SUR UNE FAMILLE DE POLYNÔMES ET CERTAINS DÉVELOPPEMENTS DE LA FONCTION $x^{-m}e^x$.

PAR

RENÉ LAGRANGE.

à DIJON.

Introduction Considérons la fonction e^x et son développement en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Au lieu de celui-ci, considérons la série voisine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)}$, et étudions la différence

$$(1) \qquad e^x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)}.$$

Plus généralement encore, remplaçons x par xy, et multiplions la différence en question par $\Gamma(m+1)y^{-m-1}$. L'expression

$$(2) \qquad \frac{\Gamma(m+1)e^{xy}}{y^{m+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n-1}x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}$$

ainsi formée apparaît comme représentant une erreur résultant de ce que m diffère de 0. Bien entendu, x, y, m sont des nombres complexes quelconques. D'autre part, cette différence s'écrit

$$(3) \qquad x^{m+1}\int_0^{\infty} e^{-xyu}(1+u)^m\,du = x^{m+1}\varphi(xy, -m),$$

où

$$\varphi(x, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-xu}(1+u)^{-\alpha}\,du$$

se rattache étroitement à la fonction eulérienne de deuxième espèce et à la fonction »log. intégral».

Nous nous proposons de montrer dans cette note que $x^{m+1}\varphi(xy, -m)$ est développable en série de facultés de y lorsque $\Re(y)>0$ et $|e^x-1|>1$; les coefficients de ce développement sont des polynômes $\sigma_n^m(x)$, dont les coefficients s'expriment à l'aide de nombres rationnels σ_n^m, dont les valeurs, pour m entier positif, interviennent dans la transformation classique d'une série asymptotique en série de facultés, savoir

$$\frac{m!}{y^m}=\sum_{s=m}^{\infty}\frac{\sigma_s^m\, s!}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)} \qquad \Re(y)>0,\ m \text{ entier } >0.$$

1. n désignant un nombre entier positif, on a

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n \log t}{dt^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{t^n},$$

tandis que le premier membre se réduit à $\log t$ pour $n=0$. Posons donc $x=-\log t$, et formons la suite des quantités

$$\sigma_n(x)=\frac{(-1)^n t^n}{n!}\frac{d^n x}{dt^n} \qquad n=0,1,2,\ldots; \tag{4}$$

ses termes sont

$$\sigma_0(x)=x,\quad \sigma_1(x)=1,\quad \sigma_2(x)=\frac{1}{2},\ \ldots,\ \sigma_n(x)=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

ce que nous désignerons par la notation des suites

$$[\sigma(x)]:\ x,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots. \tag{5}$$

Plus généralement, nous poserons

$$\sigma_n^m(x)=\frac{(-1)^n t^n}{n!}\frac{d^n x^m}{dt^n} \qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

où m désigne un nombre quelconque, de sorte que, d'après une propriété connue, la suite $[\sigma^m(x)]$ n'est rien autre que la puissance m^e de la suite (5). Elle est uniforme dans le plan de la variable x coupé par l'axe réel négatif.

La fonction représentative de $[\sigma(x)]$ étant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x)\, u^n = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} = x - \log(1-u),$$

celle de $[\sigma^m(x)]$ est $[x - \log(1-u)]^m$, de sorte que

$$(7) \qquad \sigma_n^m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+} \frac{[x-\log(1-u)]^m}{u^{n+1}}\, du = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\gamma+} \frac{[x-\log(1+u)]^m}{u^{n+1}}\, du,$$

où γ désigne un cercle infinitésimal de centre $u = 0$. Le numérateur de l'integrandum est développable en série entière de $\log(1+u)$, et l'on a encore

$$\sigma_n^m(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (-1)^k x^{m-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+} \frac{\log^k(1+u)}{u^{n+1}}\, du.$$

Cette intégrale est nulle dès que k surpasse n, tandis que, pour les valeurs de k inférieures ou égales à n,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+} \left[\frac{\log(1+u)}{u}\right]^k \frac{du}{u^{n-k+1}} = \overline{B}_{n-k}^{(-k)}$$

sont des nombres remarquables, déjà étudiés dans un précédent mémoire[1], et tels que $[\overline{B}_n^{(-k)}]$ soit la puissance k^e de la suite réduite $[(0, 1)'_n]$, c'est à dire de

$$[\overline{B}^{(-1)}]:\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots \frac{(-1)^n}{n+1},\ \ldots.$$

On a ainsi

$$(8) \qquad \sigma_n^m(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{k} \overline{B}_{n-k}^{(-k)} x^{m-k}$$

C'est un polynôme, non entier en général, uniforme dans le plan coupé par le demi-axe réel $x \leq 0$; celui-ci correspond, dans le plan de la variable t, à la coupure $t \geq 1$. Nous poserons, pour des commodités de notation,

$$(9) \qquad \overline{B}_n^{(-k)} = (-1)^n \sigma_{n+k}^k,$$

[1] Cf. René Lagrange, »Mémoire sur les suites de polynômes», Acta math., t. 51, p. 230 et 240.

de sorte que

(8′) $$\sigma_n^m(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \sigma_n^k x^{m-k}.$$

On peut établir d'autres relations récurrentes remarquables entre les polynômes $\sigma_n^m(x)$ et entre les nombres σ_n^k. Pour $n \geq 1$, on a en effet

$$\sigma_n^m(x) = \frac{(-1)^n t^n}{n!} \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} x^m}{dt^{n-1}}\right) = \frac{-t^n}{n} \frac{d}{dt}\left[t^{-n+1} \sigma_{n-1}^m(x)\right],$$

d'où l'on déduit tout de suite

(10) $$n\,\sigma_n^m(x) - (n-1)\,\sigma_{n-1}^m(x) = \frac{d\,\sigma_{n-1}^m(x)}{dx} \qquad n \geq 1.$$

En exprimant les polynômes à l'aide de (8′), on obtient, entre les σ_n^k, la relation de récurrence

(11) $$n\,\sigma_n^k = (n-1)\,\sigma_{n-1}^k + k\,\sigma_{n-1}^{k-1} \qquad n, k \geq 1,$$

avec

$$[\sigma_n^1]:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\ \frac{1}{n},\ \cdots \qquad n \geq 1.$$

(11) permet de former, plus aisément que par les élévations aux puissances successives de la suite $[\overline{B}^{(-1)}]$, les $\overline{B}_n^{(-k)}$ d'indice supérieur entier négatif. Il est clair que les σ_n^k sont rationnels et positifs. Le tableau suivant contient les premiers d'entre eux, avec $1 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

En écrivant que $[\overline{B}^{(-k)}] = [\overline{B}^{(-k+1)}] \cdot [\overline{B}^{(-1)}]$, on a encore

$$\overline{B}_n^{(-k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{B}_\nu^{(-1)}\, \overline{B}_{n-\nu}^{(-k+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}\, \overline{B}_{n-\nu}^{(-k+1)},$$

et par suite, pour les σ_n^k,

(12) $$\sigma_n^k = \sum_{\nu=1}^{n-k+1} \frac{1}{\nu}\, \sigma_{n-\nu}^{k-1}.$$

Le tableau que nous avons formé suggère une relation bien remarquable entre les éléments d'une même ligne, savoir

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	$\frac{1}{2}$	1								
3	$\frac{1}{3}$	1	1							
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{3}{2}$	1						
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{4}$	2	1					
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{137}{180}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{5}{2}$	1				
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{29}{15}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{25}{6}$	3	1			
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{293}{560}$	$\frac{469}{240}$	$\frac{967}{240}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{7}{2}$	1		
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{69}{140}$	$\frac{28901}{15120}$	$\frac{267}{60}$	$\frac{1069}{144}$	9	$\frac{91}{12}$	4	1	
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{5869}{12600}$	$\frac{6277}{3360}$	$\frac{129827}{37800}$	$\frac{285}{32}$	$\frac{3013}{240}$	$\frac{105}{8}$	$\frac{29}{3}$	$\frac{9}{2}$	1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sigma_n^k = 0 \qquad n = 2, 3, 4 \ldots. \tag{13}$$

Cette identité étant vraie pour $n = 2$, supposons qu'elle le soit pour l'indice $n - 1$; il résulte alors de (11) que

$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sigma_n^k = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sigma_{n-1}^k + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sigma_{n-1}^{k-1},$$

où l'on a tenu compte de ce que σ_{n-1}^n et σ_{n-1}^0 doivent être remplacés par 0; il vient donc

$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sigma_n^k = (n-2) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \sigma_{n-1}^{k-1},$$

qui démontre (13) par récurrence. Pour $n = 1$, le premier membre de cette identité se réduit à $-\sigma_1^1 = -1$; enfin, si l'on observe qu'on peut assimiler la suite $[\sigma_n^0] = [(-1)^n \overline{B}_n^{(0)}]$ à la suite unité, c'est à dire que les σ_n^0 sont tous nuls, sauf $\sigma_0^0 = 1$, (13) s'écrit encore

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sigma_n^k = \varepsilon_{1,n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

avec $\varepsilon_{1,1} = 1$ et $\varepsilon_{1,n} = 0$ pour $n \neq 1$. Avec les $\overline{B}_n^{(-k)}$, ceci s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overline{B}_{n-k}^{(-k)} = \varepsilon_{1,n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14'}$$

2. **Théorème.** *Les nombres σ_n^k satisfont à l'inégalité*

$$\sigma_n^k \leq \frac{k}{n}(2\, L\, n)^{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Cette inégalité est évidente pour $k = 1$. Pour la démontrer par récurrence, ajoutons les relations (11) relatives aux valeurs $n, n-1, n-2, \ldots, k$ de l'indice inférieur; il vient

$$\sigma_n^k = \frac{k}{n}(\sigma_{k-1}^{k-1} + \sigma_k^{k-1} + \cdots + \sigma_{n-1}^{k-1}), \tag{16}$$

de sorte que, si l'on admet la validité de (15) pour l'indice k, (16), où l'on remplace k par $k + 1$, entraîne

$$\sigma_n^{k+1} \leq \frac{k(k+1)}{n} 2^{k-1} \left\{ \frac{1}{k} [L\, k]^{k-1} + \frac{1}{k+1} [L(k+1)]^{k-1} + \cdots + \frac{1}{n-1} [L(n-1)]^{k-1} \right\};$$

il suffit donc de montrer que la somme entre accolades, que nous désignons par G, est inférieure à $\frac{2}{k}(L\, n)^k$. La fonction $y = \frac{1}{x}(L\, x)^{k-1}$ croît avec x dans l'intervalle $k \leq x \leq e^{k-1}$, puis décroît jusqu'à 0 quand x continue à croître jusqu'à l'infini. Par conséquent, si $n \leq e^{k-1}$, on a

$$G < \int_k^n \frac{(L\, x)^{k-1}}{x} d\, x = \frac{(L\, n)^k - (L\, k)^k}{k} < \frac{(L\, n)^k}{k}.$$

Si $n > e^{k-1}$, on peut écrire

$$G < \frac{(k-1)^{k-1}}{e^{k-1}} + \int_k^{n-1} \frac{(Lx)^{k-1}}{x}\, dx < \left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1} + \frac{[L(n-1)]^k}{k},$$

où le premier terme au second membre représente l'aire du rectangle, de largeur 1, qui a pour hauteur le maximum de y; compte tenu de $k-1 < Ln$, on a donc

$$G < \left(\frac{Ln}{e}\right)^{k-1} + \frac{[L(n-1)]^k}{k} < 2\,\frac{(Ln)^k}{k},$$

car e^{k-1} est essentiellement supérieur ou égal à k. L'inégalité que nous avions en vue est ainsi confirmée.

3. *Calcul de* $t^{-y} \int_0^t \sigma_n^m(x)\, t^{y-1}\, dt$. — Cette intégrale a sûrement un sens sous la condition $\Re(y) > 0$ et si t n'est pas sur la coupure $t \geq 1$, c'est à dire si x est dans le plan coupé par la demi-droite $x \leq 0$. En désignant cette intégrale par $I(x, y)$, (6) permet de l'écrire

$$I(x, y) = \frac{(-1)^n t^{-y}}{n!} \int_0^t t^{n+y-1} \frac{d^n}{dt^n}\left(\log \frac{1}{t}\right)^m dt,$$

et n intégrations par parties successives la transforme en

$$I(x, y) = \frac{(-1)^n t^{-y}}{n!} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1}(n+y-1)(n+y-2)\ldots(n+y-s+1)\, t^{n+y-s}\,\cdot$$

$$\frac{d^{n-s}}{dt^{n-s}}\left(\log \frac{1}{t}\right)^m + \frac{(n+y-1)(n+y-2)\ldots y}{n!}\, t^{-y} \int_0^t t^{y-1}\left(\log \frac{1}{t}\right)^m dt.$$

En exprimant les dérivées de $\left(\log \frac{1}{t}\right)^m$ à l'aide des polynômes $\sigma_\nu^m(x)$ on a donc

$$I(x, y) = -\sum_{s=1}^{n} \frac{(y+n-1)(y+n-2)\ldots(y+n-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}\, \sigma_{n-s}^m(x) + \tag{17}$$

$$+ \binom{y+n-1}{n} t^{-y} \int_0^t t^{y-1}\left(\log \frac{1}{t}\right)^m dt.$$

Au chemin d'intégration rectiligne $(0, t)$ correspond, dans le plan de la variable $x = -\log t$, la demi-droite parallèle à l'axe reél qui joint l'image de x au point $x + \infty$, de sorte que

$$\int_0^t t^{y-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^m dt = \int_x^{x+\infty} e^{-xy}x^m\,dx.$$

Prenons $u = xy$ pour variable d'intégration; il vient encore

$$(18)\qquad \binom{y+n-1}{n} t^{-y}\int_0^t t^{y-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^m dt = \binom{y+n-1}{n} t^{-y}y^{-m-1}\int_{xy}^{xy+\infty} e^{-u}u^m\,du,$$

où le chemin décrit par l'image de u est la demi-droite d'origine xy qui fait, avec l'axe réel positif, un angle aigu égal à l'argument de y; cette demi-droite n'a aucun point commun avec l'axe réel négatif $u \leq 0$ pourvu qu'en outre des conditions déjà imposées x et y vérifient l'inégalité[1] $|\arg x + \arg y| < \pi$; dans ces conditions, on ne change pas la valeur de l'intégrale en faisant pivoter cette demi-droite autour de son origine pourvu que l'argument de sa direction reste aigu, et, en particulier, en la rendant parallèle à l'axe réel comme il est écrit dans l'expression (18).

Considérons maintenant la fonction

$$(19)\qquad \psi(x;\, m) = e^x\int_x^{x+\infty} e^{-u}u^m\,du = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha}(x+\alpha)^m\,d\alpha.$$

C'est une fonction de x définie uniformément, quel que soit m, dans le demi-plan de cette variable coupé par le demi-axe réel négatif. Remarquons en passant que, lorsque $\Re(x) > 0$, on peut substituer au chemin d'intégration $(x, x+\infty)$ le chemin $(x, x\infty)$, et poser $u = x(1+\alpha)$; il vient alors

$$\psi(x;\, m) = x^{m+1}\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}(1+\alpha)^m\,d\alpha,$$

où l'intégrale est la fonction $\varphi(x, -m)$ étudiée par M. Tauber dans un mémoire

---

[1] On choisit naturellement les déterminations vérifiant $|\arg x| < \pi$, $|\arg y| < \frac{\pi}{2}$.

relativement récent[1], et qui se rattache étroitement aux fonctions gamma et log. intégral. Quoi qu'il en soit, (17) peut être considéré comme fournissant un développement de la fonction gamma incomplète, dont $I(x, y)$ représente le reste, savoir

$$\binom{y+n-1}{n} y^{-m-1}\psi(xy;\, m) = \sum_{s=1}^{n} \frac{(y+n-1)(y+n-2)\ldots(y+n-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)} \sigma_{n-s}^m(x) + I(x, y),$$

on encore, après multiplication des deux membres par $y : \binom{y+n-1}{n}$ et changement de s en $n-s$ dans la somme,

$$(20) \qquad \frac{\psi(xy;\, m)}{y^m} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)} \sigma_s^m(x) + \\ + \frac{n!\, t^{-y}}{(y+1)(y+2)\ldots(y+n-1)} \int_0^t \sigma_n^m(x)\, t^{y-1}\, d\, t.$$

Les conditions de validité sont toujours $|\arg x| < \pi$, $|\arg y| < \frac{\pi}{2}$, $|\arg x + \arg y| < \pi$.

4. Supposons maintenant que n augmente indéfiniment. (20) donne naissance à un développement en série de facultés, relativement à y, de la fonction au premier membre, pourvu que le reste tende vers zéro. Etant donné que

$$\frac{n!}{(y+1)(y+2)\ldots(y+n-1)} = \frac{\Gamma(y+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+y)} = O(n^{1-y}),$$

et que $\Re(y) > 0$, nous sommes amenés à étudier si $n^{1-\varepsilon}\sigma_n^m(x)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ε désignant une constante positive.

Admettons tout d'abord que m soit un nombre entier positif. $\sigma_n^m(x)$ est un polynôme entier de degré m, qu'on peut écrire

$$\sigma_n^m(x) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \sigma_n^k\, x^{m-k},$$

[1] Cf. TAUBER, »Konvergenzprobleme in der Theorie der Gammafunktion», Acta math., 1931, t. 57, p. 447—458.

car, pour $k = 0$, le coefficient σ_n^0 dans l'expression (8') est nul si $n \geq 1$. Grâce à l'inégalité (15), on a donc

$$(21) \qquad \left| \sigma_n^m(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{k}{n} (2 L n)^{k-1} |x|^{m-k} = \frac{m}{n} (2 L n + |x|)^{m-1},$$

d'où résulte immédiatement

$$(22) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{1-\varepsilon} \sigma_n^m(x) = 0,$$

et cela sans aucune des restrictions que nous avons imposées à x dans le cas général. D'autre part, (19) s'écrit ici

$$\psi(x; m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha} \alpha^k d\alpha = \sum_{k=0}^{m} m(m-1)\ldots(m-k+1) x^{m-k},$$

et, par suite, (20) devient

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{y^k} x^{m-k} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!\, \sigma_s^m(x)}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)} + R_n(x, y),$$

où le reste $R_n(x, y)$ est majoré, en vertu de (21), suivant l'inégalité

$$|R_n(x, y)| < m \left| \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+y)} \right| |e^{xy}| \int_x^{x+\infty} (2 L n + |\xi|)^{m-1} |e^{-y\xi}| \, d\xi.$$

En désignant par $x + u$ la variable ξ d'intégration, il vient encore

$$(24) \qquad |R_n(x, y)| < m \left| \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+y)} \right| \int_0^{+\infty} (2 L n + |x| + u)^{m-1} e^{-u \Re(y)} \, du;$$

décomposons l'intervalle d'intégration en 2 parties, $(0, 2 L n + |x|)$ et $(2 L n + |x|, +\infty)$, sur chacune desquelles nous remplaçons $2 L n + |x| + u$ respectivement par $2(2 L n + |x|)$ et $2u$; nous obtenons ainsi la nouvelle majoration

$$|R_n(x, y)| < 2^{m-1} m \left| \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+y)} \right| \left\{ (2 L n + |x|)^{m-1} \int_0^{2 L n + |x|} e^{-u \Re(y)} du + \int_{2 L n + |x|}^{+\infty} u^{m-1} e^{-u \Re(y)} du \right\},$$

et enfin, en majorant encore les intégrales par leurs valeurs calculées sur l'intervalle $(0, +\infty)$,

$$(35) \qquad |R_n(x, y)| < 2^{m-1} m \left| \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+y)} \right| \left\{ \frac{(2 L n + |x|)^{m-1}}{\Re(y)} + \frac{\Gamma(m)}{\Re(y)^m} \right\}.$$

Les conditions de validité sont m entier > 0, $\Re(y) > 0$. En particulier, pour $x = 0$, on a

$$(25') \qquad |R_n(0, y)| < 2^{m-1} m \left| \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+y)} \right| \left\{ \frac{(2 L n)^{m-1}}{\Re(y)} + \frac{\Gamma(m)}{\Re(y)^m} \right\}.$$

Quand n croît indéfiniment, $R_n(x, y)$ tend uniformément vers zéro dans tout domaine borné du plan de la variable x, et (23) fournit le développement en série de facultés de y

$$(26) \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{y^k} x^{m-k} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, \sigma_s^m(x)}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)}$$

dont le demi-plan de convergence est effectivement le domaine de validité $\Re(y) > 0$. En particulier, pour $x = 0$, il s'écrit

$$(27) \qquad \frac{m!}{y^m} = \sum_{s=m}^{\infty} \frac{s!\, \sigma_s^m}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)} \qquad \Re(y) > 0.$$

C'est le développement bien connu, en série de facultés, des puissances entières positives de la variable complexe $\frac{1}{y}$; (26) s'en déduit d'ailleurs immédiatement. Mais nous avons obtenu en même temps une limite supérieure du reste, sous la forme (25').

5. Supprimons maintenant l'hypothèse restrictive que nous avions faite sur m. C'est de l'intégrale (7) que nous allons déduire une valeur majorante pour $\sigma_n^m(x)$. L'integrandum admet pour points singuliers le pôle $u = 0$ et les points critiques $u = -1$, $u = e^x - 1$. Admettons que $|e^x - 1| > 1$, c'est à dire $\Re(t) < \frac{1}{2}\cdot$

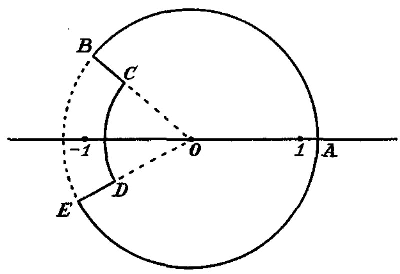

Figure 1.

On peut alors tracer un cercle de centre o et de rayon égal à $1+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), et tel que $u = -1$ soit le seul point critique intérieur; on ne change pas la valeur de l'intégrale (7) en substituant au cercle γ le contour $ABCDEA$, symétrique par rapport à l'axe réel, constitué par l'arc de cercle EAB de rayon $1+\varepsilon$, par un arc de cercle concentrique CD, de rayon $1-\varepsilon'$ ($\varepsilon' > 0$), et enfin par les 2 segments de rayon vecteur BC, DE qui joignent les extrémités de ces arcs. On suppose également que ε et ε' sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, ainsi que l'angle d'ouverture BOE, que nous désignons par 2α.

Lorsque u décrit le cerle $|u| = 1$, posons $u = e^{i\theta}(-\pi < \theta < \pi)$; il vient

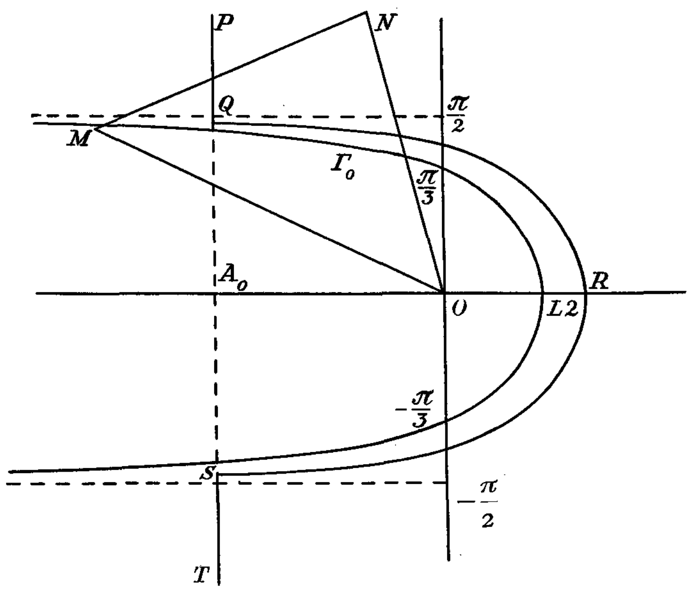

Figure 2.

$\log(1+u) = L\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta}{2}$, de sorte que l'image de $\log(1+u)$ décrit la courbe Γ_0 tracée sur la figure 2. Si donc l'on admet que le domaine de variation D de la variable x est à une distance non nulle de Γ_0, et tout entier dans un demi-plan $\Re(x) \geq A_0$ (A_0 fini), ce domaine jouit de la même propriété relativement à la courbe Γ décrite par $\log(1+u)$ quand u parcourt $ABCDEA$, pourvu que $\varepsilon, \varepsilon'$, c'est à dire $\frac{1}{n}$, soient assez petits. En outre, D est tout entier du côté de la convexité de Γ_0, en vertu de l'inégalité $|e^x - 1| > 1$. Désignons par M l'image de $\log(1+u)$, et par N celle de x. Quand n croît indéfiniment, M est infiniment voisin de Γ_0, tout du moins tant qu'il reste à droite de la droite fixe $PQST$ d'abscisse A_0; N reste à droite d'une frontière ayant la forme de la courbe $PQRST$. Ceci posé, soit η une constante positive, arbitrairement petite. Le lieu de N défini par l'inégalité $\frac{ON}{MN} > 1 + \eta$ est tout entier hors du domaine D, pourvu que M soit suffisamment loin sur Γ; de même, le lieu de M défini par l'inégalité $\frac{MO}{MN} > 1 + \eta$ ne contient aucun point de Γ pourvu que N soit suffisamment éloigné de O dans D. Par conséquent, pourvu que M soit suffisamment loin sur Γ et N suffisamment loin dans D, on a

$$\frac{MO}{MN} + \frac{ON}{MN} \leq 2(1 + \eta),$$

donc

$$1 \leq \frac{OM + ON}{MN} = \frac{|x| + |\log(1 + u)|}{|x - \log(1 + u)|} \leq 2(1 + \eta);$$

par suite, si $m' = \Re(m)$, il existe une constante C fonction de A_0 et de la plus courte distance l de D à Γ, et un nombre positif R tels que l'on ait

$$|[x - \log(1 + u)]^m| < C[|x| + |\log(1 + u)|]^{m'}, \tag{28}$$

pourvu que $|x| > R$ et $\Re[\log(1 + u)] < -R$. Il est clair qu'on peut modifier C de façon que la validité de (28) subsiste dans le domaine borné de x où l'on a $|x| \leq R$, quel que soit $\log(1 + u)$ sur Γ, ainsi que dans le domaine borné de $\log(1 + u)$ où l'on a $\Re[\log(1 + u)] \geq -R$, $\log(1 + u)$ sur Γ, quel que soit x dans D, puisque MN ne devient pas inférieur à l, et que OM, ON restent supérieurs ou égaux[1] à $L2$. Cette nouvelle constante C ne dépend que de l et A_0.

Ces résultats obtenus, il est aisé de déterminer des valeurs majorantes de l'intégrale (7) prise sur les différentes parties du contour $ABCDEA$. Sur l'arc EAB, $|\log(1 + u)|$ est au plus égal à $|L\varepsilon| + \pi$, et a une borne inférieure au moins égale à $L2$; on a donc soit une inégalité de la forme

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{EAB} \frac{[x - \log(1 + u)]^m}{u^{n+1}}\,du\right| < \frac{C}{(1 + \varepsilon)^n}[|L\varepsilon| + |x|]^{m'} \quad m' > 0, \tag{29}$$

soit

[1] Un calcul élémentaire montre en effet que, sur Γ_0, $\overline{OM}^2 = \left[L\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 + \frac{\theta^2}{4}$ est minimum pour $\theta = 0$.

$$(29') \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{EAB}\frac{[x-\log(1+u)]^m}{u^{n+1}}\,du\right| < \frac{C}{(1+\varepsilon)^n}[L\,2+|x|]^{m'} \qquad m'<0.$$

Sur l'arc CD, $|\log(1+u)|$ est équivalent à $|L\varepsilon'|$, tout au moins lorsque α et ε' sont du même ordre, et l'on peut écrire, quel que soit le signe de m',

$$(30) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{CD}\frac{[x-\log(1+u)]^m}{u^{n+1}}\,du\right| < \frac{C\alpha}{\pi}\,\frac{1}{(1-\varepsilon')^n}[|L\varepsilon'|+|x|]^{m'},$$

tout au moins avec une valeur de C plus grande que dans (28). Prenons $\varepsilon=\frac{1}{n}Ln$, $\varepsilon'=\alpha=\frac{1}{n}\cdot$ $|L\varepsilon|$ et $|L\varepsilon'|$ sont équivalents à Ln, et l'on peut substituer à (29), (29'), (30) les inégalités

$$(31) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{EAB}\frac{[x-\log(1+u)]^m}{u^{n+1}}\,du\right| < \begin{cases}\dfrac{C}{n}[Ln+|x|]^{m'} & m'>0,\\[2ex] \dfrac{C}{n}[L\,2+|x|]^{m'} & m'<0,\end{cases}$$

$$(32) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{CD}\frac{[x-\log(1+u)]^m}{u^{n+1}}\,du\right| < \frac{C}{n}[Ln+|x|]^{m'},$$

où C désigne une constante convenable, pas nécessairement la même que dans les inégalités (29), (29'), (30).

Le long de BC et DE, posons $u=-(1+\lambda)e^{\pm i\alpha}$; λ varie entre $-\varepsilon'$ et ε et l'on a

$$|1+u|^2=\lambda^2+4(1+\lambda)\sin^2\frac{\alpha}{2}\sim\lambda^2+\alpha^2;$$

par conséquent, si $|\lambda|\leq\alpha$, $|L|1+u||$ est de l'ordre de $|L\alpha|$, c'est à dire de Ln, et, si $|\lambda|>\alpha$, $|L|1+u||$ est de l'ordre de $|L\lambda|$, lui-même compris entre Ln et $Ln-LLn$, donc encore de l'ordre de Ln. Il existe donc une constante C telle que l'on ait, sur BC et DE,

$$|[x-\log(1+u)]^m|<C[Ln+|x|]^{m'},$$

et l'on peut écrire, en changeant au besoin les valeurs successives de C,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{BC+DE} \frac{[x - \log(1+u)]^m}{u^{n+1}} du \right| < C[Ln + |x|]^{m'} \int\limits_{-\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{n+1}} < \tag{33}$$

$$< \frac{C}{n} \frac{[Ln + |x|]^{m'}}{(1-\varepsilon')^n} < \frac{C}{n} [Ln + |x|]^{m'}.$$

L'addition membre à membre des inégalités (31), (32), (33) donne enfin

$$|\sigma_n^m(x)| < \frac{C}{n} \{ [Ln + |x|]^{m'} + [L2 + |x|]^{m'} \}, \tag{34}$$

sous la seule condition que x soit dans D, et C ne dépendant que de ce domaine, tout au moins dès que n est suffisamment grand.

Cette inégalité est de forme analogue à (21), et l'on en déduit pour $R_n(x, y)$ une inégalité analogue à (24), de la forme

$$|R_n(x,y)| < \tag{35}$$

$$< C \left| \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+y)} \right| \int\limits_0^\infty [(Ln + |x| + u)^{m'} + (L2 + |x| + u)^{m'}] e^{-u\Re(y)} du.$$

Observons que dans le cas où m' est négatif, on a tenu compte de ce que $|\xi| = |x + u|$ a une borne inférieure positive sur la demi-droite $(x, x + \infty)$, de sorte que les rapports $\frac{Ln + |x+u|}{Ln + |x| + u}$ et $\frac{L2 + |x+u|}{L2 + |x| + u}$ sont compris entre deux nombres positifs fixes. Les conditions de validité sont

$$|e^x - 1| > 1, \quad \Re(y) > 0, \quad |\arg x + \arg y| < \pi. \tag{36}$$

C étant inconnu, il est sans intérêt de chercher une valeur majorante de l'intégrale comme on a fait pour établir (25), et il nous suffit ici de constater sur (35) que $R_n(x, y)$ tend uniformément vers 0 avec $\frac{1}{n}$ dans tout domaine fermé et borné de variation de x et y, vérifiant les inégalités (36).

On déduit ainsi de (20) le développement

$$y^{-m} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha}(xy + \alpha)^m d\alpha = \sum_{s=0}^\infty \frac{s!\,\sigma_s^m(x)}{(y+1)(y+2)\dots(y+s)}, \tag{37}$$

qui est une série de facultés relativement à y, et une série de polynômes relativement à x, uniformément convergente dans tout domaine de la nature susdite. Il résulte encore de (34) que cette série converge absolument, et même normalement dans un tel domaine. L'abscisse de convergence de cette série de facultés est d'ailleurs effectivement l'axe imaginaire $\Re(y) = 0$, comme il résulte de la nature de la fonction au premier membre.

6. Lorsque m n'est pas un nombre entier négatif, la fonction $\psi(x; m)$ est elle-même développable en série entière de x. En effet, p intégrations par parties successives de l'intégrale au dernier membre de (19) donnent immédiatement

$$\psi(x; m) = -\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \cdots - \frac{x^{m+p}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)} + \frac{\psi(x; m+p)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+p)}, \tag{38}$$

avec

$$\psi(x; m+p) = e^x \int_x^{x+\infty} e^{-u} u^{m+p}\, du.$$

Considérons le chemin rectiligne joignant l'origine à l'image de x et l'arc de cercle AB de centre $x = 0$ et rayon R, limité à l'axe réel positif en A et au chemin de cette dernière intégrale en B.

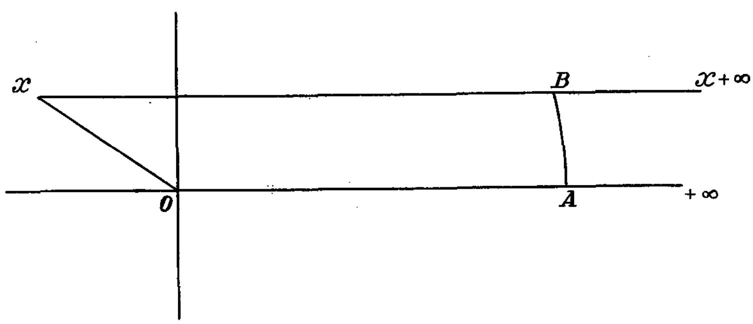

Figure 3.

Le long de AB, posons $u = R e^{i\theta}$, avec $0 \leqq \theta \leqq \theta_0 = \text{Arc sin} \frac{\Im(x)}{R}$; il vient alors, si $m = m' + i m''$,

$$\left| \int_{\widehat{AB}} e^{-u} u^{m+p}\, du \right| < e^{-R\cos\theta_0} R^{m'+p+1} \int_0^{|\theta_0|} e^{|m''|\theta}\, d\theta,$$

et le second membre tend évidemment vers o lorsque R croît infiniment. Par conséquent, sous la seule condition que $\Re(m + p + 1)$ soit positif, on peut écrire

$$\int_x^{x+\infty} e^{-u} u^{m+p} d u = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m+p} d u - \int_0^x e^{-u} u^{m+p} d u = \Gamma(m+p+1) - \int_0^x e^{-u} u^{m+p} d u,$$

où la dernière intégrale est la fonction gamma incomplète. Ceci s'écrit encore

$$\frac{\psi(x;\, m+p)}{\Gamma(m+p+1)} = e^x - \frac{e^x}{\Gamma(m+p+1)} \int_0^x e^{-u} u^{m+p} d u. \tag{39}$$

Le long du chemin rectiligne $o x$, on prend $\arg u = \arg x$; l'intégrale est majorée par le produit de $|x|^{m'+p+1}$ et d'une quantité indépendante de p. Il vient donc

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\psi(x;\, m+p)}{\Gamma(m+p+1)} = e^x,$$

et, par conséquent, (38) conduit au développement

$$\psi(x;\, m) = e^x \Gamma(m+1) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{m+\nu}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)}. \tag{40}$$

La série au second membre converge quel que soit x, sauf peut-être pour $x = 0$, et sa somme est toujours uniforme dans le plan coupé par l'axe réel négatif.

7. Portons ce développement dans (37), et multiplions les deux membres par y^m. Nous obtenons ainsi l'identité remarquable

$$e^{xy} \Gamma(m+1) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(xy)^{m+\nu}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, y^m \sigma_s^m(x)}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)}, \tag{41}$$

qu'on peut encore écrire, en divisant les deux membres par $(xy)^m$,

$$\Gamma(m+1) \frac{e^{xy}}{(xy)^m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(xy)^\nu}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{(y+1)(y+2)\ldots(y+s)} \frac{\sigma_s^m(x)}{x^m}. \tag{42}$$

Relativement à la variable y, (42) apparaît comme une série mixte, entière et de facultés, représentant la fonction $y^{-m} e^{xy}$ dans le demi-plan $\Re(y) > 0$, tout au moins si $\Re(x) \geq 0$ et $|e^x - 1| > 1$, sans omettre la condition apparente que m n'est pas entier négatif. Dans ce demi-plan de y, la série entière représente la partie principle du premier membre au voisinage de l'infini, et la série de facultés, au voisinage de $y = 0$. Nous rencontrons ainsi un exemple bien remarquable de développement présentant des caractères analogues à ceux des séries de Laurent.

Permutons x et y dans (41); le premier membre ne change pas et l'on a

$$e^{xy}\Gamma(m+1) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(xy)^{m+\nu}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, x^m \sigma_s^m(y)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s)}.$$

$y = 1$ vérifiant les conditions $\Re(y) > 0$, $|e^y - 1| > 1$, cette identité devient[1], pour cette valeur de y,

$$(43) \quad x^{-m} e^x \Gamma(m+1) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, \sigma_s^m(1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s)},$$

valable dans le demi-plan $\Re(x) > 0$. On obtient le même premier membre en faisant $y = 1$ dans (41), qui devient ainsi

$$(44) \qquad x^{-m} e^x \Gamma(m+1) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{\sigma_s^m(x)}{x^m};$$

c'est un développement du premier terme en la somme d'une série entière de x et une série de polynômes entiers de $\frac{1}{x}$; il converge sûrement dans le domaine $|e^x - 1| > 1$.

La comparaison avec (43) fournit l'identité

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \frac{\sigma_s^m(x)}{x^m} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\, \sigma_s^m(1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s)},$$

qui traduit la transformation d'une certaine série de polynômes entiers de $\frac{1}{x}$ en une série de facultés, avec $\Re(x) > 0$, $|e^x - 1| > 1$.

[1] On doit à M. SER un développement du premier membre de (43) en une série de facultés de la variable m et dont les coefficients sont des polynômes de Laguerre de x. Cf. »Deux expressions de $\Gamma(s)$«, Bull. Sc. Math., 2e série, t. 49, 1935, p. 293—297.

On peut encore substituer xy à x dans (44), et comparer à (42); on obtient une autre identité,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!\,\sigma_s^m(x)}{(y+1)(y+2)\dots(y+s)} = \frac{1}{y^m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} \sigma_s^m(xy),$$

valable tout au moins pour $\Re(y) > 0$, $|e^x - 1| > 1$, $|e^{xy} - 1| > 1$, $|\arg x + \arg y| < \pi$, m non entier négatif.