

NOTICE SUR LES TRAVAUX

DE

S. PINCHERLE

à BOLOGNE.

Analyse des travaux.

§ I. Systèmes de fonctions. — Développements en série.

1. Tandis que l'étude des développements d'une fonction arbitraire, au sens général de Dirichlet, ou, comme on dit aussi, d'une fonction de variable réelle, constituait déjà, vers 1880, un chapitre considérable de l'analyse à la suite des travaux de Dirichlet, de Riemann, de Du Bois Reymond, de Dini, etc., on n'avait guère étudié que dans des cas particuliers les développements de fonctions analytiques en séries ordonnées suivant les fonctions d'un système donné, comme ceux considérés par C. Neumann, Heine, Thomé, Frobenius suivant les polynômes de Legendre, les fonctions de Bessel, les produits spéciaux de la forme $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Mais à cette époque paraît le mémoire de Weierstrass, „Zur Funktionenlehre“, qui contient son célèbre théorème sur les séries uniformément convergentes de fonctions analytiques, et qui permet d'aborder d'une façon générale l'étude des développements à caractère analytique, et c'est à cette étude que j'ai tâché d'apporter quelque contribution. Dans un mémoire [60] publié en 1882, j'étudie des séries de la forme $\sum \varphi_\nu(x)f_\nu(x)$ sous des hypothèses variées pour les deux systèmes de fonctions analytiques $\varphi_\nu(x)$ et $f_\nu(x)$; entre autres dans le cas où $\varphi_\nu(x) = c_\nu x^\nu$ et les $f_\nu(x)$ sont des fonctions régulières pour $x = 0$: hypothèse où se rangent à leur tour des cas particuliers importants. Je trouve quelles sont les fonctions régulières pour $x = 0$ qui admettent un développement de cette forme, j'en étudie les points singuliers en relation avec ceux de $f_\nu(x)$, et, parmi les cas spéciaux, j'envisage les séries de Lambert généralisées, qui donnent lieu à des relations, de nature arithmétique, de quelque intérêt. Dans ce mémoire se trouve, peut-être pour la première fois, le concept de „système de fonctions limitées“ dans „leur ensemble“, depuis si commun, et aussi un théorème qui correspond, pour les aires planes, à la célèbre proposition de Heine-Borel. Au même sujet se rapporte la note 135, où se trouve une

relation qui appartient à la théorie, alors pas encore ébauchée, des déterminants d'ordre infini.

2. On sait qu'une fonction analytique régulière à l'intérieur d'une ellipse de foyers ± 1 est développable (Neumann, Heine) en série de polynômes de Legendre. Ce théorème — qui, soit dit en passant, permet [80] de donner une forme particulièrement simple à la formule de Mittag-Leffler pour une fonction pour laquelle l'ensemble dérivé des singularités appartient à une de ces ellipses — doit dépendre d'une propriété générale qui met en rapport les courbes de convergence des séries ordonnées suivant les fonctions d'une suite donnée $f_n(x)$ avec la nature de la fonction génératrice des $f_n(x)$; c'est cette propriété que j'ai obtenue, dans un cas assez étendu [125, 126, 119]. Je pars d'une fonction de deux variables $T(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} (x - x_0)^m y^n$, dont les singularités sont les couples x, y qui vérifient une équation $f(x, y) = 0$, à premier membre entier, rationnel ou transcendant: la détermination des courbes E de convergence des séries $\sum c_n p_n(x)$, où $p_n = \sum a_{mn} (x - x_0)^m$, dépend des modules des racines de cette équation, et le théorème cité de Neumann n'est que le cas particulier où $f(x, y) \equiv 1 - 2xy + y^2$. Pour des classes étendues de fonctions $p_n(x)$, on peut déterminer un système associé $P_n(y)$, tel que dans un domaine limité nécessairement par des courbes E , on ait $\sum p_n(x) P_n(y) = \frac{1}{y-x}$: dans ce cas, on obtient des systèmes de relations qui représentent une première extension à l'infini de la théorie des déterminants; il s'y présente le fait de la possibilité de *développements de zéro*, que Frobenius avait déjà rencontrés dans le cas des polynômes $p_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$. On trouve qu'à m points singuliers des fonctions associées correspondent m développements de zéro linéairement indépendants. Dans le 126 (nos 19—21) on étudie, pour la première fois peut-être, les rapports entre les propriétés d'une série $\sum a_n x^n$ et celles de la série $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$; rapports que la transformation exponentielle de M. Borel a mis depuis si en évidence. Au même ordre d'idées se rattache un mémoire qui date de la même époque [153], où une opération sur les séries de puissances, généralisation de leur dérivation, permet de considérer une infinité de transformations de même nature.

3. Les courbes E d'égal module des racines de l'équation $f(x, y) = 0$ jouent encore un rôle important dans le calcul des intégrales définies [124]. Si, au lieu de l'équation du second degré qui se présente pour les polynômes de Legendre, on prend une équation cubique, on a une extension de ces polynômes constituée par un système récurrent d'intégrales elliptiques considérées comme fonctions de l'invariant absolu [25]; les développements en série qui s'y rapportent sont étudiés

dans un travail plus étendu [70, 83]; les courbes E sont ici des quartiques rationnelles, sections planes d'une curieuse surface algébrique homaloïdique [140] dont les propriétés ont été ensuite étudiées par M. Montesano¹.

4. Toutefois, certains systèmes de fonctions, d'un emploi très fréquent en Analyse, ne rentrent pas dans le cadre fixé par les travaux précédents: parmi eux, les systèmes de factorielles et leurs généralisations les plus immédiates. Un groupe de travaux [7, 40, 41, 42] s'occupe précisément des séries

$$(1) \sum c_n x(x-1)\dots(x-n+1) \quad \text{et} \quad (2) \sum \frac{c_n}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

A côté de la transformation d'une série (2) en série de fractions simples, j'ai pu préciser les conditions de convergence de ces séries en mettant en rapport le champ de convergence avec le caractère asymptotique des coefficients c_n ; j'ai étudié les développements de zéro de la forme (1), la relation fonctionnelle qui rattache la série (2) à la série de puissances $\sum \frac{c_n}{x^{n+1}}$; enfin, la notion d'ordre d'une fonction en l'un de ses points, notion due à M. Hadamard, m'a permis d'énoncer [42, 147] de la façon la plus simple, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée admette un développement de la forme (2). De même que les séries de puissances, les séries (2) peuvent, sans être convergentes, représenter asymptotiquement une fonction [44]. La théorie de ces séries s'étend en partie [13] aux développements en série suivant les $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ ou leurs inverses quand les points a_n tendent à l'infini sans sortir d'un angle donné. Dans 72, mémoire spécial sur l'interpolation et qui débute par des remarques sur les ensembles devenues depuis familières, j'avais étudié et discuté des problèmes relatifs à la détermination d'une fonction analytique par la connaissance des valeurs qu'elle prend dans un ensemble dénombrable de points, et ces problèmes portent à l'étude de séries de la même forme, dont les conditions de convergence présentent des difficultés particulières.

5. Parmi les systèmes de fonctions qui donnent des développements en série de quelque intérêt, celui formé par les dérivées successives d'une même fonction n'est pas à négliger, si l'on pense que c'est celui qui se présente dans le développement de Taylor. J'ai consacré quelques recherches à ce sujet [32, 10], qui d'ailleurs se rattache étroitement à ceux des travaux analysés au § III. De semblables développements, qui à première vue paraissent n'avoir qu'un champ de validité assez restreint, peuvent, au moyen d'un procédé analogue à celui qui conduit aux célèbres formules de Weierstrass sur les fonctions entières et

¹ Rendiconti dell'Istituto lombardo, 21 maggio 1891.

de M. Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes, s'étendre à des classes très étendues de fonctions; en outre [10], de même qu'une fonction rationnelle s'exprime par une série récurrente de puissances, de même l'intégrale d'une équation différentielle linéaire à coefficients analytiques et à second membre s'exprime par une série ordonnée suivant les dérivées successives de ce second membre et dont les coefficients jouissent d'une propriété remarquable de récurrence, où les multiplicateurs de l'équation jouent un rôle considérable.

§ II. Systèmes récurrents; équations aux différences; fractions continues et leurs généralisations.

6. Pour que l'étude des développements des fonctions en séries ordonnées suivant les fonctions d'un certain système S soit susceptible d'être suffisamment approfondie, il faut naturellement que le système S soit caractérisé par quelque propriété essentielle. L'examen des cas particuliers connus m'a amené à considérer la récurrence linéaire entre les fonctions du système S comme l'un des caractères les plus aptes à conduire à des résultats bien définis; et parmi les questions qui exigent une réponse, il faut signaler les suivantes:

A. Etant donné un système de fonctions $p_n(x)$ — en particulier, de polynômes — liées par une relation linéaire récurrente (équation linéaire aux différences) existe-t-il, et sous quelles conditions, un système associé $P_n(y)$ tel que l'on ait

$$\frac{1}{y-x} = \sum p_n(x) P_n(y)?$$

B. Le système associé étant déterminé formellement, quelles sont les conditions de validité du développement précédent?

C. Quelles sont les conditions de possibilité et d'unicité du développement d'une fonction donnée en série de $p_n(x)$?

7. Pour aborder l'étude de ces questions, l'on doit s'occuper préalablement des propriétés générales des systèmes récurrents. Si la récurrence est du premier ordre, on répond assez aisément [21, 22] aux questions ci-dessus; mais les difficultés sont plus considérables pour les ordres supérieurs. Dans la récurrence du second ordre, on rencontre l'algorithme des fractions continues algébriques, pour lesquelles j'ai dû d'abord [23] donner quelques théorèmes de convergence, et j'ai aussi abordé [120, 146] l'étude des propriétés d'une fonction définie *a priori* par une fraction continue algébrique, question inverse de celle qui se pose ordinairement; j'y ai pu donner des indications sur la dépendance entre les singularités de la fonction et l'ensemble des racines des dénominateurs des réduites.

8. Le cas des relations récurrentes d'ordre quelconque, qui conduit à la généralisation de l'algorithme des fractions continues algébriques, est plus intéressant. La généralisation des fractions continues au point de vue arithmétique avait été indiquée par Jacobi et par d'autres auteurs, mais il restait à faire celle des fractions continues algébriques: les problèmes que je m'étais proposé m'ont obligé de l'aborder, dans une note préventive [138] et plus tard, en 1890, dans un mémoire étendu [69], où se trouve résolu le problème suivant: étant données p séries de puissances décroissantes de $x, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$, déterminer des polynômes entiers A_1, A_2, \dots, A_p , en sorte que $A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + \dots + A_p\sigma_p$ manque du plus grand nombre possible de termes initiaux pour des degrés donnés de A_1, A_2, \dots, A_p . Ce problème conduit à une équation linéaire aux différences d'ordre p , qui pour $p = 2$ est celle qui sert de base à la théorie des fractions continues algébriques, dont nombre de propriétés s'étendent au nouvel algorithme. Pour une étude plus approfondie de la solution trouvée [127, 73]¹, on peut s'arrêter à l'équation aux différences du troisième ordre

$$(3) \quad F_{n+3} = a_n F_{n+2} + b_n F_{n+1} + c_n F_n,$$

(l'extension à un ordre quelconque ne présentant pas des difficultés essentielles) sur laquelle je définis le concept, fondamental pour cette étude, d'*intégrale distinguée*, concept qui n'est autre que la généralisation de celui de *valeur* de la fraction continue: cette intégrale, en effet, est celle dont le rapport à toute autre intégrale de la même équation tend à zéro pour $n \rightarrow \infty$, de même que si α est la valeur de la fraction continue et $\frac{P_n}{Q_n}$ est une réduite, le rapport de $P_n - \alpha Q_n$ à toute autre intégrale de l'équation récurrente du 2^{ième} ordre tend à zéro pour $n \rightarrow \infty$. L'existence de cette intégrale correspond donc à la convergence dans le cas de la fraction continue; pour la déterminer, je me sers d'une notion qu'il vaudrait peut-être la peine de développer davantage, celle de dérivée d'une suite $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ par rapport à une autre $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, en entendant par là la limite de $\frac{h_n - \alpha}{k_n - \beta}$, si α, β sont les limites respectives de h_n et k_n ; le calcul de ces dérivées offre d'ailleurs, naturellement, la plus grande analogie avec celui des dérivées ordinaires. Pour la détermination de l'intégrale distinguée on peut se servir, entre autres moyens, du théorème bien connu de Poincaré sur la limite du rapport de deux intégrales d'une équation aux différences, théorème

¹ Dans l'intervalle entre la publication de ces deux Mémoires, l'un des maîtres de l'Analyse, HERMITE, faisait paraître aux „Annali di Matematica“ (S. II, T. 21, 1893) un mémoire intitulé: *Sur la généralisation des fractions continues algébriques*, dans le même ordre d'idées.

auquel j'ai consacré une note spéciale [101]. Dans le cas où le coefficient b_n de l'équation (3) contient la variable, on peut donner les conditions de valabilité de la solution des problèmes traités aux nos 69, 127 et 73, savoir: 1° étant données les deux séries de puissances σ_1, σ_2 de $\frac{1}{x}$, déterminer les polynômes A_n, B_n, C_n en sorte que $A_n + B_n \sigma_1 + C_n \sigma_2 = 0$ soit vérifiée jusqu'aux termes de degré le plus haut possible; 2° représenter simultanément σ_1, σ_2 par deux fractions rationnelles $\frac{Q_n}{P_n}, \frac{R_n}{P_n}$ de la façon la plus approchée possible pour un degré donné du dénominateur P_n . Les résultats précédents trouvent des applications dans des problèmes d'approximation d'intégrales définies, généralisation [68] de ceux qui se présentent dans la théorie des quadratures mécaniques de Gauss. Dans ces recherches, on est nécessairement amené à considérer, à côté d'une équation aux différences, celle qu'on peut appeler son *adjointe* [119, 3, 198 p. 237 et suiv.]¹ analogue de l'équation adjointe d'une équation différentielle linéaire et qui donne lieu aussi à la notion de multiplicateurs de l'équation.

9. Les recherches précédentes peuvent se poursuivre dans deux directions distinctes. D'une part, les équations linéaires récurrentes donnent, par leurs premiers membres, des opérateurs dont on peut étudier l'algèbre: dans leur calcul, l'élément fondamental est l'opérateur Θ (*état varié* des anciens géomètres) défini par $\Theta f(x) = f(x+1)$. Je consacre à cette algèbre, que Libri et d'autres auteurs avaient traité d'une façon purement formelle, un mémoire étendu [74] et plusieurs notes [28, 29, 85]: en outre de la multiplication, division, divisibilité et décomposition en facteurs de ces opérateurs et de l'extension de la règle de Ruffini des puissances des opérateurs, où jouent un rôle remarquable les fonctions *aleph* de Wronsky, j'étudie les séries de puissances de l'opérateur Θ , leur convergence, leur emploi pour la résolution des équations aux différences, la possibilité d'un prolongement de ces séries analogue au prolongement analytique. Le procédé d'intégration donné par ces séries peut se mettre en rapport [29] avec les résultats rappelés au n° 8 de la présente analyse.

10. Ces recherches, d'un caractère général, permettent de reprendre la question du développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les fonctions p_n d'un système récurrent donné. On suppose maintenant [136, 3] que l'équation récurrente (A), de l'ordre p , ait pour coefficients des polynômes entiers en n du degré m ; une solution p_n de l'équation aura comme fonction génératrice la série $\sum p_n x^n$, intégrale d'une équation différentielle linéaire (B) de l'ordre m

¹ V. aussi E. BORTOLOTTI, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 1898, p. 349—356 et 257—265 du T. 71, p. 46—55 et 74—82 du T. 72.

et dont les coefficients sont des polynômes entiers en x : or, il existe en général une détermination des constantes de l'intégrale de l'équation différentielle pour laquelle la série génératrice converge dans le cercle le plus grand possible. Cela a lieu quand p_n est l'intégrale distinguée de l'équation (A), et on peut la déterminer par une méthode fondée sur l'emploi de la transformation dite de Heine. Si maintenant les coefficients de (A) contiennent un paramètre z au premier degré, on peut développer $\frac{1}{z-x}$ en série de la forme $\sum q_n(z)p_n(x)$, où les q_n vérifient l'équation adjointe de (A): la considération de l'intégrale distinguée permet de déterminer le domaine de convergence uniforme de cette série et par suite la possibilité du développement d'une fonction donnée en série de $p_n(x)$. À ce travail [3], qui met en lumière l'intérêt des équations différentielles comme génératrices de systèmes récurrents, se rattachent des questions d'expression de la valeur d'une fraction continue comme rapport de deux intégrales définies [26], extension de résultats bien connus de Gauss sur le rapport de deux fonctions hypergéométriques.

§ III. Opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies.

a) Partie générale.

11. Le problème dont on a parlé ci-dessus, du développement d'une fonction en série ordonnée suivant les fonctions d'un système donné, se rattache étroitement, comme on le voit sans peine, à la question de l'inversion d'une intégrale définie. J'ai donc été naturellement amené à m'occuper d'équations de la forme

$$(4) \quad \int_{(c)} A(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

où A et f sont des fonctions données, φ est inconnue: c'est à dire de ce qu'on a appelé depuis „équations intégrales de première espèce“. Mais ce problème m'a conduit à envisager le premier membre de (4) comme un opérateur (*fonctionnelle*) appliqué au sujet $\varphi(y)$; l'opération définit une correspondance (ou transformation) fonctionnelle entre le sujet $\varphi(y)$ et le résultat $f(x)$, jouissant essentiellement de la propriété distributive (caractère linéaire). L'ensemble de semblables transformations est extrêmement vaste et il est clair qu'on ne peut obtenir des résultats concrets qu'en spécifiant, soit la fonction $A(x, y)$ — appelée depuis *noyau* (Kern) — soit le chemin d'intégration (c) . La littérature mathématique possédait depuis un siècle un exemple remarquable de ces correspondances dans la relation de Laplace et Abel entre les fonctions génératrices et leurs déterminantes. Il

est clair que des correspondances analogues à (2) peuvent s'exprimer par des intégrales multiples.

12. J'ai considéré pour la première fois une fonctionnelle de la forme (4) dans une note [1] publiée dans ce recueil; j'ai donné ensuite, dans un travail plus étendu [64] et après un rapide aperçu historique, la définition et les propriétés générales de ces opérations considérées dans le domaine complexe; je considère d'abord des noyaux de la forme $\frac{1}{y-x}$ ou $\frac{x}{y}$ et j'obtiens ainsi des opérateurs qui servent à isoler les singularités des fonctions uniformes: ici se présente comme cas particulier une opération déjà considérée par M. Appell et génératrice de ses polynômes [15]. Je passe ensuite au cas d'un noyau rationnel, $A(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$: ici l'expression $\int_{(c)} A(x, y) \varphi(y) dy$ représente, dans les différentes régions du plan séparées par les branches de la courbe que $f(x, y) = 0$ fait correspondre à (c), des fonctions différentes dont on peut donner la liaison par un théorème dont un cas particulier avait été donné par Hermite. Plusieurs remarques sur l'équation (4) et sa résolution pour des formes particulières du noyau terminent ce mémoire. Quand $f(x) = \frac{1}{z-x}$ et le noyau est rationnel et singulier pour les points de $f(x, y) = 0$, l'équation (4) se résout [137] par une somme d'intégrales abéliennes normales de seconde espèce attachées à la riemannienne de $f(x, y) = 0$. L'étude des fonctionnelles $A(\varphi)$ données par le premier membre de (4) est reprise dans un mémoire [2] publié aux „Acta“; il s'agit de reconnaître si l'équation (4) peut être résolue par une expression de forme analogue

$$\varphi(x) = \int_{(r)} A(x, y) f(y) dy.$$

La question se ramène à l'étude des noyaux „qui conservent la dérivation“; cas qui a pris une importance considérable dans la théorie postérieure de la composition selon M. Volterra; ce cas, où le noyau a la forme $\alpha(y-x)$, permet en particulier de retrouver deux formules remarquables dues à Halphen. Enfin, si les singularités du noyau sont données par une équation algébrique, on peut déterminer la nature analytique du résultat $A(\varphi)$ en rapport avec celle du sujet $\varphi(y)$.

b) Opérations spéciales.

13. A côté de ces questions générales, se place l'étude d'opérations ou de transformations fonctionnelles spéciales dont l'utilité est démontrée par l'application à de nombreux problèmes. L'une d'elles, transformation de Heine, lie

$f(x)$ à $\varphi(y)$ par la relation

$$f(x) = \int_{(c)} \frac{\varphi(y) dy}{y-x};$$

Heine l'a appliquée à diverses questions sur les équations différentielles. Or, on peut montrer [8] que cette transformation conserve un sens et maintient ses propriétés caractéristiques, même si $\varphi(y)$ est infinie sur le chemin d'intégration, pourvu qu'elle le soit d'ordre fini. Cette transformation se généralise par celle à laquelle M. Schlesinger a donné le nom d'Euler, et j'ai montré [141, 149 et surtout le mémoire plus étendu 71] que les équations de la classe de Fuchs ont des transformées de la même classe ayant les mêmes points singuliers, ce qui permet d'intégrer par des intégrales définies de nombreux types d'équations non homogènes. Ce problème d'intégration se généralise [71] si l'on prend comme noyau non plus $(x-y)^\alpha$, mais $P^\alpha(x, y)$, où P est un polynôme entier et α une nouvelle variable.

14. Mais parmi ces transformations fonctionnelles, l'une des plus intéressantes et des plus fécondes est, sans contredit, celle de Laplace-Abel. Je m'en suis occupé d'abord [65] en définissant cette transformation E par ses deux propriétés caractéristiques, indépendamment de toute expression analytique: ces propriétés consistent dans la transformation de la multiplication par la variable en la dérivation, et dans la transformation de celle-ci en la multiplication, à part le signe; la forme de l'expression qu'on peut donner à l'opérateur E dépend de la classe fonctionnelle à laquelle appartient le sujet. En particulier, si cette classe est un corps algébrique, il se transforme en une classe de fonctions qui dépendent linéairement d'un nombre fini de transcendentes dont les propriétés sont, pour ainsi dire, une image de celles du corps algébrique. La méthode peut contribuer à une classification des transcendentes, et dans cet ordre d'idées on voit bien, par exemple, la place qu'occupe le logarithme intégral [117] dans une semblable classification, ou aussi les fonctions de Bessel [65]. La théorie s'applique aussi [66, 67] à la résolution de l'équation

$$(5) \quad \sum h_n \varphi(x + a_n) = f(x),$$

d'abord pour le cas des h_n constantes, puis pour celui des h_n rationnelles: dans le § 5 du premier de ces mémoires la théorie de la transformation prélude à celle que M. Borel utilisera plus tard dans la sommation exponentielle: notons, entre autres, la notion de *direction limite* (ibid.) que le polygone de sommabilité de cet éminent géomètre viendra plus tard mettre mieux en valeur. Dans le cas de l'équation (5) à coefficients variables, les difficultés sont naturellement plus

considérables; certaines d'entre elles sont résolues par l'emploi d'une équation linéaire à coefficients transcendants et par une méthode [18] analogue à celle qui sert à la démonstration du premier théorème de M. Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes.

15. Des questions analogues forment l'objet de 12, 116, 117; mais c'est le mémoire 145 qui donne une vue d'ensemble sur ce sujet, en se plaçant au point de vue de l'inversion d'une intégrale définie (équation intégrale de première espèce) à noyau de la forme $f(y-x)$, et qui résout le problème d'intégration d'une équation linéaire d'ordre infini, à coefficient constants et à second membre, ainsi qu'un remarquable problème de moments, ou système d'équations linéaires en nombre infini. Les dérivées d'ordre non entier, déjà considérées par Liouville, Riemann, etc., ainsi que les diverses expressions qu'on peut en donner, se présentent dans cette théorie de la façon la plus naturelle, et l'étude de ces dérivées, fondée directement sur l'ensemble des propriétés caractéristiques [76], conduit aux mêmes expressions. Ces dérivées constituent, par rapport à l'indice, un groupe à un paramètre dont la transformation infinitésimale, au sens de Lie, donne une nouvelle opération fonctionnelle [98] qu'on peut appeler *logarithme fonctionnel*, et qui jouit de propriétés remarquables.

16. Les transformées de Laplace des fonctions rationnelles et algébriques donnent une première classe de transcendentes; mais d'autres classes sont données à leur tour par la transformation de transcendentes: ainsi [19, 20] aux équations différentielles linéaires à coefficients rationnels en e^t correspondent des équations linéaires aux différences à coefficients rationnels, et cette remarque permet d'établir un principe de dualité entre les deux généralisations connues des fonctions hypergéométriques, celle de Pochhammer et celle de M. Goursat. Une expression asymptotique de $\Gamma(x)$ pour $x \rightarrow \infty$ dans le sens imaginaire qui se trouve dans 20 a été attribuée à d'autres auteurs, mais M. Mellin m'en a récemment révoqué la priorité. Aux fonctions hypergéométriques, à leurs généralisations et à plusieurs questions qui s'y rattachent, j'ai dédié un mémoire étendu [154] de caractère didactique, mais inspiré aux idées exposées ci-dessus. Enfin, c'est encore la même transformation qui permet de montrer le lien entre la sommation exponentielle de M. Borel et les développements asymptotiques de Poincaré [44]; d'attribuer aux séries de puissances toujours divergentes un sens concret, par l'intermédiaire des séries de puissances du symbole D de dérivation [97]; enfin, d'étendre aux développements asymptotiques [47] un remarquable théorème d'Hurwitz sur les singularités d'une fonction qui dépend de deux fonctions données.

c) Fonctions déterminantes.

17. Tandis que les recherches qu'on vient de citer considèrent la transformation de Laplace à un point de vue qui appartient au calcul fonctionnel, d'autres, qui appartiennent plus spécialement à la théorie des fonctions, étudient les propriétés des fonctions analytiques définies par les expressions

$$(6) \quad f(x) = \int_a^\infty e^{-tx} \varphi(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_0^c \psi(t) t^{x-1} dt.$$

Ici, φ et ψ peuvent n'être pas analytiques; je démontre [147] que si (6) est convergente pour une valeur x_0 , elle l'est pour toute valeur x dont la partie réelle est plus grande que celle de x_0 ; je détermine ensuite, en plusieurs cas, la position et la nature des singularités de $f(x)$ (pôles, points critiques algébroides ou logarithmiques) d'après l'allure asymptotique de $\varphi(t)$.

18. On peut approfondir davantage l'étude des propriétés de $f(x)$ si $\varphi(t)$ ou $\psi(t)$ sont aussi analytiques: ainsi, si $\psi(t)$ est régulier au point zéro et si l'on en connaît l'étoile de Mittag-Leffler, on peut démontrer [147] que

$$f(x, a) = \int_0^a \psi(t) t^{x-1} dt$$

admet la même étoile comme fonction de a et est méromorphe en x avec les pôles de premier ordre aux points $0, -1, -2, \dots$; et l'on retrouve [7, 172] la double forme du développement d'une telle fonction méromorphe. Si $\psi(t)$ est analytique, on déduit immédiatement de la fonction déterminante les théorèmes connus de Le Roy, Faber etc., et d'autres encore sur les relations entre le caractère des coefficients d'un développement de Taylor et les singularités de la fonction qu'il représente [147, 57]. Enfin, d'autres notes [104, 5, 24, 58] précisent la détermination de l'abscisse de convergence en rapport avec l'allure asymptotique de la fonction génératrice, démontrent que la déterminante d'une déterminante est une fonction simple, c'est à dire qui n'a d'autre singularité qu'une coupure s'étendant à l'infini, et prouvent que des développements de la forme $\sum \frac{c_n}{(x+a_0)(x+a_1)\dots(x+a_n)}$ peuvent jouer le même rôle que les développements asymptotiques en séries de puissances de Poincaré et se présentent de même [24] dans l'intégration d'équations différentielles linéaires.

§ IV. Etude synthétique des opérations linéaires.

19. Les expressions intégrales de la forme (4), les expressions linéaires différentielles, celles aux différences, amènent au concept général d'opérations

fonctionnelles linéaires (ou distributives). Si l'on détermine le champ fonctionnel auquel on applique de semblables opérateurs, on peut en déterminer de nombreuses propriétés d'une façon synthétique et, pour ainsi dire, géométrique, en donnant ainsi naissance à une branche du calcul fonctionnel ayant un caractère qualitatif, tandis qu'on peut dire *quantitatifs* les chapitres de ce même calcul selon les principes connus de Volterra, Arzelà, Hilbert, Hadamard, Tonelli, P. Lévy, etc. Entre les deux points de vue, il y a une différence qui n'est pas sans analogie entre celle qui sépare la théorie des fonctions de variables réelles au sens de Dirichlet, de celle des fonctions analytiques selon Weierstrass.

20. J'ai entrepris, dans l'ordre d'idées synthétique, de nombreuses recherches, qui, à part quelques travaux d'un caractère historique, [158, 159, 169] peuvent se diviser en trois groupes.

Je commence par envisager l'ensemble des séries de puissances comme un espace dont chaque série est un point, et je trace l'esquisse d'une géométrie de cet espace, qui permet d'apporter dans ces recherches un certain degré d'intuition [87, 89]. Les opérations linéaires sont les homographies de cet espace, et on cherche d'en ramener l'étude à celle de la composition d'opérations simples telles que la multiplication, la dérivation et la substitution: dans cette recherche, la permutabilité des opérations joue un rôle essentiel, et c'est l'évaluation de l'écart de la permutabilité d'une opération donnée par rapport à une opération étalon qui m'a amené à la considération de ce que j'ai appelé la dérivée fonctionnelle, qui présente avec la dérivation habituelle une analogie algorithmique réellement surprenante [30, 99]. On en déduit un développement des opérations linéaires soit en série de puissances du symbole D de dérivation [30, 150] (au moyen d'une formule que j'ai appelée formule de D'Alembert généralisée, parcequ'elle avait été rencontrée par ce savant dans un cas particulier, et qui joue, dans notre calcul, un rôle analogue à celui de la formule de Taylor dans le calcul des fonctions), soit en série de puissances de D^{-1} [33]; la théorie générale, développée dans 150 et dans l'ouvrage 198 publié en collaboration avec M. Amaldi, trouve des applications aux équations linéaires différentielles, aux différences et aux substitutions [31, 34, 86] et détermine les opérations au moyen de leurs relations avec leurs dérivées fonctionnelles [38, 75]. Parmi ces applications, notons celles qui regardent les opérations aptes à introduire ou à détruire des singularités dans les fonctions d'une classe donnée et dont l'exemple le plus banal est donné par la division ou multiplication par $x - a$, qui introduit ou fait disparaître un pôle de premier ordre au point $x = a$. J'ai consacré à ce sujet un mémoire étendu [129]: la théorie élémentaire de la divisibilité n'est qu'un premier degré d'une propriété bien plus générale qui se fonde sur des principes

analogues, en met en lumière la véritable essence et s'applique à des classes étendues de singularités. A ce sujet se rapportent aussi les numéros 17, 90, 36, 105, 156, 168.

21. Un deuxième groupe considère plus spécialement nos opérations comme des homographies d'un espace à une infinité (dénombrable) de dimensions. La dégénérescence de ces opérations acquiert un intérêt particulier avec la considération de leurs racines, et ici se place une remarque fondamentale [143], retrouvée beaucoup plus tard par d'autres auteurs, savoir: que tandis que dans un espace à un nombre fini de dimensions une homographie dégénérée a des racines, et projette l'espace sur un espace à un nombre moindre de dimensions, dans l'espace à une infinité de dimensions on peut avoir ou l'une (dégénérescence de première espèce) ou l'autre (dégénérescence de deuxième espèce) de ces propriétés. Dans la dégénérescence de première espèce, les racines des opérations permutable ont des relations remarquables [160] qui permettent d'obtenir, par une méthode synthétique d'une extrême simplicité, la théorie des diviseurs élémentaires [142] et la composition canonique d'une homographie, et les mêmes procédés permettent [144] de retrouver d'autres résultats géométriques.

22. On sait quelle est l'importance, dans la théorie des équations différentielles linéaires, de l'équation *adjointe* d'une équation donnée. Il y a lieu de considérer une équation analogue dans la théorie des équations linéaires aux différences (v. ci-dessus, n° 8) et quant aux opérateurs qui constituent les premiers membres de l'équation et de son adjointe, la relation est celle qui passe entre deux matrices réciproques. La théorie synthétique des opérations linéaires permet de définir l'adjointe d'un opérateur d'une façon générale et d'en déduire les propriétés principales [91, 130].

23. Les travaux énumérés dans le présent § s'occupent des fonctionnelles appliquées aux fonctions analytiques indépendamment de leur représentation par des intégrales définies. Mais dans un troisième groupe de travaux, qui forcément s'enchevêtrent en partie avec ceux des groupes précédents, la théorie synthétique des opérations linéaires est mise en rapport avec celle des équations intégrales. Dans un ancien travail, déjà cité [143], se trouve, dans un cas assez remarquable, le déterminant infini qui joue un si grand rôle, au cas général, dans les travaux de M. Fredholm; on démontre que ce déterminant est une fonction entière du paramètre et on en déduit les éléments qui ont été nommés depuis nombres et fonctions caractéristiques (*Eigenwerte* et *Eigenfunktionen*). Dans le même ordre d'idées, mais pour des cas bien plus généraux, les n°s 77 et 78 se proposent d'établir, avec un minimum d'hypothèses, la résolution par rapport à φ de l'équation fonctionnelle $\varphi - k A(\varphi) = f$, A étant une opération

linéaire, et de distinguer par un *a priori* synthétique, les trois cas qu'on peut dire de Volterra, de Fredholm et du spectre continu de Hilbert: on y indique aussi de quelle façon la théorie de la permutabilité, si amplement développée par M. Volterra, peut être présentée indépendamment de la représentation intégrale. Cette indépendance n'est pas superflue; le n° 78 montre en effet que des opérations intégrales, ayant comme noyau soit la série uniformément convergente $\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_n(x)\beta_n(y)}{k_n}$, soit la limite en moyenne d'une suite de sommes $\sum_1^m \frac{\alpha_n(x)\beta_n(y)}{k_n}$ ($m = 1, 2, \dots$), peuvent former le sous-groupe d'un groupe d'opérations linéaires qui, tout en jouissant de propriétés analogues, ne sont pas en général des opérations intégrales. Enfin le n° 115 traite de la structure de l'espace caractéristique correspondant à une racine multiple du déterminant de Fredholm, qui donne lieu à une application de l'algèbre associative générale où se présentent d'une façon spontanée les éléments qu'on nomme, dans cette algèbre, *idempotents* et *nilpotents*.

24. Si le noyau d'une opération intégrale se prend sous la forme $\sum \frac{\alpha_n(x)x^n}{y^{n+1}}$, où les $\alpha_n(x)$ sont des séries de puissances, on obtient les fonctions caractéristiques de la manière la plus simple [109] et le développement classique de Fredholm s'y présente d'une façon tout à fait spontanée: parmi de nombreuses applications auxquelles peut donner lieu cette forme de noyau, notons les problèmes d'itération analytique, en particulier la résolution de l'équation de Schröder.

§ V. Problèmes d'itération.

25. Le dernier travail qu'on vient de citer représente, pour ainsi dire, la transition à des recherches sur l'itération; et une note [110] développe précisément l'application dont on vient de parler. Une autre note s'occupe de l'itération dans le domaine réel [108] dans le but de contribuer à la résolution d'équations fonctionnelles du type de Babbage; d'autres abordent, dans des cas particuliers, le problème de l'itération *en grand* des fonctions rationnelles (qui recevait peu après des développements si importants dans les travaux de MM. Julia, Fatou, Ritt) en approfondissant l'étude de l'itération de la fonction quadratique [111, 161, 51, 52], et celle d'un polynôme entier [113, 54, 55] dont on détermine l'ensemble des éléments invariants. L'itération complète de $x^2 - 2$, c'est à dire étendue à des indices non entiers, conduit à la remarque curieuse [53] que les polynômes V_n bien connus de Serret, qui résolvent l'équation $V_n - xV_{n-1} + V_{n-2} = 0$, sont les itérées de $x^2 - 2$ pour les valeurs r de l'indice, où r est le logarithme

de n dans la base 2. Enfin, le n° 162 contient un assez large résumé de résultats sur l'itération.

§ VI. Travaux divers.

26. En dehors des groupes qu'on vient d'énumérer, d'autres travaux se rapportent à des sujets variés d'analyse. Le caractère arithmétique des coefficients des séries de puissances qui représentent des fonctions algébriques, exponentielles ou logarithmiques est bien connu, d'après des théorèmes donnés par Eisenstein et par Heine; des théorèmes analogues peuvent s'énoncer [6, 148] pour les coefficients des séries de puissances qui vérifient des équations linéaires différentielles ou aux différences, à coefficients rationnels. La note [4] donne les conditions sous lesquelles la série d'Abel

$$\varphi(x + \alpha) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}}{n!} \frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n}$$

est applicable à une fonction analytique. — Les théorèmes d'Hermitte sur les coupures des fonctions représentées par des intégrales définies sont généralisés dans 14, 16, 124. — La note 35 étend à des déterminants plus généraux la propriété du wronskien. — Les remarquables théorèmes de M. Hadamard et d'Hurwitz sur les singularités de la fonction dont les coefficients du développement de Taylor sont formés avec les coefficients des développements de deux fonctions données ont aussi formé objet d'étude: une nouvelle démonstration du théorème d'Hadamard [92] me semble en mettre mieux en lumière l'essence et permet de le généraliser, et le théorème d'Hurwitz [39, 46] s'applique non seulement aux singularités polaires, mais aussi à d'autres beaucoup plus générales et s'étend aussi [47] aux développements asymptotiques. — Un ancien essai [133] étend à des classes de fonctions entières, les relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique, question reprise plus tard par M. Maillet. — Pour l'étude des fonctions doublement périodiques, on peut prendre comme point de départ celle des fonctions à multiplicateur [151, 134, 1], méthode qui présente quelques avantages et conduit à des formules intéressantes: elle a été reprise depuis par M. Rausenberger. — La formule de M. Mittag-Leffler, qui permet d'isoler les singularités d'une fonction méromorphe, contient comme terme additif une fonction entière qu'il n'est pas toujours aisé de déterminer dans les applications; il n'est donc pas sans intérêt d'indiquer des cas où la détermination en est possible [43] et la question se met en rapport avec la sommation d'une série divergente. — Dans la théorie des quadratures mécaniques et dans des questions analogues, se présente la question d'approcher une fonction donnée par une

fonction rationnelle en sorte que la différence soit du degré maximum en x ou en $\frac{1}{x}$. A parité de calcul, on peut obtenir une approximation plus grande si l'on approche la fonction par une expression quadratique $\frac{P+\sqrt{Q}}{R}$, où P , Q , R sont des polynômes entiers [122, 139]. — La note 50 montre que la formule intégrale de Cauchy, qui donne la valeur d'une fonction $\varphi(x)$ synectique dans une aire quand on en connaît les valeurs au contour de l'aire, s'applique encore si à ces valeurs on substitue une fonction $p(s) + iq(s)$ des points de l'aire, où $p(s)$, $iq(s)$ sont les limites auxquelles convergent en moyenne la partie réelle et l'imaginaire de $\varphi(x)$ quand x tend au contour. — Un problème d'interpolation [11] conduit à la résolution d'un système infini d'équations linéaires dont les coefficients sont les puissances des nombres naturels. — Enfin, l'examen critique [61], paru en 1884, de la façon dont on peut procéder pour comparer l'allure de fonctions qui tendent à l'infini: sujet qui a donné lieu depuis aux belles recherches de M. Borel sur l'échelle des ordres d'infinitude; la conclusion à laquelle j'arrive est que, quelles que soient les bases d'un calcul de ces ordres qui doive satisfaire à des postulats convenables, on ne pourra jamais y assujétir la totalité des fonctions, mais seulement des classes plus ou moins étendues.

27. Je mentionne encore une recherche de physique pour la détermination des constantes de capillarité pour divers liquides [170, 171]; quelques notes sur les surfaces minima [131, 180]; une exposition des principes pour l'introduction des fonctions analytiques selon les idées de Weierstrass [152]; des notes sur l'arithmétique et l'algèbre [73, 81, 84, 94, 155, 166, 173]; sur le calcul des probabilités [178, 181]; les commémorations de Weierstrass, Hermite, Beltrami, Dini, Arzelà et autres, quelques recensions [174, 163, 165] et des questions pédagogiques [182, 183, 184].

Bibliographie.*Acta mathematica.* Stockholm.

- [1] Note sur une intégrale définie (T. 7, 1885.)
- [2] Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies (T. 10, 1887).
- [3] Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'équations différentielles (T. 16, 1892).
- [4] Sur une série d'Abel (T. 28, 1903).
- [5] Quelques remarques sur les fonctions déterminantes (T. 36, 1912).

Rendiconti del Circolo Matematico. Palermo.

- [6] Sul carattere aritmetico dei coefficienti delle serie che soddisfano ad equazioni differenziali o alle differenze (T. 2, 1888).
- [7] Una trasformazione di serie (T. 2, 1888).
- [8] Sulla trasformazione di Heine (T. 4, 1890).
- [9] Sullo spirito aritmetico nella matematica — traduzione di un opuscolo di F. Klein (T. 10, 1896).
- [10] Sulle serie procedenti secondo le derivate successive di una funzione (T. 11, 1897).
- [11] Sopra un problema d'interpolazione (T. 14, 1899).
- [12] Risoluzione di una classe di equazioni funzionali (T. 18, 1904).
- [13] Sulle serie di fattoriali generalizzate (T. 37, 1913).

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Roma.

- [14] Sopra una formula di Hermite (1885).
- [15] Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell (1886).
- [16] Costruzioni di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari (1886).
- [17] Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche (1887).
- [18] Sopra certi integrali definiti (1888).
- [19] Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, nota I (1888).
- [20] Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, nota II (1888).
- [21] I sistemi ricorrenti di primo ordine e di secondo grado (1889).
- [22] Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di primo ordine e di secondo grado (1889).
- [23] Alcuni teoremi sulle frazioni continue (1889).
- [24] Su alcuni integrali particolari delle equazioni differenziali lineari non omogenee (1890).
- [25] Un sistema d'integrali ellittici considerati come funzioni dell'invariante assoluto (1890).
- [26] Un teorema sulle frazioni continue (1891).
- [27] Sulle forme differenziali lineari (1892).
- [28] Sulle equazioni alle differenze, nota I [1894].
- [29] Sulle equazioni alle differenze, nota II (1894).
- [30] Sulle operazioni funzionali distributive (1895).
- [31] Sulle soluzioni coniugate nelle equazioni differenziali o alle differenze (1895).
- [32] Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni (1896).

- [33] Operazioni distributive: l'integrazione successiva (1896).
- [34] Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee (1896).
- [35] Sulla generalizzazione del determinante wronskiano (1897).
- [36] Di un' estensione del concetto di divisibilità per un polinomio (1898).
- [37] Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze (1898).
- [38] Di un' equazione funzionale simbolica e di alcuni sue conseguenze (1899).
- [39] Sulle singularità di una funzione composta con due funzioni date (1899).
- [40] Sulle serie di fattoriali, nota I (1902).
- [41] Sulle serie di fattoriali, nota II (1902).
- [42] Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali (1903).
- [43] Sulle funzioni meromorfe (1903).
- [44] Sugli sviluppi asintotici e le serie sommabili (1904).
- [45] Sulle equazioni funzionali lineari (1906).
- [46] Sulle singularità di una funzione che dipende da due funzioni date (1906).
- [47] Sopra l'estensione agli sviluppi asintotici di un teorema del sig. Hurwitz (1907).
- [48] Sopra alcune omografie dello spazio funzionale (1911).
- [49] Sulle operazioni lineari, e sulla teoria delle equazioni integrali (1912).
- [50] Un'applicazione della convergenza in media (1913).
- [51] Sulle radici reali delle equazioni iterate di un'equazione quadratica (1918).
- [52] Sull'iterazione delle funzione $x^2 - a$ (1918).
- [53] L'iterazione completa di $x^2 - 2$ (1920).
- [54] Sulla funzione iterata di una razionale intera, nota I (1920).
- [55] Sulla funzione iterata di una razionale intera, nota II (1920).
- [56] Sopra alcune equazioni funzionali (1920).
- [57] Sulle funzioni trascendenti semplici (1924).
- [58] Ancora sulle funzioni trascendenti semplici (1924).
- [59] Su una separazione di singularità in una funzione analitica (1924).

Memorie della R. Accademia delle Scienze. Bologna.

- [60] Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche (S. IV, T. 3, 1882).
- [61] Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni (S. IV, T. 5, 1884).
- [62] Sui gruppi lineari di funzioni (S. IV, T. 6, 1884).
- [63] Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni (S. IV, T. 6, 1885).
- [64] Studi sopra alcune operazioni funzionali (S. IV, T. 7, 1886).
- [65] Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni (S. IV, T. 8, 1887).
- [66] Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\sum h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ a coefficienti costanti (S. IV, T. 9, 1888).
- [67] Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\sum h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ a coefficienti razionali (S. IV, T. 9, 1888).
- [68] Su alcune forme approssimate per la rappresentazione di funzioni (S. IV, T. 10, 1889).
- [69] Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche (S. IV, T. 10, 1890).
- [70] Una nuova estensione delle funzioni sferiche (S. V, T. 1, 1891).
- [71] Contributo all'integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti (S. V, T. 2, 1892).
- [72] Sull' interpolazione (S. V, T. 3, 1893).
- [73] Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue (S. V, T. 4, 1894).
- [74] L'Algebra delle forme lineari alle differenze (S. V, T. 5, 1895).
- [75] Sopra alcune equazioni simboliche (S. V, T. 5, 1895).
- [76] Sulle derivate ad indice qualunque (S. V, T. 9, 1902).

- [77] Sulle equazioni funzionali lineari (S. VI, T. III, 1906).
- [78] Appunti di Calcolo funzionale (S. VI, T. 8, 1911).
- [79] Alcune osservazioni sopra i sistemi di funzioni associate e sopra un gruppo di operazioni lineari (S. VI, T. 9, 1912).

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze. Bologna.

- [80] Un'applicazione delle funzioni sferiche (1883).
- [81] Sui prodotti infiniti per funzioni analitiche (1883).
- [82] Sulla risoluzione dell'equazione $\sum h, \varphi(x + \alpha_n) = f(x)$ a coefficienti costanti (1887).
- [83] Sulla generalizzazione delle funzioni sferiche (1891).
- [84] Applicazione alla geometria di un'osservazione di aritmetica (1893).
- [85] L'Algebra delle forme lineari alle differenze (1894).
- [86] Sulle equazioni differenziali lineari non omogenee (1896).
- [87] Cenno sulla geometria dello spazio funzionale (1897).
- [88] Commemorazione di C. Weierstrass (1897).
- [89] Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni (1898).
- [90] Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche (1898).
- [91] Sull'operazione aggiunta (1898).
- [92] A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard (1899).
- [93] Commemorazioni di E. Beltrami (1900).
- [94] Sulla continuità delle funzioni (1900).
- [95] Sulla composizione di una forma differenziale lineare in un prodotto di operazioni (1900).
- [96] Commemorazione di Ch. Hermite (1901).
- [97] La trasformazione di Laplace e le serie divergenti (1901).
- [98] Di una nuova operazioni funzionale e di qualche sua applicazione (1903).
- [99] Sopra un'estensione della formula di Taylor nel calcolo delle operazioni (1903).
- [100] Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche (1904).
- [101] Studio sopra un teorema di Poincaré relativo alle equazioni ricorrenti (1905).
- [102] Sull'inversione analitica degli integrali definiti (1906).
- [103] Commemorazione di F. Ruffini (1908).
- [104] Alcune osservazioni sulle funzioni determinanti (1909).
- [105] Sul concetto di divisibilità in generale (1910).
- [106] Commemorazione di C. Arzelà (1912).
- [107] Alcune osservazioni alla Memoria: „Appunti di Calcolo funzionale“ (1913).
- [108] Alcune osservazioni sull'iterata di una funzioni data (1914).
- [109] Sopra alcuni nuclei analitici (1916).
- [110] Appunti su alcuni problemi d'iterazione (1917).
- [111] Sulle catene di radicali quadratici (1918).
- [112] Un teorema sull'iterazione della funzione quadratica (1919).
- [113] Sull'iterata di un polinomio razionale intero (1920).
- [114] Commemorazione di A. Razzaboni (1920).
- [115] Struttura di uno spazio invariante nella teoria delle operazioni lineari (1922).
- [116] Sulle operazioni lineari permutabili colla derivazione (1922).
- [117] Sulla generalizzazione di alcune trascendenti classiche (1924).

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris.

- [118] Sur une généralisation des fonctions eulériennes (23 janvier 1888).
- [119] Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes (17 décembre 1888).

- [120] Quelques applications des fractions continues (29 avril 1889).
 [121] Sur les séries de puissances toujours divergentes (13 février 1899).
 [122] Sur l'approximation des fonctions par des irrationnelles quadratiques (9 novembre 1903).
 [123] Sur une équation intégrale dans le domaine complexe (6 juin 1921).

Öfversigt af k. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm.

- [124] Une formule dans la théorie des fonctions (n° 6, 1886).

Annali di Matematica pura ed applicata. Milan.

- [125] Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi. Memoria prima (S. II, T. 12, 1883).
 [126] Id. Memoria seconda (S. II, T. 12, 1884).
 [127] Sulla generalizzazione delle frazioni continue (S. II, T. 19, 1891).
 [128] Sulle serie di potenze (S. II, T. 21, 1893).
 [129] Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica (S. III, T. 4, 1900).
 [130] Sull'operazione aggiunta di Lagrange (S. III, T. 21, 1913).

Rendiconti del R. Istituto Lombardo. Milan.

- [131] Sulle superficie d'area minima (1876).
 [132] Sulle equazioni algebrico differenziali (1877).
 [133] Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente (1878).
 [134] Funzioni monodrome avente un'equazione caratteristica (1879).
 [135] Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche (1882).
 [136] Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni alle differenze, e vice versa (1886).
 [137] Sull'inversione degli integrali definiti (1887).
 [138] Di un'estensione dell'algoritmo delle frazioni continue (1889).
 [139] Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni mediante irrazionali quadratici (1890).
 [140] Sopra certe superficie razionali che s'incontrano in questioni d'analisi (1891).
 [141] Sopra una trasformazione nelle equazioni differenziali lineari (1892).
 [142] Le operazioni distributive e le omografie (1896).
 [143] Appunti di calcolo funzionale distributivo (1897).
 [144] Sui fasci di omografie (1903).

Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL. Rome.

- [145] Sull'inversione degli integrali definiti (S. III, T. 15, 1907).

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Paris.

- [146] Sur les fonctions continues algébriques (S. III, T. 6, 1889).
 [147] Sur les fonctions déterminantes (S. III, T. 22, 1905).

Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin.

- [148] Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires (T. 103, 1888).
 [149] Sur la transformée d'Euler (T. 119, 1898).

Mathematische Annalen. Leipzig.

- [150] Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif (T. 49, 1897).

Giornale di Matematiche. Naples.

- [151] Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome (T. 17, 1879).
- [152] Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi di C. Weierstrass (T. 18, 1880).
- [153] Di una generalizzazione della derivazione nelle funzione analitiche (T. 22, 1883).
- [154] Delle funzioni ipergeometriche, e di varie questioni ad esse attinenti (T. 32, 1894).
- [155] Alcune formule di analisi combinatoria (T. 40, 1902).
- [156] Sopra un'estensione del concetto di divisibilità (T. 48, 1911).
- [157] Lo spazio funzionale e le sue omografie (T. 50, 1912).

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig.

- [158] Funktionaloperationen und Gleichungen (T. II 1, Heft 6, 1906).

Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Paris-Leipzig.

- [159] Équations et opérations fonctionnelles (T. II, 1912).

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze. Turin.

- [160] Sulle operazioni distributive commutabili con una operazione data (1895).
- [161] Sulle catene di radicali quadratici (1918).

Rivista mathematica hispano-americana. Madrid.

- [162] Sobre la itéracion analítica (1920).

Bollettino dell'Unione Matematica italiana. Bologna.

- [163] Recensione dell'opera „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie“ di Edm. Landau (1922).
- [164] Sulle operazion lineari permutabili colla derivazione (1922).
- [165] Recensione dell'opera „Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen“ di H. W. E. Jung (1924).

Periodico di Matematica e Bollettino della Associazione Matthesis.

- [166] Sulle teoria dei limiti (1908).
- [167] Commemorazione di U. Dini (1919).
- [168] Un'interpretazione geometrica ed un'estensione della divisibilità (1921).

Bibliotheca Mathematica. Stockholm.

- [169] Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives (1899).

Il nuovo Cimento. Pise.

- [170] Sulle superficie di capillarità (1874).
- [171] Sulle costanti di capillarità (1875).

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas. Coimbre.

- [172] Sur les séries de fonctions (1893).

Rivista di Matematica. Turin.

- [173] Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica (1893).

Bollettino di Bibliografia matematica. Gènes.

- [174] Recensione dell'opera: „Theorie der linearen Differenzgleichungen“ di Wallenberg e Guldberg (1912).

Mathematical papers read at the International mathematical Congress. Chicago.

- [175] Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions (1896).

Atti del Congresso internazionale di Matematiche. Roma.

- [176] Spigolature nel campo delle funzioni determinanti (1908).

Atti della Società italiana per il progresso delle Scienze. Trieste.

- [177] Spigolature nel campo del Calcolo funzionale (1921).

Revue „Scientia“. Milan.

- [178] Il Calcolo delle probabilità e l'intuizione (1916).

Seminario matematico dell'Università. Rome.

- [179] Commemorazione di Eugenio Elia Levi (1918).

Programma del R. Liceo Foscolo. Pavia.

- [180] Sulle superficie d'area minima (1876).

Annuario della R. Università. Bologne.

- [181] La Matematica e il futuro, discorso inaugurale (1915).

Commissione internazionale per l'insegnamento matematico. Gènes.

- [182] Sugli studi per la laurea in matematica e sulla Sezione delle Scuole di magistero (1911).

Rivista pedagogica. Rome.

- [183] La crisi della Scuola media (1918).

- [184] Sulla preparazione degli insegnanti (1921).

Chez l'éditeur V. Hoepli. Milan.

- [185] Manuale d'Algebra elementare (13. ediz., 1920).

- [186] Manuale di Geometria pura elementare (8. ed., 1918).

- [187] Manuale di Geometria metrica e trigonometria (9. ed., 1922).

- [188] Esercizi sull'Algebra elementare (3. ed., 1921).

- [189] Esercizi di Geometria elementare (2. ed., 1915).

- [190] Manuale di Algebra complementare: analisi algebrica (4. ed., 1920).

- [191] Manuale di Algebra complementare: teoria delle equazioni (4. edizione, 1920).

Chez l'éditeur N. Zanichelli. Bologne.

- [192] Lezioni di Algebra elementare (2. ed., 1921).

- [193] Gli elementi dell'Aritmetica (17. ed., 1924).

- [194] Lezioni di Algebra complementare, T. I: Analisi algebrica (3. ed., 1924).

- [195] Lezioni di Algebra complementare, T. II: Teoria delle equazioni (2. ed., 1921)

- [196] Lezione di Calcolo infinitesimale (2. ed., 1919).

- [187] Gli elementi delle teoria delle funzioni analitiche, T. 1 (1922).

- [198] Le operazioni distributive (in collaborazione con V. Amaldi (1901).