

ABSTRAKTE FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN.

VON

S. BOCHNER

in MÜNCHEN.

Im folgenden betrachten wir Verallgemeinerungen der Bohrschen fastperiodischen Funktionen. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass wir sowohl für die abhängige wie für die unabhängige Veränderliche an Stelle von Zahlen Elemente allgemeinerer Mannigfaltigkeiten in Betracht ziehen werden. Aus der Untersuchung dieser »abstrakten« fastperiodischen Funktionen werden sich bemerkenswerte Rückschlüsse auf die Struktur der »konkreten« Bohrschen, Stepanoffschen und Muckenhouptschen fastperiodischen Funktionen ergeben, und insbesondere wird die Beziehung zwischen den Verschiebungseigenschaften und den Schwingungseigenschaften an Durchsichtigkeit gewinnen.

Inhaltsverzeichnis.

- § 1. Definition der abstrakten fastperiodischen Funktionen.
 - § 2. Normalfunktionen.
 - § 3. Majorisierbare Klassen. Überfunktionen.
 - § 4. Abbildungen.
 - § 5. Integration.
 - § 6. Fourierreihen. Der Approximationssatz.
 - § 7. Approximation majorisierbarer Mengen. Linear unabhängige Exponenten.
 - § 8. Die Parsevalsche Gleichung.
 - § 9. Die Funktionen von Muckenhoupt und Stepanoff.
- Zitierte Literatur.

I. Die Verschiebungseigenschaften.

§ 1. Definition der abstrakten fastperiodischen Funktionen.

1.1 Als unabhängige Veränderliche nehmen wir die Elemente einer Menge E mit folgenden Eigenschaften.

Zu je zwei Elementen x, y aus E gibt es in E eine Summe $x + y$ mit den Gruppeneigenschaften:

- 1) $x + y = y + x$
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 3) es existiert ein Element »0«, so dass $x + 0 = 0 + x = x$
- 4) zu jedem x gibt es ein Element $-x$, so dass $x + (-x) = 0$.

Bekanntlich gilt dann folgendes:

- a) das Nullelement ist eindeutig
- b) $-(-x) = x$
- c) aus $x + y = x + z$ folgt $y = z$.

Jedem Element x aus E sei weiterhin eine endliche reelle Zahl $|x|$, der *Betrag* von x , zugeordnet, gemäss den Vorschriften:

$$|0| = 0, \quad |x| > 0 \text{ für } x \neq 0$$

$$|-x| = |x|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Kraft dessen ist der Raum metrisch, wenn man als Entfernung der »Punkte« x, y die Zahl $|x - y| = |y - x|$ definiert. Vermöge dieser Entfernungsdefinition heisst offenbar eine Folge $\{x_n\}$ konvergent, falls

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = 0,$$

und sie heisst gegen x konvergent, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0.$$

Wir verlangen noch, dass die folgende *Kompaktheitseigenschaft* erfüllt ist: jede beschränkte unendliche Punktmenge P besitzt einen Häufungspunkt, d. h. einen Punkt aus E , in dessen beliebig kleiner l -Umgebung ein von ihm verschiedener

Punkt aus P gelegen ist. Hierbei verstehen wir unter einer l -Umgebung [$l > 0$] eines Punktes t aus E die »Sphäre«

$$|x - t| < l.$$

Aus dieser Kompaktheit folgt insbesondere, dass E *vollständig* ist, d. h. dass zu jeder konvergenten Folge $\{x_n\}$ ein Element aus E existiert, gegen welches sie konvergiert.

1.2 Eine Punktmenge P heisst *relativ dicht* in E , falls es ein $l > 0$ gibt, derart dass jeder Punkt von E in der l -Umgebung eines Punktes von P gelegen ist.

Falls E die reelle Achse ist, so ist dies der Bohrsche Begriff »relativ dicht«.

1.3 Als abhängige Veränderliche nehmen wir die Elemente eines Raumes H , für welchen wir dieselben Eigenschaften wie für den Raum E fordern, mit Ausnahme der Kompaktheitseigenschaft, welche wir durch die schwächere Forderung der Vollständigkeit ersetzen. Die Elemente von H werden wir mit ξ, η, ζ, \dots bezeichnen.

1.4 Jede im folgenden vorkommende Funktion $\xi = f(x)$ ist in der Regel im ganzen Raum E definiert. Den Begriff der (gleichmässigen) Stetigkeit fassen wir wie üblich. Jede in einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge von E (etwa in einer abgeschlossenen Umgebung $|x| \leq l$) stetige Funktion ist in dieser Punktmenge beschränkt und gleichmässig stetig.

Ein Element t nennen wir ein zu ε gehöriges Verschiebungselement von $f(x)$, falls für alle x

$$|f(x + t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Definition. Eine stetige Funktion $f(x)$ heisst *fastperiodisch*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Verschiebungselemente $t = t(\varepsilon)$ relativ dicht ist.

1.5 Jede fastperiodische Funktion $f(x)$ ist in E beschränkt und gleichmässig stetig, vgl. z. B. Bohr [1], S. 29. Wir beweisen etwa die gleichmässige Stetigkeit. Gegeben sei ein $\varepsilon > 0$. Wir bestimmen ein $l > 0$ derart, dass jedes Element x' aus E geschrieben werden kann

$$x' = y' + t,$$

wobei t ein $t\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ und $|y'| < l$ ist. Zu diesem l bestimmen wir ein $0 < \delta < l$, derart dass für je zwei Elemente y', y'' der Punktmenge $|y| \leq 2l$

$$|f(y'') - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{sofern nur} \quad |y'' - y'| < \delta.$$

Wenn nun zwei Elemente x', x'' gegeben sind, für welche

$$(1.52) \quad |x' - x''| < \delta,$$

so setze man, für dasselbe t wie in (1.51),

$$x'' = y'' + t.$$

Es ist $|x' - x''| = |y' - y''|$; wegen $|y'| < l$ und (1.52) ist also $|y''| < 2l$. Also gilt

$$(1.53) \quad |f(y'') - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun ist aber

$$(1.54) \quad |f(y' + t) - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(y'' + t) - f(y'')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

und daher

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Womit bewiesen ist, dass $f(x)$ gleichmässig stetig ist.

1.6 Für Bohrsche Funktionen gilt folgendes. Wenn $f(x)$ fastperiodisch ist, so sind es auch die Funktionen $cf(x)$ (c ist eine Zahl), $\overline{f(x)}$, $f(x)^2$ und, falls $|f(x)| \geq g > 0$, auch $f(x)^{-1}$. In dieser Form lassen sich die Behauptungen nicht auf unsere Funktionen übertragen, weil für die Elemente ξ aus H die Bildungen $c\xi$, $\bar{\xi}$, ξ^2 , ξ^{-1} nicht postuliert sind. Aber man bedenke, dass für Bohrsche Funktionen die eben genannten Behauptungen in der folgenden Behauptung enthalten sind. Man betrachte in der kartesischen (u, v) -Ebene den Wertevorrat der Funktion $f(x) = u(x) + iv(x)$. Auf diesem Wertevorrat sei eine gleichmässig stetige Funktion $\varphi(u, v) \equiv \varphi(w)$ gegeben. Dann ist die Funktion $g(x) = \varphi(f(x)) \equiv \varphi(u(x), v(x))$ wiederum fastperiodisch. Diese Formulierung lässt sich auf unseren Fall folgendermassen verallgemeinern.

Man betrachte den Wertevorrat der fastperiodischen Funktion $\xi = f(x)$ im H -Raume. Auf dem Wertevorrat sei eine gleichmässig stetige Funktion $\xi^ = \varphi(\xi)$ definiert, deren Werte ξ^* in einem Raume II^* gelegen sind, welcher allen über II gemachten Voraussetzungen genügt. Dann ist die Funktion*

$$\xi^* = \varphi(f(x))$$

wiederum fastperiodisch.

Denn offenbar ist die Funktion $\varphi(f(x))$ als gleichmässig stetige Funktion einer gleichmässig stetigen Funktion wiederum gleichmässig stetig. Zu $\varepsilon > 0$

bestimme man ein $\delta > 0$, so dass für zwei Werte ξ_1, ξ_2 des Wertevorrats von $f(x)$ aus

$$|\xi_1 - \xi_2| < \delta$$

folgt

$$|\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| \leq \varepsilon.$$

Ist t ein $t(\delta)$ der Funktion $f(x)$, so ist für alle x

$$|f(t+x) - f(x)| < \delta$$

und daher

$$|\varphi(f(t+x)) - \varphi(f(x))| \leq \varepsilon,$$

und demnach ist t ein $t(\varepsilon)$ der Funktion $\varphi(f(x))$. Also sind die $t(\varepsilon)$ der letzteren Funktion relativ dicht.

1.7 Ebenso wie bei Bohr [1], S. 33 beweist man:

Falls eine Folge von fastperiodischen Funktionen gleichmäßig in E konvergiert, so ist auch die Grenzfunktion fastperiodisch.

§ 2. Normalfunktionen.

Nummehr kommt der etwas schwierigere Satz an die Reihe, dass die Summe zweier fastperiodischer Funktionen eine ebensolche Funktion ist. Um ihn zu beweisen, werden wir die fastperiodischen Funktionen durch Normalitätseigenschaften charakterisieren, vgl. Bochner [1], § 5, Favard [1], § 2, Besicovitch [1], S. 10.

2.1 **Definition.** Eine stetige Funktion $f(x)$ heisst eine Normalfunktion, falls jede Folge von Elementen $\{h_n\}$ aus E eine Teilfolge $\{k_n\}$ enthält, für welche die Funktionenfolge $\{f(x+k_n)\}$ gleichmäßig in E konvergiert.

2.2 **Hilfssatz.** Gegeben sei eine fastperiodische Funktion $f(x)$ und eine Elementefolge $\{h_i\}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Teilfolge $\{h_{n_i}\}$, derart dass der Betrag der Differenz je zweier Funktionen $f(x+h_{n_i})$ kleiner als ε ist.

Zum Beweis schreiben wir jedes h_i in der Gestalt

$$h_i = t_i + r_i,$$

wobei t_i ein $t\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ und $|r_i| < l$ ist [l ist von i unabhängig]. Es sei r ein Häufungspunkt der Menge r_i . Man betrachte ein $\delta > 0$, derart dass

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sofern nur

$$|x'' - x'| < 2\delta.$$

Dann genügen diejenigen h_i , für welche $|r_i - r| < \delta$, unserm Hilfssatz. Denn es seien h_p, h_q zwei solche Werte. Es ist

$$\begin{aligned} \text{Ob. Gr. } |f(x + h_p) - f(x + h_q)| &= \text{Ob. Gr. } |f(x + t_p - t_q + r_p - r_q) - f(x)| \\ &\leq \text{Ob. Gr. } |f(x + t_p - t_q + r_p - r_q) - f(x + r_p - r_q)| + \text{Ob. Gr. } |f(x + r_p - r_q) - f(x)|; \end{aligned}$$

jeder der zwei letzten Terme ist kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, da $t_p - t_q$ ein zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehöriges Verschiebungselement und $|r_p - r_q| < 2\delta$ ist. Also ist

$$|f(x + h_p) - f(x + h_q)| < \varepsilon.$$

Auf Grund dieses Hilfssatzes findet man sehr leicht durch Anwendung des Diagonalverfahrens, wie bei Besicovitch [1], S. 11:

Jede fastperiodische Funktion $f(x)$ ist normal.

Es besteht aber auch die Umkehrung:

Jede normale Funktion $f(x)$ ist fastperiodisch.

Denn angenommen, dass $f(x)$ nicht fastperiodisch ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ für welches die $t(\varepsilon)$ von $f(x)$ nicht relativ dicht sind. Man nehme ein beliebiges Element h_1 und eine Zahl $l_2 > |h_1|$. Es existiert ein Element h_2 , in dessen l_2 -Umgebung kein $t(\varepsilon)$ vorkommt. Zu dieser Umgebung gehört $h_2 - h_1$; also ist dieses Element kein $t(\varepsilon)$. Nunmehr bestimme man eine Zahl $l_3 > (|h_1| + |h_2|)$ und ein Element h_3 , dessen l_3 -Umgebung kein $t(\varepsilon)$ enthält. Die Elemente $h_3 - h_1, h_3 - h_2$ sind dann keine $t(\varepsilon)$. So fortfahrend bestimme man Elemente h_4, h_5, \dots in der Weise, dass kein Element $h_p - h_q$ ein $t(\varepsilon)$ ist. Dann ist

$$\text{Ob. Gr. } |f(x + h_p) - f(x + h_q)| = \text{Ob. Gr. } |f(x + h_p - h_q) - f(x)| > \varepsilon.$$

Die Folge $\{f(x + h_n)\}$ enthält demnach keine gleichmässig konvergierende Teilfolge, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f(x)$ normal ist.

2.3 Man findet leicht, dass die Summe zweier Normalfunktionen wiederum normal ist. Also haben wir den Satz:

Die Summe zweier fastperiodischer Funktionen ist wiederum fastperiodisch.

Herr Bohr folgerte diesen Summensatz aus dem schärferen Satz:

Zwei beliebige fastperiodische Funktionen besitzen für jedes $\varepsilon > 0$ relativ dichte gemeinsame Verschiebungselemente.

Wir wollen umgekehrt diesen schärferen Satz auf den schwächeren Summensatz zurückführen, durch Heranziehung der Verschiebungsfunktionen, vgl. Bochner [1], § 5 und Bochner [2], § 8.

2.4 Es sei $f(x)$ eine fastperiodische Funktion. Unter der *Verschiebungsfunktion* $v_f(t)$ von $f(x)$ verstehen wir die für alle t aus E definierte Funktion

$$v_f(t) = \text{Ob. Gr. } \left| f(x+t) - f(x) \right|.$$

$x \in E$

Offenbar sind für jedes $\varepsilon > 0$ die Verschiebungselemente $t(\varepsilon)$ von $f(x)$ diejenigen Werte t , für welche $v_f(t) \leq \varepsilon$. Also liegen für jedes ε diejenigen t , für welche $v_f(t) \leq \varepsilon$, überall dicht.

Die Funktion $v(t) \equiv v_f(t)$, deren Wertebereich II aus den reellen Zahlen besteht, erfüllt die folgenden Bedingungen:

- a) $v(t) \geq 0, \quad v(0) = 0$
- b) $v(-t) = v(t)$
- c) $v(t_1 + t_2) \leq v(t_1) + v(t_2)$
- d) $v(t)$ ist fastperiodisch.

Es seien nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei beliebige fastperiodische Funktionen. Die Summe $v_f(t) + v_g(t)$ erfüllt die Bedingungen a), b), c) und, nach dem Summensatz, die Bedingung d). Für jedes ε sind also diejenigen t , für welche

$$|v_f(t) + v_g(t) - v_f(0) - v_g(0)| = v_f(t) + v_g(t) \leq \varepsilon,$$

also unsummehr diejenigen t , für welche

$$\text{zugleich} \quad v_f(t) \leq \varepsilon, \quad v_g(t) \leq \varepsilon,$$

überall dicht. Damit ist die obige Verschärfung des Summensatzes bewiesen.

2.5 Als Überleitung zu den Betrachtungen des nächsten Paragraphen bemerken wir folgendes. Die gemeinsamen Verschiebungselemente von fastperiodischen Funktionen in beliebiger endlicher Anzahl sind relativ dicht.

§ 3. Majorisierbare Mengen. Überfunktionen.

3.1 Es sei $\{f_\nu(x)\}$ eine Menge von gleichartig beschränkten fastperiodischen Funktionen; der Index ν kann eine beliebige Indexmenge N durchlaufen. Es sei in E eine weitere fastperiodische Funktion $\xi' = f(x)$ definiert, deren Werteraum H' nicht mit dem Werteraum H der Funktionen $f_\nu(x)$ übereinzustimmen braucht. Wir sagen, dass die Klasse $\{f_\nu(x)\}$ *majorisierbar* ist, und nennen $f(x)$ ihre *Majorante*, falls für alle $\nu \in N$ und $t \in E$

$$\text{Ob. Gr. } \left| f_\nu(x+t) - f_\nu(x) \right| \leq \text{Ob. Gr. } \left| f(x+t) - f(x) \right|,$$

oder, in den Verschiebungsfunktionen ausgedrückt,

$$v_{f_\nu}(t) \leq v_f(t).$$

3.2 Wenn die Funktionen der Klasse $\{f_\nu(x)\}$ majorisierbar sind, so sind sie gleichartig beschränkt, gleichartig gleichmässig stetig und gleichartig fastperiodisch (; das letztere soll besagen, dass zu jedem ε relativ dichte gemeinsame Verschiebungselemente vorhanden sind). Wir wollen zeigen, dass umgekehrt jede Klasse $\{f_\nu(x)\}$ mit diesen Eigenschaften eine Majorante besitzt.

Wir belegen die Indexmenge N irgendwie mit (gleichen oder verschiedenen) Elementen ξ aus H , und machen nur die eine Einschränkung, dass für jede einzelne Belegung die Elemente ξ beschränkt sind. Jede solche Belegung

$$\xi' = \{\xi_\nu\}$$

fassen wir als Element eines neuen Raumes H' auf, in welchem wir die Addition durch

$$\{\xi_\nu\} + \{\eta_\nu\} = \{\xi_\nu + \eta_\nu\}$$

und den Betrag durch

$$|\xi'| = \text{Ob. Gr. } |\xi_\nu|$$

definieren. Man verifiziert leicht, dass dieser Raum H' alle für H getroffenen Voraussetzungen erfüllt. Die für alle $x \in E$ durch die Festsetzung

$$f(x) = \{f_\nu(x)\}$$

definierte Funktion (mit Werten aus H') ist wegen

$$|f_\nu(x+t) - f_\nu(x)| \leq |f(x+t) - f(x)|$$

eine fastperiodische Funktion, und zwar eine Majorante von $f(x)$.

Die eben definierte Funktion $\xi' = f(x)$ werden wir eine *Überfunktion* der (majorisierbaren) Klasse $\{f_\nu(x)\}$ nennen, und entsprechend den Raum H' einen Überraum von H .

Die Heranziehung der Überfunktion hat auch dann Interesse, wenn die Ausgangsfunktionen $\{f_\nu(x)\}$ Bohr'sche Funktionen sind. Die Überfunktion ist dann eine auf der reellen Achse definierte abstrakte Funktion, welche die gegebenen »konkreten« Funktionen zu einem einheitlichen fastperiodischen Gebilde zusammenschweisst.

3.3 Mit Hilfe der Überfunktion findet man auf Grund von 2.2 folgendes. Damit eine Menge von gleichartig gleichmässig stetigen fastperiodischen Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ majorisierbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass jede Folge von Elementen $\{h_n\}$ aus E eine Teilfolge $\{k_n\}$ enthält, für welche die Folge der Funktionen

$$f_\nu(x+k_1), f_\nu(x+k_2), \dots$$

gleichartig in ν gleichmässig konvergiert.

3.4 Falls eine Folge

$$f_1(x), f_2(x), \dots$$

majorisierbar ist und auf jeder beschränkten Punktmenge in E gleichmässig konvergiert, so ist sie auch überall in E gleichmässig konvergent. Denn man bestimme zu $\varepsilon > 0$ eine Länge $l > 0$, so dass die l -Umgebung eines jeden Punktes in E ein $t(\varepsilon)$ der Überfunktion enthält. Jedes x aus E kann dann geschrieben werden

$$x = y + t,$$

wobei t ein $t(\varepsilon)$ und $|y| < l$ ist. Wenn nun n_0 so beschaffen ist, dass für $m, n > n_0$ und $|y| < l$

$$|f_m(y) - f_n(y)| \leq \varepsilon,$$

so ist

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(y+t) - f_m(y)| + |f_n(y+t) - f_n(y)| + |f_m(y) - f_n(y)| \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Hieraus findet man die nachfolgenden Sätze, Bochner [1], § 5, die wir im folgenden nicht benötigen werden.

Falls E separabel ist (d. h. eine abzählbare Menge von überall dicht liegenden Punkten enthält) und falls H die Kompaktheitseigenschaft besitzt, so enthält jede majorisierbare unendliche Menge von fastperiodischen Funktionen eine in E gleichmässig konvergierende Folge.

Wenn umgekehrt jede Untermenge einer Klasse von fastperiodischen Funktionen eine gleichmässig konvergierende Folge enthält, so ist die Klasse majorisierbar.

3.5 Für die Betrachtung der Überfunktionen von Bohrschen Funktionen wird die folgende Bemerkung eine Rolle spielen.

Wir nennen den Werteraum H *komplex-linear*, falls er ausser den Voraussetzungen aus 1.3 noch die folgende befriedigt. Mit irgendeinem ξ aus H und irgendeiner komplexen Zahl α , — die komplexen Zahlen brauchen nicht in H enthalten zu sein —, kann man innerhalb von H die »Multiplikation« $\alpha\xi$ ausführen, gemäss den Rechengesetzen

$$\alpha(\xi + \eta) = \alpha\xi + \alpha\eta$$

$$(\alpha + \beta)\xi = \alpha\xi + \beta\xi$$

$$\alpha(\beta\xi) = (\alpha\beta)\xi$$

$$1 \cdot \xi = \xi$$

$$|\alpha\xi| = |\alpha| \cdot |\xi|,$$

wobei $|\alpha|$ den gewöhnlichen absoluten Betrag von α bedeutet.

Nun findet man leicht folgendes. Wenn der Raum H komplex-linear ist, und wenn man bei der Bildung eines Überraumes H' für die Multiplikation mit α die Festsetzung

$$\alpha\xi' = \{\alpha\xi\}$$

trifft, so ist auch H' komplex-linear.

Insbesondere ist also der Werteraum einer Überfunktion von Bohrschen Funktionen allemal komplex-linear.

§ 4. Abbildungen.

Unter einer *Abbildung* verstehen wir eine ein-eindeutige Abbildung des Raumes E auf den Raum H .

Es sei $c \neq 0$, $f(x)$ eine reelle Bohrsche Funktion, und

$$y = cx + f(x)$$

sei eine Abbildung der reellen Graden auf sich selber. Die inverse Abbildung kann man in der Form

$$x = c^{-1}y - \varphi(y)$$

ansetzen, wobei $\varphi(y)$ eine gewisse reelle Funktion auf der reellen Achse ist. In einer Arbeit von Bohr und Jessen [1], in welcher die Struktur der Funktion $\varphi(y)$ untersucht wird, wird unter anderem bewiesen, dass die Funktion $\varphi(y)$ bereits dann fastperiodisch ist, wenn sie gleichmässig stetig ist. Diesen Satz kann man erheblich verallgemeinern. Nur müssen wir vom Raume H verlangen, dass er ebenso wie E die Kompaktheitseigenschaft besitzt.

4.1 Wir bezeichnen mit

$$\xi = c(x)$$

irgendeine Abbildung von E auf H , welche mitsamt ihrer Umkehrung $x = c^{-1}(\xi)$ gleichmässig stetig und additiv ist:

$$c(x_1 + x_2) = c(x_1) + c(x_2), \quad c^{-1}(\xi_1 + \xi_2) = c^{-1}(\xi_1) + c^{-1}(\xi_2).$$

Es sei weiterhin eine fastperiodische Funktion $f(x)$ gegeben, derart dass die Funktion

$$(4.11) \quad \xi = c(x) + f(x)$$

eine Abbildung vermittelt. Die inverse Abbildung lässt sich schreiben

$$(4.12) \quad x = c^{-1}(\xi) - \varphi(\xi),$$

wobei $\varphi(\xi)$ eine gewisse Funktion in H mit Werten aus E ist. Wir werden beweisen, dass die Funktion $\varphi(\xi)$ bereits dann fastperiodisch ist, wenn sie gleichmässig stetig ist. Zum Beweise werden wir zeigen, dass man aus jeder Folge von Elementen $\{\eta_n\}$ aus H eine Teilfolge $\{x_n\}$ auswählen kann, für welche die Funktionenfolge $\{\varphi(\xi + x_n)\}$ gleichmässig konvergiert.

4.2 Wenn man ξ aus (4.11) in (4.12) einsetzt, so entsteht

$$(4.21) \quad c^{-1}(f(x)) = \varphi(c(x) + f(x)).$$

Es sei $\{\eta_n\}$ eine beliebige Folge. Wenn man schreibt: $h_n = c^{-1}(\eta_n)$, und in (4.21) x durch $x + h_n$ ersetzt, so entsteht

$$c^{-1}(f(x + h_n)) = \varphi(c(x) + \eta_n + f(x + h_n)).$$

Da zugleich mit $f(x)$ auch $c^{-1}(f(x))$ eine fastperiodische Funktion ist, so kann man auf Grund von 2.2 eine Teilfolge $\{k_n\}$ der Folge $\{h_n\}$ angeben, für welche die Funktionenfolgen $\{c^{-1}(f(x + k_n))\}$, $\{f(x + k_n)\}$ zugleich gleichmässig konvergieren. Wenn man die Grenzfunktion der zweiten Folge mit $g(x)$ bezeichnet und $c(k_n) = x_n$ setzt, so ergibt sich aus

$$c^{-1}(f(x + k_n)) = \varphi(c(x) + x_n + f(x + k_n)),$$

wenn man die gleichmässige Stetigkeit der Funktion $\varphi(\xi)$ benutzt, dass die Funktionenfolge

$$\{\varphi(c(x) + g(x) + x_n)\}$$

gleichmässig in E konvergiert. Die Folge $\{x_n\}$ ist eine Teilfolge von $\{\eta_n\}$. Wenn wir noch zeigen können, dass jedem Element ξ aus H ein Element x aus E entspricht, für welches

$$\xi = c(x) + g(x),$$

dann ist erwiesen, dass die Folge $\{\varphi(\xi + x_n)\}$ gleichmässig in H konvergiert, und wir sind fertig.

4.3 Zu jedem $A > 0$ existiert ein $B > 0$, derart dass aus $|c(x)| \leq A$ folgt $|x| \leq B$. Anderenfalls gäbe es eine Folge $\{x_n\}$, für welche $|c(x_n)| \leq A$ und $|x_n| \rightarrow \infty$. Die unendliche Menge $\xi_n = c(x_n)$ hat mindestens einen Häufungspunkt ξ . Da für solche ξ_n , welche gegen ξ konvergieren, $c^{-1}(\xi - \xi_n)$ beliebig klein wird, so folgt aus

$$x_n = c^{-1}(\xi) - c^{-1}(\xi - \xi_n),$$

dass $|x_n| \rightarrow \infty$ nicht möglich ist.

4.4 Zugleich mit (4.11) sind auch die Funktionen

$$\xi = c(x) + f(x + k_n) \equiv c(x + k_n) + f(x + k_n) - x_n$$

Abbildungen. Zu fest vorgegebenen ξ gibt es also eine Folge $\{x_n\}$, für welche

$$\xi = c(x_n) + f(x_n + k_n).$$

Da nun die Funktionen $\{f(x + k_n)\}$ gleichartig beschränkt sind, so folgt aus 4.3 dass die Folge $\{x_n\}$ beschränkt ist. Eine Teilfolge von ihr konvergiert also gegen ein Element x . Da $c(x)$ eine stetige Funktion ist und die Funktionen $\{f(x + k_n)\}$ stetig gegen $g(x)$ konvergieren, so gilt für dieses Element x

$$\xi = c(x) + g(x).$$

Also besitzt die letzte Gleichung für jedes ξ eine Lösung x , was noch zu beweisen verblieben war.

§ 5. Integration.

Von Bohl und Bohr ist bewiesen worden: falls das Integral einer fastperiodischen Funktion beschränkt ist, ist es fastperiodisch. Für diesen Satz hat Favard [1], § 3 einen neuen Beweis gegeben, welcher auf den Normalitätseigenschaften der fastperiodischen Funktionen beruht, und für abstrakte Funktionen aufrechterhalten werden kann. Allerdings kann man jetzt den Räumen E und H nicht mehr diejenige Allgemeinheit belassen, die wir ihnen bisher gewährt haben; schon deswegen nicht, weil die Existenz eines »Integral« mit den üblichen Eigenschaften an sehr einschneidende Strukturbesonderheiten der Räume E und H gebunden ist. Um aber die Beweisidee scharf herauszuheben, wollen wir vor derhand das »Integral« durch gewisse axiomatische Forderungen festlegen, ohne zu prüfen, welche Einschränkungen den Räumen E und H aufzuerlegen sind, damit ein diesen Axiomen genügendes »Integral« vorhanden ist.

5.1 Nur zwei explizite Voraussetzungen, und zwar über den Raum H , wollen wir von vorneherein aufstellen. Erstens nehmen wir an, dass H nicht nur vollständig ist, sondern auch die *Kompaktheitseigenschaft* besitzt.¹ Und zweitens machen wir die folgende Einschränkung.

Es sei Ω eine Punktmenge aus H , und man addiere zu allen Elementen aus Ω ein festes Element η hinzu; die neue Punktmenge heiße Ω' . Wir verlangen nun, dass für jedes beschränkte Ω und jedes $\eta \neq 0$ die Punktmenge Ω' nicht Teil von Ω sein soll, d. h. dass Ω' mindestens ein Element enthalten soll, welches nicht in Ω vorkommt.

¹ Es wäre von Interesse festzustellen, ob diese Annahme notwendig ist.

Diese Einschränkung ist von selbst erfüllt, wenn H ein komplex-linearer Raum ist, vgl. 3. 5. Denn angenommen es wäre $\Omega' \subseteq \Omega$. Falls ξ^* ein Element aus Ω ist, so ist $\xi^* + \eta$ in Ω' und demnach auch in Ω enthalten. Wenn nun ξ ein beliebiges Element aus Ω bezeichnet, so findet man induktiv, dass alle Elemente $\xi + n\eta$, $n = 1, 2, 3, \dots$, in Ω vorkommen. Wegen

$$|\xi + n\eta| \geq n|\eta| - |\xi|$$

sind aber diese Elemente nicht beschränkt.

5.2 Es sei nun $f(x)$ irgendeine festgehaltene fastperiodische Funktion. Wir betrachten für alle Elemente h aus E die Funktionen $f(x+h)$ und alle Funktionen welche gleichmäßige Grenzwerte solcher Funktionen sind; und wir bezeichnen diese gesamte Funktionenmenge mit $\mathfrak{R}(f)$. Wie für Bohrsche Funktionen gilt folgendes. Ist $g(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{R}(f)$, so ist $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(g)$, d. h. jede Funktion aus $\mathfrak{R}(f)$ ist ein $g(x+k)$, wobei k ein Element von E ist, oder gleichmäßiger Grenzwert solcher Funktionen.

Es sei jeder Funktion $g(x)$ aus $\mathfrak{R}(f)$ eine gewisse, gleichfalls auf E definierte, stetige Funktion $G(x)$ zugeordnet, welche wir das »Integral« von $g(x)$ nennen, und diese Zuordnung genüge den folgenden drei Gesetzen:

1) bei gegebenem $g(x)$ ist die Funktion $G(x)$ bis auf eine willkürliche additive Konstante (aus H) eindeutig bestimmt,

2) falls $G(x)$ ein Integral von $g(x)$ ist, so ist, für jedes h , $G(x+h)$ ein Integral von $g(x+h)$, und

3) falls die Folge $\{g(x+h_n)\}$ gleichmäßig gegen $g_1(x)$ konvergiert, und falls die Folge $\{G(x+h_n)\}$ im Punkte $x=0$ konvergiert, so ist die letztere Folge für alle x konvergent (die Gleichmäßigkeit der Konvergenz wird nicht verlangt) und ihre Grenzfunktion $G_1(x)$ ist ein Integral von $g_1(x)$.

Unser Satz lautet nun:

Falls das Integral $F(x)$ von $f(x)$ beschränkt ist, ist es eine fastperiodische Funktion.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, dass jede Folge $\{h'_n\}$ eine Teilfolge $\{k_n\}$ enthält, für welche die Folge $\{F(x+k_n)\}$ gleichmäßig konvergiert. Da $f(x)$ fastperiodisch ist, so enthält jede Folge $\{h'_n\}$ eine Teilfolge $\{h_n\}$, für welche die Folge $\{f(x+h_n)\}$ gleichmäßig konvergiert. Unser Satz folgt daher sofort aus dem schärferen Satz:

Es sei $F(x)$ beschränkt. Falls für eine Folge $\{h_n\}$ die Funktionenfolge $\{f(x+h_n)\}$ gleichmässig konvergiert, so ist auch die Funktionenfolge $\{F(x+h_n)\}$ gleichmässig konvergent.

Den Beweis werden wir in einigen Schritten erbringen.

5.3 Wir bezeichnen mit $\Omega(F)$ diejenige beschränkte Punktmenge aus H , welche aus den Werten der Funktion $F(x)$ und deren Häufungspunkten besteht, und nennen sie das Bild von $F(x)$. Offenbar haben die Funktionen $F(x)$ und $F(x+h)$ dieselben Bilder. Falls für eine Folge $\{k_n\}$

$$(5.31) \quad G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x+k_n),$$

so ist offenbar

$$(5.32) \quad \Omega(G) \subseteq \Omega(F).$$

Für eine gewisse Teilfolge $\{k'_n\}$ von $\{k_n\}$ ist $\{f(x+k'_n)\}$ gleichmässig konvergent. Bezeichnet man den Limes mit $g(x)$, so ist nach Gesetz 3) die Funktion (5.31) ein Integral von $g(x)$. Nun gibt es eine Folge $\{l_n\}$, so dass

$$f(x) = \text{gleichm.} \lim_{n \rightarrow \infty} g(x+l_n).$$

Wegen der Beschränktheit von $F(x)$ ist auch $G(x)$ beschränkt, und es gibt eine Teilfolge $\{l'_n\}$ von $\{l_n\}$, für welche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x+l'_n) \text{ vorhanden.}$$

Nach Gesetz 3) ist dann die Folge $\{G(x+l'_n)\}$ gegen eine Funktion $F^*(x)$ konvergent, welche ein Integral von $f(x)$ ist. Nach zuvor bewiesenem ist

$$\Omega(F^*) \subseteq \Omega(G),$$

und durch Kombination mit (5.32) ergibt sich

$$(5.33) \quad \Omega(F^*) \subseteq \Omega(G) \subseteq \Omega(F),$$

und daher insbesondere

$$(5.34) \quad \Omega(F^*) \subseteq \Omega(F).$$

Da $F^*(x)$ und $F(x)$ beides Integrale von $f(x)$ sind, so ist nach Gesetz 1) $F^*(x) = F(x) + \eta$. Hieraus schliesst man leicht, dass das Bild $\Omega(F^*)$ aus dem

Bild $\Omega(F)$ durch eine Translation um η hervorgeht. Wegen (5.34) folgt hieraus nach 5.1, dass $\eta = 0$, also $F^*(x) = F(x)$, also $\Omega(F^*) = \Omega(F)$, also, nach (5.33), $\Omega(G) = \Omega(F)$.

Wir haben also das Resultat: falls für eine Folge $\{k_n\}$

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + k_n),$$

so ist

$$\Omega(G) = \Omega(F).$$

5.4 Es seien $\{l_n\}$ und $\{l'_n\}$ zwei Folgen, für welche die Funktionenfolgen $\{f(x + l_n)\}$, $\{f(x + l'_n)\}$ gegen dieselbe Funktion $g(x)$ gleichmässig konvergieren, und die Folgen $\{F(l_n)\}$, $\{F(l'_n)\}$ konvergent sind. Dann ist

$$(5.41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(l_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(l'_n).$$

Denn nach Gesetz 3) existieren die Grenzwerte

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + l_n), \quad G_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + l'_n)$$

und sind Integrale von $g(x)$. Daher ist nach Gesetz 1)

$$G(x) = G_1(x) + \eta,$$

und nach 5.3 ist

$$\Omega(G) = \Omega(G_1) = \Omega(F).$$

Auf Grund von 5.1 ist $\eta = 0$, also $G(x) = G_1(x)$. Für $x = 0$ ergibt dies (5.41).

5.5 Jetzt können wir den eigentlichen Beweis erbringen. Angenommen die Folge $\{F(x + h_n)\}$ wäre nicht gleichmässig konvergent. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, zwei Teilfolgen $\{k_n\}$, $\{k'_n\}$ von $\{h_n\}$ und eine Folge $\{x_n\}$, derart dass

$$(5.51) \quad |F(x_n + k_n) - F(x_n + k'_n)| \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Indem man eventuell die Indexfolge $n = 1, 2, 3, \dots$ durch eine Teilfolge ersetzt, — wir bezeichnen die neue Indexfolge wiederum mit $1, 2, 3, \dots$ —, kann man noch annehmen, dass die Folgen

$$\{F(x_n + k_n)\}, \quad \{F(x_n + k'_n)\}$$

konvergent sind und die Funktionenfolgen

$$(5.52) \quad \{f(x + x_n + k_n)\}, \quad \{f(x + x_n + k'_n)\}$$

$$(5.53) \quad \{f(x + x_n + h_n)\}$$

gleichmässig konvergent sind. Bezeichnet man den Limes von (5.53) mit $g(x)$, so haben die Folgen (5.52) als Teilfolgen von (5.53) den gleichen Limes $g(x)$. Schreibt man nun $l_n = x_n + k_n$, $l'_n = x_n + k'_n$, so sind also die Folgen $\{f(x + l_n)\}$, $\{f(x + l'_n)\}$ gegen dieselbe Funktion $g(x)$ gleichmässig konvergent, und die Folgen $\{F(l_n)\}$, $\{F(l'_n)\}$ konvergieren. Nach 5.4 ist daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(l_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(l'_n),$$

was aber mit (5.51) nicht verträglich ist. Also führt die Annahme, dass die Folge $\{F(x + h_n)\}$ nicht gleichmässig konvergiert, auf einen Widerspruch. Damit ist unser Satz endgültig bewiesen.

5.6 Es sei nunmehr, wie bei Herrn Bohr, E die reelle Achse, aber für H werde irgend ein komplex-linearer Raum angenommen. Auf Funktionen $f(x)$, welche in einem endlichen (oder auch unendlichen) Intervall (a, b) definiert sind und Werte aus H annehmen, kann man, wie wir kurz skizzieren wollen, die übliche Riemannsche (auch Lebesguesche) Theorie der Integration und Differentiation ausdehnen; wegen näherer Einzelheiten vgl. Kerner [1], Graves [1], Bochner [3].

Die Funktion $f(x)$ sei etwa stetig in (a, b) . Man bestimme Teilungspunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

in jedem Intervall $x_r \leq y < x_{r+1}$ einen Punkt y_r , und bilde die Summe

$$\sum_{r=0}^{n-1} (x_{r+1} - x_r) f(y_r).$$

Sie ist ein Element aus H , und genau wie für reelle (bzw. komplexwertige) Funktionen zeigt man, dass diese Summe, falls die maximale Länge der Teilungsintervalle genügend klein ist, sich beliebig wenig von einem Element aus H unterscheidet, welches als das

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet wird. Es bestehen unter anderem die folgenden Rechenregeln.

$$1) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$2) \int_a^b \gamma dx = \gamma(b-a); \gamma \text{ ist eine Konstante (aus } H)$$

$$3) \int_a^b \gamma f(x) dx = \gamma \int_a^b f(x) dx, \text{ wobei entweder } \gamma \text{ eine Konstante aus } H \text{ und}$$

$f(x)$ eine komplexe Funktion ist, oder umgekehrt γ eine komplexe Konstante und $f(x)$ eine abstrakte Funktion ist

$$4) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$5) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$6) \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \text{ falls die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ gleichmässig}$$

im endlichen Intervall (a, b) konvergiert.

Die Ableitung von $f(x)$ ist wiederum durch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definiert. Man zeigt leicht, dass

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x),$$

und (was etwas heikler ist)

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Auf Grund des Letzteren existiert für jede stetige Funktion $f(x)$ das unbestimmte Integral der üblichen Art, und falls eine solche Funktion $f(x)$ fastperiodisch ist, so ist, wenn noch H die Kompaktheitseigenschaft besitzt, auf ihr Integral der Satz aus 5. 2 anwendbar.

II. Die Schwingungseigenschaften.

§ 6. Fourierreihen. Der Approximationssatz.

Es dürfte keine leichte Aufgabe sein, die Bohrsche Schwingungstheorie für den Fall aufrechtzuerhalten, dass der Raum E seiner gruppentopologischen Struktur nach komplizierter als die reelle Grade ist, vgl. Peter und Weyl [1], S. 755. Jedenfalls wollen wir uns dieser Aufgabe nicht unterziehen, sondern für den Rest dieser Arbeit nur den Fall erörtern, dass E die reelle Grade ist. Und um für den Aufbau der Fourierreihen einen bequemen Integralbegriff bereit zu haben, wollen wir noch den Raum H dahin einschränken, dass er, wie am Ende des vorigen Paragraphen, komplex-linear ist.¹ Gemessen an der im vorigen Abschnitt zugelassenen Allgemeinheit der Räume E und H , könnten die nunmehr zu betrachtenden abstrakten Funktionen als sehr »speziell« und von den Bohrschen Funktionen nur »sehr wenig« verschieden erscheinen. Wir werden aber sehen, dass noch eine interessante Abweichung gegenüber den Bohrschen Funktionen eine Rolle spielt.

6.1 Es sei $f(x)$ eine abstrakte und $g(x)$ eine komplexe Funktion. Da in H die Multiplikation eines beliebigen Elements mit einer beliebigen komplexen Zahl definiert ist, so ist auch $f(x)g(x)$ eine abstrakte Funktion. Wenn nun die Faktoren $f(x)$, $g(x)$ fastperiodisch sind, so ist es auch das Produkt $f(x)g(x)$. Denn die Verschiebungsfunktionen $v_f(t)$, $v_g(t)$ sind Bohrsche Funktionen und haben daher relativ dichte gemeinsame Verschiebungszahlen. Da aber diese Verschiebungszahlen auch Verschiebungszahlen von $f(x)$, $g(x)$ sind, so ergibt sich nunmehr die Fastperiodizität von $f(x)g(x)$ aus

$$|f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x)| \leq |f(x+t)| |g(x+t) - g(x)| + |f(x+t) - f(x)| |g(x)|.$$

Insbesondere ist also, falls a ein Element aus H ist, und λ reell ist, das Produkt $ae^{i\lambda x}$ eine (abstrakte) fastperiodische Funktion. Daher ist es auch jedes Exponentialpolynom

$$(6.11) \quad s(x) = a_1 e^{i\lambda_1 x} + a_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots + a_n e^{i\lambda_n x}$$

¹ Aber wir heben hervor, dass wir von ihm nur die Vollständigkeit, nicht aber auch die Kompaktheitseigenschaft voraussetzen.

und jeder gleichmässige Limes von solchen Exponentialpolynomen $\left[\text{insbesondere also die Summe einer gleichmässig konvergierenden Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \right]$. Es entsteht

nunmehr die Frage, ob, wie im Bohrschen Falle, hiermit alle fastperiodischen Funktionen erschöpft sind, d. h. ob man jede fastperiodische Funktion durch Funktionen der Gestalt (6.11), mit abstrakten Koeffizienten a_v und reellen Exponenten λ_v , gleichmässig (in $-\infty < x < \infty$) approximieren kann.

Genau wie für Bohrsche Funktionen zeigt man, dass für jede fastperiodische Funktion $f(x)$ der »Mittelwert«

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = \mathfrak{M} \{f(x)\}$$

existiert, und dass sogar

$$\mathfrak{M} \{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(x) dx \quad \text{gleichmässig in } c.$$

Da das Produkt von $f(x)$ mit der komplexen Funktion $e^{-i\lambda x}$ nach obigem wiederum fastperiodisch ist, so existiert demnach für jedes reelle λ die Grösse

$$a(\lambda) = \mathfrak{M} \{f(x) e^{-i\lambda x}\}.$$

Für Bohrsche Funktionen wird nunmehr gezeigt, dass für je endlich viele untereinander verschiedene Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{v=1}^n |a(\lambda_v)|^2 \leq \mathfrak{M} \{|f(x)|^2\} = C$$

besteht. Hieraus folgt dann, dass nur für höchstens abzählbar viele Zahlen $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Grösse $a(\lambda)$ von Null verschieden ist. Mit den dazugehörigen Grössen $a(\lambda_n) = A_n$ wird dann formal die Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x}$$

angesetzt. Dann wird nach der einen oder anderen Methode die entscheidende Behauptung bewiesen, dass die Parsevalsche Gleichung

$$\sum |A_n|^2 = \mathfrak{M} \{|f(t)|^2\}$$

besteht. Aus dieser Gleichung folgt dann unmittelbar der Eindeutigkeitssatz (, dass zwei fastperiodische Funktionen die in ihren Fourierreihen übereinstimmen auch schon identisch sind,) und nach der einen oder anderen Methode der Approximationssatz.

Dieser Weg ist für unsere abstrakten Funktionen nicht gangbar. Denn schon das übliche Verfahren zur Herleitung der Besselschen Ungleichung versagt, und man kann zeigen, dass dies nicht etwa zufällig am Verfahren liegt, sondern dass die Besselsche Ungleichung tatsächlich aufhört, vgl. Bochner [4].¹ Wir werden aber auf anderem Wege zeigen, dass alle Bohrschen Ergebnisse, abgesehen natürlich von der Parsevalschen Gleichung, erhalten bleiben.

6.2 Wir ziehen die Verschiebungsfunktion $v_f(t)$ der Funktion $f(x)$ heran. Sie ist eine Bohrsche Funktion. Auf Grund des Fundamentalsatzes besteht daher zwischen ihren Fourierexponenten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ und ihren Verschiebungszahlen der folgende Zusammenhang, vgl. Bohr [2], S. 110. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , und ein $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, derart dass jede Lösung der N Kongruenzungleichungen*

$$|t\mu_n| \leq \delta \pmod{2\pi} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

eine Verschiebungszahl $t(\varepsilon)$ ist. Nunmehr betrachten wir den Modul von $v_f(x)$, d. h. die Gesamtheit derjenigen (abzählbar vielen) reellen Zahlen, welche man linear aus endlich vielen Exponenten μ_n mit ganzzahligen Koeffizienten zusammensetzen kann. Es sei nunmehr λ eine reelle Zahl welche nicht diesem Modul angehört. Auf Grund des eben erwähnten »Zusammenhanges« kann man, vgl. Bohr [2], S. 113, zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Verschiebungszahl $t_0 = t(\varepsilon)$ angeben, für welche

$$|t_0\lambda - \pi| \leq \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

und demnach

$$(6.21) \quad |1 - e^{-it_0\lambda}| \geq 1.$$

Nun ist aber t_0 auch ein $t(\varepsilon)$ für $f(x)$. Aus

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(x) e^{-i\lambda x} dx = e^{-i\lambda t_0} \mathfrak{M}_x \{f(x+t_0) e^{-i\lambda x}\} \\ &= e^{-i\lambda t_0} a(\lambda) + e^{-i\lambda t_0} \mathfrak{M}_x \{[f(x+t_0) - f(x)] e^{-i\lambda x}\} \end{aligned}$$

¹ Wir werden hinterher in § 8 Bedingungen für die Gültigkeit der Besselschen Ungleichung angeben.

folgt daher

$$|a(\lambda)| |1 - e^{-i t_0 \lambda}| \leq \varepsilon$$

und, wegen (6.21),

$$|a(\lambda)| \leq \varepsilon.$$

Da aber ε beliebig klein sein kann, so ist $a(\lambda) = 0$. Also höchstens für diejenigen λ , welche im Modul der Verschiebungsfunktion $v_f(t)$ enthalten sind, kann der Fourierkoeffizient $a(\lambda)$ von $f(x)$ von Null verschieden sein. Also existiert auch für $f(x)$ eine Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i \lambda_n x}.$$

Für Bohrsche Funktionen ergibt sich sofort aus der Besselschen Ungleichung, dass $A_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Das müssen wir jetzt anders beweisen. Genau so wie de la Vallée-Poussin für Bohrsche Funktionen gezeigt hat, vgl. Bohr [1], S. 60/4, zeigt man auch für unsere Funktionen folgendes:

- 1) zu jedem ε gibt es ein λ_0 , so dass $|a(\lambda)| \leq \varepsilon$ für $|\lambda| \geq \lambda_0$,
- 2) falls $\mathfrak{M}\{f(x)\} = 0$ so gibt es zu jedem ε ein δ , so dass $|a(\lambda)| \leq \varepsilon$ für $|\lambda| < \delta$.

Wendet man 2) auf die Funktion $f(x)e^{-iAx} - \mathfrak{M}\{f(x)e^{-iAx}\}$ an, wobei A beliebig, so findet man leicht folgendes:

- 2') zu jedem A gibt es zu jedem ε ein δ , so dass $|a(\lambda)| \leq \varepsilon$ für $0 < |A - \lambda| < \delta$.

Aus 1) und 2') ergibt sich dann auf Grund des Borelschen Überdeckungssatzes, dass für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele $|A_n| > \varepsilon$ sind. D. h. aber dass die Folge A_n eine Nullfolge ist.

Weiterhin ist leicht zu sehen, dass der Addition zweier fastperiodischer Funktionen, der Multiplikation einer fastperiodischen Funktion mit einer komplexen Konstanten und der Limesbildung einer Folge von gleichmässig konvergierenden fastperiodischen Funktionen bei der Berechnung der Fourierreihen die entsprechenden formalen Operationen entsprechen.

6.3 Nunmehr wenden wir uns dem Eindeutigkeits- und Approximationsatz zu. Wir machen denselben Ansatz wie in Bochner [1] zum Beweis des Approximationsatzes für Bohrsche Funktionen. Dort wurde folgendermassen geschlossen. Man bezeichne mit $\{\mu_n\}$ eine Folge von reellen Zahlen, welche die Fourierexponenten der gegebenen Bohrschen Funktion sämtlich enthält (; es können auch andere Zahlen in der Folge $\{\mu_n\}$ vorkommen, das stört nicht). Man bestimme zur Folge $\{\mu_n\}$ eine »Basis« $\{\alpha_n\}$. Dies ist eine (eventuell abbrechende)

Folge von Zahlen, derart, dass jede Zahl μ_n auf eine und *nur* eine Weise in der Gestalt

$$\mu_n = r_{n,1} \alpha_1 + r_{n,2} \alpha_2 + \dots + r_{n,q_n} \alpha_{q_n}$$

mit *rationalen* Koeffizienten $r_{n,p}$ dargestellt werden kann. Nunmehr bilde man mit dem Fejérschen Kern

$$II_n(t) = \sum_{\nu=-n}^n \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) e^{-i\nu t} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

für beliebige positive ganze Zahlen $p, N_1, N_2, \dots, N_p, n_1, n_2, \dots, n_p$ mit den Grössen

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{N_1!}, \dots, \beta_p = \frac{\alpha_p}{N_p!}$$

die fastperiodische Funktion

$$(6.31) \quad P(x) = \mathfrak{M}_t \{ f(x+t) II_{n_1}(\beta_1 t) \dots II_{n_p}(\beta_p t) \}.$$

Wegen

$$f(x+t) \sim \sum a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x} e^{i\lambda_n t}$$

findet man, dass $P(x)$ ein Exponentialpolynom ist, dessen Exponenten sämtlich unter den Exponenten von $f(x)$ vorkommen, und zwar ist es das Exponentialpolynom

$$(6.32) \quad \sum_{\substack{|\nu_1| < n_1 \\ \vdots \\ |\nu_p| < n_p}} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1}\right) \dots \left(1 - \frac{|\nu_p|}{n_p}\right) a(\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_p \beta_p) e^{i(\nu_1 \beta_1 + \dots + \nu_p \beta_p) x}.$$

Die Funktionen (6.31) bilden eine majorisierbare Menge, und zwar ist für sie die Funktion $f(x)$ sowohl eine Schranke als auch eine Majorante.¹ Unter den Funktionen (6.31) gibt es nun Folgen solcher, welche formal gegen die Fourierreihe von $f(x)$ konvergieren. Von jeder solchen Folge wird gezeigt, dass sie gleichmässig konvergiert. Die Limesfunktion einer solchen fest vorgegebenen Folge ist also eine wohlbestimmte Bohrsche Funktion $g(x)$, deren Fourierreihe mit

¹ Es ist zu beachten, dass wir in der vorliegenden Arbeit die gleichartige Beschränktheit in die Definition des Begriffs »majorisierbare Menge« aufgenommen haben, was in Bochner [1] nicht der Fall war.

der Fourierreihe von $f(x)$ übereinstimmt. Auf Grund des Eindeutigkeitsatzes (welcher für Bohrsche Funktionen aus der Parsevalschen Gleichung gefolgert wird) ist daher $f(x) \equiv g(x)$, und $f(x)$ ist demnach durch Exponentialpolynome approximierbar.

Es sei nunmehr $f(x)$ eine abstrakte fastperiodische Funktion. Wir ziehen wiederum eine Basis $\{a_n\}$ heran. Aber die Folge $\{a_n\}$ soll vorderhand nicht nur eine Basis für die Fourierexponenten von $f(x)$ sondern auch für die Fourierexponenten von ihrer Verschiebungsfunktion $v_f(x)$ sein. Auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse über die Funktion $f(x)$ kann man wiederum die Funktionen (6. 31) bilden, und es sind dies wiederum die Exponentialpolynome (6. 32), und man kann wiederum Folgen

$$(6. 33) \quad P_1(x), P_2(x), \dots$$

von Polynomen der Gestalt (6. 31) angeben, welche *formal* gegen die Fourierreihe von $f(x)$ konvergieren. Es entstehen nunmehr die Fragen: 1) ist jede solche Folge (6. 33) gleichmässig konvergent, und 2) wenn ja, ist ihre Limesfunktion gleich $f(x)$? Wenn man von einer Bohrschen Funktion weiss, dass sie reinperiodisch, etwa mit der Periode 2π ist, so kann man diese zwei Fragen in einem beantworten, indem man von den Fejérschen Polynomen, die nunmehr in der Gestalt

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt$$

geschrieben werden können, durch eine direkte Abschätzung zeigt, dass sie gegen $f(x)$ gleichmässig konvergieren. Für allgemeine Bohrsche Funktionen kann man nicht derart verfahren, weil man von vorneherein nicht die arithmetische Struktur der Verschiebungszahlen kennt; für diese Funktionen wird umgekehrt aus dem Approximationssatz der in (6. 2) angegebene »Zusammenhang« erschlossen, welcher eine starke arithmetische Gebundenheit der Verschiebungszahlen enthüllt. Nun liegen aber für unsere abstrakten fastperiodischen Funktionen die Dinge so, dass wir deren Verschiebungscharakter schon kennen. Denn die Verschiebungszahlen von $f(x)$ sind dieselben wie für die Bohrsche Verschiebungsfunktion $v_f(t)$, und für deren Verschiebungszahlen haben wir bereits den obigen »Zusammenhang«. Es ist daher von vorneherein zu erwarten, dass man unter Benutzung dieses

»Zusammenhanges« von unserer Folge (6.33) wird direkt nachweisen können, dass sie gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. Diese Erwartung bestätigt sich. Diesen direkten Beweis haben Besicovitch und Bohr [1] in etwas anderem Zusammenhang und etwas anderer Einkleidung erbracht. Wenn man das Symbol $D_V[f, g]$ für den Abstand zweier Elemente f, g durch unser Symbol $|f - g|$ ersetzt, so überträgt sich der dort auf S. 12—16 gegebene Beweis unverändert auf unseren Fall, und wir wollen ihn daher nicht wiederholen.

Es besteht also in erster Linie der

Approximationssatz. Für jede fastperiodische Funktion $f(x)$ kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (abstraktes) Exponentialpolynom

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x}$$

angeben, derart dass

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty),$$

und man kann es einrichten, dass die Exponenten λ_n Fourierexponenten von $f(x)$ sind.

Hieraus folgt der

Eindeutigkeitssatz. Falls zwei fastperiodische Funktionen $f(x), g(x)$ gleiche Fourierreihen haben, so sind sie identisch gleich.

Denn $f(x) - g(x)$ hat die Fourierreihe Null, also kann man $f(x) - g(x)$ durch Exponentialpolynome $P_\varepsilon(x) \equiv 0$ approximieren, also ist $f(x) - g(x) \equiv 0$.

6.4 Wir haben gefordert, dass die zur Bestimmung der Exponentialpolynome (6.31) gewählte Basis $\{\alpha_n\}$ auch die Fourierexponenten von $v_f(t)$ erzeugen soll. Nunmehr lassen wir diese Forderung gänzlich fallen, und betrachten irgendeine Basis $\{\alpha_n\}$ für die Exponenten von $f(x)$ selber. Man kann gewisse Zahlen $\{\alpha'_n\}$ hinzunehmen, welche zusammen mit den $\{\alpha_n\}$ auch die Exponenten von $v_f(t)$ erzeugen. Setzt man nun

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{N_1!}, \dots, \beta_p = \frac{\alpha_p}{N_p!}; \beta'_1 = \frac{\alpha'_1}{N'_1!}, \dots, \beta'_q = \frac{\alpha'_q}{N'_q!}$$

und bildet man mit ganzen Zahlen $n_1, \dots, n_p; n'_1, \dots, n'_q$ ein Exponentialpolynom nach der Vorschrift aus 6.3, und berücksichtigt man, dass

$$a(v_1\alpha_1 + \dots + v_p\alpha_p + v'_1\alpha'_1 + \dots + v'_q\alpha'_q)$$

sicherlich gleich null ist, falls nur eine der Zahlen ν'_1, \dots, ν'_q von null verschieden ist, so findet man, dass dieses Exponentialpolynom genau dasselbe ist, wie dasjenige, welches ohne die $\beta'_1, \dots, \beta'_q$ gebildet ist.

Auf Grund dessen erweist sich, wie für Bohrsche Funktionen, unser Approximationsverfahren als ein *algorithmisches* Verfahren, um bei blosser Kenntnis der Fourierreihe von $f(x)$, ohne sonstiges Wissen über die Funktion, eine Approximationsfolge (6. 33) aufzustellen. Denn man betrachte irgendeine Basis $\{a_n\}$ für die Fourierexponenten von $f(x)$. An Hand dieser Basis bilde man die Polynome (6. 31); dann ist jede Folge (6. 33), welche formal gegen $f(x)$ konvergiert, auch schon gleichmässig gegen $f(x)$ konvergent. — Es gilt, wie in Bochner [1], der

Summationssatz. *Es sei eine Exponentenfolge*

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

gegeben. Man kann ein Schema rationaler Koeffizienten

$$r_n^{(m)} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

angeben, in welchem bei festem m nur endlich viele von Null verschieden sind, so dass für jede fastperiodische Funktion $f(x)$ mit der Fourierreihe

$$\sum A_n e^{i A_n x}$$

(in welcher gewisse A_n verschwinden können) die mit ihren Fourierkoeffizienten gebildeten Exponentialpolynome

$$(6. 42) \quad S_m(x) = \sum r_n^{(m)} A_n e^{i A_n x}$$

gleichmässig gegen $f(x)$ konvergieren.

6. 5 Wie für Bohrsche Funktionen beweist man auf Grund des Approximationssatzes, vgl. z. B. Besicovitch [1], S. 53, den folgenden »Zusammenhang« samt »Umkehrung«.

Die Funktion $f(x)$ habe die Fourierexponenten $\{A_n\}$. Zu jedem ε gibt es ein N und δ , so dass jede Zahl t , welche den Kongruenzungleichungen

$$(6. 51) \quad |A_n t| \leq \delta \pmod{2\pi} \quad n = 1, \dots, N$$

genügt, eine Verschiebungszahl $t(\varepsilon)$ ist.

Umgekehrt gibt es zu jedem N und δ ein ε , so dass jede Verschiebungszahl $t = t(\varepsilon)$ den Kongruenzungleichungen (6. 51) genügen muss.

Wenn man diesen »Zusammenhang« mit der »Umkehrung« des »Zusammenhangs« aus 6.2 kombiniert, so findet man nach der Methode aus Bohr [2], S. 113, dass der Modul von $v_f(x)$ im Modul von $f(x)$ enthalten ist. Andererseits wissen wir, dass der Modul von $f(x)$ im Modul von $v_f(x)$ enthalten ist. Zusammenfassend haben wir das Resultat: *die Moduln von $f(x)$ und $v_f(x)$ sind einander gleich.* Eine jede fastperiodische Funktion $f(x)$ hat also nicht nur denselben Verschiebungs- sondern auch denselben Schwingungscharakter wie ihre Verschiebungsfunktion $v_f(x)$, welche letztere Funktion eine Bohrsche Funktion ist.

§ 7. Approximation majorisierbarer Mengen. Linear unabhängige Exponenten.

7.1 Gegeben sei eine majorisierbare Menge $\{f_\nu(x)\}$. Wir betrachten gemäss 3.2 und 3.5 ihre Überfunktion $f(x) = \{f_\nu(x)\}$, und da der Überraum H' von H wiederum komplex-linear ist, so hat $f(x)$ eine Fourierreihe

$$(7.11) \quad \sum_n A_n e^{i A_n x},$$

wobei

$$A_n = a(A_n) = \mathfrak{M} \{f(t) e^{-i A_n t}\}.$$

Für jedes λ ist $a(\lambda)$ ein Element aus H' und besteht daher aus »Komponenten« $a^{(\nu)}(\lambda)$, von denen jede ein Element aus H ist. Aus der Definition des Integrals von Funktionen mit Werten aus H' ergibt sich

$$a^{(\nu)}(\lambda) = \mathfrak{M} \{f_\nu(t) e^{-i \lambda t}\}.$$

Wir zerlegen jeden Koeffizienten A_n in seine Komponenten $A_n^{(\nu)}$. Da für festes λ das Element $a(\lambda)$ aus H' nur dann verschwindet, wenn sämtliche Komponenten $a^{(\nu)}(\lambda)$ verschwinden, so lässt sich für jedes ν die Fourierreihe von $f_\nu(x)$ in der Gestalt

$$(7.12) \quad \sum_n A_n^{(\nu)} e^{i A_n x}$$

schreiben; natürlich können für jedes einzelne ν einige $A_n^{(\nu)}$ verschwinden. Ausgehend von den Funktionen $f_\nu(x)$ haben wir also das Resultat, dass die Gesamtheit der Fourierexponenten aller Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ höchstens abzählbar unendlich ist.

Nunmehr approximieren wir die Überfunktion $f(x)$ durch eine Polynomfolge (6. 42). Jedes Polynom

$$S_m(x) = \sum_n r_n^{(m)} A_n e^{i A_n x}$$

zerfällt in die Komponenten

$$(7. 13) \quad S_{m, \nu}(x) = \sum_n r_n^{(m)} A_n^{(\nu)} e^{i A_n x}.$$

Wegen

$$|f_\nu(x) - S_{m, \nu}(x)| \leq |f(x) - S_m(x)|$$

erhalten wir zusammenfassend das folgende Resultat, vgl. Bochner [1], S. 130.

Satz über gleichartige Summation. *Jede majorisierbare Menge $\{f_\nu(x)\}$ besitzt eine gemeinsame Exponentenfolge $\{A_n\}$. Jede Folge von gleichzeitig approximierenden Fejérpolygonen*

$$S_{1, \nu}(x), S_{2, \nu}(x), S_{3, \nu}(x), \dots$$

der Gestalt (7. 13) liefert eine gleichartig gleichmässige Approximation der Funktionen $f_\nu(x)$, d. h. zu jedem ε gibt es ein $N(\varepsilon)$, so dass

$$|f_\nu(x) - S_{m, \nu}(x)| \leq \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty)$$

für alle ν und $m \geq N(\varepsilon)$.

7. 2 Auf Grund dessen können wir den folgenden nützlichen Satz beweisen.

Konvergenzsatz für majorisierbare Folgen. *Falls die Fourierreihen einer majorisierbaren Folge $\{f_\nu(x)\}$ formal konvergieren, so ist die Funktionenfolge gleichmässig konvergent.*

Denn die Behauptung ist evident, falls die Funktionen $f_\nu(x)$ Exponentialpolynome mit einer festen Exponentenfolge sind:

$$f_\nu(x) = \sum_{n=1}^{n_0} A_{n, \nu} e^{i A_n x}.$$

Im allgemeinen Falle kann man die $f_\nu(x)$ gleichartig in ν durch solche Exponentialpolynome approximieren.

7. 3 Wenn eine Funktion $f(x)$ linear unabhängige Exponenten hat, so ist die Fourierreihe in jeder Anordnung der Terme gleichmässig konvergent; vgl. den Beweis für Bohrsche Funktionen in Bochner [1], S. 133.

Durch Heranziehung der Überfunktion folgt hieraus: falls eine majorisierbare Menge $\{f(x)\}$ linear unabhängige Exponenten hat, so sind in jeder Anordnung der Exponenten die Fourierreihen gleichartig in ν gleichmässig konvergent.

§ 8. Die Parsevalsche Gleichung.

Wir sind beim Aufbau der Schwingungstheorie ohne die Relationen von Bessel und Parseval ausgekommen. Dennoch ist die Frage interessant, unter welchen Voraussetzungen über den Raum H das übliche Verfahren zur Herleitung der Besselschen Ungleichung in Kraft bleibt. Aus den modernen Untersuchungen über den Hilbertschen Raum, vgl. Stone [1], Kap. I, ergibt sich eine befriedigende Antwort auf diese Frage.

8. 1 Es sei H ein Raum, in welchem die Addition und die Multiplikation mit komplexen Konstanten wie im komplex-linearen Raume definiert ist. Weiterhin sei für je zwei Elemente ξ, η eine komplexe Zahl (ξ, η) als ihr *inneres Produkt* definiert, gemäss den Vorschriften:

- 1) $(a\xi, \eta) = a(\xi, \eta)$
- 2) $(\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta)$
- 3) $(\xi, \eta) = \overline{(\eta, \xi)}$
- 4) $(0, 0) = 0, \quad (\xi, \xi) > 0 \text{ für } \xi \neq 0.$

Der Betrag $|\xi|$ eines jeden Elementes ξ wird nunmehr als die nichtnegative Zahl $\sqrt{(\xi, \xi)}$ definiert. Man beweist, vgl. Stone [1], l. c., dass unter anderem

$$\begin{aligned} (\xi, a\eta) &= \bar{a}(\xi, \eta) \\ (\xi, \eta_1 + \eta_2) &= (\xi, \eta_1) + (\xi, \eta_2) \\ |a\xi| &= |a| |\xi| \\ |(\xi, \eta)| &\leq |\xi| |\eta| \\ |\xi + \eta| &\leq |\xi| + |\eta|. \end{aligned}$$

Wenn wir daher noch die Voraussetzung hinzunehmen, dass der Raum H vollständig ist, so besitzt er gewiss alle Eigenschaften, die wir von ihm bisher benötigt haben.¹

¹ Wenn man noch die Voraussetzung macht, dass H separabel ist, d. h. eine überall dicht liegende abzählbare Menge enthält, so ist unser Raum entweder der Hilbertsche Raum oder, falls

Man zeigt unschwer, dass für je zwei fastperiodische Funktionen $f(x)$, $g(x)$ das innere Produkt $(f(x), g(x))$ eine Bohrsche Funktion ist. Also existiert insbesondere für jede fastperiodische Funktion $f(x)$ der Mittelwert $\mathfrak{M}\{|f(x)|^2\}$. Nunmehr findet man wie im Bohrschen Falle für je endlich viele reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ und Elemente c_1, \dots, c_N aus H für die Zahl

$$(8.11) \quad \mathfrak{M}\left\{\left|f(x) - \sum_1^N c_n e^{i\lambda_n x}\right|^2\right\}$$

den Wert

$$\mathfrak{M}\{|f(x)|^2\} - \sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 + \sum_1^N |c_n - a(\lambda_n)|^2,$$

wobei

$$a(\lambda) = \mathfrak{M}\{f(x)e^{-i\lambda x}\}.$$

Hieraus findet man wie im Bohrschen Falle, dass für feste Exponenten $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ und variable Koeffizienten c_1, \dots, c_N der »Fehler« (8.11) am kleinsten ausfällt, falls

$$c_n = a(\lambda_n) \quad n = 1, \dots, N,$$

und dass die Besselsche Ungleichung

$$\sum_1^N |a(\lambda_n)|^2 \leq \mathfrak{M}\{|f(x)|^2\}$$

besteht. Von hier aus könnte man durch Nachahmung einer der vorhandenen Methoden zur schärferen Parsevalschen Gleichung

$$\sum_n |A_n|^2 = \mathfrak{M}\{|f(x)|^2\}$$

gelangen. Aber das haben wir nicht nötig. Denn wir haben bereits bewiesen, dass man $f(x)$ gleichmässig durch Exponentialpolynome approximieren kann. Also kann man $f(x)$ umso mehr im quadratischen Mittel durch Exponentialpolynome approximieren. Hieraus folgt aber die Parsevalsche Gleichung sehr leicht.

er nicht unendlich viele linear unabhängige Elemente enthält, ein endlich-dimensionaler komplex-zahliger Raum der analytischen Geometrie.

Es ist zu bemerken, dass unseren Betrachtungen die sogenannte »starke Topologie« des Raumes H zugrundeliegt. Eine andere Frage ist es, wie sich im Falle des Hilbertschen Raumes die Begriffe und Resultate gestalten, wenn man der Definition der Fastperiodizität allgemeiner die »schwache Topologie« zugrundelegen will. Diese Frage ist von nicht geringer Bedeutung, wir wollen aber im jetzigen Zusammenhang nicht auf sie eingehen.

§ 9. Die Funktionen von Muckenhoupt und Stepanoff.

9.1 Im vorliegenden Paragraphen bezeichnen wir die unabhängige Veränderliche mit t . Hingegen mit x bezeichnen wir den variablen Punkt einer festen messbaren Punktmenge P in einem endlichdimensionalen kartesischen Raume. Für festes $p \geq 1$ betrachten wir auf P alle komplexen Funktionen $f(x), g(x), \dots$, welche mitsamt der p -ten Potenz absolut integrierbar sind (nach Lebesgue); zwei Funktionen $f(x)$ die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden werden als nicht verschieden angesehen. Die Funktionen $f(x), g(x), \dots$ betrachten wir als Elemente ξ, η, \dots eines abstrakten Raumes HP . Wenn wir in HP die Addition zweier Elemente und die Multiplikation eines Elementes mit einer komplexen Konstanten durch gewöhnliche Addition und Multiplikation und den Betrag $|\xi|$ eines Element $\xi \equiv f(x)$ durch die Zahl

$$\left\{ \int_P |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

definieren, so ist HP ein (vollständiger) komplex-linearer Raum der bisher betrachteten Art. Die Vollständigkeit folgt insbesondere daraus, dass nach einem Satz von F. Riesz jeder Folge $\{f_n(x)\}$, für welche

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_P |f_m(x) - f_n(x)|^p dx = 0,$$

ein Element $\xi \equiv f(x)$ zugeordnet werden kann, für welches

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_P |f(x) - f_n(x)|^p dx = 0.$$

9.2 Eine abstrakte Funktion $\xi = \varphi(t)$ repräsentiert für jedes t ein gewisses Element $\xi \equiv f(x)$. Man kann dies auch so auffassen, dass die abstrakte Funktion $\xi = \varphi(t)$ durch eine »konkrete« komplexe Funktion $F(x, t)$ hervorgerufen wird, welche für jedes t , als Funktion von x betrachtet, mit dem Element $\xi \equiv f(x)$ übereinstimmt.

Damit nun die durch eine komplexe Funktion $F(x, t)$ erzeugte abstrakte Funktion $\varphi(t) \equiv F(x, t)$ eine fastperiodische Funktion der Klasse HP ist, sind die folgenden Eigenschaften der Funktion $F(x, t)$ erforderlich: 1) für jedes t aus $[-\infty, \infty]$ ist sie ein Element aus HP , 2) für jedes t ist

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_P |F(x, t + \tau) - F(x, t)|^p dx = 0,$$

und 3) zu jedem ε gibt es relativ dichte τ , für welche

$$\int_P |F(x, t + \tau) - F(x, t)|^p dx \leq \varepsilon^p \quad (-\infty < t < \infty).$$

Auf Grund unserer Ergebnisse aus § 6 existiert zu jedem λ der Mittelwert

$$(9.21) \quad a(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

und zwar ist er ein Element aus H^p , also eine wohlbestimmte Funktion in x . Nur für abzählbar viele Werte von λ ist dieser Mittelwert von Null verschieden, und es resultiert eine die abstrakte Funktion $\varphi(t)$ und demnach auch die konkrete Funktion $F(x, t)$ eindeutig bestimmende Fourierreihe in t :

$$(9.22) \quad \sum_n A_n(x) e^{iA_n t},$$

wobei $A_n(x)$ ein Element aus H^p ist. Auf Grund des Summationssatzes kann mit rationalen Koeffizienten $r_n^{(m)}$ eine Folge von endlichen Summen

$$(9.23) \quad S_m(x, t) = \sum_n r_n^{(m)} A_n(x) e^{iA_n t}$$

gebildet werden, derart dass zu jedem ε ein $N(\varepsilon)$ existiert, so dass für $m \geq N(\varepsilon)$

$$(9.24) \quad \int_P |F(x, t) - S_m(x, t)|^p dx \leq \varepsilon^p \quad (-\infty < t < \infty).$$

Eine kleine Unbequemlichkeit ist es, dass wir die Fourierkoeffizienten $A_n(x)$ bisher nur durch die ungewohnte Integration von abstrakten Funktionen definiert haben. Denn das Integral rechts in (9.21) bezieht sich auf die abstrakte Funktion $\varphi(t) e^{-i\lambda t}$. Aber diese Unbequemlichkeit lässt sich beheben. Man kann nämlich zeigen, vgl. Bochner [5], dass das Integral rechts in (9.21), welches ja ein Element aus H^p ist, nichts anderes als die Funktion

$$(9.25) \quad \frac{1}{T} \int_0^T F(x, t) e^{-i\lambda t} dt$$

ist, wobei dieses Integral von selbst für fast alle x vorhanden ist. Und aus unseren Ergebnissen ergibt sich von selbst, dass das Element (9.25) im Sinne des in H^p gültigen Konvergenzbegriffs gegen ein wohlbestimmtes Element aus H^p konvergiert, nämlich gegen das oben mit $a(\lambda)$ bezeichnete Element. Man kann also durchweg mit der Integration konkreter Funktionen auskommen.

9.3 Im Falle $p = 2$ ist der Raum H^p von der in § 8 betrachteten speziellen Struktur, wenn man das innere Produkt der Elemente $\xi \equiv f(x)$, $\eta \equiv g(x)$ als die Zahl

$$\int_P f(x) \bar{g}(x) dx$$

definiert. Also gilt jetzt auch die Parsevalsche Gleichung, welche »konkret« geschrieben lautet:

$$\sum_n \int_P |A_n(x)|^2 dx = \mathfrak{M}_t \left\{ \int_P |F(x, t)|^2 dx \right\}.$$

Nun, diese Funktionen sind zuerst von Muckenhoupt [1] definiert und untersucht worden, und wir wollen sie auch im Falle eines beliebigen $p \geq 1$ nach Muckenhoupt benennen. Herr Muckenhoupt erörtert nicht etwa abstrakte Funktionen, sondern er leitet seine Resultate durch Nachahmung der für Bohrsche Funktionen anwendbaren Methoden her.

Herr Muckenhoupt macht von seinen Funktionen eine sehr interessante Anwendung auf die klassische Schwingungsgleichung von Bernoulli; wir wollen auf sein Ergebnis hier nicht eingehen, sondern es in einer nachfolgenden Arbeit über »Harmonische Analyse abstrakter Funktionen« nach den allgemeinen Gesichtspunkten der vorliegenden Arbeit in einen allgemeinen Satz über Eigenwertprobleme einbauen.

9.4 Einen eigentümlichen Spezialfall der Muckenhouptschen Funktionen bilden die Funktionen von Stepanoff.

Die Punktmenge P sei das lineare Intervall $0 \leq x \leq 1$, und die komplexe Funktion $F(x, t)$ hänge nur von $x + t$ ab. D. h. es sei $F(x, t) \equiv f(x + t)$, wobei also $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall mitsamt der p -ten Potenz nach Lebesgue integrierbar ist. Dass $F(x, t)$ fastperiodisch ist, besagt, dass

$$(9.41) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^1 |f(x + t + \tau) - f(x + t)|^p dx = 0$$

und dass zu jedem ε relativ dichte Zahlen τ vorhanden sind, für welche

$$(9.42) \quad \int_0^1 |f(x+t+\tau) - f(x+t)|^p dx \leq \varepsilon^p.$$

Die Bedingung (9.41) ist nach einem Satz von Lebesgue immer von selbst erfüllt und die übrigbleibende Bedingung (9.42) ist es gerade, welche Herr Stepanoff (im Falle $p=1$ und $p=2$) seinen Funktionen $f(x)$ auferlegt hat, damit sie in seinem Sinne fastperiodisch sind. Man könnte auf diese Weise wohl auch die Weylschen Funktionen mit unseren abstrakten Funktionen in Zusammenhang bringen (vgl. hierzu auch Ursell [1]), doch wollen wir hierauf nicht eingehen; sondern wir wollen noch kurz die wichtigsten Eigenschaften der Stepanoffschen Funktionen von unserem Zugangspunkt aus deduzieren. Offenbar ist die Summe zweier Funktionen aus (der Stepanoffschen Klasse) S^p wiederum eine Funktion aus S^p .

Wenn man der Funktion $f(x)$ aus S^p die Funktion $F(x, t) \equiv f(x+t)$ zuordnet und die Beziehung

$$\int_0^T F(x, t) e^{-i\lambda t} dt = e^{i\lambda x} \int_x^{x+T} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

benutzt, so findet man, dass für jedes λ der Mittelwert

$$a^*(\lambda) = \mathfrak{M}\{f(t) e^{-i\lambda t}\}$$

existiert, und dass zwischen der komplexen Grösse $a^*(\lambda)$ und der durch (9.21) definierten abstrakten Grösse $a(\lambda)$ die Beziehung

$$a(\lambda) = a^*(\lambda) e^{i\lambda x}$$

besteht. Daraus folgert man, dass die (komplexe) Funktion $f(x)$ eine Fourierreihe mit denselben Exponenten wie die abstrakte Funktion $\varphi(t) \equiv F(x, t)$ besitzt, und dass zwischen der Fourierreihe

$$\sum_n A_n e^{iA_n t}$$

von $f(t)$ und der Fourierreihe (9.22) von $\varphi(t)$ die einfache Relation

$$A_n(x) = A_n e^{i A_n x}$$

besteht. Jedem Approximationspolynom (9. 23) entspricht für $f(t)$ das Approximationspolynom

$$S_m(t) = \sum_n r_n^{(m)} A_n e^{i A_n t},$$

und die Relation (9. 24) ergibt die Relation

$$\int_0^1 |f(x+t) - S_m(x+t)|^p dx \leq \varepsilon^p \quad \begin{matrix} (-\infty < t < \infty) \\ m \geq N(\varepsilon) \end{matrix}$$

Also leisten für die Stepanoffschen Funktionen wiederum die algorithmisch bestimmbareren Fejérpolynome eine gleichmässige Approximation im Sinne der Stepanoffschen Abstanddefinition.

In ähnlicher Weise kann man viele Ergebnisse über Bohrsche Funktionen, z. B. die Sätze aus § 7, auf dem Wege über die abstrakten Funktionen für die Stepanoffschen Funktionen gewinnen. Es würde aber ermüden, sie ohne gleichzeitige Anwendungen nacheinander aufzuzählen.

Zitierte Literatur.

- A. S. BESICOVITCH [1], Almost periodic functions, Cambridge, University Press (1932).
 A. S. BESICOVITCH and H. BOHR [1], Some remarks on generalisations of almost periodic functions, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk fysiske Meddelelser VIII, 5 (1927).
 S. BOCHNER [1], Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Mathem. Annalen 96 (1926), 119—147.
 — [2], Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. Mathem. Annalen 96 (1926), 383—409.
 — [3], Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. Erscheint in den Fundamenta Mathematicae, Bd. XX.
 — [4], Abstrakte Funktionen und die Besselsche Ungleichung. Erscheint in den Göttinger Nachrichten.
 — [5], Eine Bemerkung zum Satz von Fubini. Erscheint in den Fundamenta Mathematicae.
 H. BOHR [1], Fastperiodische Funktionen. In: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer 1932, Bd. 1.

- H. BOHR [2], Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. *Acta mathematica* 46 (1925), 101—214.
- H. BOHR und B. JESSEN [1], Über fastperiodische Bewegungen auf einem Kreise, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e matematiche, Serie II*, 1 (1932), 385—398.
- I. FAVARD [1], Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques, *Acta mathematica* 51 (1928), 31—81.
- L. M. GRAVES [1], Riemann Integration and Taylor's Theorem, *Transactions of the American Mathematical Society* 29 (1927), 163—177.
- M. KERNER [1], Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis, *Prace matematyczno-fizyczne*, 40 (1932), 47—67.
- C. F. MUCKENHOUPT [1], Almost periodic functions and vibrating systems. *Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology*, 8 (1929), 163—198.
- F. PETER und H. WEYL [1], Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. *Mathematische Annalen* 97 (1927), 737—757.
- M. H. STONE [1], Linear transformations in Hilbert space and their application to analysis. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, New-york (1932).
- H. D. URSELL [1], Parseval's Theorem for almost periodic functions. *Proceedings of the London Mathematical Society, Series (2)*, 32 (1931), 402—440.
-