,$$

où β appartient au corps, et où m est un nombre naturel $\geqslant 2$, nous dirons que α est une *puissance dans le corps*. Dans la suite nous considérons seulement les unités positives. Ainsi, $E_1 > 0$ et $E_2 > 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'unité

$$E = E_1^a E_2^b \tag{24}$$

ne soit pas une puissance dans $\mathbf{K}(\theta)$, est évidemment que $(a, b) = 1$, pourvu que E_1, E_2 est un système fondamental. On en conclut:

Lemme 4. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'unité positive E appartienne à quelque système fondamental, est que E n'est pas une puissance dans le corps.*

En effet, si E est donnée par (24), l'équation (23) admet des solutions entières c et d seulement quand $(a, b) = 1$.

Le nombre $\sqrt[n]{\varepsilon}$, étant du $2n^{e}$ degré (théorème de Capelli), ne peut appartenir au corps $\mathbf{K}(\theta)$ que pour $n \leqslant 2$. Pour que $\sqrt{\varepsilon}$ appartienne au corps il faut et il suffit que $\theta\sqrt{\varepsilon}$ appartienne au corps $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Nous désignons par H le nombre $\sqrt{\varepsilon}$ ou le nombre ε selon que $\sqrt{\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{K}(\theta)$ ou non. Le nombre H ne peut jamais être une puissance dans le corps $\mathbf{K}(\theta)$.

Soit α est un nombre $\neq 0$ dans $\mathbf{K}(\theta)$, et désignons par α' le nombre conjugué qu'on aura de α en changeant θ en $-\theta = \theta'$. Pour tout nombre α appartenant à $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$ on a évidemment $\alpha' = \alpha$ et vice versa. Si $\alpha' = -\alpha$ le nombre α^2 appartient à $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$, et α est néccessairement du quatrième degré. Alors α engendre le corps et on a $\alpha = \theta\beta$, β étant un nombre de $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$.

Nous désignons par $\bar{\alpha}$ le nombre conjugué qu'on aura de α en changeant $\sqrt{\Delta}$ en $-\sqrt{\Delta}$, et par $\bar{\alpha}'$ le nombre conjugué qu'on aura de $\bar{\alpha}$ en changeant $\bar{\theta}$ en $-\bar{\theta}$. Alors le produit $\bar{\alpha}\bar{\alpha}'$ est toujours positif.

Pour une unité quelconque E on a

$$E E' = \pm\varepsilon^h, \tag{25}$$

h étant un entier rationnel. Il en résulte

$$\bar{E}\bar{E}' = \pm \bar{\varepsilon}^h > 0.$$

On en conclut qu'il faut prendre le signe supérieur lorsque h est pair, et lorsque h est impair et $N(\varepsilon) = \varepsilon\bar{\varepsilon} = +1$. Si h est impair et $N(\varepsilon) = -1$, il faut prendre le signe inférieur. En posant, pour h pair, $E_1 = E\varepsilon^{-\frac{1}{2}h}$ nous aurons ainsi

$$E_1 E_1' = +1.$$

En posant, pour h impair, $E_1 = E\varepsilon^{-\frac{1}{2}(h-1)}$ nous aurons

$$E_1 E_1' = \pm \varepsilon,$$

où on doit prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que $N(\varepsilon)$ est $+1$ ou -1.

Si dans (25) h est pair, nous dirons que E est une unité de la *première catégorie*; alors il faut prendre le signe supérieur. Si h est impair, nous dirons que E est de la *seconde catégorie*. Toutes les unités du deuxième degré appartiennent à la première catégorie. Le produit de deux unités de la première catégorie est une unité de la première catégorie. Le produit de deux unités de la seconde catégorie est une unité de la première catégorie. Le produit d'une unité de la première catégorie et d'une unité de la seconde catégorie appartient à la seconde catégorie. Il y a évidemment dans tout corps des unités de la première catégorie et du quatriéme degré.

Ainsi les corps $\mathbf{K}(\theta)$ en question se répartissent en trois groupes caractérisés de la façon suivante :

Corps du premier type. Il n'existe dans le corps aucune unité de la seconde catégorie. Le nombre $\sqrt{\varepsilon}$ n'appartient pas au corps.

Corps du deuxième type. L'unité $H = \sqrt{\varepsilon}$ appartient au corps. Comme $HH' = -\varepsilon$ cette unité appartient à la seconde catégorie.

Corps du troisième type. Il y a dans le corps des unités de la seconde catégorie. Le nombre $\sqrt{\varepsilon}$ n'appartient pas au corps.

Nous allons montrer l'existence d'une infinité de corps de chacune des trois types.

Corps du premier type. Soit $\theta = \sqrt{\pm p + a\sqrt{p}}$, où p est un nombre premier $\equiv 5 \pmod 8$, et où a est un nombre naturel $> \sqrt{p}$ non divisible par p. Soient $x = \xi$, $y = \eta$ les plus petites solutions en nombres naturels de l'équation $x^2 - py^2 = -1$. Alors on a $\xi + \eta\sqrt{p} = \varepsilon^3$ ou $= \varepsilon$ selon les cas. Pour une unité quelconque E on a

$$QE = x + y\theta + z\theta^2 + w\theta^3,$$

où Q est un nombre naturel qui divise $D(\theta)$, et où $x, y, z,$ et w sont des nombres entiers rationnels. D'après le lemme **1** on peut supposer que Q n'est pas divisible par p. Alors nous avons.

$$Q^2 EE' = (x + z\theta^2)^2 - \theta^2 (y + w\theta^2)^2.$$

Si nous supposons que $-EE' = \xi + \eta\sqrt{p}$, il en résulte

$$(x \pm pz)^2 + a^2 pz^2 \mp p(y \pm pw)^2 \mp a^2 p^2 w^2 - 2pa^2 (y \pm pw) w = -\xi Q^2.$$

On en aura la congruence

$$x^2 \equiv -\xi\, Q^2 \pmod p,$$

d'où, vu que
$$\xi^2 \equiv -1 \pmod p,$$

$$x^4 + Q^4 \equiv 0 \pmod p,$$

congruence impossible puisque $p \equiv 5 \pmod 8$ et $Q \not\equiv 0 \pmod p$. Par conséquent, le corps $\mathbf{K}(\theta)$ est du premier type.

Corps du deuxième type. On aura une infinité de corps de ce type en prenant

$$\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\xi + \eta\sqrt{p})},$$

où p est un nombre premier $\equiv 1 \pmod 4$, et où ξ et η sont les plus petites solutions en nombres naturels de l'équation $x^2 - py^2 = -4$.

Corps du troisième type. On aura une infinité de corps de ce type en prenant

$$\theta = \sqrt{-u + 1 + \sqrt{u^2+1}},$$

où u est un nombre naturel $\geqslant 3$ tel que u^2+1 ne soit divisible par aucun carré > 1, dans $\mathbf{K}(1)$. Dans ce cas on a $\varepsilon = u + \sqrt{u^2+1}$. En effet, il est évident que les plus petites solutions en nombres naturels de l'équation $x^2 - (u^2+1)y^2 = -1$ sont $x = u$ et $y = 1$. Alors le nombre $u + \sqrt{u^2+1}$ a une des valeurs ε ou ε^3. Or, dans le dernier cas on aurait

$$u + \sqrt{u^2+1} = \tfrac{1}{8}\left[a + b\sqrt{u^2+1}\right]^3,$$

où a et b sont des nombres naturels de la même parité. Donc

$$8u = a^3 + 3ab^2(u^2+1), \quad 8 = 3a^2b + b^3(u^2+1),$$

ce qui est possible seulement pour $a = b = 1$, $u = 2$.

Vu que $\theta^2 - 1 = -u + \sqrt{u^2+1} = \varepsilon^{-1}$, le nombre $E = \theta + 1$ est une unité. Comme $EE' = -\varepsilon^{-1}$, l'unité E est de la seconde catégorie.

Le nombre $\sqrt{\varepsilon}$ n'appartient pas au corps. En effet, si $\sqrt{\varepsilon}$ engendre le corps, il faut qu'on ait

$$\left(-u + 1 + \sqrt{u^2+1}\right)\left(-u + \sqrt{u^2+1}\right) = \gamma^2,$$

où $\gamma = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{u^2+1})$ est un nombre entier dans $\mathbf{K}(\sqrt{u^2+1})$. Il en résulte

$$4(2u^2 - u + 1) = a^2 + b^2(u^2+1), \quad 4(-2u+1) = 2ab.$$

Or, la dernière de ces équations est impossible vu que a et b doivent être pairs tous les deux.

Remarque. Il y a une infinité de nombres de chacune des deux formes u^2+1 et u^2-1, u nombre naturel qui ne sont divisibles par aucun carré > 1 dans $\mathbf{K}(1)$; pour la démonstration voir Nagell [12].

Dans un corps du deuxième type toute unité de la seconde catégorie est évidemment de la forme $E\sqrt{\varepsilon}$, où E est une unité de la première catégorie.

Si E_1 et E_2 forment un système fondamental d'unités dans un corps du deuxième ou du troisième type, il est évident que l'une au moins des deux unités doit être de la seconde catégorie. Il suffit d'ailleurs de supposer que E_1 est de la première catégorie et E_2 de la seconde catégorie. En effet, vu que

$$\left|\begin{matrix} \log|E_1| & \log|E_2| \\ \log|E_1'| & \log|E_2'| \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \log|E_1E_2| & \log|E_2| \\ \log|E_1'E_2'| & \log|E_2'| \end{matrix}\right|,$$

on peut remplacer le système E_1, E_2 par le système $E_1 E_2, E_2$. Si E_1 et E_2 sont tous les deux de la seconde catégorie, le produit $E_1 E_2$ est de la première catégorie.

Considérons un corps du troisième type et soient E_1 et E_2 deux unités positives formant un système fondamental d'unités, E_1 de la première catégorie et E_2 de la seconde catégorie. Soit E une unité positive de la première catégorie qui n'est pas un carré dans le corps. Alors on a

$$E = E_1^a E_2^b,$$

où b est pair et a impair. On a de plus

$$\varepsilon = E_1^c E_2^d,$$

où d est pair et c impair. Il en résulte que le nombre $E\varepsilon$ est toujours un carré dans le corps si $E\,(>0)$ n'est pas un carré. On en conclut que toute unité de la seconde catégorie dans le corps est de la forme $\sqrt{E\varepsilon}$, où E est une unité positive de la première categorie qui n'est pas un carré.

On obtient aisément le résultat suivant :

Lemme 5. *Si E et H font un système fondamental d'unités, on peut supposer qu'on a ou $EE' = +1$ ou $EE' = \pm\varepsilon$.*

En effet, vu que H n'est pas une puissance dans $\mathbf{K}(\theta)$ celui-ci peut faire partie d'un système fondamental d'unités (Lemme 4). En outre, le déterminant

$$\left|\begin{matrix} \log|E| & \log H \\ \log|E'| & \log|H'| \end{matrix}\right| \tag{26}$$

a la valeur $\log H \cdot \log|E/E'|$. Celle-ci ne changera pas si on y remplace E par $E\varepsilon^m$, m étant un entier rationnel. Nous avons vu plus haut comment on peut choisir m de façon qu'on ait ou $EE' = +1$ ou $EE' = \pm\varepsilon$.

Nous aurons finalement le résultat :

Théorème 7. *Soit E une unité du corps $\mathbf{K}(\theta)$ jouissant des propriétés suivantes : E est du quatrième degré, et on a $E > 1$ et $EE' = +1$. E n'est pas un puissance dans le corps.*

Cela posé, un système fondamental d'unités du corps, ξ et η, peut être choisi de la façon suivante :

1° *Dans un corps du premier type on peut prendre $\xi = \varepsilon$ et $\eta = E$.*

2° *Dans un corps du deuxième type on peut prendre $\xi = \sqrt{\varepsilon}$ et $\eta = E$.*

3° *Dans un corps du troisième type on peut prendre $\xi = \varepsilon$ et $\eta = \sqrt{E\varepsilon}$.*

Démonstration. Les unités E et H sont évidemment indépendantes. En effet, le déterminant (26), ayant la valeur $\log H \cdot \log |E/E'| = 2 \log H \cdot \log E$, est différent de zéro. Alors, d'après le *n°* **8** il existe une paire d'unités positives E_1 et E_2 constituant un système fondamental d'unités tel qu'un ait

$$E_1^m = H^{t_{11}}, \tag{27}$$

$$E_2^m = H^{t_{21}} E^{t_{22}}. \tag{28}$$

Ici m est un nombre naturel, et t_{11}, t_{21} et t_{22} sont des entiers rationnels tels qu'on ait

$$0 \leqslant t_{21} < t_{11} \leqslant m \quad (1 \leqslant t_{22} \leqslant m). \tag{29}$$

Il résulte des relations (27), (28) et (29) que E_1 et E_2 sont > 1. De la relation (27) il suit qu'on a

$$\begin{vmatrix} \log H & \log |E_1| \\ \log |H'| & \log |E_1'| \end{vmatrix} = \log H \cdot \log \left| \frac{E_1}{E_1'} \right| = 0,$$

donc $E_1 = \pm E_1'$. Le signe supérieur entraîne $E_1 = \varepsilon^n$, n étant un nombre naturel. Or d'après le lemme **3** E_1 n'est pas une puissance dans le corps, donc $n = 1$ et $E_1 = \varepsilon = H$. Le signe inférieur entraîne $E_1 = \varepsilon^{n-\frac{1}{2}}$, où n est un nombre naturel. Vu que E_1 n'est pas une puissance, on aura donc $n = 1$ et $E_1 = \sqrt{\varepsilon} = H$. Alors l'équation (28) peut s'écrire

$$E_2^m H^{-t_{21}} = E^{t_{22}}.$$

Vu que H et E_2 font un système fondamental, nous en concluons que m et t_{21} sont divisibles par t_{22}. Posons $m = t_{22} y$ et $t_{21} = t_{22} x$, où x et y sont des entiers $\geqslant 0$. Il résulte de (29) que $y > x$. De la relation

$$E_2^y = H^x E \tag{30}$$

on conclut que $(y, x) = 1$, vu que E n'est pas une puissance dans le corps. Il faut ainsi distinguer deux cas.

Premier cas. $E E' = +1$ et $E_2 E_2' = +\varepsilon^{2h}$, h entier rationnel.

Alors on obtient de (30)

$$E_1'^y = H'^x E'$$

et par multiplication

$$(E_2 E_2')^y = \pm \varepsilon^{2hy} = \pm (H H')^x.$$

Il en résulte $2hy = 2x$ ou $2hy = x$ suivant que $HH' = \varepsilon^2$ ou $= -\varepsilon$. Vu que $y > x$ et $(x, y) = 1$ cela entraîne dans tous les deux cas $h = 0$ et $x = 0$. Comme E n'est pas une puissance il faut que $y = 1$ et $E_2 = E$.

Deuxième cas. $E E' = +1$ et $E_2 E_2' = \pm \varepsilon^{2h+1}$, h entier rationnel.

Alors on aura de (30)

$$E_2'^y = H'^x E'$$

et par multiplication

$$(E_2 E_2')^y = \pm \varepsilon^{(2h+1)y} = \pm (H H')^x.$$

Il en résulte $(2h+1)y=2x$ ou $(2h+1)y=x$ suivant que $HH'=\varepsilon^2$ ou $=-\varepsilon$. Vu que $y>x$ et $(x, y)=1$ cela entraîne $h=0$, $y=2$ et $x=1$, c'est-à-dire, $H=\varepsilon$. Donc $E_2^2=E\varepsilon$. Ainsi le corps est du troisième type.

Théorème 7 se trouve ainsi démontré. Il est clair comment on doit procéder pour obtenir une unité E qui satisfait aux conditions de ce théorème quand le corps $\mathbf{K}(\theta)$ est donné.

Remarque. On obtient du théorème 7 le corollaire :

Soit E l'unité definie dans ce théorème et soit E_1 une unité quelconque pour laquelle $E_1E_1'=+1$. Cela étant on a

$$E_1=\pm E^m,$$

où m est un nombre entier rationnel.

Il est évident que E est la plus petite unité >1 pour laquelle on a $EE'=+1$.

Le nombre générateur θ étant donné on peut, sans connaître un système fondamental d'unités, déterminer le type du corps $\mathbf{K}(\theta)$ de la manière suivante. Si le nombre $\sqrt{\varepsilon}$ appartient au corps $\mathbf{K}(\theta)$ celui-ci appartient au deuxième type. Dans le cas contraire il faut déterminer une unité positive E de la première catégorie et du quatrième degré. Ensuite il faut déterminer une unité positive E_1 jouissant des propriétés suivantes : E_1 n'est pas un carré dans $\mathbf{K}(\theta)$, $E=E_1^h$, où h est une puissance de 2. Si E_1 est de la seconde catégorie le corps est du troisième type. Si E_1 est de la première catégorie il faut examiner si le nombre $\sqrt{E_1\varepsilon}$ appartient au corps ou non. Dans le premier cas le corps est du troisième type, dans le dernier cas il est du premier type.

Exemples numériques. 1° Soit $\theta=\sqrt{-5+4\sqrt{5}}$. D'après un resultat que nous avons établi plus haut, le corps $\mathbf{K}(\theta)$ est du premier type. On a $\varepsilon=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Le nombre $\theta^2-4=(\theta+2)(\theta-2)=-9+4\sqrt{5}$ est une unité. On vérifie aisément que le nombre $E=\sqrt{(2+\theta)/(2-\theta)}$ est une unité qui satisfait aux conditions du théorème 7. Ainsi ε et E constituent un système fondamental. 2° Soit $\theta=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$. Dans ce cas on a $\theta=\sqrt{\varepsilon}$. On vérifie sans peine que le nombre $E=\theta+1$ est une unité qui satisfait aux conditions du théorème 7. Ainsi θ et E constituent un système fondamental. 3° Le nombre $\theta=\sqrt{-2+\sqrt{10}}$ engendre un corps du troisième type. Dans ce cas le nombre $E=(\theta+1)/(\theta-1)$ est une unité qui satisfait aux conditions du théorème 7. Ainsi les unités ε et $\sqrt{E\varepsilon}=\varepsilon(\theta+1)$ constituent un systéme fondamental. On peut d'ailleurs aussi prendre les unités $\theta+1$ et $\theta-1$.

Ljunggren [13, 14] a traité une sous-classe des corps de la classe 7, à savoir les corps purement biquadratiques engendrés par les nombres $\sqrt[4]{\Delta}$, Δ nombre naturel.

Aussi pour les corps de la classe 2 on a $r=2$. Dans ce cas la non-existence de sous-corps quadratiques rend plus difficile la recherche des unités. Nous allons retourner sur ces corps dans un travail prochain; nous nous contentons ici de l'exemple numérique suivant. Si θ est une racine de l'équation $x^4+x-3=0$, on vérifie sans difficulté que les unités $\theta-1$ et $2-\theta^2$ constituent un système fondamental d'unités du corps $\mathbf{K}(\theta)$.

13. *Les classes 8 et 9.* Dans ces classes on a $r=3$. Comme plus haut le nombre générateur a la forme

$$\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(c + d\sqrt{\Delta})},$$

où $\frac{1}{2}(c + d\sqrt{\Delta})$ est un nombre entier positif dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Le nombre $c^2 - \Delta d^2$ est positif et n'est pas le carré d'un nombre rationnel. Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 9 ou la classe 8 suivant que le nombre $\Delta(c^2 - \Delta d^2)$ est un carré ou non dans $\mathbf{K}(1)$.

Comme plus haut nous désignons par ε l'unité fondamentale dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$, nous supposons $\varepsilon > 1$. Toute unité du second degré est évidemment de la forme $\pm\varepsilon^m$, m entier rationnel. Il y a nécessairement dans $\mathbf{K}(\theta)$ des unités du quatrième degré. Nous dirons que le nombre entier β^m est une *puissance dans le corps*, si β appartient à $\mathbf{K}(\theta)$ et si m est un nombre naturel $\geqslant 2$.

Nous allons établir quelques lemmes sur les unités.

Lemme 6. *Le nombre $\sqrt{\varepsilon}$ n'appartient pas au corps.*

Démonstration. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{\Delta})$ et supposons que $\sqrt{\varepsilon}$ appartient au corps. Alors le nombre $\sqrt{\frac{1}{2}(a - b\sqrt{\Delta})}$ engendre un corps conjugué. Il en résulte que $\frac{1}{4}(a^2 - \Delta b^2) = +1$. Par conséquent tous les quatre corps conjugués coincident. Vu que

$$\sqrt{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a+2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a-2},$$

le corps admet trois sous-corps quadratiques réels, ce qui est seulement possible pour les corps de la classe 11. Ainsi le lemme est démontré.

Il en résulte, tout comme au numéro précédent, que ε *ne peut jamais être une puissance dans le corps.*

Lemme 7. *La condition nécessaire et suffisante qour que l'unité positive E appartienne à quelque système fondamental, est que E n'est pas une puissance dans le corps.*

Démonstration. Nous savons d'après le n° **8** que cette condition est nécessaire. Soient E_1, E_2 et E_3 un systéme fondamental d'unités et posons

$$E_4 = E_1^{f_1} E_2^{f_2} E_3^{f_3},$$
$$E_5 = E_1^{g_1} E_2^{g_2} E_3^{g_3},$$
$$E_6 = E_1^{h_1} E_2^{h_2} E_3^{h_3},$$

où f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2 *et* h_3 sont des entiers rationnels. La condition nécessaire et suffisante pour que les unités E_4, E_5 et E_6 forment un système fondamental et que

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{31}$$

Donc
$$D = h_1 \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ g_2 & g_3 \end{vmatrix} - h_2 \begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ g_1 & g_3 \end{vmatrix} + h_3 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = \pm 1$$

Supposons maintenant que les nombres h_1, h_2 et h_3 sont donnés, donc E_6 est donné. Pour satisfaire à (31) il faut que $(h_1, h_2, h_3) = 1$. Nous allons montrer que, cette condition remplie, on peut déterminer les entiers f_1, f_2, f_3, g_1, g_2 et g_3 tels qu'ils satisfassent à (31). Si nous posons $f_3=0$ et $g_3=1$, l'équation (31) peut s'écrire

$$(h_1-h_3g_1)f_2+(-h_2+h_3g_2)f_1=\pm 1.$$

Il suffit de choisir g_1 et g_2 tels qu'on ait

$$(h_1-h_3g_1,-h_2+h_3g_2)=1. \tag{32}$$

Si $h_1=h_2=0$ on a $h_3=\pm 1$. Dans ce cas il suffit de choisir g_1 et g_2 tels que $(g_1, g_2)=1$. Si $h_1=h_3=0$ on a $h_2=\pm 1$. Dans ce cas on prend $f_1=\pm 1$. Si $h_2=h_3=0$ on a $h_1=\pm 1$. Dans ce cas on prend $f_2=\pm 1$.

Supposons ensuite que $h_1=0$ et que h_2 et h_3 sont différents de zéro. Dans ce cas nous pouvons prendre $g_1=1$. Vu que $(h_2, h_3)=1$ la relation (32) est alors remplie pour toute valeur de g_2. Raisonnement analogue si $h_2=0$, $h_1\neq 0$ et $h_3\neq 0$. Dans ce cas nous pouvons prendre $g_2=1$.

Considérons enfin le cas que h_1 et h_2 sont différents de zéro. Si $h_3=0$ la relation (32) est remplie. Donc nous supposons que $h_3\neq 0$. Posons $(h_1, h_2)=\delta$ et déterminons g_1 et g_2 tels qu'on ait $h_2g_1-h_1g_2=\delta$. Il s'ensuit que $(g_1, g_2)=1$. Si p est un nombre premier qui divise tous les deux nombres $h_1-h_3g_1$ et $h_2-h_3g_2$ on aura $g_1(h_2-h_3g_2)-g_2(h_1-h_3g_1)=g_1h_2-g_2h_1=\delta\equiv 0 \pmod p$. Ainsi tous les deux nombres h_1 et h_2 sont divisibles par p. Alors h_3 n'est pas divisible par p. Par conséquent il faut que tous les deux nombres g_1 et g_2 soient divisibles par p. Or les nombres g_1 et g_2 sont premiers entre eux. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Si α est un nombre $\neq 0$ dans $\mathbf{K}(\theta)$ nous définissons le nombre α' de la même façon que dans le n° **12**. Pour une unité quelconque E on a

$$EE'=\pm\varepsilon^h,$$

h étant un entier rationnel. Comme dans le numéro précédent nous dirons que l'unité E est de la *première catégorie* ou de la *seconde catégorie* suivant que h est pair ou impair. Nous dirons d'une manière analogue que le corps est du *premier type* s'il ne contient que des unités de la première catégorie, qu'il est du *second type* s'il contient des unités de la seconde catégorie.

Lemme 8. *Il existe dans chacune des classes 8 et 9 des corps appartenant à chacun des deux types.*

Démonstration. Considérons d'abord la classe 8. Soit

$$\theta=\sqrt{a+1+\sqrt{a^2-1}},$$

où a est un nombre naturel pair tel que a^2-1 ne soit divisible par aucun carré >1. Alors on a

$$\theta^2-1=a+\sqrt{a^2-1}=\varepsilon.$$

Donc le nombre $E=\theta+1$ est une unité telle que

$$EE'=(\theta+1)(-\theta+1)=1-\theta^2=-\varepsilon.$$

Par conséquent, il y a dans la classe 8 une infinité de corps du second type.

Pour montrer qu'il y a aussi des corps du premier type dans la classe 8 nous considérons le corps engendré par le nombre

$$\theta = \sqrt{a+\sqrt{p}},$$

où p est un nombre premier $\equiv 5 \pmod 8$, et où a est un nombre naturel divisible par p, tel que $p(a^2-p)$ ne soit pas un carré dans $\mathbf{K}(1)$. Soit $x=\xi$, $y=\eta$ les plus petites solutions en nombres naturels de l'équation $x^2-py^2=-1$. Alors on a ou $\xi+\eta\sqrt{p}=\varepsilon^3$ ou $\xi+\eta\sqrt{p}=\varepsilon$. Si E désigne une unité du corps on a

$$QE = x + y\theta + z\theta^2 + w\theta^3,$$

où x, y, z et w sont des nombres entiers rationnels, et où Q est un nombre naturel qui divise le discriminant $D(\theta)$. D'après le lemme **1** on peut supposer que Q n'est pas divisible par p. Supposons maintenant qu'on ait $EE' = \pm(\xi+\eta\sqrt{p})$. Vu que

$$Q^2 EE' = [x+z(a+\sqrt{p})]^2 - (a+\sqrt{p})\,[y+w(a+\sqrt{p})]^2,$$

nous aurons

$$(x+az)^2 + pz^2 - a(y+aw)^2 - apw^2 - 2p(y+aw)w = \pm\xi Q^2.$$

Il en vient modulo p

$$x^2 \equiv \pm\xi Q^2 \pmod p,$$

d'où, puisque $\xi^2 \equiv -1 \pmod p$,

$$x^4 + Q^4 \equiv 0 \pmod p.$$

Comme $p\equiv 5 \pmod 8$ et $Q \not\equiv 0 \pmod p$, cette congruence est impossible. Il en résulte que $\mathbf{K}(\theta)$ est un corps du premier type. En variant a et p on aura une infinité de tels corps.

Considérons ensuite la classe 9. Un exemple d'un corps du second type est donné par le corps engendré par le nombre

$$\theta = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Ici on a $\varepsilon = 1+\sqrt{2}$ et $\theta^2 - 1 = \varepsilon$. Ainsi le nombre $E=\theta+1$ est une unité pour laquelle on a

$$EE' = (\theta+1)(\theta'+1) = 1-\theta^2 = -\varepsilon.$$

Pour construire des corps du premier type dans la classe 9 nous choisissons

$$\theta = \sqrt{g+\sqrt{g}},$$

où $g-1=a^2$ est le carré d'un nombre naturel $a \geqslant 3$. Le nombre g n'est divisible par aucun carré >1. Il y a (au moins) un nombre premier $p\equiv 5 \pmod 8$ qui divise g. D'après un résultat du n° **12** on a $\varepsilon = a+\sqrt{a^2+1}$. Si E désigne une unité du corps on a

$$QE = x + y\theta + z\theta^2 + w\theta^3,$$

z, y, z et w étant des nombres entiers rationnels, et Q étant un nombre naturel qui divise le discriminant $D(\theta)$. D'après le lemme **1** on peut supposer que Q n'est pas divisible par p. Supposons maintenant qu'on ait $EE' = \pm(a + \sqrt{a^2+1})$. Vu que

$$Q^2 EE' = [x + z(g + \sqrt{g})]^2 - (g + \sqrt{g})\,[y + w(g + \sqrt{g})]^2,$$

nous aurons

$$(x + gz)^2 + gz^2 - g(y + gw)^2 - g^2 w^2 - 2g(y + gw)w = \pm a Q^2.$$

On en obtient modulo p

$$x^2 \equiv \pm a Q^2 \pmod p,$$

d'où, puisque $a^2 \equiv -1 \pmod p$,

$$x^4 + Q^4 \equiv 0 \pmod p.$$

Comme Q n'est pas divisible par p, cette congruence est impossible. On en conclut que $\mathbf{K}(\theta)$ est un corps du premier type. En variant a on aura une infinité de tels corps.

Le lemme **8** se trouve ainsi démontré.

Théorème 8. *Les unités E_0, E_1 et E_2 d'un système fondamental peuvent être choisies de la manière suivante : $E_0 = \varepsilon$, E_1 et E_2 sont des unités positives du quatrième degré, telles qu'on ait 1° dans un corps du premier type : $E_1E_1' = \pm 1$, $E_2E_2' = \pm 1$, 2° dans un corps du second type : $E_1E_1' = \pm 1$, $E_2E_2' = \pm\varepsilon$.*

Démonstration. D'après les lemmes **6** et **7** on peut prendre $E_0 = \varepsilon$. Vu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

les unités E_1 et E_2 dans le système fondamental peuvent être remplacées par les unités $E_3 = E_1\varepsilon^m$ et $E_4 = E_2\varepsilon^n$, où m et n sont des nombres entiers rationels quelconques. Si le corps est du premier type, on peut choisir les nombres m et n de telle façon qu'on ait

$$E_3E_3' = \pm 1 \quad \text{et} \quad E_4E_4' = \pm 1.$$

Si le corps est du second type on peut toujours supposer que E_1 est de la première catégorie et que E_2 est de la seconde catégorie. En effect si toutes les deux unités sont de la seconde catégorie, le produit E_1E_2 est de la première catégorie, et il est évident que le système ε, E_1, E_2 peut être remplacé par le systeme ε, E_1E_2, E_2. Par conséquent, nous pouvons choisir les nombres m et n de telle façon qu'on ait

$$E_3E_3' = \pm 1 \quad \text{et} \quad E_4E_4' = \pm\varepsilon.$$

Cela démontre le théorème. Ce théorème ne peut pas être précisé sans une connaissance plus détaillée du corps.

Si α est un nombre du corps, nous désignons par $\bar{\alpha}$ le nombre conjugué qu'on aura de α en changeant $\sqrt{\Delta}$ en $-\sqrt{\Delta}$, et par $\bar{\alpha}'$ le nombre conjugué qu'on aura de $\bar{\alpha}$ en changeant $\bar{\theta}$ en $-\bar{\theta}$. Si $\varepsilon = \frac{1}{2}(\xi + \eta\sqrt{\Delta})$, on a $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\xi - \eta\sqrt{\Delta})$.

Soit E une unité de la première catégorie. Donc

$$E E' = \pm \varepsilon^{2h}, \quad \bar{E}\bar{E}' = \pm \bar{\varepsilon}^{2h}, \quad h \text{ entier rationnel,}$$

d'où $N(E) = E E' \bar{E} \bar{E}' = (\varepsilon \bar{\varepsilon})^{2h} = +1$.

Soit E une unité de la seconde catégorie. Donc

$$E E' = \pm \varepsilon^{2h+1}, \quad \bar{E}\bar{E}' = \pm \bar{\varepsilon}^{2h+1}, \quad h \text{ entier rationnel,}$$

d'où $N(E) = E E' \bar{E} \bar{E}' = (\varepsilon \bar{\varepsilon})^{2h+1} = N(\varepsilon) = \pm 1$.
On en conclut

Lemme 9. *La norme d'une unité de la première catégorie est toujours* $= +1$. *La norme d'une unité de la seconde catégorie est* $= +1$ *ou* $= -1$ *suivant que* $N(\varepsilon) = +1$ *ou* $= -1$.

Soit η une unité dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Si E est une unité du quatrième degré dans $\mathbf{K}(\theta)$ pour laquelle on a $E E' = \eta$, celle-ci est racine d'une équation de la forme

$$z^2 - \alpha z + \eta = 0,$$

où α est un nombre entier dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. L'autre racine est E'. Donc

$$E = \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\eta}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une unité E telle que $E E' = -1$, est que le corps peut être engendré par un nombre de la forme $\sqrt{\alpha^2 + 4}$, α nombre entier dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une unité E telle que $E E' = \pm \varepsilon$, est que le corps peut être engendré par un nombre de la forme $\sqrt{\alpha^2 \mp 4\varepsilon}$, α nombre entier dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$.

Lorsque E est une unité de la seconde catégorie dans un corps du second type, on peut se demander s'il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur dans la relation

$$E E' = \pm \varepsilon^{2h+1}, \tag{33}$$

h entier rationnel. S'il existe une unité E_1 telle qu'on ait

$$E_1 E_1' = -1, \tag{34}$$

il est évident que, dans (33), l'unité E peut être choisie de manière qu'on ait l'un ou l'autre des deux signes. D'autre part, s'il existe des unités E qui satisfont à (33) et pour le signe supérieur et pour le signe inférieur, il existe aussi une unité E_1 qui satisfait à (34). S'il n'existe aucune unité E_1 pour laquelle la relation (34) est satisfaite, le signe dans (33) est toujours le même pour toutes les unités de la seconde catégorie. On peut faire des conclusions analogues pour les unités de la première catégorie.

Nous allons illustrer les différentes possibilités par des exemples numériques.

Pour la construction de ces exemples nous nous servons de l'idée suivante. Soit θ le nombre générateur du corps où $\theta^2 = \frac{1}{2}(c + d\sqrt{\Delta})$ est un nombre entier dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Supposons que $\frac{1}{4}(c^2 - \Delta d^2)$ est divisible par le nombre premier impair p et non par le carré de p. Supposons que Δ n'est pas divisible par p.

Soit $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$ sont des idéaux premiers du premier degré dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Supposons que $\mathfrak{p}$ divise $\frac{1}{2}(c + d\sqrt{\Delta})$. Cela étant, supposons qu'il existe une unité E telle que $EE' = -1$. D'après ce que nous venons de montrer, il faut qu'on ait

$$(\alpha^2 + 4)\beta^2 = \tfrac{1}{2}(c + d\sqrt{\Delta})\gamma^2,$$

où α, β et γ sont des nombres entiers differents de zéro dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Il en résulte que le nombre -1 doit être un reste quadratique de $\mathfrak{p}$ dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$.

Supposons qu'il existe une unité E telle que $EE' = \pm\varepsilon$. D'après ce que nous avons vu plus haut, il faut qu'on ait

$$(\alpha^2 \mp 4\varepsilon)\beta^2 = \tfrac{1}{2}(c + d\sqrt{\Delta})\gamma^2,$$

où α, β et γ sont des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Il en résulte que le nombre $\pm\varepsilon$ doit être un reste quadratique de $\mathfrak{p}$ dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$.

Exemple 1. Si nous prenons $\theta = \sqrt{11 + \sqrt{2}}$, le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 8. Nous avons $11^2 - 2 = 7 \cdot 17$. Soient $7 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ et $17 = \mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$ les décompositions de 7 et 17 en idéaux premiers. Alors on vérifie aisément que le nombre -1 est un non-reste quadratique modulo $\mathfrak{p}$ et que le nombre $\pm(1 + \sqrt{2})$ est un non-reste quadratique modulo $\mathfrak{q}$ dans $\mathbf{K}(\sqrt{\Delta})$. Il en résulte que le corps appartient au premier type et qu'il n'y a aucune unité E telle que $EE' = -1$.

Exemple 2. Si nous prenons $\theta = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$, le corps $\mathbf{K}(\theta)$ appartient à la classe 8. Dans ce cas l'unité.

$$E = 1 + \sqrt{3} + \theta$$

a la propriété que $EE' = -1$. Vu que $5^2 - 3 \cdot 2^2 = 13$, nous posons $13 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$ sont des idéaux premiers. Alors on vérifie aisément que le nombre $\pm(2 + \sqrt{3})$ est un non-reste quadratique modulo $\mathfrak{p}$. Il en résulte que $\mathbf{K}(\theta)$ est du premier type.

Exemple 3. Le corps $\mathbf{K}(\theta)$ engendré par $\theta = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ appartient évidemment à la classe 8. Le nombre $E = \theta + 2$ est une unité pour laquelle on a

$$EE' = 4 - \theta^2 = 1 - \sqrt{2} = -\varepsilon^{-1}.$$

Donc le corps est du second type. Si nous posons $\mathfrak{p} = (3 + \sqrt{2})$ on voit sans difficulté que le nombre -1 est un non-reste quadratique modulo $\mathfrak{p}$. Il en résulte qu'on a pour toutes les unités E de la seconde catégorie

$$EE' = -\varepsilon^{2h+1},$$

et pour toutes les unités E de la première catégorie

$$EE' = +\varepsilon^{2h}.$$

Exemple 4. En prenant $\theta = \sqrt{8+3\sqrt{2}}$ on aura un corps de la classe 8 et du second type. En effet, dans ce cas l'unité

$$E = 1 + 2\sqrt{2} + \theta$$

a la propriété que $EE' = 1 + \sqrt{2} = +\varepsilon$. Comme $8^2 - 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 23$, nous posons $23 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$ sont des idéaux premiers. On vérifie aisément que le nombre -1 est un non-reste quadratique modulo $\mathfrak{p}$. Il en résulte qu'on a pour toutes les unités E de la seconde catégorie

$$EE' = +\varepsilon^{2h+1},$$

et pour toutes les unités E de la première catégorie

$$EE' = +\varepsilon^{2h}.$$

Exemple 5. Le corps engendré par $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ appartient à la classe 9. Le nombre $E = \theta + 1$ est une unité de la seconde catégorie vu que

$$EE' = 1 - \theta^2 = -1 - \sqrt{2} = -\varepsilon.$$

Ainsi le corps est du second type. Il est évident que l'unité

$$E_1 = 1 + \sqrt{2} + \theta\sqrt{2}$$

satisfait à la relation $E_1 E_1' = -1$.

Exemple 6. Considérons ensuite le corps engendré par

$$\theta = \sqrt{s\left(a^2 + 1 + a\sqrt{a^2+1}\right)},$$

où s est un nombre naturel impair, non divisible par aucun carré > 1 dans $\mathbf{K}(1)$. Alors le corps appartient à la classe 9. Nous supposons que a est un nombre naturel pair tel que a^2+1 ne soit divisible par aucun carré > 1 dans $\mathbf{K}(1)$. Supposons que $(s, a^2+1) = 1$ et que s est divisible par le nombre premier $q \equiv -1 \pmod 4$ tel que a^2+1 soit un reste quadratique modulo q. Alors il est évident que le nombre $s\left(a^2+1+a\sqrt{a^2+1}\right)$ n'est divisible par le carré d'aucun idéal premier dans $\mathbf{K}(\theta)$.

Supposons qu'il existe dans le corps une unité E telle que $EE' = -1$. Alors, d'après ce que nous venons de dire plus haut, il faut qu'on ait

$$\alpha^2 + 4 = s\left(a^2 + 1 + a\sqrt{a^2+1}\right)\beta^2, \tag{35}$$

où α et β sont des nombres entiers dans $\mathbf{K}\left(\sqrt{a^2+1}\right)$. Si $q = \mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$ où $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}_1$ sont des idéaux premiers dans $\mathbf{K}(\theta)$, le nombre -1 est évidemment un non-reste quadratique modulo $\mathfrak{q}$. Par conséquent l'équation (35) ne peut pas subsister. Donc il n'existe aucune unité E dans le corps telle que $EE' = -1$.

Prenons spécialements $a = 4$, supposons qu s est divisible par 13. Soit $13 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ la décomposition de 13 en idéaux premiers dans $\mathbf{K}\left(\sqrt{17}\right)$. Si nous supposons $\mathfrak{p} = \left(2+\sqrt{17}\right)$ nous avons $\sqrt{17} \equiv -2 \pmod{\mathfrak{p}}$. Soit E une unité telle qu'on ait

$$EE' = \pm\varepsilon = \pm\left(4+\sqrt{17}\right).$$

Alors, d'après ce que nous venons de dire plus haut, il faut que

$$\alpha^2 \mp 4\varepsilon = s(17+4\sqrt{17})\beta^2,$$

où α et β sont des nombres entiers dans $\mathbf{K}(\sqrt{17})$. Or, cette équation est impossible puisque

$$\left(\frac{\pm\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2}{13}\right) = -1.$$

Par conséquent, dans ce cas spécial le corps est du premier type. Nous ne savons pas s'il y a des valeurs de a et s telles que le corps soit du second type.

On vérifie sans difficulté les résultats suivants :

1° Dans le corps engendré par $\theta = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ un système fondamental d'unités est donné par ε, $\theta+2$ et $\theta+\sqrt{2}$.

2° Dans le corps engendré par $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ les nombres ε, $\theta+1$ et $\bar{\theta}+1$ font un système fondamental d'unités. Ici $\bar{\theta}$ signifie le nombre $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Hasse a developpé une théorie détaillée des corps cycliques de la classe 9, voir [8].

14. *La classe 11.* Dans ce cas le corps est engendré par deux racines carrées réelles. Il y a trois sous-corps, réels tous les trois. On a $r=3$. Vu que ce cas a été traité par plusieurs auteurs d'une maniére définitive nous nous contentons de rappeler de quelques faits.

Soit $\mathbf{K}$ le corps biquadratique en question, désignons par $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$ les trois sous-corps quadratiqµes engendrés par les racines carrées $\sqrt{\Delta_1}$, $\sqrt{\Delta_2}$ et $\sqrt{\Delta_3} = \sqrt{\Delta_1, \Delta_2}$. Désignons par ε_i l'unité fondamentale du corps $\mathbf{k}_i$; comme d'ordinaire nous supposons $\varepsilon_i > 1$. On voit immédiatement que les unités ε_1, ε_2 et ε_3 sont indépendantes. Si ξ est un nombre de $\mathbf{K}$ on a

$$\xi = a_0 + a_1\sqrt{\Delta_1} + a_2\sqrt{\Delta_2} + a_3\sqrt{\Delta_1\Delta_2},$$

où a_0, a_1, a_2 et a_3 sont des nombres rationnels. Désignons par ξ' le nombre conjugué qu'on aura en substituant $\sqrt{\Delta_1}$ par $-\sqrt{\Delta_1}$, par ξ'' le nombre conjugué qu'on aura en substituant $\sqrt{\Delta_2}$ par $-\sqrt{\Delta_2}$, et par ξ''' le nombre conjugué qu'on aura en substituant simultanément $\sqrt{\Delta_1}$ par $-\sqrt{\Delta_1}$ et $\sqrt{\Delta_2}$ par $-\sqrt{\Delta_2}$. Soit E une unité quelconque de $\mathbf{K}$. Alors on a évidemment

$$EE'' = \pm\varepsilon_1^{h_1},$$
$$EE' = \pm\varepsilon_2^{h_2},$$
$$EE'' = \pm\varepsilon_3^{h_3},$$

où h_1, h_2 et h_3 sont des nombres entiers rationnels. On en aura par multiplication

$$E^2 = \varepsilon_1^{h_1}\varepsilon_2^{h_2}\varepsilon_3^{h_3}.$$

Par conséquent, dans les formules (14) du n° **8** on peut prendre $M=2$ (lemme de Bachmann, voir [15]). Ainsi un système fondamental d'unités E_1, E_2, E_3 (toutes les trois >1) est donné par les relations suivantes

$$E_1^2=\varepsilon_1^{t_{11}},$$
$$E_2^2=\varepsilon_1^{t_{21}}\varepsilon_2^{t_{22}}$$
$$E_3^2=\varepsilon_1^{t_{31}}\varepsilon_2^{t_{32}}\varepsilon_3^{t_{33}},$$

où les exposants t_{ik} sont des nombres entiers rationnels satisfaisant aux inégalités

$$0\leqslant t_{ik}<t_{kk}\leqslant 2 \quad (i\neq k).$$

Cela nous donne une méthode pour effectivement déterminer les unités E_1, E_2 et E_3.

Kuroda (voir [16]) a montré qu'il existe sept possibilités essentiellement différentes pour le système E_1, E_2, E_3 à savoir : 1° ε_1, ε_2, ε_3; 2° $\sqrt{\varepsilon_1}$, ε_2, ε_3; 3° $\sqrt{\varepsilon_1}$, $\sqrt{\varepsilon_2}$, ε_3; 4° $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, ε_2, ε_3; 5° $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, $\sqrt{\varepsilon_3}$, ε_2; 6° $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$, $\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}$; 7° $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, ε_2 ε_3. Ici nous avons négligé les permutations des indices. Plus tard Kubota (voir [7]) a montré que chacune des sept possibilités est réalisée pour une infinité de corps. Comparez aussi Hilbert [10] et Värmon [9].

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. NAGELL, T., Bemerkungen über zusammengesetzte Zahlkörper, § 2. Avhdl. Norske Vidensk. Akademi Oslo, Mat.-naturv. kl. 1937, no. 4.
2. WAERDEN, B. v. d., Moderne Algebra, Bd. 1, p. 178–180.
3. WEBER, H., Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, p. 400.
4. NAGELL, T., Bestimmung des Grades gewisser relativ-algebraischer Zahlen, Monatshefte f. Mathematik u. Physik, Bd. 48, p. 61–63. Wien 1939.
5. BERGSTRÖM, H., Zur Theorie der biquadratischen Zahlkörper, Nova Acta Regiae Soc. Scient. Upsaliensis, Ser. IV, Vol. 10, No. 8, Uppsala 1937.
6. NAGELL, T., Zur algebraischen Zahlentheorie. Mathematische Zeitschrift, Bd. 34, p. 183–193. Berlin 1931.
7. KUBOTA, T., Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper. Nagoya Mathematical Journal, Vol. 10, 1956, p. 65–85.
8. HASSE, H., Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern. Abhdl. d. Deutschen Akademie d. Wiss. zu Berlin, Math.-naturw. Klasse, Jahrg. 1948, No. 2, Berlin 1950.
9. VÄRMON, J., Über Abelsche Körper, deren alle Gruppeninvarianten aus einer Primzahl l bestehen und über Abelsche Körper als Kreiskörper. Akademische Abhandlung, Lund 1925.
10. HILBERT, D., Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper. Mathem. Annalen, Bd. 45, p. 309–340. Berlin 1894.
11. FJELLSTEDT, L., On a class of Diophantine equations of the second degree in imaginary quadratic fields, Arkiv f. matematik, Bd. 2, Nr 24. Stockholm 1953.
12. NAGELL, T., Zur Arithmetik der Polynome, § 2. Abhdl. mathem. Seminar d. Hamburg. Universität, Bd. 1, p. 179–194. Hamburg 1922.
13. LJUNGGREN, W., Über die Lösung einiger unbestimmten Gleichungen vierten Grades. Avhdl. Norske Vidensk. Akademi Oslo, Matem.-naturv. kl. 1935, no. 14.
14. LJUNGGREN, W., Einige Eigenschaften der Einheiten reeller quadratischer und rein-biquadratischer Zahlkörper. Skrifter Norske Vidensk. Akademi Oslo, Matem.-naturv. kl. 1936, no. 12.
15. BACHMANN, P., Zur Theorie der complexen Zahlen, Journ. f. Math., Bd. 67, p. 200. Berlin 1867.
16. KURODA, S., Über den Dirichletschen Körper. J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sect. I, Vol. IV, Part 5, p. 383–406. 1943.

Tryckt den 17 november 1961

Uppsala 1961. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB