

UNTERSUCHUNGEN ZUR TOPOLOGIE DER GESCHLOSSENEN ZWEISEITIGEN FLÄCHEN. II.

Von

JAKOB NIELSEN

in KOPENHAGEN.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	2
<i>I. Abschnitt: Einteilung der Automorphismen in endlich viele Typen.</i>	
1. Hilfssätze	8
2. Anordnung äquivalenter Randfixpunktmen- gen	10
3. Hauptgebiet eines Automorphismus	12
4. Ein Satz über isolierte Randfixpunkte	17
5. Reguläre Randfixpunkte	21
6. Typenbildung für $H(I)=1$	23
7. Typenbildung für zyklische $H(I)$	25
8. Kerngebiet eines Automorphismus	27
9. Periodischer Charakter der Regularitätsintervalle	28
10. Freiheit der Fixelementgruppe. Konstruktion ihres Fundamental- bereichs	34
11. Typenbildung für nicht-zyklische $H(I)$	37
12. Zusammenfassung	39
<i>II. Abschnitt: Indizes der verschiedenen Typen.</i>	
13. Verhalten der Abbildung in der Umgebung von Randfixpunkten	44
14. Indizes der verschiedenen Typen	50
15. Folgerungen	54
16. Deutung der Indizes mittels der Formel von Birkhoff	56
<i>III. Abschnitt: Untersuchung vollständiger Automorphismenfamilien.</i>	
17. Verwandte T -Funktionen und Automorphismen	58
18. Verwandte Hauptgebiete	61

19. Folgerungen	69
20. Abschätzung der Klassenzahl aus der Indexsumme	71
21. Häufigkeit des Typus $\nu = 0, \mu = 2$	72
22. Anwendung auf eine besondere Art von Abbildungsklassen	74

Einleitung.

In einer unter demselben Titel erschienenen Abhandlung¹ hat der Verfasser topologische Eigenschaften der Flächen vom Geschlecht $p > 1$ in ihren Beziehungen zu der universellen Überlagerungsfläche und zu der Fundamentalgruppe untersucht und auf das allgemeine Fixpunktproblem angewandt. Diese Untersuchungen werden im Folgenden weitergeführt und jedenfalls in einer bestimmten Richtung zum Abschluss gebracht. Die Betrachtung wird dabei der einfacheren Sprechweise halber auf *topologische* (d. h. eineindeutige und stetige) Abbildungen der Fläche auf sich beschränkt. Dass das keine wesentliche Einschränkung ist, ergibt sich aus dem kürzlich von Herrn H. KNESER² bewiesenen Satze, dass jede *stetige* Abbildung einer Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich, deren Abbildungsgrad von 0 verschieden ist, sich stetig in eine topologische Abbildung überführen lässt.

Als Bild der universellen Überlagerungsfläche der Fläche φ vom Geschlecht $p > 1$ wird das Innere \mathcal{O} des Einheitskreises E der Ebene einer komplexen Variablen x benutzt. Die Decktransformationen der Überlagerungsfläche sind lineare Substitutionen von x vom hyperbolischen Typus mit Grundpunkten auf E und bilden in ihrer Gesamtheit die Fundamentalgruppe F der Fläche φ . Eine topologische Abbildung $\tau\varphi$ der Fläche auf sich wird nun von einer abzählbaren Familie von topologischen Abbildungen von \mathcal{O} auf sich überlagert, deren Mitglieder sich nur um Decktransformationen unterscheiden. Eine solche » T -Funktion« $t\mathcal{O}$ genügt einem System von Funktionalgleichungen

$$t(f(x)) = f_I(t(x)),$$

wo f ein beliebiges Element von F und die Zuordnung von f_I zu f einen Auto-

¹ *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta mathematica Bd. 50, S. 189—358. Hinweise auf diese Arbeit werden im Folgenden mit I und der betreffenden Paragraphenzahl oder Seitenzahl angegeben.

² Nach brieflicher Mitteilung von Herrn KNESER.

morphismus I von F bezeichnet. Ist kt eine andere über τ liegende T -Funktion, also k ein beliebiges Element von F , so induziert diese den Automorphismus $I_{k^{-1}}$, bei dem f in $kf_I k^{-1}$ übergeht. Für variables k entsteht so eine vollständige Automorphismenfamilie, deren Mitglieder sich nur um innere Automorphismen unterscheiden, und diese Familie bestimmt die Klasse der Abbildung $\tau\varphi$.

In den *ersten beiden* Abschnitten dieser Arbeit wird nun die *einzelne* T -Funktion $t\Phi$ der Untersuchung unterworfen. Diese lässt sich durch eine nur von I abhängige topologische Abbildung des Randkreises E auf sich zu einer topologischen Abbildung $t(\Phi + E)$ der abgeschlossenen Kreisscheibe auf sich ergänzen (I, 28). Dabei finden alle diejenigen Eigenschaften der Flächenabbildung $\tau\varphi$, die gegenüber stetiger Abänderung von τ invariant sind, also Eigenschaften der *Abbildungs-klasse* sind, ihren Ausdruck in der Randabbildung tE . — Wir beschränken uns auf den Fall, wo die Orientierung bei $\tau\varphi$ und daher auch bei $t(\Phi + E)$ erhalten bleibt, wo also I »von erster Art« ist (I, 9).

Im *ersten Abschnitt* wird auf Grund der Struktur der Fixpunktmenge der Randabbildung tE eine *Einteilung aller T -Funktionen in endlich viele Typen* erzielt. Zwei Funktionen desselben Typus haben dabei homöomorphe Randfixpunkt-mengen. Der Fall, in welchem tE die identische Randabbildung, also I der identische Automorphismus ist, ist schon in I, 42 vollständig untersucht, und es wird daher von diesem Fall abgesehen. Die Menge der »Fixelemente« des Automorphismus I , d. h. derjenigen Elemente h von F , für die $h_I = h$ ist, bildet eine Untergruppe $H(I)$ von F , die jedenfalls immer die Identität enthält. Es sind nun die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

a) $H(I)$ besteht nur aus der Identität. Unter diesen Typus fällt z. B. der Fall, in welchem tE fixpunktfrei ist. Es können aber auch für $H(I) = 1$ Randfixpunkte vorkommen, die dann eben nicht Grundpunkte sind, wie etwa das Beispiel I, 49 zeigt. *Hier ergibt sich nun (§ 6), dass die Anzahl dieser Randfixpunkte immer endlich und gerade ist, und zwar ist diese Anzahl $\leq 4(2p - 1)$.* Dabei wechselt die Verschiebungsrichtung der Randpunkte bei tE in den durch die Randfixpunkte bestimmten Restintervallen ab; man kann daher die Randfixpunkte in »anziehende« und »abstossende« einteilen. Das durch die anziehenden Randfixpunkte allein (oder die abstossenden allein) bestimmte, nichteuklidisch-konvexe Polygon mit Nullwinkeln enthält keine zwei bezüglich F äquivalenten Punkte, bedeckt also einen gewissen Flächenteil von φ einfach.

b) $H(I)$ besteht aus mehr als der Identität. Es gibt also *eigentliche* Fixelemente bei I , deren Grundpunkte dann Fixpunkte von tE sind. *In diesem*

Fall ergibt sich (§ 10), dass die Fixelementgruppe H stets eine freie Gruppe ist. Für die Anzahl ν ihrer freien Erzeugenden gilt dabei: $1 \leq \nu \leq 2p - 1$. Die abgeschlossene Hülle der Menge der Fixgrundpunkte wurde in I, 29 als die Gesamtheit der bezüglich H singulären Punkte bestimmt. Im Falle $\nu > 1$ ist diese Menge perfekt und nirgends dicht. Auf dieser Punktmenge lässt sich ein nichteuklidisch-konvexer Bereich \mathcal{A} mit unendlich vielen Randseiten aufbauen, indem man die Endpunkte jedes der abzählbar vielen Restintervalle der Menge durch eine nichteuklidische Gerade verbindet. \mathcal{A} wird als das »Kerngebiet« von I bezeichnet. Es gibt nun (§ 8) auf der Fläche φ einen von endlich vielen doppelpunktlosen, untereinander nicht homotopen und zu einander fremden Kurven berandeten Bereich δ , der von \mathcal{A} unendlich oft überdeckt wird. $H(I)$ ist die Gruppe der Decktransformationen von \mathcal{A} über δ , also die Fundamentalgruppe von δ . Der Bereich δ enthält alle diejenigen geschlossenen geodätischen Linien auf φ (im Sinne der von Φ übertragenen nichteuklidischen Metrik), die von den Achsen der Elemente von H überdeckt werden, und δ ist der kleinste Bereich mit dieser Eigenschaft, indem seine Randkurven selbst solche geodätische Linien sind. In besonderen Fällen kann δ aus der ganzen, längs einer oder mehreren geschlossenen geodätischen Linien aufgeschnittenen Fläche φ bestehen. — Weiter ergibt sich (§ 5), dass ein bezüglich H regulärer Punkt nicht Häufungspunkt von Randfixpunkten sein kann. Wenn also die durch die Menge der singulären Punkte bestimmten Restintervalle nicht fixpunktfrei sind, so können sie doch nur isolierte Randfixpunkte enthalten, und deren Anzahl in einem Fundamentalbereich von H ist endlich und gerade (§ 7 und 11). Auf diese lassen sich dann analoge Betrachtungen wie unter a) anwenden.

Man bemerkt, dass die Unterscheidung der beiden Fälle a) und b) überflüssig wird, wenn man den Sprachgebrauch einführt, die Gruppe, die nur aus der Identität besteht, als die »freie Gruppe mit Null Erzeugenden« zu bezeichnen. Die Fixelementgruppe $H(I)$ eines nicht identischen Automorphismus I ist dann stets eine freie Gruppe mit ν Erzeugenden, wo $0 \leq \nu \leq 2p - 1$ ist und beide Grenzfälle mit dem Gleichheitszeichen wirklich vorkommen. Auf dem zu E gehörigen Teil der Begrenzung eines Fundamentalbereichs von H — dieser Fundamentalbereich ist für $\nu = 0$ die ganze Kreisscheibe — liegt dann stets nur eine endliche, und zwar gerade Anzahl 2μ von Randfixpunkten, wobei auch $\mu = 0$ sein kann. — Man kann auf demjenigen Teil der Randfixpunktmenge einer T -Funktion mit mehr als zwei Randfixpunkten, der aus allen nichtisolierten Fixpunkten und allen isolierten beiderseits anziehenden Fixpunkten besteht, einen nichteuklidisch-konvexen Bereich Ω aufbauen, den wir das »Hauptgebiet« der T -Funktion nennen

(§ 3). Ein wichtiges Hilfsmittel der Untersuchung ist dann die Tatsache, dass Ω durch jedes Fixelement auf sich und durch jedes andere Element von F auf einen ganz ausserhalb Ω liegenden Bereich abgebildet wird. Das Kerngebiet \mathcal{A} ist ein echter Teilbereich von Ω oder mit Ω identisch.

Im *zweiten Abschnitt* werden diese Ergebnisse auf das *Fixpunktproblem* angewandt, *soweit sich dies auf die einzelne T-Funktion bezieht*. Die Menge derjenigen Fixpunkte von $\tau\varphi$, die von der Fixpunktmenge von $t\Phi$ überdeckt wird, wird zu einer *Fixpunktklasse* zusammengefasst (I, 31). Sie findet sich in einem Fundamentalbereich von $H(I)$ einfach vor (I, 33), da die Fixpunktmenge von $t\Phi$ sich bei allen Fixelementen und bei keinem anderen Element von F reproduziert. Als *Index* der Fixpunktklasse ist die totale Arcusvariation des Richtungsvektors von x nach $t(x)$ bei Umlaufung eines Fundamentalbereichs von H definiert (I, 37). Durch eine Verallgemeinerung der in I, S. 341—343 durchgeführten Betrachtung wird nun gezeigt (§ 13—14), wie man bei der Bestimmung des Index die eventuell auf dem Rande des Fundamentalbereichs von H liegenden isolierten Randfixpunkte auf kleinen Bögen umgehen kann. *Der Index i erweist sich dabei als allein vom Typus der Randabbildung abhängig, und zwar ist er*

$$i = 1 - \nu - \mu,$$

wenn wieder ν die Anzahl der freien Erzeugenden der Fixelementgruppe und μ die halbe Anzahl der zu ihrem Fundamentalbereich gehörigen Randfixpunkte ist. Man sieht, dass ein positiver Index sich nur mit $i = 1$ im Falle der fixpunktfreien Randabbildung ($\nu = \mu = 0$) ergeben kann. Berücksichtigt man noch die Beschränkung, die sich für ν und μ aus den obengenannten Eigenschaften des Bereiches Ω ergeben, *so ergibt sich (§ 15), dass der Index i einer Fixpunktklasse bei einer Fläche vom Geschlecht $p > 1$ der Bedingung*

$$3 - 4p \leq i \leq 1$$

genügen muss. Der Fall $i = 0$ erfordert $\nu = 1, \mu = 0$ oder $\nu = 0, \mu = 1$. *T-Funktionen vom Index 0 haben also immer genau 2 Randfixpunkte*, wobei diese zwei periodische oder zwei aperiodische Restintervalle (I, 14) bestimmen können.

Man kann dieses Ergebnis noch besonders anschaulich machen, indem man die *T-Funktion* durch Spiegelung an E zu einer topologischen Abbildung der ganzen komplexen x -Kugel K erweitert (I, S. 284) und dann die Fläche $K_I = K \bmod H(I)$ ableitet (I, 30). K_I ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ν , die,

wenn S die Menge der bezgl. H singulären Punkte bedeutet, von $K-S$ mit der Randmenge S überlagert wird, wobei H die Gruppe der Decktransformationen von $K-S$ über K_I ist. $t(x)$ ruft eine Abbildung tK_I von K_I auf sich hervor, die zur Klasse der Identität gehört (§ 12). Auf K_I liegen endlich viele geschlossene einfache und zu einander fremde Kurven, die von den regulären Punkten von E überdeckt werden, und auf diesen befinden sich 2μ isolierte Fixpunkte von tK_I , von denen jeder den Index $+1$ hat. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache, sowie der Symmetrie in beiden Kugelhälften ergibt die BIRKHOFFSche Formel den obigen Wert für den Index der T -Funktion. Wenn man überdies noch von den obengenannten 2μ Fixpunkten je einen anziehenden mit einem abstossenden zur Vereinigung bringt, etwa durch ein schlauchartiges Ansatzstück, über das hin sich die Abbildung fixpunktfrei fortsetzen lässt, so erhält man eine nur von I abhängige geschlossene Hilfsfläche K_I^* vom Geschlecht $\nu + \mu$, auf welcher die Abbildung eine Deformation ist (§ 16). Wegen der Spiegelung an E ist dann die Hälfte des BIRKHOFFSchen Index $2 - 2(\nu + \mu)$ der Index $i = 1 - \nu - \mu$ der T -Funktion. Für $i = 1$ ist K_I^* eine Kugel, für $i = 0$ ein Torus, für $i < 0$ eine Fläche vom Geschlecht q , wo $2 \leq q \leq 4p - 2$ ist. *Man kann also sagen, dass jede Indexbestimmung bei einem (die Orientierung erhaltenden) Abbildungsproblem in 2 Dimensionen auf die Anwendung der BIRKHOFFSchen Formel auf eine gewisse Hilfsfläche hinausläuft, die nur von der Klasse der betrachteten Abbildung abhängt.*

Im dritten Abschnitt wird nun die vollständige Familie derjenigen T -Funktionen untersucht, die eine gegebene Abbildung $\tau\varphi$ überlagern. Dabei kommt nur je ein Repräsentant für jede Isogredienzklasse in Betracht (I, 18 u. 31). Die entscheidende Tatsache ist hier die, dass die Hauptgebiete für zwei verwandte Automorphismen ganz ausserhalb von einander liegen, also auch die von ihnen überdeckten Flächenteile auf φ nebeneinander Platz finden müssen (§ 17—19). — Dadurch ist zunächst wieder für eine ziemlich ausgedehnte Menge von Abbildungsklassen das Fixpunktproblem vollständig gelöst, nämlich für alle diejenigen Klassen, die durch »Verschraubungen« längs eines Systems von zu einander fremden einfachen Kurven erzeugt werden können; deren Kerngebiete machen nämlich ganz φ aus (§ 22). — Es ergibt sich nun hier die *gruppentheoretische Folgerung, dass in einer Automorphismenfamilie nur endlich viele nicht-zyklische und zu einander nicht konjugierte Fixelementgruppen auftreten können* (§ 19), indem nämlich für die Anzahlen ν_i ihrer freien Erzeugenden gilt:

$$\sum_i (\nu_i - 1) \leq 2p - 2.$$

Aus der Anordnung der Hauptgebiete kann man Rückschlüsse auf die »Häufigkeit« der einzelnen Typen von T -Funktionen innerhalb einer vollständigen Familie ziehen und dies zu der ALEXANDERSCHEN Indexsumme Ξ in Beziehung setzen (§ 20—21). Da eine Fixpunktklasse mit einem von Null verschiedenen Index mindestens durch einen Punkt vertreten sein muss, ist die *Minimalzahl* der Fixpunkte bei einer gegebenen Abbildungsklasse \geq der Anzahl Z der unter einander nicht isogredienten Automorphismen mit $i \neq 0$ in der zugehörigen Familie. Aus $i \leq 1$ folgt nun sofort $Z \geq \Xi$, was natürlich nur für $\Xi > 0$ eine wirkliche Aussage enthält. Wenn aber $\Xi < 0$ und dabei einen numerisch grossen Wert hat (und man kann leicht Beispiele für beliebig grosse negative Werte von Ξ angeben), so zeigt es sich, dass »fast alle« Klassen mit negativem Index zu Ξ mit dem Summanden -1 beitragen. Genau gesprochen ergibt sich so (§ 20):

$$\begin{aligned} Z &\geq \Xi, \text{ falls } \Xi \geq 0, \\ Z &\geq 1, \text{ falls } -4(p-1) \leq \Xi < 0, \\ Z &\geq |\Xi| - 4(p-1), \text{ falls } \Xi < -4(p-1). \end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich also die *Klassenzahl* Z mit *Hilfe der Indexsumme* Ξ *nach unten abschätzen*, eine Tatsache, die um so bemerkenswerter ist, als Z eine Invariante der Abbildungsklasse ist, also für zwei Abbildungen die gleiche ist, wenn die zwei Bilder einer beliebigen geschlossenen Kurve stets miteinander *homotop* sind, während Ξ eine Invariante einer umfassenden Gesamtheit von Abbildungsklassen ist, indem nur die *Homologie* statt der Homotopie für die Bilder einer Kurve vorgeschrieben wird.¹ Die Frage, ob sich *unter Verwendung von* Ξ *auch eine Abschätzung von* Z *nach oben* gewinnen lässt, muss hier offen gelassen werden, da sie aufs engste mit der noch ungelösten Frage zusammenhängt, ob es Automorphismen gibt, für welche sämtliche Potenzen fixpunktfreie Randabbildungen ergeben, m. a. W. ob es Fixpunktklassen mit dem Index $+1$ gibt, die sich bei beliebig hoher Iterierung der Flächenabbildung als Fixpunktklassen mit diesem Index behaupten.

¹ Die Bedeutung dieser Tatsache hat auch Herr H. HOPF mir gegenüber hervorgehoben.

I. ABSCHNITT.

Einteilung der Automorphismen in endlich viele Typen.

1. Hilfssätze.

Um später die Darstellung nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir einige elementare Hilfsbetrachtungen voraus.

Es seien h_1 und h_2 zwei hyperbolische Substitutionen, die den Einheitskreis E der Ebene der komplexen Variablen x in sich transformieren, also ihre Grundpunkte auf E haben. Sie sollen keinen Grundpunkt gemeinsam haben, und die positiven Grundpunkte von h_1 und h_2 sollen durch die negativen Grundpunkte nicht getrennt werden. Unter dem »Bogen b zwischen den positiven Grundpunkten« soll derjenige E -Bogen zwischen diesen Grundpunkten verstanden werden, der die negativen Grundpunkte nicht enthält. Durch h_2 wird b auf einen Teilbogen $h_2 b$ von b abgebildet, der an den positiven Grundpunkt von h_2 stösst. Durch h_1 wird $h_2 b$ auf einen Bogen $h_1 h_2 b$ abgebildet, der ein innerer Teilbogen von b ist. Also bleibt ein innerer Punkt von b bei $h_1 h_2$ fest. Durch Betrachtung der inversen Operation folgt ebenso, dass ein innerer Punkt des Bogens b_1 zwischen den negativen Grundpunkten von h_1 und h_2 bei $h_1 h_2$ fest bleibt. $h_1 h_2$ ist also eine hyperbolische Substitution, deren positiver bzw. negativer Grundpunkt ein innerer Punkt von b bzw. b_1 ist. Durch Anwendung auf die Elemente der Fundamentalgruppe F formulieren wir den

Hilfssatz 1: Sind f_1 und f_2 zwei Elemente von F mit nicht zusammenfallenden Grundpunkten, und werden die positiven Grundpunkte von f_1 und f_2 durch die negativen Grundpunkte nicht getrennt, so ist der positive Grundpunkt des Elements $f_1 f_2$ ein innerer Punkt des Bogens zwischen den positiven Grundpunkten und der negative Grundpunkt von $f_1 f_2$ ein innerer Punkt des Bogens zwischen den negativen Grundpunkten von f_1 und f_2 .

— Es sei h eine hyperbolische Substitution mit Grundpunkten $U(h)$ und $V(h)$ auf E , A die Achse von h und D der zu A senkrechte Durchmesser von E . Die Kreise des Kreisbüschels mit Nullkreisen in $U(h)$ und $V(h)$ werden bei h vertauscht (»Niveaulinien« der »Strömung« h). Unter diesen gibt es einen $U(h)$ umschliessenden Kreis C , dessen $V(h)$ umschliessendes Bild hC mit C bezüglich D symmetrisch liegt (vgl. I, S. 200). C und hC mögen die »Kongruenzkreise« von h heissen, da das euklidische Linienelement auf C bei h kongruent transformiert

wird. Nun sei δ eine hyperbolische Substitution mit der Achse D und dem Endpunkt P von D als positivem Grundpunkt. Dann ist $\delta h \delta^{-1}$ eine hyperbolische Substitution, deren Verschiebungslänge gleich der von h ist, deren Achse δA ist und deren Kongruenzkreise die Kreise δC und $\delta h C = \delta h \delta^{-1} \cdot \delta C$ sind. Das Äussere des Kreises δC wird also durch $\delta h \delta^{-1}$ auf das Innere des Kreises $\delta h C$ abgebildet. Lässt man nun die Verschiebungslänge von δ unbegrenzt wachsen, so konvergieren $\delta U(h), \delta V(h), \delta C$ und $\delta h C$ gegen P , und man sieht, dass für ein δ mit grosser Verschiebungslänge ein Punkt, der nicht zu der unmittelbaren Umgebung von P gehört, durch $\delta h \delta^{-1}$ in die unmittelbare Umgebung von P verlegt wird. Dasselbe gilt dann allgemeiner für irgend eine Folge h_n von hyperbolischen Substitutionen gleicher Verschiebungslänge, wenn beide Grundpunkte von h_n mit wachsendem n gegen einen beliebigen Punkt P von E konvergieren. Bei Vergrösserung der Verschiebungslänge einer hyperbolischen Substitution ziehen sich die Kongruenzkreise enger um die Grundpunkte zusammen. Das obige Resultat gilt daher auch, wenn von der Folge h_n nicht Gleichheit der Verschiebungslänge vorausgesetzt wird, sondern nur, dass die Verschiebungslänge für alle h_n eine positive untere Schranke hat. Das ist insbesondere für alle Elemente von F der Fall (I, S. 208):

Hilfssatz 2: Wenn $f_n, n = 1, 2, \dots$, eine solche Folge von Elementen von F ist, dass beide Grundpunkte von f_n mit wachsendem n gegen einen Punkt P von E konvergieren, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n x = P \tag{1 a}$$

für jeden von P verschiedenen Punkt x .

— Aus der Definition des Begriffes der »Fundamentalfolge« (I, S. 230) ergibt sich, dass die Folge f_n des Hilfssatzes 2 eine zu P gehörige Fundamentalfolge ist. Schon daraus folgt die Gültigkeit von (1 a) für alle nicht auf E gelegenen x . Es kommt hier aber gerade auf die Erweiterung der Gültigkeit von (1 a) auf E -Punkte an, und zwar im Falle des Hilfssatzes 2 also auf alle von P verschiedenen E -Punkte. — Wir betrachten nun allgemeiner eine zu einem E -Punkt P gehörige Fundamentalfolge f_n . Für die positiven Grundpunkte in der Folge gilt dann $V(f_n) \rightarrow P$ für $n \rightarrow \infty$ (I, S. 231). Über das Verhalten der Folge der negativen Grundpunkte $U(f_n)$ ist damit noch nichts gesagt. Nun werde vorausgesetzt, dass $U(f_n) \rightarrow Q$ für $n \rightarrow \infty$. Der Hilfssatz 2 handelt von dem Falle $Q = P$. Wir setzen daher jetzt voraus, dass Q ein von P verschiedener Punkt

von E ist. Die Folge der Achsen von f_n konvergiert dann gegen die nichteuclidische Gerade QP . Es sei α ein mit E konzentrischer kleinerer Kreis, der QP und also auch alle Achsen der Folge von einer genügend hohen Nummer an schneidet. In jedem vollständigen System von äquivalenten Achsen in F gibt es nur endlich viele, die in das Innere von α eindringen. Jedes Element der Folge f_n ist also höchstens in endlich viele andere Elemente der Folge transformierbar. Also wächst die Verschiebungslänge in der Folge f_n über alle Grenzen (I, S. 209). Wenn also C_n und $f_n C_n$ die Kongruenzkreise von f_n sind, so gilt $C_n \rightarrow Q$ und $f_n C_n \rightarrow P$. Jeder von Q verschiedene Punkt wird also von allen genügend späten f_n in die unmittelbare Umgebung von P verlegt:

Hilfssatz 3: Wenn $f_n, n = 1, 2, \dots$, eine solche Folge von Elementen von F ist, dass $V(f_n) \rightarrow P$ und $U(f_n) \rightarrow Q$ für $n \rightarrow \infty$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n x = P \quad (1)$$

für jeden von Q verschiedenen Punkt x .

Dieser Hilfssatz umfasst den Hilfssatz 2 für $Q = P$. Über das Verhalten der Punktfolge $f_n Q$ ist in beiden Fällen nichts ausgesagt. Falls $f_n Q$ nicht gegen P konvergiert, sei Q als der *Ausnahmepunkt* der zu P gehörigen Fundamentalfolge f_n bezeichnet. Falls $f_n Q \rightarrow P$, also (1) ausnahmslos für alle x gilt, wird gesagt, dass die zu P gehörige Fundamentalfolge f_n keinen Ausnahmepunkt hat.

2. Anordnung äquivalenter Randfixpunkt mengen.

Es sei eine T -Funktion tx gegeben (I, 21). Sie bildet das Innere \mathcal{D} des Einheitskreises E topologisch auf sich ab und genügt der Funktionalgleichung

$$tfx = f_I tx. \quad (2)$$

Die Korrespondenz $f \rightarrow f_I$ ist ein Automorphismus I von F (I, 22). $t\mathcal{D}$ wird durch eine allein von I abhängige topologische Abbildung tE von E auf sich stetig abgeschlossen (I, 28). Wir beschränken uns durchweg auf den Fall, dass die Orientierung bei t erhalten bleibt, also I von erster Art ist (I, 9); dann wird auch bei der topologischen Abbildung $\tau\varphi$ der Fläche φ auf sich, über der $t\mathcal{D}$ liegt, die Orientierung erhalten. Weiter wird in diesem und dem nächsten Paragraphen die Annahme gemacht, dass die Randabbildung tE mehr als zwei Fixpunkte hat. Die Fixpunktmenge der Randabbildung sei allgemein mit M bezeichnet. M ist abgeschlossen. Der Fall, dass M ganz E ausmacht, also I der identische Auto-

morphismus ist, ist in I, 42 vollständig behandelt und bleibt hinfort ausgeschlossen. Dann ist M nirgends dicht. Ferner ist dann die Gruppe $H(I)$ der Fixelemente, d. h. der bei I sich selbst entsprechenden Elemente von F eine echte Untergruppe von F , die jedenfalls immer die Identität umfasst.

In diesem Paragraphen wird nun die Lage von M relativ zu einer damit äquivalenten Menge fM untersucht, wo f ein beliebiges Element von F ist. Zunächst zeigt (2), dass Fixpunkte durch ein Fixelement wieder in Fixpunkte verlegt werden. Ist also $f_I = f$, so ist $fM = M$. Wir nehmen daher $f_I \neq f$ an.

Durch wiederholte Anwendung von (2) folgt

$$t^n f x = f_I^n t^n x, \quad n \geq 0. \tag{3}$$

Wendet man dies auf einen Punkt m von M an, so kommt

$$t^n f m = f_I^n t^n m = f_I^n m. \tag{4}$$

Wir untersuchen nun die Elementfolge f_I^n . Wegen $f_I \neq f$ gehören die Grundpunkte $U(f)$ und $V(f)$ zu der Menge $E - M$, die aus endlich oder abzählbar vielen Intervallen besteht. Die Endpunkte des bei t fixpunktfreien Intervalls u , in dem $U = U(f)$ liegt, sind die Punkte

$$U^+ = \lim t^n U \quad \text{und} \quad U^- = \lim t^{-n} U, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ebenso seien die Endpunkte des Intervalls v , das $V = V(f)$ enthält, mit

$$V^+ = \lim t^n V \quad \text{und} \quad V^- = \lim t^{-n} V, \quad n \rightarrow \infty,$$

bezeichnet. Da nun

$$\left. \begin{aligned} t^n V(f) &= V(f_I^n) \\ t^n U(f) &= U(f_I^n) \end{aligned} \right\} n \geq 0$$

ist, folgt nach § 1, dass f_I^n für $n \rightarrow \infty$ eine zu V^+ gehörige Fundamentalfolge mit U^+ als einzigem eventuell vorhandenen Ausnahmepunkt und für $n \rightarrow -\infty$ eine zu V^- gehörige Fundamentalfolge mit U^- als einzigem eventuell vorhandenen Ausnahmepunkt ist. Ist nun m ein von U^+ und U^- verschiedener Punkt von M , so folgt aus (4) und Hilfssatz 3:

$$\lim t^n f m = \lim f_I^n m = \begin{cases} V^+ & \text{für } n \rightarrow \infty \\ V^- & \text{für } n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Daraus folgt, dass fm ein innerer Punkt von v ist, denn da M mehr als 2 Punkte enthält, ist v das einzige bei t fixpunktfreie Intervall, das V^+ und V^- zu Endpunkten hat. Also gilt:

Satz 1: *Wenn die Randfixpunktmenge M einer T -Funktion mehr als zwei Punkte enthält, so liegt die aus ihr durch ein Nicht-Fixelement f hervorgehende Menge fM ganz in demjenigen fixpunktfreien Intervall, das den positiven Grundpunkt von f enthält. Doch können die beiden Punkte von M , die dasjenige fixpunktfreie Intervall begrenzen, welches den negativen Grundpunkt von f enthält, eine Ausnahme bilden.*

3. Hauptgebiet eines Automorphismus.

Nun bleibt die Sonderstellung der beiden Punkte U^+ und U^- näher zu untersuchen. Dabei sind je nach der gegenseitigen Lage der Intervalle u und v drei Fälle zu unterscheiden.

Fall a) u und v sind dasselbe Intervall, das also beide Grundpunkte von f enthält. Es ist $U^+ = V^+$ und $U^- = V^-$. Das durch Hinzufügung der Endpunkte abgeschlossene Intervall v heisse \bar{v} . Ersetzt man t durch t^{-1} , was ja für die gegenseitige Lage von M und fM ohne Bedeutung ist, so vertauschen sich V^- und V^+ . Wir können daher annehmen, dass die vier Punkte $V^-, U(f), V(f), V^+$ auf \bar{v} in dieser Anordnung liegen. (Fig. 1.) Dann liegt fV^+ in v . Liegt auch fV^- in v , so liegt eben ganz fM in v , und der Ausnahmefall des Satzes 1 tritt nicht ein. Wir verfolgen also die Annahme, dass fV^- ausserhalb v fällt, und fragen zunächst, ob $fV^- = V^+$ möglich ist. Dazu schieben wir folgende allgemeine Betrachtung ein:

Es sei für irgend eine T -Funktion $t(\mathcal{O} + E)$ ein Fixpunkt p und ein Nicht-Fixelement f gegeben. Soll dann auch fp ein Fixpunkt bei t sein, so ergibt sich:

$$tp = p$$

$$tfp = fp,$$

andererseits wegen (2):

$$tfp = f_1 tp = f_1 p,$$

also

$$f^{-1} f_1 p = p.$$

Nun ist $h = f^{-1}f_I \neq 1$, da f nicht Fixelement ist. Also ist p Grundpunkt, liegt also auf E und gehört, da er Fixpunkt ist, zu der Randfixpunktmenge M . Somit ist h ein Fixelement. fp ist Grundpunkt von fhf^{-1} , und das muss also ebenfalls ein Fixelement sein. f verlegt also die Grundpunkte des Fixelements $h = f^{-1}f_I$ in die davon verschiedenen Grundpunkte des Fixelements $fhf^{-1} = f_I f^{-1}$.

In unserem Fall a) folgt hieraus $fV^- \neq V^+$. Denn die Punkte $U(f)$ und $V(f_I)$ umschliessen in v die Punkte $V(f)$ und $U(f_I)$ unabhängig davon, ob die Achsen von f und f_I einander schneiden oder nicht. Die positiven Grundpunkte der beiden Elemente f^{-1} und f_I werden also von den negativen Grundpunkten derselben nicht getrennt, und dann ist der negative Grundpunkt von $f^{-1}f_I$ auf

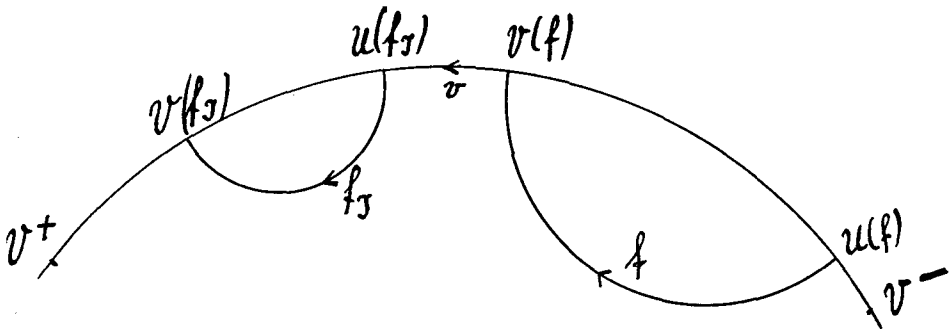


Fig. 1.

Grund von Hilfssatz 1 ein Punkt von v (zwischen $V(f)$ und $U(f_I)$). $f^{-1}f_I$ kann also nicht Fixelement sein.

Endlich bleibt die Annahme zu verfolgen, dass fV^- ausserhalb \bar{v} fällt. Die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t^n f V^- = \lim_{n \rightarrow \infty} f_I^n V^- = V^+$$

bleibt in Kraft, da $V^- = U^-$ für $n \rightarrow +\infty$ nicht Ausnahmepunkt ist. Somit ist V^+ auch Endpunkt eines zu $E - \bar{v}$ gehörigen fixpunktfreien Intervalls, dessen Punkte bei t gegen V^+ strömen. Wir sagen: V^+ ist ein *isolierter, beiderseits anziehender Fixpunkt*. Nun fällt auch $f^{-1}V^+$ ausserhalb \bar{v} . Ersetzt man also für einen Augenblick t durch t^{-1} und f durch f^{-1} , so folgt aus dem eben bewiesenen, dass V^- bei t^{-1} ein isolierter, beiderseits anziehender, also *bei t ein isolierter, beiderseits abstossender Fixpunkt* ist. Zusammenfassend können wir also sagen, dass M im Falle a) entweder ganz oder bis auf einen isolierten, beiderseits abstossenden Fixpunkt durch f in v verlegt wird.

— Bezüglich der folgenden Fälle bemerke man, dass die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} t^n f U^- &= f_I^n U^- \rightarrow V^+ \\ t^{-n} f U^+ &= f_{I^{-n}} U^+ \rightarrow V^- \end{aligned} \right\} n \rightarrow \infty \quad (5)$$

$$(6)$$

gelten, da U^- nicht Ausnahmepunkt für f_I^n und U^+ nicht Ausnahmepunkt für $f_{I^{-n}}$ ($n \rightarrow +\infty$) ist. Wenn nun u und v verschieden sind und die Verschiebungsrichtung bei t in diesen Intervallen auf E entgegengesetzt ist, so folgt sofort aus (5) und (6), dass sowohl $f U^-$ als $f U^+$ und somit ganz fM in v liegt. — Damit erledigt sich zunächst der

Fall b) u und v haben einen Endpunkt gemeinsam, und dieser ist entweder $U^- = V^-$ oder $U^+ = V^+$. Dann ist nämlich die Verschiebungsrichtung bei t in u und v entgegengesetzt, also liegt fM ganz in v . — Die Fälle $U^- = V^+$ und $U^+ = V^-$, bei denen also die Verschiebungsrichtung in den beiden aneinandertossenden Intervallen u und v dieselbe ist, sind, wie aus dem im nächsten Paragraphen hergeleiteten Satze folgt, mit der Annahme von mehr als zwei Randfixpunkten unverträglich. — Es bleibt der

Fall c) u und v stoßen nicht an einander. U^+ , U^- , V^+ und V^- sind also vier verschiedene Punkte auf E . Wenn die Verschiebungsrichtung bei t in u und v verschieden ist, so liegt, wie oben bemerkt, fM ganz in v . Wir nehmen also an, dass die Verschiebungsrichtung in u und v auf E zyklisch dieselbe ist, dass also U^- und V^- durch U^+ und V^+ getrennt werden. (Fig. 2.)

Hier besteht nun die Möglichkeit, dass $f U^- = V^+$. Dann ist U^- , wie oben gefunden, Grundpunkt eines Fixelements $h = f^{-1} f_I$, und zwar muss U^- der positive Grundpunkt dieses Elements sein, wie sich aus Hilfssatz 1 unter Berücksichtigung der Lage der beteiligten Achsen ergibt. Also ist u ein periodisches Intervall (I, 14) und U^+ der negative Grundpunkt von h . V^- bzw. V^+ sind negativer bzw. positiver Grundpunkt des Fixelements

$$h_1 = f h f^{-1} = f_I f^{-1}.$$

Wenn diese Sachlage eintritt — und dass sie vorkommen kann, zeigt etwa das Beispiel 2 in I, S. 247 — so hat man den Fall, wo M und fM sich »berühren«, nämlich ein Paar zusammengehöriger Grundpunkte gemeinsam haben und durch diese von einander getrennt werden. Und das ist der einzige Fall, in welchem M und fM für ein Nicht-Fixelement f Punkte gemein haben können. In diesem

Fall sind die vier Punkte U^- , U^+ , V^- und V^+ singuläre Punkte bezüglich einer nicht zyklischen Fixelementgruppe (I, 29), also nicht isolierte Randfixpunkte.

Wenn fU^- nicht in \bar{v} liegt, so folgt, ganz ebenso wie oben, aus (5), dass V^+ ein isolierter, beiderseits anziehender Fixpunkt und U^- ein isolierter, beiderseits abstossender Fixpunkt ist. Ebenso folgt aus (6), dass U^+ , wenn fU^+ nicht in \bar{v} liegt, ein isolierter, beiderseits anziehender und V^- ein isolierter, beiderseits abstossender Fixpunkt ist.

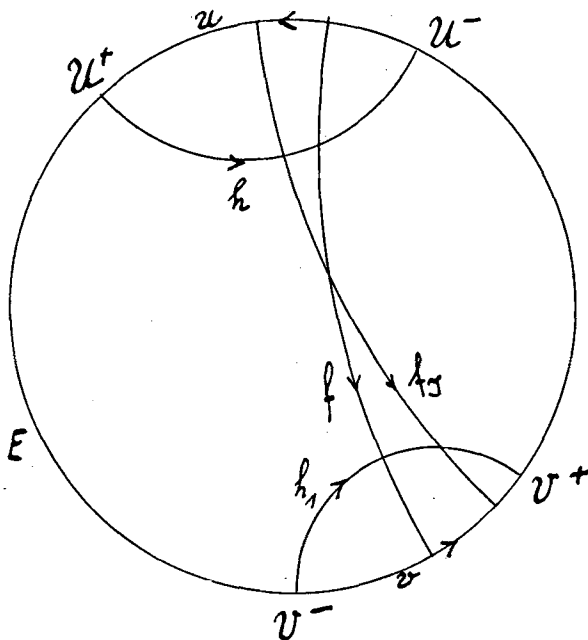


Fig. 2.

Zum Zwecke der Zusammenfassung dieser Ergebnisse wird die folgende Begriffsbildung eingeführt:

Definition: Besteht die Randfixpunktmenge $M = M(t) = M(I)$ einer den Automorphismus I induzierenden T -Funktion t aus mehr als zwei Punkten, so soll unter $M^* = M^*(t) = M^*(I)$ diejenige Teilmenge von M verstanden werden, die aus M durch Fortlassung aller eventuell vorhandenen isolierten, beiderseits abstossenden Fixpunkte entsteht.

Von den Endpunkten eines fixpunktfreien Intervalls ist höchstens der eine ein wegzulassender Punkt. Jeder Häufungspunkt von wegzulassenden Punkten ist daher auch Häufungspunkt von nicht wegzulassenden Punkten; man braucht ja nur jedem der wegzulassenden Punkte einen der beiden nicht wegzulassenden

Punkte zuzuordnen, die mit ihm zusammen ein Intervall begrenzen. M^* hat also dieselbe Häufungsmenge wie M , und ist ebenfalls abgeschlossen. Aus (2) folgt, dass ein Fixelement h einen isolierten, beiderseits abstossenden Fixpunkt wieder in einen ebensolchen überführt. Also ist auch $hM^* = M^*$ für jedes Fixelement h .

Nun kann man das Resultat der Untersuchung der obigen drei Fälle folgendermassen zusammenfassen:

Satz 2: *Wenn die zu einem Automorphismus I gehörige Randfixpunktmenge $M(I)$ aus mehr als zwei Punkten besteht, so ist $fM^*(I)$ für jedes Fixelement f mit $M^*(I)$ identisch und für jedes Nicht-Fixelement f ganz in einem durch Hinzufügung seiner Endpunkte abgeschlossenen Teilintervall von $E - M^*$ enthalten. Wenn M^* und fM^* für ein Nicht-Fixelement f Punkte gemein haben, so haben sie genau ein Paar zusammengehöriger Fixgrundpunkte gemein und werden im Übrigen durch dieses von einander getrennt.*

Die Menge M^* ist, wie schon bemerkt, abgeschlossen. Sie enthält mindestens zwei Punkte, da M mehr als 2 Punkte enthalten soll und von den Endpunkten jedes Restintervalls von M höchstens einer wegzulassen ist. Nun verbinde man die Endpunkte jedes der endlich oder abzählbar unendlich vielen Restintervalle, aus denen $E - M^*$ besteht, durch einen zu E orthogonalen Kreisbogen. Dasjenige Teilgebiet Ω von Φ , das im Äusseren aller dieser Kreise liegt, ist ein im Sinne der nichteuklidischen Metrik konvexes Gebiet, dessen Randseiten unbegrenzte nichteuklidische Gerade sind. Es kann vorkommen, dass M^* nur aus zwei Punkten besteht, und in diesem Fall entsteht ja kein Gebiet, sondern nur eine nichteuklidische Gerade. Es wird nicht zu Missverständnissen führen, wenn auch in diesem Fall der einheitlichen Ausdrucksweise halber von einem (strichförmigen) »Gebiet« Ω gesprochen wird. Ω hängt nur von I ab, da die Randabbildung nur von I abhängt.

Definition: Das soeben definierte Gebiet $\Omega = \Omega(t) = \Omega(I)$ wird als das »Hauptgebiet« des Automorphismus I oder der T -Funktion t bezeichnet. Es wird nur dann von einem Hauptgebiet gesprochen, wenn die zugehörige Randabbildung mehr als zwei Fixpunkte hat.

Da M^* durch ein Fixelement von I auf sich selbst abgebildet wird, ist dasselbe für Ω der Fall. Da nach Satz 2 für ein Nicht-Fixelement f die Punktmenge M^* und fM^* sich auf zwei zu einander komplementäre Bögen von E verteilen, haben Ω und $f\Omega$ keine inneren Punkte gemeinsam. Doch können sie längs einer gemeinsamen Randseite an einander stossen, wie aus dem Schluss von Satz

2 folgt. Eine Randseite von Ω geht also durch ein beliebiges Element aus F entweder wieder in eine Randseite von Ω oder in eine ganz ausserhalb Ω gelegene Gerade über; sie schneidet also keine der mit ihr äquivalenten Geraden. Jede Randseite von Ω liegt also über einer offenen oder geschlossenen, doppelpunktlosen, geodätischen Linie auf der Fläche φ . Zwei auf diese Weise entstehende geodätische Linien auf φ sind entweder ganz identisch oder treffen einander nicht. Diese geodätischen Linien beranden auf φ ein Gebiet ω , das von Ω überdeckt wird. Zwei mit einander äquivalente innere Punkte von Ω müssen laut einem Fixelement äquivalent sein. Ω überdeckt also ω einfach, falls $H(I) = 1$, sonst unendlich oft:

Satz 3: *Das Hauptgebiet $\Omega(I)$ ist die universelle Überlagerungsfläche eines von doppelpunktlosen und zu einander fremden geodätischen Linien berandeten Gebietes $\omega(I)$ auf der Fläche φ . Die Fixelementgruppe $H(I)$ ist die Gruppe der Decktransformationen von $\Omega(I)$ über $\omega(I)$. Falls I keine Fixelemente hat, ist ω einfach zusammenhängend. ω artet strichförmig aus, wenn Ω dies tut.*

— In speziellen Fällen kann ω die ganze längs einer geschlossenen geodätischen Linie (oder mehreren solchen) aufgeschnittene Fläche φ ausmachen. So ist $\omega(\mathcal{A})$ im Falle des in I, 15 behandelten Automorphismus \mathcal{A} die längs der Achse des Elements b_1 aufgeschnittene Fläche φ . Dort ist nämlich M perfekt, also mit M^* identisch, und alle zu M komplementären Restintervalle sind periodisch und werden von den Achsen solcher Elemente überspannt, die in b_1 transformierbar sind. Ω und $a_1^{-1}\Omega$ berühren sich längs der Achse von b_1 . Die Fundamentalgruppe von $\omega(\mathcal{A})$ ist die freie Gruppe $H(\mathcal{A}) = \{b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p\}$.

4. Ein Satz über isolierte Randfixpunkte.

Eine Fläche φ vom Geschlecht p lässt sich durch $2p + 2$ geschlossene einfache Kurven in vier einfach zusammenhängende Teilbereiche zerlegen, z. B. so, wie dies in Fig. 3 durch die $p + 1$ Konturkurven und die $p + 1$ eingezeichneten Kehlkurven geschehen ist. Das System dieser $2p + 2$ Kurven heisse Σ . Mit jeder dieser Kurven ist genau eine geschlossene geodätische Linie (im Sinne der von \mathcal{O} übertragenen nichteuklidischen Metrik) auf φ homotop, nämlich diejenige, die von den Achsen aller Elemente aus der durch die betreffende Kurve bestimmten Elementklasse überlagert wird (I, 4). Jede dieser geodätischen Linien ist doppel-

punktlos, da es die mit ihr homotope Kurve aus Σ ist. Zwei dieser geodätischen Linien schneiden einander einmal oder keinmal, je nachdem die mit ihnen homotopen Kurven aus Σ einander einmal oder keinmal schneiden. Wir können daher das Kurvensystem Σ der Fig. 3 als aus geschlossenen geodätischen Linien gebildet annehmen. Die über Σ liegenden Achsen in \mathcal{D} zerlegen \mathcal{D} in unendlich viele Gebiete, von denen je vier in einem Punkt zusammenstossende einen Fundamentaltbereich von F ausmachen.

Nun sei P ein beliebiger Punkt von E und R der nach P führende Radius von E . Durchläuft ein Punkt x den Radius R in der Richtung auf P zu, so passiert er unendlich viele der Gebiete, in die \mathcal{D} zerlegt ist. Der von x überdeckte Punkt auf φ muss also mindestens eine der Kurven von Σ unendlich oft über-

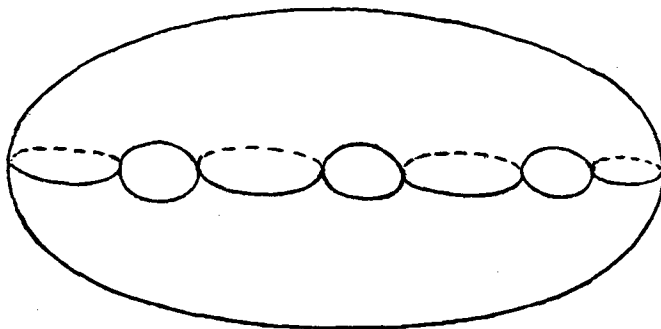


Fig. 3.

kreuzen. R schneidet also ein System von unendlich vielen mit einander äquivalenten Achsen. Da nur endlich viele mit einander äquivalente Achsen in einen mit E konzentrischen kleineren Kreis eindringen, muss die Folge von äquivalenten, R schneidenden Achsen sich um P zusammenziehen. Orientiert man die ausgewählte Kurve aus Σ , so kann man unterscheiden, ob R die betreffenden Achsen von links nach rechts oder von rechts nach links schneidet. Eines von beiden muss unendlich oft vorkommen, und man kann sich auf eine unendliche Teilfolge mit lauter gleichsinnigen Schnitten beschränken:

Hilfssatz 4: Zu jedem Punkte P von E lässt sich eine Folge von in einander transformierbaren, primären Elementen f_n von F so bestimmen, dass $U(f_n) \rightarrow P$ und $V(f_n) \rightarrow P$ und die Konvergenz dieser beiden Punktfolgen gegen P von entgegengesetzten Seiten erfolgt, und ferner die von den Achsen von f_n überlagerte geschlossene geodätische Linie auf φ doppelpunktlos ist.

— Nun sei P ein isolierter Randfixpunkt einer T -Funktion t , und es sei angenommen, dass die Randpunkte bei t auf der einen Seite von P fort und

auf der anderen Seite gegen ν strömen. Das ist der Fall, wenn P der einzige Randfixpunkt von t ist, oder wenn zwei verschiedene fixpunktfreie Intervalle mit zyklisch gleicher Verschiebungsrichtung in P zusammenstossen. Wir bestimmen nun eine Folge von äquivalenten, sich auf P zusammenziehenden Achsen so, wie in Hilfssatz 4. Die Grundpunkte derselben gehören schliesslich alle zu den an P stossenden fixpunktfreien Intervallen. Es sei l ein solches Element der Folge und l_I das ihm bei dem durch t induzierten Automorphismus I entsprechende Element. Nach der Voraussetzung über die Verschiebungsrichtung schneiden sich die Achsen von l und l_I (Fig. 4). Nun seien λ bzw. λ' die ge-

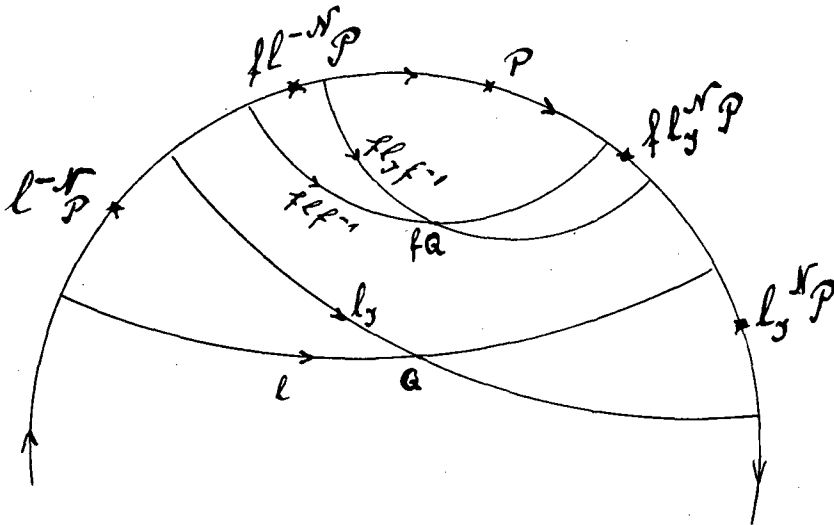


Fig. 4.

schlossenen, doppeltpunktlosen, geodätischen Linien auf φ , über denen die Achsen von l bzw. l_I liegen. Alle Achsen der benutzten Folge liegen über λ , die Achsen aller bei I entsprechenden Elemente über λ' . Der Schnittpunkt eines zusammengehörigen Achsenpaares liegt also über einem Schnittpunkt von λ und λ' , und von diesen gibt es nur endlich viele. Mindestens einer von diesen muss also in der Folge unendlich oft benutzt werden. Wir können also die benutzte Folge so einrichten, dass alle Schnittpunkte zusammengehöriger Achsenpaare untereinander äquivalent sind. Nun sei Q der Schnittpunkt der Achsen von l und l_I und fQ der Schnittpunkt eines späteren, d. h. enger auf P zusammengezogenen Achsenpaares. Dann sind $f l f^{-1}$ und $f l_I f^{-1}$ die beiden in l und l_I transformierbaren Elemente, deren Achsen sich in fQ schneiden. Andererseits soll das letztere Element dem ersteren bei I entsprechen. Also ist

$$f_I l_I f_I^{-1} = f l_I f^{-1},$$

und somit

$$f^{-1} f_I = l_I^n$$

oder

$$f_I = f l_I^n \tag{7}$$

für irgend ein n , indem wir l und damit auch l_I als primär (I, S. 209) annehmen können.

Da l durch f in $f l f^{-1}$ transformiert wird, liegt $V(f)$ auf dem P enthaltenden Bogen zwischen den Grundpunkten von $f l f^{-1}$ und $U(f)$ auf dem P nicht enthaltenden Bogen zwischen den Grundpunkten von l . Da l_I durch f in $f l_I f^{-1}$ transformiert wird, folgt ebenso, dass $V(f)$ bzw. $U(f)$ zwischen den Grundpunkten von $f l_I f^{-1}$ bzw. l_I liegt. Also liegt $V(f)$ auf dem P enthaltenden Bogen zwischen $U(f l_I f^{-1})$ und $V(f l_I f^{-1})$ und $U(f)$ auf dem P nicht enthaltenden Bogen zwischen $U(l_I)$ und $V(l_I)$. Siehe Fig. 4, wo die Achse von f nicht eingezeichnet ist, um über die gegenseitige Lage von $V(f)$ und P nichts weiteres vorauszusetzen. Da nun $V(f_I)$ entweder mit $V(f)$ zusammenfällt (nämlich wenn $P = V(f)$ ist) oder in der Figur rechts von $V(f)$ liegt, so zeigt Hilfssatz 1, dass in (7) nur Exponenten $n \geq 0$ in Frage kommen.

Nun soll gezeigt werden, dass die in Frage kommenden Exponenten n auch nach oben beschränkt sind. Zunächst folgt aus (7) durch Ausübung von I^{-1} und hintere Multiplikation mit l^{-n} :

$$f_{I^{-1}} = f l^{-n}. \tag{7 a}$$

Nun sei N eine so grosse positive Zahl, dass $l_I^N P$ zwischen $V(l)$ und $V(l_I)$ und $l^{-N} P$ zwischen $U(l)$ und $U(l_I)$ fällt. Dann fällt $f l_I^N P$ zwischen $V(f l f^{-1})$ und $V(f l_I f^{-1})$ und $f l^{-N} P$ zwischen $U(f l f^{-1})$ und $U(f l_I f^{-1})$. Durch $f l_I^N$ wird der Bogen zwischen P und $V(l_I)$ auf den in ihm enthaltenen Bogen zwischen $f l_I^N P$ und $V(f l_I f^{-1})$ abgebildet, also enthält der letztgenannte Bogen $V(f l_I^N)$. Durch $f l^{-N}$ wird der Bogen zwischen P und $U(l)$ auf den in ihm enthaltenen Bogen zwischen $f l^{-N} P$ und $U(f l f^{-1})$ abgebildet, also enthält der letztgenannte Bogen $V(f l^{-N})$. Nun liegen $V(f_{I^{-1}})$, $V(f)$ und $V(f_I)$ entweder alle drei in P oder alle drei in dieser Reihenfolge auf derselben Seite von P . Somit ergibt sich, dass n in (7) und (7 a) unterhalb des Wertes N bleiben muss. Dabei ist N nur von der gegenseitigen Lage von P und den Achsen von l und l_I , aber nicht von f abhängig.

Nun lasse man f eine solche Elementfolge durchlaufen, dass $f l f^{-1}$ die oben eingeführte, sich auf P zusammenziehende Achsenfolge ergibt. Zu jedem f ge-

hört dann ein n gemäss (7). Da n unabhängig von f beschränkt ist, lassen sich zwei verschiedene f , etwa f' und f'' , finden, zu denen dasselbe n gehört. Aus

$$f'^{-1}f'_I = f''^{-1}f''_I = l_I^n$$

folgt

$$f''f'^{-1} = (f''f'^{-1})_I.$$

Also ist $f''f'^{-1}$ ein Fixelement $\neq 1$. Angenommen, die Achse von $f''lf'^{-1}$ umschliesse P enger, als diejenige von $f'lf'^{-1}$. Das Fixelement $f''f'^{-1}$ transformiert die Achse von $f'lf'^{-1}$ in die Achse von $f''lf'^{-1}$, hat also seinen positiven Grundpunkt auf dem P enthaltenden Bogen zwischen den Grundpunkten von $f'lf'^{-1}$. Auf diesem Bogen ist aber P der einzige Fixpunkt. Also ist P Grundpunkt des Fixelements $h = f''f'^{-1}$. Also hat tE genau zwei Fixpunkte, nämlich die Grundpunkte von h ; gäbe es nämlich noch einen von diesen verschiedenen Fixpunkt Q , so wären alle Punkte $h^n Q$ auch Fixpunkte, und diese würden sich für $n \rightarrow \infty$ gegen P häufen; P sollte aber isoliert sein:

Satz 4: *Es gibt keine Randabbildung mit nur einem Fixpunkt. Wenn eine Randabbildung einen isolierten Fixpunkt mit gleicher Verschiebungsrichtung in den beiden anstossenden fixpunktfreien Intervallen besitzt, so besitzt sie genau zwei Fixpunkte, und diese sind die Grundpunkte einer zyklischen Fixelementgruppe.*

Dass der in Satz 4 genannte Sachverhalt wirklich vorkommen kann, zeigt das Beispiel 9, I, S. 331.

5. Reguläre Randfixpunkte.

Wenn ein Automorphismus I vorgegeben ist, so lassen sich die Punkte von E in bezüglich $H(I)$ reguläre und singuläre einteilen. Dabei heisst ein Punkt regulär, wenn sich zu ihm eine solche Umgebung u bestimmen lässt, dass alle aus u durch die Elemente $\neq 1$ von $H(I)$ hervorgehenden Punktmenge zu u fremd sind, andernfalls singulär. Alle Grundpunkte von Elementen von H sind singulär, desgleichen alle Häufungspunkte von solchen, und damit ist die Menge $S = S(I)$ der singulären Punkte erschöpft (I, 29). Ist $H(I) = 1$, so ist S leer. Ist $H(I)$ zyklisch, so besteht S aus 2 Punkten. Enthält $H(I)$ mehr als eine zyklische Gruppe, also mehr als ein primäres Element, so ist S perfekt und nirgends dicht. Die Restmenge $E - S$ besteht aus Intervallen, die als »Regularitätsintervalle»

bezeichnet seien. S ist eine Teilmenge der Randfixpunktmenge M und, wenn M mehr als 2 Punkte enthält, sodass M^* definiert ist, auch von M^* , da S in diesem Fall keine isolierten Punkte von M , also keinen Punkt von $M - M^*$ enthält. — Nun gilt:

Satz 5: *Ein regulärer Randfixpunkt ist immer isoliert und beiderseits anziehend oder beiderseits abstossend.*

Um diesen Satz zu beweisen, machen wir von dem Flächeninhalt in der nichteuklidischen Metrik Gebrauch und bezeichnen diesen für irgend ein Polygon \mathfrak{P} mit $Ar(\mathfrak{P})$. Ist \mathfrak{P} ein Dreieck, so ist bekanntlich

$$Ar(\mathfrak{P}) = k(\pi - \Sigma),$$

wo Σ die Winkelsumme von \mathfrak{P} bedeutet und k eine Konstante ist. Wir setzen $k = \frac{1}{\pi}$ und haben die Flächenmessung dadurch so normiert, dass ein Dreieck mit lauter Nullwinkeln (d. h. die aus drei sich auf E berührenden Orthogonalkreisbögen gebildete Figur) die Einheit des Flächenmasses hat. Für ein beliebiges Dreieck \mathfrak{P}_3 ist nun

$$Ar(\mathfrak{P}_3) = 1 - \frac{\Sigma}{\pi},$$

und für ein beliebiges n -Eck \mathfrak{P}_n (durch Zerlegung in $n-2$ Dreiecke)

$$Ar(\mathfrak{P}_n) = n - 2 - \frac{\Sigma}{\pi}, \quad (8)$$

wo Σ die Winkelsumme des n -Ecks bedeutet. In I, 3 wurde ein $4p$ -Eck mit der Winkelsumme 2π als Fundamentalbereich von F konstruiert. Also bestimmt sich der Flächeninhalt der Fläche φ vom Geschlecht $p > 1$ im Sinne der von \mathcal{O} übertragenen Metrik konstanten negativen Krümmungsmasses aus (8) zu:

$$Ar(\varphi) = 4(p-1). \quad (9)$$

Nun sei P ein regulärer Randfixpunkt und u eine solche durch einen Orthogonalkreis zu E abgegrenzte Umgebung von P , dass alle aus u durch die Elemente $\neq 1$ von $H(I)$ hervorgehenden Punktmengen zu u fremd sind. Im Gegensatz zu der Behauptung des Satzes 5 nehmen wir an, P sei Häufungspunkt von M und damit auch von M^* . Man wähle in u eine beliebige Anzahl n von Punkten aus M^* und mache diese zu Eckpunkten eines nichteuklidisch-konvexen n -Ecks

\mathfrak{P}_n mit Nullwinkeln. \mathfrak{P}_n ist ein Teilbereich des Hauptgebietes $\Omega(I)$, da seine Ecken Randpunkte dieses konvexen Bereichs sind. Nun betrachte man $f\mathfrak{P}_n$ für alle $f \neq 1$ aus F . Ist f nicht Fixelement, so liegt $f\mathfrak{P}_n$ ausserhalb \mathfrak{P}_n , da $f\Omega$ ausserhalb Ω liegt (§ 3). Ist f Fixelement, so liegt $f\mathfrak{P}_n$ ausserhalb \mathfrak{P}_n , da \mathfrak{P}_n in u liegt. \mathfrak{P}_n überdeckt also einen Teilbereich von φ einfach. Daraus ergibt sich ein Widerspruch gegen (9), da nach (8)

$$Ar(\mathfrak{P}_n) = n - 2$$

und n beliebig wählbar ist. Also ist P ein isolierter Randfixpunkt. Als regulärer Fixpunkt ist P nicht Grundpunkt. Also folgt aus Satz 4, dass P beiderseits anziehend oder beiderseits abstossend sein muss. Damit ist Satz 5 bewiesen.

In I, 34 wurde bewiesen, dass ein bezüglich $H(I)$ regulärer Randfixpunkt P nicht Häufungspunkt von Fixpunkten von $t\Phi$ sein kann, wenn t eine beliebige, I induzierende T -Funktion ist. Dieser Satz ist jetzt dahin erweitert, dass P nicht Häufungspunkt von Fixpunkten von $t(\Phi + E)$ sein kann. Erweitert man t nach I, S. 284 durch Spiegelung an E zu einer auf der ganzen komplexen x -Kugel K definierten Funktion tK , so ist P ein isolierter Fixpunkt von tK .

6. Typenbildung für $H(I) = 1$.

Nun sei $H(I) = 1$ vorausgesetzt. I hat also keine eigentlichen Fixelemente. Die singuläre Menge S ist leer, und E besteht ganz aus regulären Punkten. Dann kann es nur endlich viele Randfixpunkte geben, da ein regulärer Punkt nach Satz 5 nicht Häufungspunkt von Fixpunkten sein kann. Wenn es nun überhaupt Randfixpunkte gibt, so ist nach Satz 5 von den Endpunkten eines fixpunktfreien Intervalls der eine beiderseits anziehend, der andere beiderseits abstossend. Fixpunkte dieser beiden Arten müssen also auf E abwechseln, und ihre Gesamtzahl muss gerade sein. Sie werde gleich 2μ gesetzt. Um M^* zu bilden, hat man jeden zweiten Fixpunkt fortzulassen und nur die beiderseits anziehenden zu behalten. M^* besteht also aus μ Punkten. Dabei ist, damit überhaupt von M^* die Rede ist, $\mu \geq 2$ anzunehmen, da ja M in diesem Fall mehr als 2 Punkte enthalten soll. Das Hauptgebiet $\Omega(I)$ ist also ein μ -Eck mit Nullwinkeln. Nach (8) ist

$$Ar(\Omega) = \mu - 2. \tag{10}$$

Nach Satz 3 soll Ω in unserem Fall ein einfach zusammenhängendes Gebiet ω auf φ einfach überdecken.

Also ist

$$Ar(\Omega) \leq Ar(\varphi).$$

Aus (9) und (10) folgt somit

$$\mu \leq 4p - 2. \quad (11)$$

Die Gesamtzahl der Randfixpunkte ist also $\leq 8p - 4$.

Satz 6: *Die zu einem Automorphismus erster Art ohne eigentliche¹ Fixelemente gehörige Randabbildung hat 2μ abwechselnd anziehende und abstossende Fixpunkte. Dabei ist*

$$0 \leq \mu \leq 4p - 2.$$

Je nach dem Zahlwert von μ ergibt sich somit für solche Automorphismen eine Einteilung in $4p - 1$ verschiedene »Typen«.

Von den 2μ Randfixpunkten ist keiner Grundpunkt, da es keine Fixelemente gibt. Das im Falle $\mu > 1$ definierte Gebiet $\omega(I)$ auf φ artet für $\mu = 2$ strichförmig aus, indem es aus einer offenen, doppelunktlosen, geodätischen Linie besteht. Im Falle $\mu > 2$ sind die Randseiten von ω offene, doppelunktlose, einander nicht treffende, geodätische Linien, von denen je zwei aufeinanderfolgende asymptotisch gegen einander verlaufen und dabei einen unendlich langen »Zipfel« des einfach zusammenhängenden Gebietes ω bilden. Zwei solche Zipfel verlaufen auf φ nicht asymptotisch gegen einander. Denn das würde heissen, dass die ihnen entsprechenden Eckpunkte von Ω äquivalente Punkte wären; wegen des Fehlens von Fixelementen müssten sie einander bei einem Nicht-Fixelement entsprechen, und das wird durch Satz 2 ausgeschlossen, da sie nicht Grundpunkte sind.

Bezüglich der Realisierbarkeit der verschiedenen Typen im Falle des Satzes 6 sei Folgendes bemerkt: Ein Beispiel für $\mu = 0$ findet man in I, 44, ein Beispiel für $\mu = 1$ hat man in dem Automorphismus \mathcal{A}' des Beispiels 3, I, S. 251. Für $\mu = 2$, also strichförmiges ω -Gebiet, liefert der Automorphismus I'^2 des Beispiels 14, I, S. 354 ein Beispiel. Für $\mu > 2$ verweisen wir auf den Automorphismus $J = I^4$ des Beispiels 13, I, S. 347, für den $\mu = 4$ bei $p = 2$ ist. Ich bemerke aber ausdrücklich, dass mir *kein* Beispiel für den Eintritt des Gleichheitszeichens in (11) bekannt ist. In diesem Falle muss, wenn er überhaupt vorkommen kann, das Gebiet ω die Fläche φ bis auf eine Nullmenge von sehr komplizierter Struktur erfüllen.

¹ D. h. von der Identität verschiedene.

7. Typenbildung für zyklische $H(I)$.

Nun werde angenommen, dass $H(I)$ zyklisch ist. h sei das primäre Fixelement, also $H(I) = \{h\}$. $U(h)$ und $V(h)$ sind die beiden einzigen singulären Punkte (Fig. 5). Zwischen dem zu E orthogonalen Bogen α , der die Achse von h schneidet, im Übrigen aber beliebig gewählt ist, und $h\alpha$ wird ein Fundamentalbereich \S für H abgegrenzt. Wir betrachten eines der beiden Regularitätsinter-

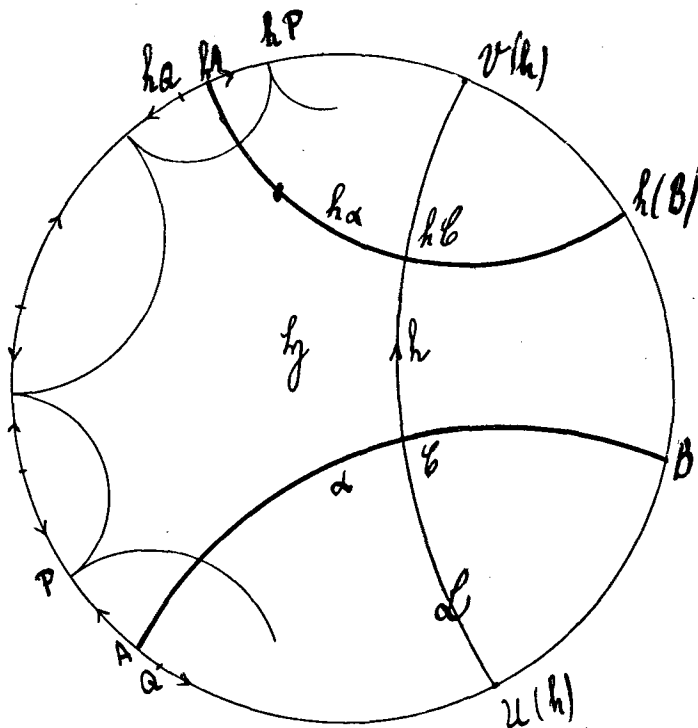


Fig. 5.

valle zwischen $U(h)$ und $V(h)$, etwa das in der Figur links liegende. Durch A und hA wird in diesem ein Fundamentalstück bezüglich H abgegrenzt. Dies enthält nach Satz 5 nur endlich viele Fixpunkte, und diese sind beiderseits anziehend oder beiderseits abstossend. Diese beiden Arten müssen abwechseln, und ihre Anzahl auf dem Stück (A, hA) muss gerade sein. Wenn nämlich der erste Punkt P (siehe Figur 5) anziehend ist, so ist es auch hP , da die T -Funktion t mit h vertauschbar ist. Die Anzahl der Fixpunkte auf (A, hA) sei $2\mu_1$.

Falls $\mu_1 > 0$ ist, hat die Randabbildung unendlich viele Fixpunkte mit Häufungspunkten in den singulären Punkten $U(h)$ und $V(h)$. Man bilde ihr

Hauptgebiet Ω (§ 3), das auf den anziehenden Punkten allein so aufgebaut ist, wie es in der Figur 5 durch einige Randseiten von Ω für $\mu_1 = 3$ angedeutet ist. Derjenige Teil von Ω , der zu \mathfrak{S} gehört und links von der Achse von h liegt, ist, wie aus der Figur ersichtlich, ein $(\mu_1 + 4)$ -Eck mit der Winkelsumme 2π , indem es μ_1 Nullwinkel hat und die übrigen Winkel zwei Paare von Supplementwinkeln bilden. Der Flächeninhalt desselben ergibt sich daher aus (8) zu μ_1 . Ebenso ist μ_2 der Flächeninhalt des rechts von der Achse liegenden, Ω und \mathfrak{S} gemeinsamen Polygons, wenn $2\mu_2$ die Anzahl der Randfixpunkte auf dem Bogen (B, hB) ist. Ω und \mathfrak{S} haben also ein Flächenstück von der Grösse $\mu = \mu_1 + \mu_2$ gemeinsam. Nach Satz 3 überdeckt dies das Gebiet ω (I) auf φ genau einfach. Aus

$$Ar(\omega) \leq Ar(\varphi)$$

und (9) folgt nun

$$\mu \leq 4p - 4. \quad (12)$$

Die Gesamtzahl 2μ der zu \mathfrak{S} gehörigen, d. h. nicht singulären und bezüglich H nicht äquivalenten Randfixpunkte ist also $\leq 8(p - 1)$. Zwei verschiedene von diesen können nach Satz 2 auch nicht durch ein Nicht-Fixelement in einander übergeführt werden.

Satz 7: *Die Anzahl der untereinander nicht äquivalenten regulären Fixpunkte bei der zu einem Automorphismus erster Art mit zyklischer Fixelementgruppe gehörigen Randabbildung ist 2μ , wobei*

$$0 \leq \mu \leq 4p - 4.$$

Je nach dem Zahlwert von μ ergibt sich somit für solche Automorphismen eine Einteilung in $4p - 3$ verschiedene Typen.

Je nach der Aufteilung von μ in zwei zu den beiden Regularitätsintervallen gehörige Summanden μ_1 und μ_2 lässt sich diese Typeneinteilung verfeinern.

Man kann sich den Satz 7 dadurch veranschaulichen, dass man analog wie in I, 30 die Fläche $K_1 = K \bmod H$ bildet, wo K die Kugel der komplexen x -Werte bedeutet. K_1 ist ein Torus. Auf K_1 liegen zwei geschlossene Kurven, die von je einem der Regularitätsintervalle unendlich oft überdeckt werden. Die eine wird z. B. von dem Bogen (A, hA) , die andere von dem Bogen (B, hB) genau einmal überdeckt. Eine I induzierende T -Funktion t ruft auf K_1 eine zur Klasse der Iden-

tität gehörige¹ Abbildung tK_1 hervor. Auf den beiden genannten Kurven hängt t nur von I ab, und 2μ ist die Anzahl der auf den beiden Kurven liegenden Fixpunkte von tK_1 , die den Randfixpunkten in \mathfrak{S} entsprechen.

8. Kerngebiet eines Automorphismus.

Nun wird schliesslich der Fall untersucht, in dem $H(I)$ mehr als eine zyklische Gruppe enthält. Die Menge S der bezüglich H singulären Punkte ist perfekt und nirgends dicht. S ist eine Teilmenge von M und, da S keine isolierten Punkte, also keine Punkte von $M - M^*$ enthält, auch eine Teilmenge von M^* . Nun verbinde man die Endpunkte jedes der unendlich vielen Regularitätsintervalle, die $E - S$ ausmachen, durch eine nichteuklidische Gerade. So entsteht ein nicht-euklidisch-konvexer Bereich \mathcal{A} mit unendlich vielen Seiten. Da S eine Teilmenge von M^* ist, ist \mathcal{A} ein Teilbereich des Hauptgebietes Ω . (Für $M = M^* = S$ ist $\mathcal{A} = \Omega$.) Ist $f_I \neq f$, so überdecken \mathcal{A} und $f\mathcal{A}$ einander nicht, da Ω und $f\Omega$ einander nicht überdecken. Ist $f_I = f$, so ist nicht nur $fM^* = M^*$, sondern auch $fS = S$. Denn S ist die abgeschlossene Hülle der Menge der Fixgrundpunkte (I, 29), und da die Menge der Fixgrundpunkte durch ein Fixelement auf sich selbst abgebildet wird, ist dasselbe mit S der Fall.

Definition: Das soeben definierte Gebiet $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(I)$ wird als »Kerngebiet« des Automorphismus I oder der T -Funktion t bezeichnet. Es wird nur dann von einem Kerngebiet gesprochen, wenn die Fixelementgruppe des Automorphismus mehr als eine zyklische Gruppe umfasst. Das Kerngebiet ist ein Teil des Hauptgebietes und kann speziell mit diesem identisch sein.

Wenn \mathcal{A} und $f\mathcal{A}$ für $f_I \neq f$ an einander stossen, so müssen Ω und $f\Omega$ an einander stossen, da \mathcal{A} in Ω enthalten ist. Wenn umgekehrt Ω und $f\Omega$ an einander stossen, so folgt aus Satz 2, dass dies längs der Achse eines Fixelements geschieht, also stossen auch \mathcal{A} und $f\mathcal{A}$ an einander.

Ein Fixelement h bildet S auf sich und daher auch die Menge der Regularitätsintervalle auf sich ab. Ist i ein solches und haben i und hi Punkte gemein, so ist $hi = i$, also sind die Endpunkte von i Grundpunkte von h , und i kann als »periodisches Regularitätsintervall« bezeichnet werden. (Vgl. I, 14, wo die gleiche Überlegung auf $E - M$ angewandt ist, und I, 29) Nun soll im

¹ Siehe Satz 12.

nächsten Paragraphen gezeigt werden, dass jedes Regularitätsintervall periodisch ist. Die Menge $E-S$ verhält sich also in dieser Beziehung anders als die Menge $E-M$, bei der auch aperiodische Intervalle vorkommen können; so sind ja z. B. im Falle des § 6 alle fixpunktfreien Intervalle aperiodisch. Aus dem genannten Satz ergibt sich nun folgender Sachverhalt: Jede Randseite von \mathcal{A} ist eine Achse, liegt also über einer geschlossenen geodätischen Linie auf φ . Diese ist doppel­punktlos, weil die Randseite von \mathcal{A} keine mit ihr äquivalente Achse schneidet, wie aus der oben besprochenen Lage von \mathcal{A} und $f\mathcal{A}$ folgt. Zwei verschiedene von diesen Kurven auf φ sind aus dem gleichen Grunde zu einander fremd. Keine zwei von ihnen sind homotop, ohne identisch zu sein, da jeder Kurventypus nur eine geschlossene geodätische Linie enthält. *Also ist ihre Anzahl endlich, da φ ein endliches Geschlecht hat.* Es gibt also nur endlich viele unter einander nicht äquivalente Regularitätsintervalle. Entsprechend dem Satz 3 haben wir nun den folgenden Satz:

Satz 8: *Das Kerngebiet $\mathcal{A}(I)$ eines Automorphismus I , dessen Fixelementgruppe mehr als eine zyklische Gruppe enthält, ist die universelle Überlagerungsfläche eines von endlich vielen doppel­punktlosen und zu einander fremden geschlossenen geodätischen Linien berandeten Teiles $\delta(I)$ von φ . Die Fixelementgruppe $H(I)$ ist die Gruppe der Decktransformationen von \mathcal{A} über δ .*

\mathcal{A} enthält alle Achsen von Fixelementen, da deren Grundpunkte Randpunkte des konvexen Gebietes \mathcal{A} sind. δ enthält also alle den Fixelementen entsprechenden geschlossenen geodätischen Linien. Man beweist leicht folgenden Satz über die Verteilung dieser Achsen, den wir hier ohne Beweis angeben, da er im Folgenden nicht verwendet wird: Sind i und j zwei Intervalle auf E , von denen jedes singuläre Punkte enthält, so gibt es ein Fixelement, von dessen Grundpunkten der eine in i , der andere in j liegt.

9. Periodischer Charakter der Regularitätsintervalle.

In diesem Paragraphen geben wir den Beweis des oben schon verwendeten Satzes:

Satz 9: *Jedes Regularitätsintervall ist periodisch.*

In dem Falle einer zyklischen Fixelementgruppe ist der Satz richtig, da es alsdann genau zwei singuläre Punkte gibt, die zusammengehörige Fixgrundpunkte sind, also zwei periodische Regularitätsintervalle bestimmen (§ 7).

$H(I)$ enthalte also mehr als eine zyklische Gruppe. Dann gibt es keine isolierten singulären Punkte, also keine aneinanderstossenden Regularitätsintervalle. Je zwei Randseiten von \mathcal{A} haben also eine gemeinsame Senkrechte. Zwei sich trennende Paare von Randseiten von \mathcal{A} haben gemeinsame Senkrechte, die einander schneiden. Die Länge mindestens einer von diesen muss dann oberhalb einer gewissen, nur von der Metrik abhängenden Konstanten liegen. Denn man

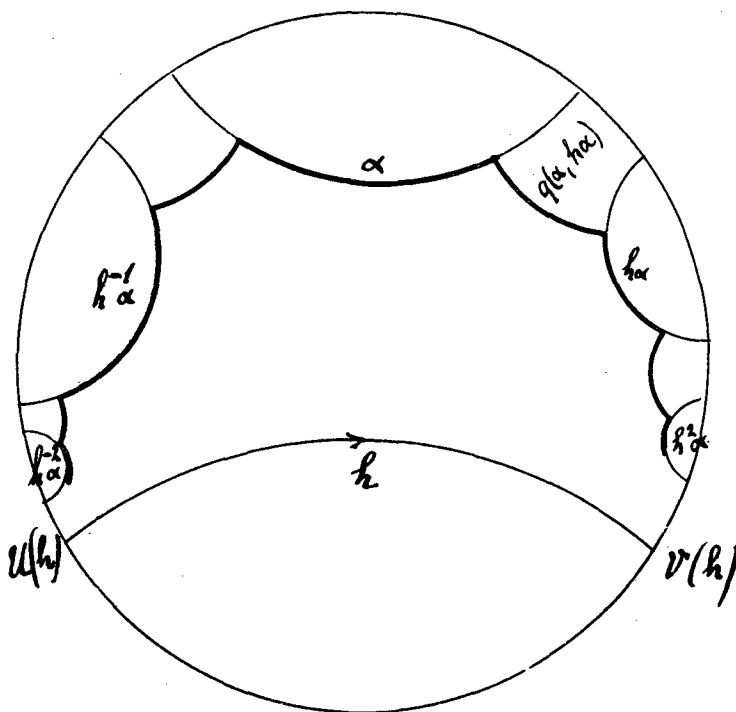


Fig. 6.

bilde ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ und 0 und spiegele dieses fortgesetzt an den Seiten, die den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschliessen. So erhält man acht um den Scheitelpunkt dieses Winkels angeordnete Dreiecke, die zusammen ein Nullwinkelviereck bilden. Die gemeinsamen Senkrechten gegenüberliegender Seiten halbieren einander und stehen senkrecht auf einander und haben die Länge x , wenn $\frac{x}{2}$ die zwischen den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegende Seite des Ausgangsdreiecks ist. Als die obengenannte Konstante kann man dann z. B. diese Länge x nehmen.

Nun sei α irgend eine Randseite von \mathcal{A} und h irgend ein Fixelement. Dann ist auch $h\alpha$ eine Randseite von \mathcal{A} . Wenn $h\alpha$ von α verschieden ist, also α nicht die Achse von h ist, so sei $q(\alpha, h\alpha)$ die gemeinsame Senkrechte von α und $h\alpha$, die als das »zu α und $h\alpha$ gehörige Querstück von \mathcal{A} » bezeichnet sei. $q(h^n\alpha, h^{n+1}\alpha)$ ist das Bild von $q(\alpha, h\alpha)$ bei h^n . Nun zeichne man (Fig. 6) die Randseiten $h^n\alpha$ von \mathcal{A} für alle $n \geq 0$ und alle $q(h^n\alpha, h^{n+1}\alpha)$. Alle diese Querstücke und alle zwischen ihnen verlaufenden »Seitenstücke«, d. h. Teilbögen der $h^n\alpha$, bilden zusammen eine in Φ verlaufende einfache Kurve, deren Enden gegen $U(h)$ und $V(h)$ streben, und die wir als die » $h-\alpha$ -Kette« bezeichnen. (Sie ist in Fig. 6 etwas stärker ausgezogen.) Nun sei β eine von allen $h^n\alpha$ verschiedene Randseite von \mathcal{A} auf derselben Seite der Achse von h , wie α . β liege z. B. zwischen $h^{-1}\alpha$ und α . Dann liegt $h\beta$ zwischen α und $h\alpha$. Also schneiden $q(\beta, h\beta)$ und $q(\alpha, h\alpha)$ einander. Von diesen beiden Querstücken kann daher höchstens eines $< x$ sein. Nun bezeichne man als eine »ausgezeichnete Kette« eine solche, deren Querstücklänge $< x$ ist, die zugehörige Achse als eine »ausgezeichnete Achse« und die geschlossene geodätische Linie auf φ , über der diese Achse liegt, als eine »ausgezeichnete Kurve«. Ist die $h-\alpha$ -Kette ausgezeichnet, so ist h ein primäres Element. Denn ist $h = k^n$, $n > 1$, so werden α und $k^n\alpha$ durch $k\alpha$ und $k^{n+1}\alpha$ getrennt; die Querstücke $q(\alpha, k^n\alpha)$ und $q(k\alpha, k^{n+1}\alpha)$ schneiden also einander; sie sind gleich lang, da sie durch k aus einander hervorgehen, und ihre Länge muss also $> x$ sein. — Somit kann es, wenn die $h-\alpha$ -Kette ausgezeichnet ist, auf derselben Seite der Achse von h keine zweite ausgezeichnete Kette geben.

Zu einer ausgezeichneten Achse gibt es also höchstens zwei ausgezeichnete Ketten, nämlich eventuell auf jeder Seite eine. Durch ein Fixelement wird eine Kette in eine Kette mit gleicher Querstücklänge, also eine ausgezeichnete in eine ausgezeichnete transformiert. Wenn h durch ein Nicht-Fixelement f in ein Fixelement $h_1 = fhf^{-1}$ transformiert wird, so sind die Achsen von h und h_1 Randseiten von \mathcal{A} ; und wenn \mathcal{A} rechts von der gerichteten Achse von h liegt, so liegt es links von der Achse von h_1 (Satz 2). h sowohl wie h_1 geben also nur auf einer Seite zu Kettenbildung Anlass. Wenn sie beide ausgezeichnet sind, so gehören die beiden ausgezeichneten Ketten zu verschiedenen Seiten der ausgezeichneten Kurve, über der die beiden Achsen liegen. Wir fassen zusammen: Zu jeder ausgezeichneten Kurve gehören ein oder zwei Systeme von äquivalenten ausgezeichneten Ketten, und damit ein oder zwei Werte für die Länge der zugehörigen Querstücke.

Nun nehme man im Gegensatz zu der Behauptung des Satzes 9 an, dass es eine Randseite α von \mathcal{A} gibt, die nicht Achse ist, die also ein aperiodisches Regularitätsintervall begrenzt. $h\alpha$ ist für jedes Fixelement h eine von α verschiedene Randseite von \mathcal{A} . $f\alpha$ ist für jedes Nicht-Fixelement f eine ganz ausserhalb \mathcal{A} liegende Gerade; denn \mathcal{A} und $f\mathcal{A}$ können sich nach Satz 2 höchstens längs einer Achse berühren. α enthält also keine zwei äquivalenten Punkte.

Nun sei λ eine Abstandslinie zu α im Abstände ϱ auf derjenigen Seite von α , auf der \mathcal{A} liegt. Z sei der zwischen α und λ verlaufende Abstandstreifen. Es soll zunächst gezeigt werden, dass das Z und \mathcal{A} gemeinsame Gebiet einen unendlichen Flächeninhalt hat. Angenommen β und γ (Fig. 7) seien zwei Randseiten

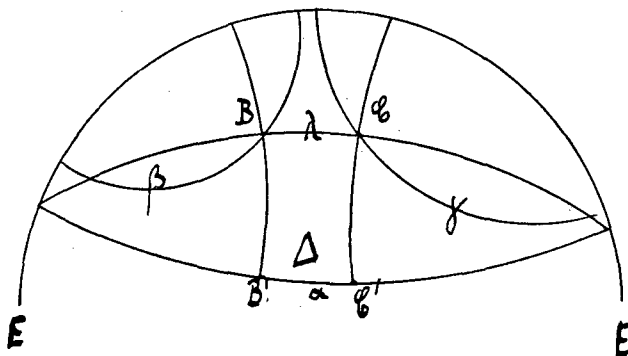


Fig. 7.

von \mathcal{A} , die λ schneiden, also aus Z zwei nicht zu \mathcal{A} gehörige Zweiecke abtrennen. Für die Länge des Stückes BC , das auf λ zwischen β und γ abgeschnitten wird, gibt es eine positive untere Schranke. (Als solche kann man z. B. dasjenige Stück nehmen, das auf λ zwischen β' und γ' abgeschnitten wird, wenn β' und γ' zwei Gerade sind, die mit α zusammen ein Nullwinkeldreieck bilden.) Die λ schneidenden Randseiten von \mathcal{A} häufen sich also nirgends auf λ , sondern können sich höchstens gegen die Endpunkte von λ , also von α , häufen. Es seien nun β und γ zwei aufeinander folgende. Sei B der γ zugekehrte Schnittpunkt zwischen β und λ und C der β zugekehrte Schnittpunkt zwischen γ und λ . B' und C' seien die Projektionen von B und C auf α (Fig. 7). Dann hat die Figur, die von dem Stück $B'C'$ auf α , dem Stück BC auf λ und den beiden Loten BB' und CC' begrenzt wird, einen Flächeninhalt grösser als eine nur von ϱ abhängige positive Zahl. Dies Flächenstück ist Z und \mathcal{A} gemeinsam. Selbst wenn nun unendlich viele Randseiten von \mathcal{A} in Z eindringen, so gibt es doch zwischen je zwei auf-

einanderfolgenden ein Flächenstück dieser Art. Also hat das Z und \mathcal{A} gemeinsame Gebiet einen unendlichen Flächeninhalt.

Nun hat ein Fundamentalbereich von F einen endlichen Flächeninhalt (siehe (9)). Also gibt es in dem Z und \mathcal{A} gemeinsamen Gebiet zwei äquivalente innere Punkte P und Q . Da \mathcal{A} mit seinem Bilde bei einem Nicht-Fixelement keine inneren Punkte gemeinsam hat, so muss $Q = hP$ sein, wo h ein Fixelement ist. Man fälle von P die Senkrechte PP' auf α . Ihr Bild bei h ist die Senkrechte QQ' von Q auf die von α verschiedene Randseite $h\alpha$ von \mathcal{A} . Es ist $PP' < \varrho$, da P in Z liegt, also auch $QQ' < \varrho$. Andererseits ist Q von α um weniger als ϱ entfernt, da Q in Z liegt. Also kommen α und $h\alpha$ einander näher als 2ϱ . Nun wähle man $\varrho < \frac{x}{2}$ und bestimme ein Fixelement h so, dass (Fig. 8)

$$AB = q(h^{-1}\alpha, \alpha) < 2\varrho < x.$$

Das Bild von AB bei h ist das von hA auf α nach hB auf $h\alpha$ führende Querstück $q(\alpha, h\alpha)$. Das in der Figur stark ausgezogene Querstück AB und Seitenstück BhA bildet mit allen seinen Bildern bei allen h^n ($n \geq 0$) eine ausgezeichnete Kette. Also ist h primär. Das stark ausgezogene Stück $ABhA$ enthält keine zwei äquivalenten Punkte ausser den Endpunkten. Denn das Seitenstück enthält als Teilbogen von α keine zwei äquivalenten Punkte; kein Punkt des Seitenstücks kann mit einem Punkt des Querstücks äquivalent sein, da ein Randpunkt von \mathcal{A} nicht mit einem inneren Punkt von \mathcal{A} äquivalent ist; endlich kann das Querstück keine zwei äquivalenten Punkte enthalten, da es sonst durch ein mit ihm äquivalentes Querstück geschnitten werden müsste, und das ist ausgeschlossen, da seine Länge und daher auch die seiner äquivalenten $< x$ ist. h bestimmt also einen Kurventypus ohne Doppelpunkte. Die ausgezeichnete Kurve k , über der die Achse von h liegt, ist also doppelpunktlos.

Nun wähle man $2\varrho_1$ kleiner als die beiden Querstücklängen, die zu k gehören, zeichne die Abstandslinie λ_1 im Abstände ϱ_1 von α und betrachte denjenigen Teil des entstehenden Abstandsstreifens, der in der Figur links von $hAhB$ liegt. Dieser Abstandshalbstreifen Z_1 hat auch unendlichen Flächeninhalt und gibt also zu derselben Betrachtung Anlass, wie früher Z . Er hat mit \mathcal{A} ein unendliches Gebiet gemeinsam. Es gibt also ein Element h_1 so, dass $h_1\alpha$ und $h_1^{-1}\alpha$ in Z_1 hineinragen, und so entsteht eine ausgezeichnete $h_1 - \alpha$ -Kette, da $2\varrho_1 < 2\varrho < x$. Das in der Figur 8 stark ausgezogene Fundamentalstück $A_1B_1h_1A_1$ dieser Kette enthält ausser den Endpunkten keine zwei äquivalenten Punkte. Die

Achse des primären Elements h_1 liegt also über einer doppelpunktlosen, ausgezeichneten Kurve k_1 . Überdies treffen k und k_1 einander nicht. Denn dieselbe Betrachtung wie oben zeigt, dass auf den beiden in der Figur stark ausgezogenen Fundamentalstücken beider Ketten zusammen ausser den beiden Endpunktpaaren keine zwei äquivalenten Punkte vorkommen. Dass k und k_1 auch nicht etwa identisch sind, ist durch die Wahl von ϱ_1 gesichert, da die zu k_1 gehörige Quer-

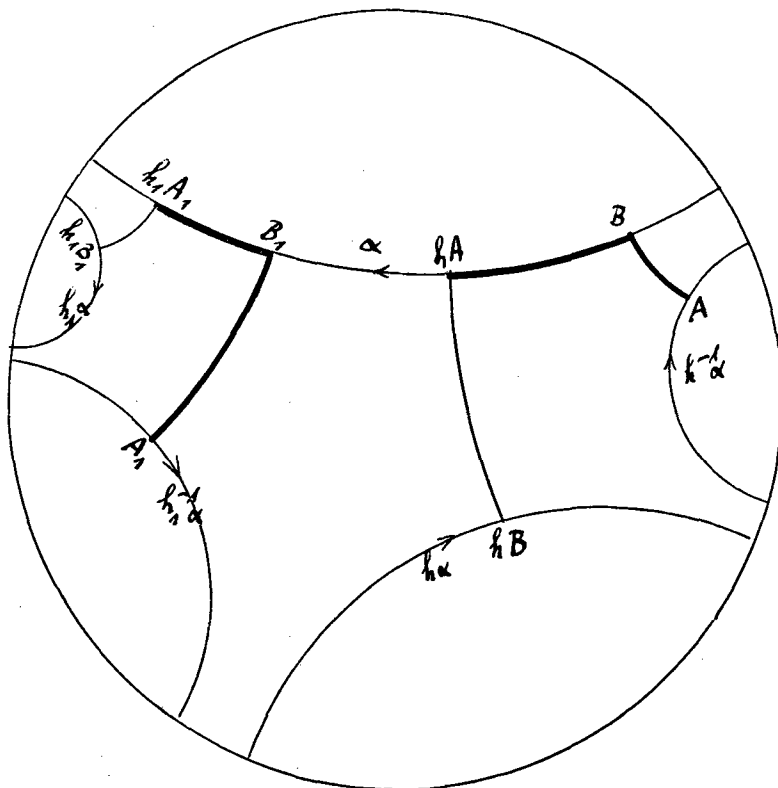


Fig. 8.

stücklänge der h_1 - α -Kette kleiner ausfällt, als die eventuell beiderseits zu k gehörigen Querstücklängen.

Nun wähle man $2\varrho_2$ kleiner als die beiden zu k_1 gehörigen Querstücklängen, konstruiere damit eine h_2 - α -Kette, die eine neue ausgezeichnete Kurve k_2 bestimmt, und setze dieses Verfahren beliebig lange fort. Dadurch erhält man beliebig viele verschiedene, doppelpunktlose und zu einander fremde, geschlossene, geodätische Linien auf φ . Keine zwei solche sind untereinander homotop. Dies Ergebnis steht im Widerspruch zu dem endlichen Geschlecht von φ .

Damit ist Satz 9 bewiesen.

10. Freiheit der Fixelementgruppe. Konstruktion ihres Fundamentalbereichs.

Wir setzen auch weiterhin voraus, dass $H(I)$ mehr als eine zyklische Gruppe umfasst, und bilden nach Satz 8 das vom Kerngebiet \mathcal{A} überlagerte Gebiet δ auf φ . Wenn zwei Randseiten von \mathcal{A} bei einem Nicht-Fixelement korrespondieren, so ist die von ihnen überlagerte geschlossene geodätische Linie auf φ mit beiden Seiten an der Berandung von δ beteiligt und zählt als 2 Randkurven von δ . Sei $r \geq 1$ die Anzahl der Randkurven von δ und q das Geschlecht von δ .

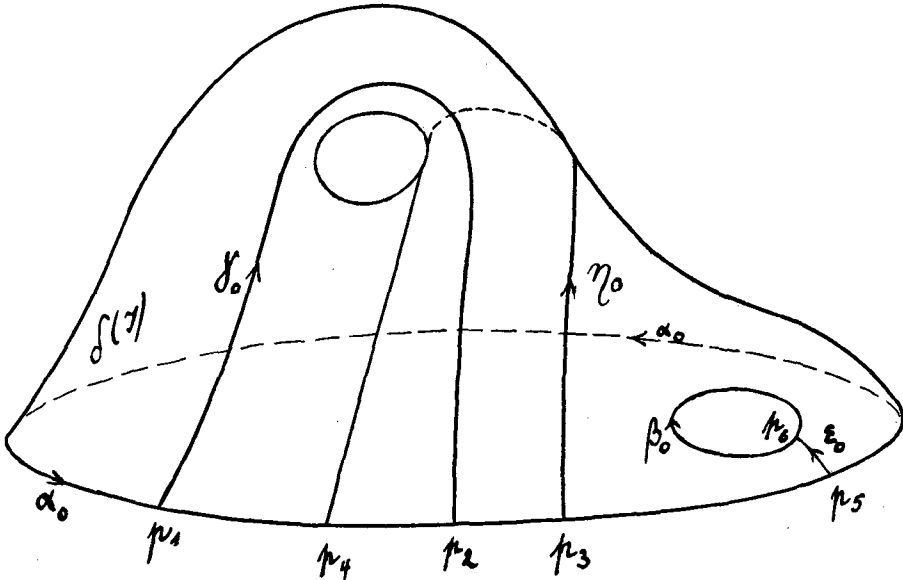


Fig. 9.

Es ist $q < p$, da es immer Randkurven gibt. Für $q=0$ ist $r \geq 3$, denn wenn δ schlicht ist, so ist $r \neq 1$, da eine geschlossene geodätische Linie nicht zusammenziehbar ist, und $r \neq 2$, da zwei geschlossene geodätische Linien nicht homotop sind. Also ist stets

$$v = 2q + r - 1 \geq 2.$$

Nun soll ein Teilbereich \mathcal{A}_0 von \mathcal{A} konstruiert werden, der δ genau einmal überdeckt, indem wir δ nach dem Vorbild des Enzyklopädieartikels¹ durch Querschnitte zerschneiden. Siehe zum Folgenden Fig. 9 und 10. Der bequemen

¹ M. DEHN und P. HEEGAARD, Analysis situs. Math. Enzykl. III, 1, 1, S. 200. In der Formel unten auf S. 198 ist r statt $2r$ zu lesen. Durch Aufschneiden längs eines Querschnitts wird K um 1 kleiner.

Ausdrucksweise halber nehmen wir in den Figuren und im Text an, dass $q=1$ und $r=2$, also $v=3$ ist; das Verfahren ist aber natürlich ganz allgemein.

Es seien α_0 und β_0 die beiden Randkurven von $\delta(I)$ (Fig. 9). Der vom Punkte p_1 auf α_0 zum Punkte p_2 auf α_0 geführte nicht zerstückelnde Querschnitt γ_0 verwandelt δ in ein schlichtes Gebiet mit 3 Randkurven. Der von p_3 auf α_0 nach p_4 auf α_0 geführte Querschnitt η_0 verbindet die beiden durch γ_0 entstandenen α_0 -

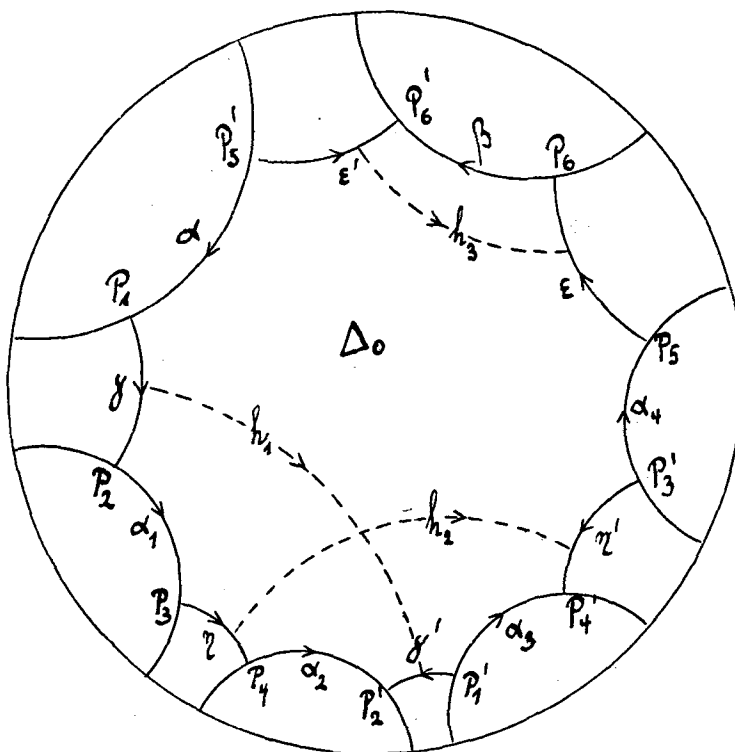


Fig. 10.

Stücke. Endlich wird noch der Querschnitt ε_0 von p_5 auf α_0 nach p_6 auf β_0 geführt. Durch diese 3 Querschnitte wird δ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandelt. Man kann diese drei Querschnitte überdies als die kürzesten Linien ihres Typus wählen; dann werden sie geodätische Linienstücke, die auf α_0 bzw. β_0 , die ja geschlossene geodätische Linien auf φ sind, senkrecht stehen. Die Möglichkeit hiervon überlegt man sich leicht direkt; sie ergibt sich im Übrigen aus der entsprechenden Konstruktion in Φ , die wir jetzt verfolgen.

Es sei α (Fig. 10) irgend eine derjenigen Randseiten von \mathcal{A} , die über α_0 liegen. Ist α_0 so orientiert, dass es δ zur Linken hat, dann hat α ebenfalls \mathcal{A}

zur Linken. P_1 sei irgend einer derjenigen Punkte von α , die über p_1 liegen. Nach diesen beiden Wahlen ist nun das Gebiet \mathcal{A}_0 , das δ einfach überdeckt, völlig bestimmt, indem wir das aufgeschnittene δ von p_1 aus und mit γ_0 beginnend so umlaufen, dass δ zur Linken liegt, und den Weg des laufenden Punktes in Φ von P_1 aus verfolgen: Während x_0 auf φ γ_0 durchläuft, durchläuft der darüber liegende Punkt x in Φ die Gerade γ und endet in einem Punkte P_2 über p_2 auf einer mit α äquivalenten Randseite α_1 von \mathcal{A} . Dabei ist γ senkrecht auf α und α_1 . Während x_0 auf α_0 von p_2 nach p_3 läuft, läuft x auf α_1 von P_2 nach P_3 (über p_3), dann setzt eine Gerade η über η_0 an u.s.f. In dem Augenblick, in dem x_0 zum zweiten Mal p_5 passiert, trifft x in P_5' auf α ein; denn dann (aber auch erst dann) hat x_0 einen Weg durchlaufen, der mit einem Bogen von α_0 zusammen ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet, d.h. homotop Null ist. Der Leser verfolgt ohne Schwierigkeit an Hand der Fig. 9 und 10 die korrespondierenden Wege von x_0 auf φ und von x in Φ und sieht die Allgemeingültigkeit dieser Konstruktion für beliebiges q und r , indem man immer eine beliebige, aber fest gewählte Randkurve α_0 von δ dem Querschnittssystem zu Grunde legt. Diejenigen Randseiten des rechtwinkligen Polygons \mathcal{A}_0 , die auf Randseiten von \mathcal{A} liegen, ergeben zusammen eine genau einmalige Überdeckung der Randkurven von δ . Die übrigen Randseiten von \mathcal{A}_0 sind Querstücke von \mathcal{A} , die zu je zweien bei einem Fixelement korrespondieren; in Fig. 10 sind die Achsen der drei Elemente h_1, h_2 und h_3 , soweit sie in \mathcal{A}_0 verlaufen, durch Strichlung gekennzeichnet und dadurch die Korrespondenz der Querstücke γ und γ' u.s.f. angedeutet. Jeder Einheit in q entspricht ein Elementepaar, jeder Einheit in $r-1$ ein Element. Die Anzahl dieser Elemente ist also ν .

Denkt man sich nun die zu E orthogonalen Kreise, die die Querstücke $\gamma, \gamma',$ u.s.w. tragen, voll ausgezogen, so treffen sie einander nicht, wie aus ihrer Orthogonalität zu den Seiten von \mathcal{A} folgt. Das Teilgebiet \mathfrak{S} von $\Phi + E$, das ausserhalb aller dieser Kreise liegt, ist ein Fundamentalbereich für die von h_1, \dots, h_ν erzeugte Gruppe $\{h_1, \dots, h_\nu\}$, und diese Gruppe ist somit eine »freie Gruppe«, d.h. es bestehen keine nicht-identischen Relationen zwischen h_1, \dots, h_ν . Da $\{h_1, \dots, h_\nu\}$ von Fixelementen erzeugt wird, ist sie mit $H(I)$ identisch oder eine echte Untergruppe von $H(I)$. Im letzteren Fall bilde man eine Zerlegung von H nach $\{h_1, \dots, h_\nu\}$. Die Anzahl der mit einem beliebigen Punkte von \mathfrak{S} laut Fixelementen äquivalenten, ebenfalls in \mathfrak{S} gelegenen Punkte ist gleich dem Index dieser Zerlegung, also von dem ausgewählten Punkt unabhängig. Für einen Punkt von \mathcal{A}_0 ergibt sich diese Anzahl zu 1, da \mathcal{A}_0 der Durchschnitt von \mathcal{A} und

\mathfrak{S} ist und zufolge seiner Konstruktion keine zwei äquivalenten Punkte enthält. Also ist

$$H(I) = \{h_1, \dots, h_\nu\}.$$

\mathcal{A}_0 ist ein 4ν -Eck mit der Winkelsumme $4\nu \cdot \frac{\pi}{2} = 2\nu\pi$. Nach (8) ist daher

$$Ar(\mathcal{A}_0) = Ar(\delta(I)) = 2\nu - 2. \quad (13)$$

Aus $Ar(\delta) \leq Ar(\varphi)$ und (9) folgt nun

$$\nu \leq 2p - 1. \quad (14)$$

Dass hierbei das Gleichheitszeichen vorkommen kann, zeigt das Beispiel 2, I, 15; in diesem ist δ die längs der dem Element b_1 entsprechenden geschlossenen geodätischen Linie aufgeschnittene Fläche.

Satz 10: *Enthält die Fixelementgruppe eines nicht-identischen Automorphismus mehr als eine zyklische Gruppe, so ist sie eine freie Gruppe. Für die Anzahl ν ihrer freien Erzeugenden gilt*

$$2 \leq \nu \leq 2p - 1.$$

Dabei ist $\nu = 2q + r - 1$, wenn q das Geschlecht und r die Anzahl der Randkurven des vom Kerngebiet $\mathcal{A}(I)$ überdeckten Gebietes $\delta(I)$ auf φ ist.

II. Typenbildung für nicht-zyklische $H(I)$.

Nun betrachte man ein Regularitätsintervall i . h sei dasjenige primäre Fixelement, dessen Grundpunkte i begrenzen. Man vergleiche zum Folgenden wieder Fig. 5, indem man diese jetzt so auffasst, dass $U(h)$ und $V(h)$ nicht mehr isolierte singuläre Punkte sind, dass aber alle übrigen singulären Punkte und damit auch das Kerngebiet \mathcal{A} in der Figur rechts von der Achse von h liegt. Diese Achse wird durch die von h erzeugte Gruppe $\{h\}$ auf sich und durch jedes andere Fixelement auf eine andere Randseite von \mathcal{A} abgebildet. Also wird auch die von ihr begrenzte Halbebene Φ_1 , die in Fig. 5 links von ihr liegt, durch $\{h\}$ auf sich und durch jedes andere Fixelement auf eine zu Φ_1 fremde Halbebene abgebildet. Einen Fundamentalbereich für $H(I)$ in Φ_1 bilden, heisst also, einen solchen für $\{h\}$ in Φ_1 bilden, und das geschieht durch die beiden Geraden α

und $h\alpha$ der Figur 5. Nun wiederholt sich die Betrachtung des § 7: Auf dem Fundamentalstück AhA gibt es nur eine endliche und zwar gerade Anzahl $2\mu_1$ von Randfixpunkten, die abwechselnd anziehend und abstossend sind. Ist $\mu_1 > 0$, so greift das Hauptgebiet Ω über das Kerngebiet \mathcal{A} längs der betrachteten Randseite von \mathcal{A} hinaus, also greift auch ω über δ längs der entsprechenden Randkurve von δ hinaus. Um diesen letzten Überschuss zu messen, haben wir den obigen Überschuss von Ω über \mathcal{A} zu messen, so weit er einem Fundamentalbereich von $\{h\}$ angehört. Das ist das $(\mu_1 + 4)$ -Eck der Fig. 5, dessen Flächeninhalt in § 7 zu μ_1 berechnet wurde.

Dasselbe wiederholt sich nun in allen nicht mit i und nicht unter einander äquivalenten Regularitätsintervallen. Deren Anzahl ist r , wenn r die Anzahl der Ränder von δ ist (wobei eine geschlossene geodätische Linie zweimal als Randkurve zählt, wenn sie beiderseits δ berandet). Man erhält also r Zahlen μ_1, \dots, μ_r . Jeder Randkurve von δ ist also ein solcher μ_i -Wert zugeordnet. Zwei Randkurven von δ , die in einer beiderseits berandenden Kurve zusammenfallen, haben übrigens beide ihren μ_i -Wert gleich Null, wie aus Satz 2 folgt.

Man lasse sich nicht dadurch täuschen, dass δ im Fall der Fig. 10 nur 2 Randkurven hat, aber \mathcal{A}_0 an 6 Randseiten von \mathcal{A} stösst. Denkt man sich die die Querstücke tragenden Geraden der Fig. 10 vervollständigt, so entsteht auf der Aussenseite von β ein solcher Fundamentalbereich, wie wir ihn soeben für $\{h\}$ in Fig. 5 betrachtet haben; denn P_6 und P'_6 sind äquivalent bei dem zur Achse β gehörigen primären Element. Die auf den Randseiten α bis α_4 stehenden Stücke ergeben aber erst zusammengenommen einen solchen Fundamentalbereich. Man denke sie sich etwa äquivalent verlegt so, dass sie alle an α stossen und nebeneinander angeordnet sind. Dann werden die äussersten Eckpunkte auf α äquivalent. Es sind also nur zwei μ_i -Werte da, einer für die Randkurve β_0 und einer für die Randkurve α_0 von δ .

Nun setze man

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r. \quad (15)$$

Man erhält $Ar(\omega)$, indem man zu $Ar(\delta)$ die zu den einzelnen Randkurven von δ gehörigen Überschüsse von ω über δ hinzufügt, deren Flächeninhalt einzeln zu μ_i berechnet wurde. So kommt wegen (13) und (15)

$$Ar(\omega(I)) = 2\nu - 2 + \mu, \quad (16)$$

und wegen $Ar(\omega) \leq Ar(\varphi)$ und (9)

$$2\nu + \mu \leq 4p - 2, \tag{17}$$

wodurch (14) verschärft wird, falls $\mu > 0$.

Zwei reguläre Randfixpunkte sind nach Satz 2 nie mittels eines Nicht-Fixelements äquivalent. Jeder reguläre Randfixpunkt ist nach Konstruktion mit genau einem der obigen 2μ Punkte mittels eines Fixelements äquivalent.

Satz 11: *Bei einem Automorphismus I , dessen Fixelementgruppe $H(I)$ mehr als eine zyklische Gruppe umfasst, gilt für die Anzahl $\nu \geq 2$ der freien Erzeugenden von H und die Anzahl $\mu \geq 0$ der untereinander nicht äquivalenten regulären Randfixpunkte die Beschränkung (17). Je nach den Zahlenwerten von ν und μ ergibt sich somit für solche Automorphismen eine Einteilung in endlich viele Typen.*

Diese Typeneinteilung lässt sich verfeinern, indem man einerseits nach der Verteilung von ν auf Geschlecht g und Ränderzahl r von δ gemäss der Formel $\nu = 2g + r - 1$, andererseits nach der Verteilung von μ in r Summanden gemäss (15), den r unter einander nicht äquivalenten Regularitätsintervallen entsprechend, sondert.

Man kann wieder, wie in § 7, die Fläche $K_1 = K \bmod H$ bilden, indem man zunächst den Fundamentalbereich \mathfrak{S} von H durch Spiegelung an E auf das Äussere \mathfrak{P} von E erweitert. \mathfrak{S} ist dann das Äussere der 2ν voll ausgezogenen, zu E orthogonalen Kreise, die die Querstücke der Figur 10 tragen. Diese entsprechen sich paarweise bei je einem der ν erzeugenden Fixelemente. K_1 ist also eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ν . Auf ihr liegen r geschlossene Kurven, die von den Regularitätsintervallen überlagert werden. Eine I induzierende T -Funktion ruft eine zur Klasse der Identität gehörige¹ Abbildung von K_1 auf sich hervor, die auf jenen r Kurven nur von I abhängt und dort die 2μ Fixpunkte hat, die als Randfixpunkte in \mathfrak{S} auftraten.

12. Zusammenfassung.

Eine unendliche zyklische Gruppe ist die freie Gruppe mit einer Erzeugenden. Wir verabreden den Sprachgebrauch, als »freie Gruppe mit Null Erzeugenden« die nur aus dem identischen Element bestehende Gruppe zu bezeichnen. Ihr Fundamentalbereich ist ganz $\mathfrak{O} + E$ oder, wenn wir das Äussere \mathfrak{P} von E

¹ Siehe Satz 12.

mit in Betracht ziehen, ganz K . Dann lassen sich die bisherigen Resultate folgendermassen zusammenfassen:

Es sei I ein beliebiger nicht identischer Automorphismus erster Art und t eine I induzierende T -Funktion. t erhält die Orientierung. Dann ist die Fixelementgruppe $H(I)$ stets eine freie Gruppe. Für die Anzahl ν der freien Erzeugenden gilt wegen (14)

$$0 \leq \nu \leq 2p - 1. \quad (18)$$

Die Fläche

$$K_I = K \text{ mod } H(I)$$

ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ν , also für $\nu = 0$ eine Kugel, für $\nu = 1$ ein Torus, sonst eine Fläche von höherem, aber $2p - 1$ nicht übersteigendem Geschlecht. Auf K_I liegen r geschlossene Kurven, die von den r Systemen von unter einander äquivalenten Regularitätsintervallen überdeckt werden. Sie mögen die » E -Kurven« von K_I heissen. Ihre Punkte sind die einzigen Punkte von K_I , die nicht über Punkten von φ liegen. Mit der hierin liegenden Verallgemeinerung kann man K_I eine Überlagerungsfläche von φ nennen. Für $\nu = 0$ ist $r = 1$, indem ganz E die E -Kurve auf K_I ausmacht. Für $\nu = 1$ ist $r = 2$. Für $\nu > 1$ ist $1 \leq r \leq 2p$, wie aus $\nu = 2q + r - 1$ und (14) folgt, und hierbei kann das Gleichheitszeichen nach jeder der beiden Seiten vorkommen. So ist im Falle des Automorphismus I im Zusatz I, S. 357 das Element k ein Fixelement, dessen Achse die einzige Randkurve von $\delta(I)$ überlagert; also $r = 1$, während $q = 1$ und $\nu = 2$ ist. Andererseits definiere man den Automorphismus I_1 durch

$$I_1: \begin{cases} a_i \rightarrow a_i b_i \\ b_i \rightarrow b_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Durch Vergleich mit dem Beispiel 2, I, S. 247, ergibt sich sofort, dass $\delta(I_1)$ dasjenige schlichte Gebiet ist, das aus φ durch Aufschneiden längs der p zu einander fremden, von den Achsen der Elemente b_i überlagerten geschlossenen geodätischen Linien entsteht. Es ist also $r = 2p$. Dabei ist $q = 0$, also $\nu = 2p - 1$. In der Tat wird $H(I_1)$ durch die $2p$ Elemente b_i und $a_i b_i a_i^{-1}$, $i = 1, \dots, p$, erzeugt, von denen sich mittels der Grundrelation von F genau eines eliminieren lässt, wodurch die übrigen frei werden.

Die T -Funktion tK ruft eine topologische Abbildung von K_I auf sich hervor (die wir direkt als tK_I bezeichnen); denn sie genügt der Funktionalgleichung

$$t f x = f t x \tag{19}$$

für alle x auf K und alle f in F , insbesondere also auch der Funktionalgleichung

$$t h x = h t x \tag{20}$$

für alle x auf K und alle h in $H(I)$. Nun zeigen wir allgemein den

Satz 12: *Die Abbildung $t K_I$ gehört zur Klasse der Identität.*

Um dies zu beweisen, ist zu zeigen, dass es eine von einem Parameter λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, stetig abhängende Schar von stetigen und eindeutigen (aber nicht notwendig eineindeutigen) Abbildungsfunktionen $s_\lambda(x)$ gibt so, dass $s_0(x) = t(x)$ und $s_1(x) = x$ ist und s_λ der (20) entsprechenden Funktionalgleichung

$$s_\lambda h x = h s_\lambda x \tag{21}$$

für alle x und alle h aus H genügt. Denn (21) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $s_\lambda(x)$ für jedes λ eine stetige Abbildung $s_\lambda K_I$ bestimmt. Dagegen ist natürlich nicht davon die Rede, dass s_λ einer (19) entsprechenden Funktionalgleichung genügt. Das ist schon dadurch ausgeschlossen, dass $s_0(x) = t(x)$ der Gleichung (19) und $s_1(x) = x$ der Gleichung

$$s_1 f x = f s_1 x$$

für alle f genügt; und es gibt ja Elemente f , für die $f_I \neq f$ ist.

Wir werden s_λ so konstruieren, dass es, ebenso wie s_0 und s_1 , Φ in sich, E in sich und Ψ in sich transformiert. Dazu konstruieren wir s_λ in $\Phi + E$ und setzen fest, dass der Spiegelpunkt an E eines beliebigen Punktes in den Spiegelpunkt an E des Bildpunktes übergehen soll.

Falls nun $\nu = 0$ ist, so ist h in (21) nur die Identität. Es ist also gar keine Funktionalgleichung zu erfüllen. Die Behauptung ist in diesem Fall eine unmittelbare Folge des Tietzeschen Deformationssatzes, und s_λ ist also sogar als topologische Abbildungsfunktion wählbar.

Also sei $\nu > 0$ angenommen. i sei ein Regularitätsintervall, das von den Grundpunkten des primären Fixelements h begrenzt wird. L sei die Achse von h und Z die von L und i begrenzte nichteuklidische Halbebene. Die Gruppe $\{h\}$ bildet Z auf sich ab. $Z \bmod \{h\}$ ist ein mit einem Kreisring homöomorpher Bereich. Man kann wieder die Figur 5 benutzen. Dabei sei noch angenommen, dass dort α zu L senkrecht sei. Dann ist z. B. das Kreisbogenviereck $A C h C h A$

ein Fundamentalbereich für $\{h\}$ auf Z . Diesen bilde man auf das Einheitsquadrat einer $u-v$ -Ebene so ab, dass die durch $U(h)$ und $V(h)$ gehenden Kreise in die Geraden $v=\text{Konst.}$ und ihre Orthogonaltrajektorien in die Geraden $u=\text{Konst.}$ übergehen. Diese topologische Abbildung heiße τ . Dann setze man

$$\tau(h(x)) = (u + 1, v),$$

wenn

$$\tau(x) = (u, v)$$

ist. Dadurch ist Z durch τ auf den Parallelstreifen $0 \leq v \leq 1$ abgebildet. Nun liegt ja eine Abbildung ti von i auf sich vor, die der Gleichung $thx = htx$ genügt. $\tau t^{-1} \tau^{-1}$ ist eine Abbildung der Geraden $v=1$ auf sich, bei der der Punkt $(u, 1)$ in einen Punkt $(u + \chi(u), 1)$ übergeht und $\chi(u)$ eine stetige periodische Funktion von u mit der Periode 1 ist. Nun sei Σ_ε die durch

$$\left. \begin{array}{l} u' = u + \varepsilon v \chi(u) \\ v' = v \end{array} \right\} 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

definierte Abbildung des Parallelstreifens auf sich und

$$\sigma_\varepsilon = \tau^{-1} \Sigma_\varepsilon \tau$$

die durch Transformation mit τ^{-1} sich ergebende topologische Abbildung von Z auf sich, die stetig von dem Parameter ε abhängt. σ_ε ist für alle ε auf L die Identität. σ_0 ist in ganz Z die Identität. σ_1 ist in i die Abbildung t^{-1} . σ_ε genügt wegen der Periodizität von $\chi(u)$ für alle ε und alle x in Z der Gleichung

$$\sigma_\varepsilon h x = h \sigma_\varepsilon x. \quad (22)$$

Fasst man nun in (22) h nicht mehr als das bisherige bestimmte Element, sondern als ein beliebiges Fixelement auf, so wird die Definition von σ_ε auf alle mit Z laut $H(I)$ äquivalenten Bereiche ausgedehnt; diese greifen ja nicht übereinander. Gibt es noch andere Regularitätsintervalle (ist also $r > 1$), so wähle man eins von diesen und verfare mit ihm und allen seinen laut $H(I)$ äquivalenten ebenso und setze dies r Male fort. Ist $r > 1$, so bleibt σ_ε noch im Kerngebiet \mathcal{A} zu definieren und wird dort für alle Werte von ε gleich der Identität gesetzt. Nun ist σ_ε in ganz $\mathcal{O} + E$ definiert und genügt dort für alle ε und alle h aus H der Gleichung (22).

Nun setze man

$$t_\varepsilon(\Phi + E) = \sigma_\varepsilon t(\Phi + E).$$

t_ε genügt (20), da sowohl t wie σ_ε dies tun. Es ist $t_0 = t$. Die Funktion t_1 genügt (20) und ist auf E die Identität. Damit ist der erste Teil der Deformationsaufgabe beendet. Auf K_I gesprochen kann er kurz dahin charakterisiert werden, dass man die Abbildung auf allen E -Kurven von K_I in die Identität deformiert. Die Stetigkeit erheischt dabei nur, dass man die nächste Nachbarschaft dieser Kurven in Mitleidenschaft zieht. Wir haben diese Nachbarschaft bis ans Kerngebiet reichen lassen; an dessen Rand hört die Deformation gerade zu wirken auf.

Nachdem nun durch Deformation die Funktion t_1 erzielt ist, die auf E die Identität ist, bei der also die euklidische Entfernung von Punkt zu Bildpunkt bei Annäherung an E gegen Null geht, ist es leicht, durch fortgesetzte Deformation zur Identität zu gelangen, ohne (20) zu verletzen. Man braucht dazu nur jeden Bildpunkt von Φ in der Zeiteinheit mit gleichförmiger Geschwindigkeit und geradlinig (beides im Sinne der nichteuklidischen Metrik) auf sein Urbild losmarschieren zu lassen und wie in I, 27 zu schliessen, dass (20) in jedem Zeitpunkt befriedigt ist, sodass wirklich eine stetige Änderung der Abbildung auf K_I vor sich geht. — Man sieht, dass die vorherige Behandlung von E und seiner Nachbarschaft nötig war, um bei dem letzteren Verfahren Unstetigkeit des Prozesses an E zu vermeiden.

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Nun betrachte man die regulären Randfixpunkte von t . Diese sind nach Satz 5 isoliert und auf E beiderseits anziehend oder abstossend. Sie zerfallen in endlich viele Systeme von bezüglich H äquivalenten. Die Anzahl 2μ dieser Systeme ist gerade. μ ist im Zusammenhang mit ν beschränkt durch

$$0 \leq 2\nu + \mu \leq 4p - 2. \tag{23}$$

Diese Relation ist die Zusammenfassung von (11), (12) und (17). μ kann definiert werden als die halbe Anzahl der zu einem Fundamentalbereich \S von H gehörigen Randfixpunkte. Auf K_I kann man μ folgendermassen erklären: Die Fixpunkte der Abbildung tK_I unterliegen der in I, 31 definierten Klasseneinteilung. Als die »Hauptklasse« von tK_I sei diejenige Fixpunktklasse von tK_I definiert, welche von der Fixpunktmenge von tK überlagert wird. Dann ist 2μ die Anzahl der auf den E -Kurven gelegenen und zur Hauptklasse gehörigen Fixpunkte von tK_I . Wenn eine E -Kurve einen solchen Punkt enthält, so enthält sie nur Fix-

punkte der Hauptklasse; denn wenn ein Regularitätsintervall einen Fixpunkt enthält, so kann es offenbar keinen Punkt enthalten, der bei t in einen andern, aber mit ihm laut H äquivalenten übergeht. Fixpunkte der Hauptklasse auf den E -Kurven sind isolierte Fixpunkte von tK_I . Dies folgt aus ihrer Isoliertheit auf E und I, 34.

Falls $\mu + \nu > 1$ ist, wird von einem Hauptgebiet $\Omega(I)$ gesprochen. Der Flächeninhalt des von Ω auf φ überdeckten Gebietes ω ist

$$Ar(\omega) = 2\nu + \mu - 2. \quad (24)$$

Vgl. (10), (16) und § 7. Aus (24) und (9) folgt (23). $Ar(\omega) = 0$ erfordert $\nu = 0, \mu = 2$, da $\nu + \mu > 1$ sein soll. ω wird von Ω einfach oder unendlich oft überdeckt, je nachdem $\nu = 0$ oder $\nu > 0$ ist.

Falls $\nu > 1$ ist, wird von einem Kerngebiet $\mathcal{A}(I)$ gesprochen. Der Flächeninhalt von $\delta = \mathcal{A} \bmod H$ ist nach (13) und wegen $\nu > 1$:

$$Ar(\delta) = 2(\nu - 1) > 0. \quad (13)$$

Je nach den Werten der beiden charakteristischen Zahlen ν und μ ergibt sich eine Einteilung aller Automorphismen erster Art in Typen, deren Anzahl wegen (23) endlich ist. Dasselbe gilt auch noch, wenn man für $\nu > 0$ die Typen weiter unterteilt, so wie dies in § 7 und § 11 angegeben ist.

Die Abhandlung I enthält zahlreiche Beispiele für die verschiedenen Typen, jedoch kein Beispiel, in dem $\nu > 0$ und gleichzeitig $\mu > 0$ ist. Für diesen Fall ist mir bisher kein Beispiel bekannt.

II. ABSCHNITT.

Indizes der verschiedenen Typen.

13. Verhalten der Abbildung in der Umgebung von Randfixpunkten.

Es sei t eine T -Funktion, die den Automorphismus I induziert, P ein bezüglich $H(I)$ regulärer Punkt von E und u eine Umgebung von P , die keine zwei laut einem Fixelement äquivalente Punkte enthält. O sei der Punkt $x = 0$, f ein Element von F , und fO liege in u . Es ist $tfO = f_I tO$. Die nichteuklidische Entfernung des Punktes fO von seinem Bild bei t ist also gleich der Entfernung der Punkte O und $f^{-1}f_I tO$. Nun sei k ein von f verschiedenes Element von F , und kO liege

in u . Das Element kf^{-1} führt fO in kO über, ist also kein Fixelement, da beide Punkte in u liegen. Aus

$$kf^{-1} \neq (kf^{-1})_I$$

folgt

$$k^{-1}k_I \neq f^{-1}f_I,$$

also

$$k^{-1}k_I tO \neq f^{-1}f_I tO.$$

Ist nun C eine (beliebig grosse) positive Konstante, so gibt es in einem Kreis um O mit dem Radius C nur endlich viele mit tO äquivalente Punkte. Also gibt es nur endlich viele mit O äquivalente Punkte in u , deren Abstand von ihrem Bilde bei t unterhalb C liegt. Ist nun r der Radius eines Kreises um O , der einen Fundamentalbereich B von F ganz umschliesst, und R der Radius eines Kreises um tO , der tB ganz umschliesst, so liegt jeder Punkt x von u einem Punkte fO näher als r und tx dem Punkte tfO näher als R . Der Abstand $e_t(x)$ von x und tx wächst also für $x \rightarrow P$ über alle Grenzen. Für solche P , die nicht Fixpunkte von t sind, ist dies selbstverständlich. Der folgende Satz ist daher wesentlich eine Aussage über reguläre Fixpunkte der Randabbildung:

Satz 13 a: *Ist P ein regulärer Randpunkt von t und C eine beliebige Konstante, so gibt es eine solche Umgebung u von P , dass der nichteuklidische Abstand $e_t(x)$ von x und tx für alle x in u oberhalb C liegt.*

Ganz anders ist das Verhalten der reellen Funktion $e_t(x)$ der komplexen Variablen x , die die nichteuklidische Entfernung von x nach tx angibt, bei Annäherung an einen *singulären* Randpunkt. Sei $\varepsilon \geq 0$ das Minimum von $e_t(x)$ in Φ . Da für alle Fixelemente h

$$e_t(hx) = e_t(x)$$

wegen $th = ht$, so nimmt e_t seinen Wertevorrat in einem Fundamentalbereich \mathfrak{S} von $H(I)$ an. Alle zu E gehörigen Randpunkte von \mathfrak{S} sind regulär, und e_t wächst bei Annäherung an diese nach Satz 13 a über alle Grenzen. e_t ist stetig und nimmt somit jeden Wert $\geq \varepsilon$ in nicht auf E liegenden Punkten von \mathfrak{S} an. Nun häufen sich die mit \mathfrak{S} laut H äquivalenten Bereiche gegen jeden singulären Punkt. Also gilt:

Satz 13 b: *Die Abstandsfunktion $e_t(x)$ nimmt in jeder Umgebung eines singulären Punktes jeden Wert, den sie überhaupt in Φ annimmt, unendlich oft an.*

Neben diese Sätze über die Entfernung von x nach tx soll nun ein Satz gestellt werden, der etwas über die »Richtung von x nach tx « in der Nähe eines regulären Randfixpunktes aussagt.

Es sei P ein regulärer, beiderseits anziehender Fixpunkt auf E . Auf Grund des Hilfssatzes 4, § 4, bestimmen wir eine solche Folge l_n von in einander transformierbaren primären Elementen von F , dass die Achsen dieser Folge P immer enger umschliessen, indem für wachsendes n $V(l_n)$ von der einen Seite her und $U(l_n)$ von der anderen Seite her monoton gegen P konvergiert. Die Folge soll so spät beginnen, dass alle $U(l_n)$ in dem einen, alle $V(l_n)$ in dem andern der an P stossenden fixpunktfreien Intervalle liegen. Dann trifft, da P beiderseits anziehend ist, die Achse von l_{nI} nicht die Achse von l_n , sondern liegt ganz auf der P zugekehrten Seite dieser Achse. Wir betrachten nun die Achsenpaare von l_n und l_{nI} für alle n . Es kann vorkommen, dass die aus zwei solchen Paaren gebildeten Figuren äquivalent sind, nämlich wenn es ein Element von F gibt, das l_m in l_n und gleichzeitig l_{mI} in l_{nI} transformiert. Man zerlege die Achsenpaare in vollständige Systeme untereinander äquivalenter.

Nun werde zunächst angenommen, dass jedes solche System nur endlich viele Achsenpaare enthält. Dann kann man eine Teilfolge der l_n so auswählen, dass sie zu lauter untereinander nicht äquivalenten Achsenpaaren führt. Diese werde wieder mit l_n , $n = 1, 2, \dots$, bezeichnet. l_1 wird kurz mit l bezeichnet. l_n ist in l und also l_{nI} in l_I transformierbar. Sei f_n ein solches Element, dass

$$l_n = f_n l f_n^{-1} = f_n l^{-\nu} l l^{\nu} f_n^{-1}$$

ist. Die letzte Gleichung zeigt, dass f_n nur bis auf eine willkürliche Potenz von l bestimmt ist. Nun transformiere man das Achsenpaar von l_n und $l_{nI} = f_{nI} l_I f_{nI}^{-1}$ mit $l^{\nu} f_n^{-1}$. Dann erhält man die Achsen der Elemente

$$l \quad \text{und} \quad l^{\nu} f_n^{-1} f_{nI} \cdot l_I \cdot f_{nI}^{-1} f_n l^{-\nu} = l_n',$$

und diese bilden also eine mit dem Achsenpaar von l_n und l_{nI} äquivalente Figur. Nun sei A ein Punkt auf der Achse von l , und also das Segment von A bis lA ein Verschiebungsstück auf dieser Achse. Dann kann man ν so wählen, dass die gemeinsame Senkrechte der Achsen von l_n' und l die letztere zwischen A und lA trifft. Dann muss der kürzeste Abstand $d(l, l_n')$ der Achsen von l und l_n' mit n über alle Grenzen wachsen, da nach Voraussetzung die Achsen der l_n' alle verschieden sind und eine unendliche Menge äquivalenter Achsen sich nur gegen E

häuft. Also wächst auch der Abstand $d(l_n, l_{nI})$ der Achsen von l_n und l_{nI} mit n über alle Grenzen.

Nun ist das Bild der Achse von l bei t eine Jordankurve in Φ , die wegen

$$tlx = l_I tx$$

durch l_I mit sich selbst zur Deckung gebracht wird, also in einem Abstandsstreifen zur Achse von l_I verläuft. Sei ϱ das Maximum ihres Abstandes von der Achse von l_I . Das Bild der Achse von l_n bei t begleitet dann ebenfalls die Achse von l_{nI} in einem Abstand $\leq \varrho$. Für alle diejenigen Werte von n , für welche $d(l_n, l_{nI}) > \varrho$ ist, wird also die Achse von l_n von ihrem Bild bei t nicht mehr getroffen. Für alle Achsen der Folge von einer gewissen Stelle an liegt also das Bild der Achse bei t ganz auf der P zugekehrten Seite der Achse; und der Abstand der Achsen von ihrem Bild wächst dabei in der Folge mit n über alle Grenzen.

Wenn andererseits die obige Voraussetzung nicht erfüllt ist, so gibt es in der ursprünglichen Folge von Achsenpaaren mindestens ein unendliches System untereinander äquivalenter Paare. Dann werde dies als Teilfolge ausgewählt und wieder mit

$$l_1 = l, l_2, l_3, \dots$$

bezeichnet. Sei f_n das (eindeutig bestimmte) Element, das l in l_n und zugleich l_I in l_{nI} transformiert. Aus

$$f_n l_I f_n^{-1} = l_{nI} = (f_n l f_n^{-1})_I = f_{nI} l_I f_{nI}^{-1}$$

folgt (analog wie in (7), § 4)

$$f_n^{-1} f_{nI} = l_I^{n'}. \tag{25}$$

Hierbei ist n' ein von n abhängender Exponent, und zwar sind die zu verschiedenen Werten von n gehörenden Werte von n' verschieden. Denn man nehme an, es sei $m \neq n$ und $m' = n'$. Dann ist

$$f_m^{-1} f_{mI} = l_I^{m'} = l_I^{n'} = f_n^{-1} f_{nI},$$

also

$$f_n f_m^{-1} = (f_n f_m^{-1})_I.$$

Das ist aber unmöglich; denn $f_n f_m^{-1}$ transformiert l_m in l_n , hat also einen Grundpunkt auf der P zugekehrten Seite dieser Achsen; dort ist P der einzige Fix-

alle Grenzen. Also wächst auch der Abstand $d(q_n, q_{nI})$ der Achsen von q_n und q_{nI} , in die q und $l_I' q_I l_I^{-n'}$ durch Transformation mit f_n übergehen, mit n über alle Grenzen. Genau wie oben schliesst man daher, dass die Achse von q_n für alle hinreichend grossen n ihr Bild bei t nicht trifft, sondern dasselbe ganz auf der P zugekehrten Seite und in beliebig grossem Abstände hat.

Genau ebenso sieht man für einen regulären, beiderseits abstossenden Fixpunkt Q , dass man Q umschliessende Achsen finden kann, die ihr Bild bei t nicht treffen, sondern dieses ganz auf der von Q abgekehrten Seite und in beliebig grossem Abstände haben.

Satz 13 c: *In beliebiger Nähe eines regulären Randfixpunktes P gibt es P umschliessende Achsen, die ihr Bild bei t nicht treffen, sondern dies ganz auf der P zugekehrten oder von P abgekehrten Seite haben, je nachdem P beiderseits anziehend oder beiderseits abstossend ist. Überdies kann dabei noch für den Minimalabstand der Achse von ihrem Bild eine beliebig grosse untere Schranke vorgeschrieben sein.*

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass man hieraus nicht schliessen kann, dass jeder einen etwa beiderseits anziehenden regulären Randfixpunkt genügend eng umschliessende zu E orthogonale Kreisbogen sein Bild bei t umschliesst. Dies zeigt schon das I, S. 341—343 durchgeführte Beispiel.¹ Man setze den betrachteten Automorphismus $\mathcal{A}' = I$ und $l = a_1 b_1 a_1^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 l_I &= b_1, \\
 l_{I^2} &= a_1^{-1} b_1 a_1, \\
 &\dots \dots \dots \\
 l_{I^n} &= a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_1^{-1} b_1^{-(n-2)} a_1^{-1} \cdot b_1 \cdot a_1 b_1^{(n-2)} \dots b_1 a_1.
 \end{aligned}$$

Nun setze man mit der obigen Bedeutung

$$l_n = l_I^{n-1}.$$

Dann ist

$$l_{nI} = l_I^n.$$

Diese beiden Elemente gehen aus l und l_I durch Transformation mit

¹ Ich benutze die Gelegenheit, um richtigzustellen, dass auf S. 342 und in dem ersten Abschnitt auf S. 343 von I statt s überall $a_1^{-1}s$ zu lesen ist.

In der letzten Zeile auf S. 343 ist $V(a_1^n)$ zu lesen.

$$f_n = a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_1^{-1} b_1^{-(n-2)} a_1^{-1}$$

hervor. Man hat hier also den Fall einer Folge von lauter unter einander äquivalenten Achsenpaaren. Nun kann man nach Satz 12, I, S. 275 eine T -Funktion t bilden, die I induziert und bei der ein Punkt der Achse von l in einen Bildpunkt übergeht, der auf der von der Achse von l_I abgekehrten Seite der Achse von l liegt. Dann trifft die Achse von l ihr Bild bei t , also trifft jede der sich um den regulären Randfixpunkt P^+ zusammenziehenden Achsen von l_n ihr Bild bei t . Um die in Satz 13 c angegebene Eigenschaft des regulären Randfixpunktes P^+ nachzuweisen, wurde daher in I, S. 342 ein Element $\gamma = a_2 b_1$ und alle $f_n \gamma f_n^{-1}$ benutzt. Dabei entspricht γ dem obigen q ; seine Achse trennt die Achsen von l und l_I .

Ein *Fixgrundpunkt* kann nicht die in Satz 13 c von dem Punkt P ausgesprochene Eigenschaft haben, denn $e_t(x)$ ist auf der ganzen in dem Punkt endenden Fixelementachse beschränkt.

14. Indizes der verschiedenen Typen.

Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um die Indizes der durch die verschiedenen Typen von T -Funktionen dargestellten Fixpunktklassen zu bestimmen. Wir können dabei die Darstellung kurz halten und im Übrigen auf die Abhandlung I verweisen, wo teils in der allgemeinen Theorie, teils in durchgerechneten Beispielen die benutzte Methode ausführlicher dargestellt ist.

Es sei t eine den nicht identischen Automorphismus I induzierende T -Funktion, $\nu \geq 0$ die Anzahl der freien Erzeugenden der Fixelementgruppe $H(I)$, \S ein Fundamentalbereich von H und $\mu \geq 0$ die halbe Anzahl der zu \S gehörigen (regulären) Randfixpunkte. Wir sagen dann, t (bezw. I) sei vom » $\nu - \mu$ -Typus«. Der in \S gelegene Teil der Fixpunktmenge von $t\Phi$ wird die *durch t dargestellte Fixpunktklasse* genannt (I, 31—33) und mit Π_t bezeichnet. Keine zwei Punkte von Π_t sind bezüglich F äquivalent. Π_t ist ganz in einem mit E konzentrischen kleineren Kreise C , also im Durchschnitt von C mit \S enthalten (I, 34). Sei Π die Fixpunktmenge von $t(\Phi + E)$ und $\Phi + E - \Pi$ mit W bezeichnet. Ist x ein Punkt von W , so wird als »Richtungspunkt«

$$z(x, tx) = z_t(x)$$

der Punkt von E bezeichnet, in dem die von x nach tx zeigende nichteuklidische Halbgerade auf E stösst (I, 35). Als »Richtungsfunktion» $\xi_t(x)$ wird die reelle, nur mod 1 bestimmte Funktion

$$\xi_t(x) = \frac{1}{2\pi i} \log z_t(x)$$

bezeichnet. z_t und ξ_t sind überall in W , und nur dort, definiert und stetig.

Als »Index» $i(t)$ wird der Wert des Integrals $\int d\xi_t$ bezeichnet, welches in positivem Umlaufssinn längs einer einfachen Kurve in W genommen wird, die ganz Π_t und keinen anderen Punkt von Π umschliesst. Ist der Rand von \mathfrak{S} fixpunktfrei, so kann das Integral längs des Randes von \mathfrak{S} genommen werden. Für $\nu = 0$ ist $\mathfrak{S} = \mathcal{O}$, also E der Rand von \mathfrak{S} . Für $\nu > 0$ besteht der Rand von \mathfrak{S} teils aus 2ν Orthogonalkreisbögen in \mathcal{O} , den » \mathcal{O} -Randseiten» von \mathfrak{S} , teils aus 2ν Bögen von E , den » E -Randseiten» von \mathfrak{S} . Für $\nu = 1$ sind in Fig. 5 α und $h\alpha$ als die beiden \mathcal{O} -Randseiten gewählt. Für $\nu > 1$ sind in Fig. 10 die \mathcal{O} -Randseiten diejenigen Orthogonalkreisbögen, welche die Querstücke γ, γ' u. s. w. tragen. Diejenigen Stücke der \mathcal{O} -Randseiten, die ausserhalb C liegen, sind fixpunktfrei. Von den innerhalb C verlaufenden Stücken kann man das nicht wissen. Man mache aber über t die I, S. 298 als »Annahme α » bezeichnete Voraussetzung: Unter den Restgebieten der Fixpunktmenge der Flächenabbildung $t\varphi$, über welcher $t\mathcal{O}$ liegt, soll eines dasselbe Geschlecht p wie φ haben. Dann kann man die innerhalb C verlaufenden Stücke der \mathcal{O} -Randseiten von \mathfrak{S} so abändern, dass sie in W liegen; wie dies ausgeführt werden kann, ist in I, 47 beschrieben. — Wenn eine E -Randseite Fixpunkte enthält, so kann man sie z. B. durch denjenigen Bogen von C ersetzen, der die selben beiden \mathcal{O} -Randseiten verbindet. (C sei so gross gewählt, dass C alle \mathcal{O} -Randseiten schneidet.) So erhält man eine einfache geschlossene Kurve, welche genau Π_t umschliesst. Der Index $i(t)$ ist also eine wohldefinierte ganze Zahl, die es nun zu bestimmen gilt.

Man betrachte zunächst ein zusammengehöriges Paar von \mathcal{O} -Randseiten, etwa α und $h\alpha$ in Fig. 5. x durchlaufe α von A nach B . Wir können α so wählen, dass A und B und damit auch hA und hB nicht Fixpunkte sind. $z_t(A)$ ist der Punkt tA und $z_t(B)$ der Punkt tB . Also ist

$$2\pi \int_A^B d\xi_t = \text{pos}(tA \rightarrow tB) + 2k\pi,$$

wo k eine nicht näher bekannte ganze Zahl ist und $\text{pos}(tA \rightarrow tB)$ den in positivem Umlaufssinn von tA nach tB führenden Bogen $< 2\pi$ von E bedeutet (wie I, S. 337). Nun ist

$$z_t(hx) = h z_t(x),$$

da h Fixelement ist. Also ist

$$2\pi \int_{hA}^{hB} d\xi_t = \text{pos}(thA \rightarrow thB) + 2k\pi$$

mit demselben k . Also ist

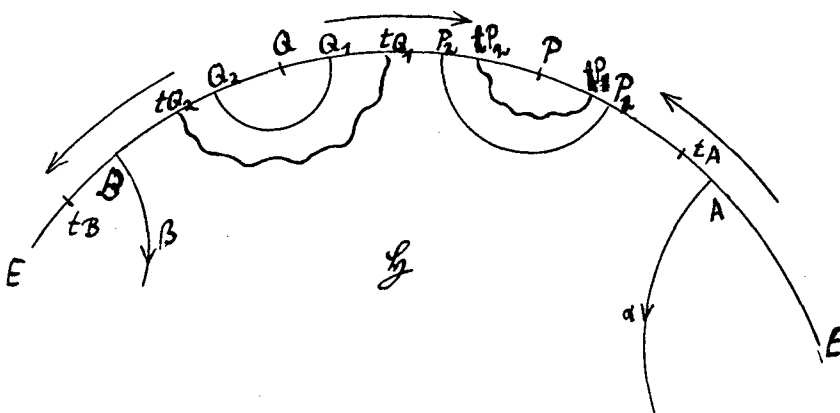


Fig. 12.

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\int_A^B + \int_{hB}^{hA} \right) &= \text{pos}(tA \rightarrow tB) - \text{pos}(thA \rightarrow thB) \\ &= \text{pos}(tA \rightarrow tB) + \text{pos}(thB \rightarrow thA) - 2\pi. \end{aligned}$$

Diese Betrachtung gilt für jedes der ν Paare von Φ -Randseiten.

Sodann betrachte man eine E -Randseite, etwa in Fig. 12 die von A nach B führende. Sie enthalte Fixpunkte. Diese sind nach Satz 5 in endlicher Zahl vorhanden und abwechselnd anziehend und abstossend. In Fig. 12 ist je ein anziehender und abstossender angenommen; die Verschiebungsrichtung in den fixpunktfreien Intervallen ist durch Pfeile ausserhalb E angegeben. Dann umschliesse man auf Grund von Satz 13 c den anziehenden Fixpunkt P durch eine Achse $P_1 P_2$, die ihr Bild umschliesst, und den abstossenden Fixpunkt Q durch eine Achse $Q_1 Q_2$, die von ihrem Bilde umschlossen wird; überdies wähle man

diese Achsen so nahe bei P und Q , dass sie ganz ausserhalb C verlaufen. Die durch diese Achsen abgetrennten Teile von \mathfrak{S} sind dann innerhalb E fixpunktfrei.

Nun ist (vgl. I, 40)

$$2\pi \int_A^{P_1} = \text{pos}(tA \rightarrow tP_1),$$

$$2\pi \int_{P_2}^{Q_1} = \text{pos}(tP_2 \rightarrow tQ_1),$$

$$2\pi \int_{Q_2}^B = \text{pos}(tQ_2 \rightarrow tB).$$

Ferner ist

$$2\pi \int_{P_1}^{P_2} = \text{pos}(tP_1 \rightarrow tP_2),$$

da $z_t(x)$ stets auf dem Bogen P_1PP_2 bleibt, wenn x die Achse P_1P_2 durchläuft.

Endlich ist

$$2\pi \int_{Q_1}^{Q_2} = \text{pos}(tQ_1 \rightarrow tQ_2) - 2\pi,$$

da $z_t(x)$ stets ausserhalb des Bogens Q_1QQ_2 bleibt, wenn x die Achse Q_1Q_2 durchläuft. Durch Addition folgt

$$2\pi \int_A^B = \text{pos}(tA \rightarrow tB) - 2\pi,$$

wenn man das Integral von A längs E nach P_1 , von P_1 längs der Achse nach P_2 , von P_2 längs E nach Q_1 , von Q_1 längs der Achse nach Q_2 und von Q_2 längs E nach B führt. — Analog verfähre man bei allen Randfixpunkten; jeder beiderseits abstossende trägt -2π bei.

Nun addiere man alle Beiträge längs des ganzen Randes von \mathfrak{S} . Dabei ergibt die Summe aller Bögen $\text{pos}(\)$ genau 2π . Man dividiert mit 2π und erhält

$$i(t) = 1 - \nu - \mu, \tag{26}$$

indem von jedem Paar korrespondierender Φ -Randseiten und von jedem beiderseits abstossenden Randfixpunkt eine negative Einheit herrührt.

Satz 14: *Jede T -Funktion vom $\nu-\mu$ -Typus stellt eine Fixpunktklasse vom Index $1-\nu-\mu$ dar.*

15. Folgerungen.

Durch das Ergebnis des letzten Paragraphen ist zunächst der in der Abhandlung I noch nicht allgemein geführte Nachweis dafür erbracht, dass der Index einer durch eine T -Funktion t dargestellten Fixpunktklasse nur von dem durch t induzierten Automorphismus I abhängt; denn ν und μ hängen ja nur von I ab. Nun sei $\tau\varphi$ eine topologische Abbildung von φ auf sich. Die Anzahl der Fixpunktclassen von $\tau\varphi$ ist nach I, 32 endlich. Es seien

$$t_1\Phi, t_2\Phi, \dots, t_n\Phi$$

n T -Funktionen über $\tau\varphi$, die die n Fixpunktclassen von $\tau\varphi$ darstellen. Zu ihnen gehören Indizes

$$i_1, i_2, \dots, i_n,$$

die nur von den induzierten Automorphismen

$$I_1, I_2, \dots, I_n$$

abhängen. Dabei interessieren nur diejenigen unter diesen T -Funktionen, deren Klassenindizes $\neq 0$ sind, da man nur von diesen weiss, dass sie für jede Abbildung der Klasse von τ nicht-leere Fixpunktclassen darstellen. Diese Fixpunktclassen mögen *wesentlich* heissen, eventuell vorhandene Fixpunktclassen vom Index Null *ausserwesentlich*. Nun hängt die zu $\tau\varphi$ gehörige Automorphismenfamilie nur von der *Klasse* der Abbildung $\tau\varphi$ ab. Man wähle in dieser Familie ein vollständiges Repräsentantensystem für die verschiedenen Isogredienzclassen, in die die Familie zerfällt (I, 18 und I, 31). Nur zu endlich vielen, etwa Z von diesen gehört ein von Null verschiedener Index. Also ist die Anzahl Z der wesentlichen Fixpunktclassen und das System der von Null verschiedenen ganzen Zahlen

$$i_1, i_2, \dots, i_Z$$

invariant mit der Abbildungsklasse von $\tau\varphi$ verknüpft. Dasselbe gilt dann auch von der Indexsumme (I, 37)

$$\Xi = i_1 + i_2 + \dots + i_Z. \quad (27)$$

Ξ kann daher mittels solcher Abbildungen aus der betreffenden Klasse bestimmt werden, die den Voraussetzungen genügen, welche in I, 43 zu der ALEXANDERschen Formel für Ξ führten. So wird auf diesem Wege auch die invariante Bedeutung der ALEXANDERSchen Zahl für die Abbildungsklasse erkannt.

Nach I, 36—37 ist das System dieser Invarianten für zwei Flächenabbildungen gleich, welche durch Transformation mit einer dritten Flächenabbildung aus einander hervorgehen. Das Invariantensystem bezieht sich also auf die vollständigen Systeme gleichberechtigter Abbildungsklassen von φ .

Für die Zahl Ξ gilt jedoch insbesondere, dass sie eine Invariante einer viel umfassenderen Gesamtheit von Abbildungsklassen ist. Ξ ist nämlich für zwei Abbildungsklassen, die beide die Orientierung erhalten, dieselbe, falls nur die Spur der Exponentensummenmatrix, die zu den beiden Automorphismenfamilien gehört, denselben Wert hat; dies zeigt die Formel (50), I, S. 322, wo nun $\Xi_A = \Xi$ zu lesen ist.

Nun lassen sich aus (26) weiter die folgenden Schlussfolgerungen ziehen.

a) Der grösste Wert von $i(t)$ ist $+1$. Dieser ergibt sich nur für $\nu = \mu = 0$, also nur für T -Funktionen, die auf E fixpunktfrei sind. Positive Beiträge zu Ξ bestehen also nur aus positiven Einheiten. Also folgt aus (27)

$$Z \geq \Xi, \quad (28)$$

was natürlich nur für $\Xi > 0$ eine wirkliche Aussage enthält.

b) $i(t) = 0$ ergibt sich nur für $\nu = 1, \mu = 0$ und für $\nu = 0, \mu = 1$. Das sind die Fälle, in denen die Randabbildung tE genau zwei Fixpunkte hat; diese bestimmen entweder zwei periodische oder zwei aperiodische fixpunktfreie Intervalle. Bei diesen beiden Typen braucht es keine Fixpunkte von $t\mathcal{O}$ zu geben. Jede T -Funktion, die nicht zum $1-0$ -Typus oder zum $0-1$ -Typus gehört, stellt notwendig eine nicht leere Fixpunktclass dar.

c) Es bleiben noch die Typen mit $\nu + \mu > 1$. Hier ist nach (23), § 12,

$$\nu + \mu \leq 4p - 2 - \nu,$$

also wegen (26)

$$i(t) \geq 3 + \nu - 4p \geq 3 - 4p.$$

Der Grenzfall $i(t) = 3 - 4p$ erfordert $\nu = 0$, $\mu = 4p - 2$. Wie am Schluss von § 6 bemerkt, ist mir kein Beispiel für diesen Fall bekannt.

d) Bei der früheren Aufstellung der Typen von T -Funktionen ist der Fall des identischen Automorphismus nicht mitgerechnet. In diesem Fall ergibt die BIRKHOFFSche Formel (I, 42) den Index

$$i(t) = 2 - 2p > 3 - 4p$$

wegen $p > 1$.

Satz 15: *Das System der Z ganzzahligen von Null verschiedenen Fixpunktklassenindizes i_1, i_2, \dots, i_z ist eine Invariante der Abbildungsklasse. Ihre Summe Ξ ergibt sich aus der Formel von Alexander. Es ist $Z \geq \Xi$. Jeder Fixpunktklassenindex liegt zwischen den Grenzen $+1$ und $3 - 4p$, wenn $p > 1$ das Geschlecht der Fläche ist. Der Index $+1$ kommt nur bei solchen T -Funktionen vor, die auf E fixpunktfrei sind. Fixpunktklassen mit dem Index Null können nur durch solche T -Funktionen dargestellt werden, die genau zwei Fixpunkte auf E haben.*

16. Deutung der Indizes mittels der Formel von Birkhoff.

Es sei t eine T -Funktion, welche den nicht identischen Automorphismus I erster Art induziert. Durch Spiegelung an E erweitere man dieselbe zu einer topologischen Abbildung tK der ganzen komplexen Kugel K (I, 28). t sei vom $\nu - \mu$ -Typus. Dann ist (§ 12)

$$K_I = K \bmod H(I)$$

eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ν . Auf K_I liegen $r \geq 1$ E -Kurven (§ 12). t ruft eine nach Satz 12 zur Klasse der Identität gehörige Abbildung tK_I von K_I auf sich hervor. Die Hauptklasse (§ 12) unter den Fixpunktklassen von tK_I — und das ist nach I, 42 die einzige *wesentliche* Fixpunktklasse von tK_I — enthält 2μ isolierte Fixpunkte auf den E -Kurven von tK_I .

Durch Spiegelung an E werden die Achsen P_1P_2 und Q_1Q_2 der Fig. 12 zu vollen zu E orthogonalen Kreisen γ_P und γ_Q , von denen der erste sein Bild $t\gamma_P$ ganz umschliesst, der zweite von seinem Bilde $t\gamma_Q$ ganz umschlossen wird (wenn man als Inneres dieser Kreise auf K und K_I die P bzw. Q zugekehrte Seite

rechnet). Nun sei σ eine beliebige topologische Abbildung von $t\gamma_P$ auf γ_Q , deren Umlaufssinn so gewählt ist, dass wenn x $t\gamma_P$ so durchläuft, dass P zur Linken liegt, der Punkt σx γ_Q so durchläuft, dass Q zur Rechten liegt. Nun ist σt eine Abbildung von γ_P auf γ_Q und $t\sigma$ eine Abbildung von $t\gamma_P$ auf $t\gamma_Q$. Diese erweitere man irgendwie zu einer topologischen Abbildung des Ringbereichs zwischen γ_P und $t\gamma_P$ auf den Ringbereich zwischen γ_Q und $t\gamma_Q$. Sodann lasse man das Innere von $t\gamma_P$ und von γ_Q aus K_I fort und bringe jeden Punkt x von $t\gamma_P$ mit dem Punkt σx auf γ_Q zur vereinigten Lage. Die entstehende geschlossene Fläche ist wegen des für σ gewählten Umlaufssinnes zweiseitig und hat ein um 1 höheres Geschlecht als K_I . Man wähle nun einen neuen anziehenden und einen neuen abstossenden Fixpunkt auf den E -Kurven beliebig aus, verfare mit diesen ebenso und setze das Verfahren μ Male fort. So erhält man eine geschlossene zweiseitige Fläche K_I^* vom Geschlecht $\nu + \mu$, und die für diese vorliegende Abbildung, die wir auch weiterhin als tK_I^* bezeichnen, gehört zur Klasse der Identität. (Mit anderen Worten: Wir haben von den 2μ auf den E -Kurven liegenden isolierten Fixpunkten der Hauptklasse von tK_I je einen anziehenden mit einem abstossenden zur vereinigten Lage gebracht, den Vereinigungspunkt schlauchartig erweitert und die Abbildung tK_I an der Vereinigungsstelle fixpunktfrei gemacht.)

Nun hat tK_I^* nach I, 42 nur eine wesentliche Fixpunktklasse, und diese hat den Index $2 - 2(\mu + \nu)$, da $\mu + \nu$ das Geschlecht von K_I^* ist. Von den Fixpunkten dieser wesentlichen Klasse liegt keiner auf E . Die innerhalb und ausserhalb E liegenden Fixpunkt mengen sind Spiegelbilder in E . Die von Fixpunkten von $t\Phi$ überdeckte Fixpunktmenge von tK_I^* , also auch von tK_I , hat somit den Index $1 - \nu - \mu$ in Übereinstimmung mit (26).

Für $\mu = 0$ ist natürlich unter K_I^* die Fläche K_I selbst zu verstehen.

Satz 16: *Der Index einer Fixpunktklasse einer die Orientierung erhaltenden Abbildung einer geschlossenen Fläche φ vom Geschlecht $p > 1$ kann immer durch Anwendung der BIRKHOFFSchen Formel auf die Fläche φ selbst oder eine geschlossene Hilfsfläche K_I oder K_I^* bestimmt werden. Die Hilfsfläche hängt dabei nur von der Klasse der betrachteten Flächenabbildung ab, und ihr Geschlecht übersteigt wegen (23) nie den Wert $4p - 2$.*

III. ABSCHNITT.

Untersuchung vollständiger Automorphismenfamilien.

17. Verwandte T -Funktionen und Automorphismen.

Sei t eine T -Funktion, welche der Funktionalgleichung

$$tfx = f_I tx \quad (29)$$

genügt, wo I ein nicht identischer Automorphismus erster Art ist. $t\mathcal{D}$ liege über $\tau\varphi$. tE enthalte mehr als zwei Fixpunkte; es gibt also ein Hauptgebiet $\Omega(t) = \Omega(I) = \Omega$. Nun wähle man ein bestimmtes Element $l \neq 1$ von F aus und bilde die mit t verwandte T -Funktion lt . Sie liegt ebenfalls über $\tau\varphi$ und induziert den mit I verwandten Automorphismus

$$J = I_{l^{-1}},$$

bei welchem f in $l f_I l^{-1}$ übergeht, wie (29) zeigt. Unser nächstes Ziel ist, je nach der Auswahl von l etwas über den Typus von J auszusagen, und insbesondere die relative Lage der Hauptgebiete $\Omega(I)$ und $\Omega(J)$ zu bestimmen, falls auch zu J mehr als zwei Randfixpunkte gehören.

Wenn es nun ein solches Element f von F gibt, dass (vgl. I, 18)

$$l = f f_I^{-1}, \quad (30)$$

so ist wegen (29)

$$lt = f t f^{-1},$$

und es ist

$$J = I_{of} I I_{of}^{-1},$$

wo I_{of} der f entsprechende innere Automorphismus ist. In diesem Fall werden die Automorphismen I und J und ebenso die T -Funktionen t und lt nach I, 18 *isogradient* genannt. In diesem Fall ist speziell

$$ltE = f t f^{-1} E,$$

also gilt für die Randfixpunkt mengen M :

$$M(lt) = M(f t f^{-1}) = f M(t),$$

also auch

$$M^*(lt) = f M^*(t)$$

und

$$\Omega(J) = \Omega(lt) = f \Omega(t) = f \Omega(I).$$

In diesem Fall wissen wir bereits aus dem ersten Abschnitt, dass $\Omega(J)$ und $\Omega(I)$ einander nicht überdecken; f ist nämlich wegen (30) nicht Fixelement bei I . — Dass diese beiden Hauptgebiete das auch im allgemeinen Fall nicht tun, wird in dem folgenden Paragraphen gezeigt werden.

Wenn man ferner drei solche Elemente l_1 , l_2 und f hat, dass

$$l_2 = f l_1 f^{-1}$$

ist, so ist wegen (29)

$$l_2 t = f l_1 f^{-1} t = f(l_1 t) f^{-1},$$

also $l_1 t$ und $l_2 t$ und ebenso die durch sie induzierten Automorphismen J_1 und J_2 sind isogredient. Dann ist

$$\Omega(J_2) = f \Omega(J_1).$$

Die zugehörigen Fixelementgruppen sind konjugierte Untergruppen von F , indem (vgl. Satz 8, I, S. 260)

$$H(J_2) = f H(J_1) f^{-1}.$$

Nun wenden wir uns zu der Frage nach dem Typus von lt für verschiedene Wahlen von l und nehmen zunächst an, dass l Fixelement bei I ist. Dann enthält I, 17 die vollständige Antwort auf unsere Frage, die so formuliert werden kann:

Satz 17: *Ist $lt = tl$, und ist die Achse von l nicht Randseite von $\Omega(t)$, so ist lt vom Typus $\nu = 1, \mu = 0$. Ist die Achse von l Randseite von $\Omega(t)$, so kann lt einem Typus $\nu + \mu > 1$ angehören. In diesem letzteren Fall haben $\Omega(t)$ und $\Omega(lt)$ die Achse von l als gemeinsame Randseite und sonst keinen Punkt gemeinsam. l kann dabei nur eine ganz bestimmte Potenz des zu dieser Achse gehörigen primären Elements sein. Alle anderen Potenzen desselben führen wieder zum Typus $\nu = 1, \mu = 0$.*

Es sei nun hinfort angenommen, dass l nicht Fixelement bei I ist. Die Folge der Elemente l_I^n für alle n ist in § 2 untersucht worden, wo f statt l steht. Bezeichnet man, wie dort, die Endpunkte der fixpunktfreien Intervalle, die die Grundpunkte von l enthalten, mit

$$\left. \begin{aligned} U^+ &= \lim t^n U(l), & U^- &= \lim t^{-n} U(l) \\ V^+ &= \lim t^n V(l), & V^- &= \lim t^{-n} V(l) \end{aligned} \right\} n \rightarrow \infty,$$

so ist die Folge l_I^n für $n \rightarrow \infty$ bzw. $n \rightarrow -\infty$ eine zu V^+ bzw. V^- gehörige Fundamentalfolge mit U^+ bzw. U^- als einzigem eventuell vorhandenen Ausnahmepunkt (§ 2). Es sei wieder das fixpunktfreie Intervall $U^+ U^-$ mit u und $V^+ V^-$ mit v bezeichnet und $u + U^+ + U^- = \bar{u}$, $v + V^+ + V^- = \bar{v}$ gesetzt.

Um den Typus von lt zu bestimmen, hat man die Fixpunktmenge der zugehörigen Randabbildung zu untersuchen, und das geschieht durch Iteration der Abbildung. Wiederholte Anwendung von (29) ergibt für $n > 0$ (vgl. I, 17 und I, 50):

$$\begin{aligned} (lt)^n &= ltltl \dots lt \\ &= ll_I t^2 \dots lt \\ &\dots \dots \dots \\ &= ll_I l_{I^2} \dots l_{I^{n-1}} t^n, \\ (lt)^{-n} &= t^{-1} l^{-1} t^{-1} l^{-1} \dots t^{-1} l^{-1} \\ &= l_{I^{-1}}^{-1} t^{-2} l^{-1} \dots t^{-1} l^{-1} \\ &\dots \dots \dots \\ &= l_{I^{-1}}^{-1} l_{I^{-2}}^{-1} \dots l_{I^{-n}}^{-1} t^{-n}. \end{aligned}$$

Indem man nun definiert:

$$\left. \begin{aligned} l_n &= ll_I l_{I^2} \dots l_{I^{n-1}} \\ l_{-n} &= l_{I^{-1}}^{-1} l_{I^{-2}}^{-1} \dots l_{I^{-n}}^{-1} \\ l_0 &= 1, \end{aligned} \right\} n > 0 \quad \left. \right\} \quad (31)$$

hat man für alle $n \geq 0$

$$(lt)^n = l_n t^n. \quad (32)$$

Man hat dann für alle n die Rekursionsformeln

$$l_{n+1} = l \cdot l_{nI} = l_n \cdot l_I^n, \quad (33)$$

und daraus weiter für alle n und m

$$l_{n+m} = l_m \cdot (l_n)_I^m = l_n \cdot (l_m)_I^n. \quad (34)$$

Schreibt man (33) in der Form

$$l_I^n = l_n^{-1} \cdot l \cdot l_n I,$$

so ergibt sich die Isogredienz von l_I^n und l bezüglich I . Das ist die Aussage des Satzes 9, I, S. 261.

Entsprechend der Gleichung (29)

$$f_I = t f t^{-1}$$

hat man für jedes f

$$f_J = (lt) f (lt)^{-1} = l f_I t^{-1}$$

und für jedes n

$$f_{J^n} = (lt)^n f (lt)^{-n} = l_n t^n f t^{-n} l_n^{-1} = l_n f_I^n l_n^{-1}.$$

Also ist

$$J^n = (I^n)_{l_n^{-1}}. \tag{35}$$

Speziell wird für alle n und m wegen (35) und (34):

$$(l_n)_{J^m} = l_m (l_n)_{I^m} l_m^{-1} = l_{n+m} l_m^{-1}. \tag{36}$$

18. Verwandte Hauptgebiete.

Um nun — mit Beibehaltung aller Bezeichnungen des letzten Paragraphen — die Randfixpunktmenge von lt zu untersuchen, müssen wir je nach der Lage der Grundpunkte von l drei Fälle unterscheiden.

a) Die beiden fixpunktfreien Intervalle u und v , die die Grundpunkte von l enthalten, liegen ganz getrennt; also U^+, U^-, V^+ und V^- sind vier verschiedene Punkte auf E .

Nach (31) ist $l_1 = l$ und $l_2 = ll_I$. Die positiven Grundpunkte von l und l_I liegen beide in v , die negativen beide in u . Nach Hilfssatz 1, § 1, liegt daher $V(l_2)$ in v zwischen $V(l)$ und $V(l_I)$ und $U(l_2)$ in u zwischen $U(l)$ und $U(l_I)$. Weiter ist $l_3 = l_2 l_{I^2}$. Man schliesst daher ebenso, dass $V(l_3)$ in v zwischen $V(l_2)$ und $V(l_{I^2})$ liegt. $V(l_3)$ liegt näher an V^+ als $V(l_2)$. Denn $V(l_I)$ und umsomehr $V(l_{I^2})$ liegt näher an V^+ als $V(l_2)$. Ebenso liegt $U(l_3)$ in u und näher an U^+ als $U(l_2)$. Mittels (33) setzt man diese Schlussweise unbegrenzt fort. $V(l_n)$ ist also mit wachsendem n eine monoton in Richtung auf V^+ fortschreitende Punktfolge in v , und $U(l_n)$ ist eine monoton in Richtung auf U^+ fortschreitende Punktfolge in u . Sei P der Grenzpunkt von $V(l_n)$ und P' der Grenzpunkt von $U(l_n)$.

P liegt in \bar{v} und P' in \bar{u} , P und P' sind also verschieden. l_n ist eine zu P gehörige Fundamentalfolge mit P' als einzigem eventuell vorhandenen Ausnahmepunkt (§ 1). Da die Achse von l_n gegen die Gerade $P'P$ konvergiert, wächst die Verschiebungslänge von l_n mit n über alle Grenzen. Nun bilde man mit irgend einem von P' verschiedenen Punkt, z. B. dem Nullpunkt O , die Punktfolge $l_n O$. Nach Hilfssatz 3 gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$l_n O \rightarrow P,$$

also wegen der Stetigkeit von lt in $\Phi + E$:

$$lt l_n O \rightarrow lt P.$$

Nun gilt aber wegen (29), (33) und Hilfssatz 3:

$$lt l_n O = ll_n I t O = l_{n+1} t O \rightarrow P,$$

da $tO \neq P'$. Also ist $lt P = P$, also P als Fixpunkt von lt ein innerer Punkt von v . Denn es ist $t\bar{v} = \bar{v}$, und $lt\bar{v} = l\bar{v}$ ein inneres Teilintervall von v . (Dass daher lt mindestens einen Fixpunkt in v und aus analogen Gründen mindestens einen in u hat, ist von vorneherein klar.) — Für den Punkt P' gilt wegen (29), (33) und Hilfssatz 3:

$$l_n^{-1} O \rightarrow P',$$

$$t l_n^{-1} O \rightarrow t P',$$

$$t l_n^{-1} O = l_n^{-1} I t O = l_{n+1}^{-1} t O \rightarrow P',$$

da ltO ein von P verschiedener fester Punkt ist. Also $tP' = P'$, und daher $P' = U^+$, da t im Inneren von u keinen Fixpunkt hat.

Ferner ist nach (31) $l_{-1} = l_{-1}^{-1}$. Also liegt $V(l_{-1})$ in u und $U(l_{-1})$ in v . Ferner ist $l_{-2} = l_{-1} l_{-1}^{-1}$. Also liegt $V(l_{-2})$ in u zwischen $V(l_{-1})$ und $V(l_{-1}^{-1})$ u. s. w. Man schliesst, dass für $n \rightarrow \infty$ $V(l_{-n})$ eine monoton in Richtung auf U^- fortschreitende Punktfolge in u mit einem Grenzpunkt Q und $U(l_{-n})$ eine monoton in Richtung auf V^- fortschreitende Punktfolge in v mit einem Grenzpunkt Q' ist. Dabei hat man:

$$l_{-n} O \rightarrow Q,$$

$$lt l_{-n} O \rightarrow lt Q,$$

$$lt l_{-n} O = l(l_{-n}) I t O = l_{-n+1} t O \rightarrow Q,$$

also $ltQ = Q$ und Q ein innerer Punkt von u . Andererseits

$$l_{-n}^{-1} O \rightarrow Q',$$

$$tl_{-n}^{-1} O \rightarrow tQ',$$

$$tl_{-n}^{-1} O = (l_{-n}^{-1})_I tO = l_{-n+1}^{-1} ltO \rightarrow Q',$$

also $tQ' = Q' = V^-$.

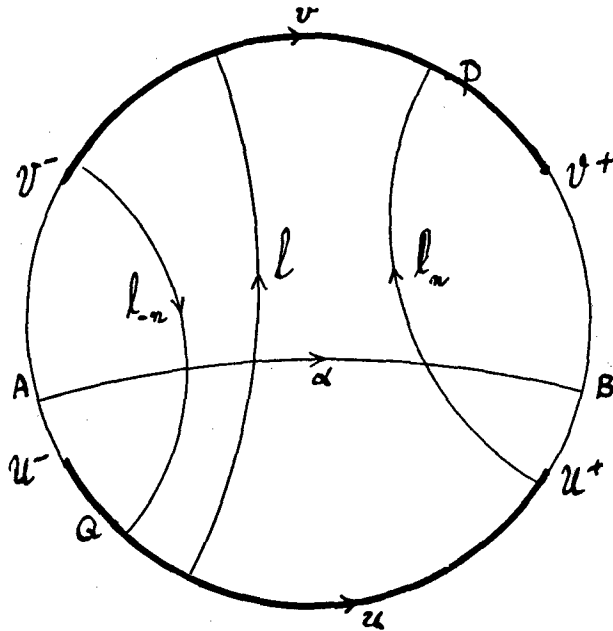


Fig. 13.

Je nachdem nun die Verschiebungsrichtung bei t in u und v entgegengesetzt oder gleich ist, hat man die beiden Fälle der Figuren 13 und 14, in denen u und v stärker ausgezogen sind.

Nun sei R irgend ein Fixpunkt von t . Dann gilt wegen (32):

$$(lt)^n R = l_n t^n R = l_n R \rightarrow \begin{cases} P & \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ falls } R \neq U^+ \\ Q & \text{für } n \rightarrow -\infty, \text{ falls } R \neq V^- \end{cases}$$

Für jedes $R \neq U^+$ und $\neq V^-$ folgt somit, dass das R enthaltende Intervall zwischen P und Q bei lt fixpunktfrei ist. Das ist auf $R=V^+$ und $R=U^-$ anwendbar. In Fig. 13 sind also P und Q die einzigen Fixpunkte von lt . In

Fig. 14 ist das in der Figur rechts liegende Intervall PQ fixpunktfrei bei lt . Liegt in dem linksliegenden Intervall PQ der Fig. 14 ausser V^- und U^+ noch ein weiterer Fixpunkt bei t (der dann natürlich zwischen V^- und U^+ liegen muss), so ist auch dies ganze Intervall PQ fixpunktfrei bei lt . In allen Fällen gilt auch hier

$$\left. \begin{aligned} (lt)^n V^- &= l_n V^- \rightarrow P \\ (lt)^{-n} U^+ &= l_{-n} U^+ \rightarrow Q \end{aligned} \right\} \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

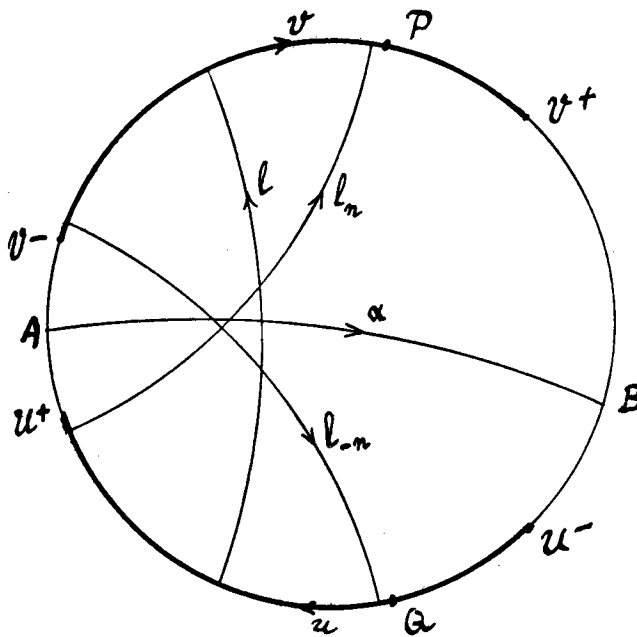


Fig. 14.

Wenn also lt ausser P und Q noch andere Randfixpunkte haben soll, so muss zunächst der Fall der Fig. 14 vorliegen, und ferner darf zwischen V^- und U^+ kein anderer Fixpunkt von t liegen, also V^- und U^+ müssen bei t reguläre Fixpunkte sein (da sie ja nicht die einzigen Fixpunkte von tE sind); V^- muss also beiderseits abstossend und U^+ beiderseits anziehend sein. Alle von P und Q verschiedenen Fixpunkte von ltE liegen wegen (37) zwischen V^- und U^+ . Bei der Bildung von $M^*(t)$ ist jedenfalls V^- aus $M(t)$ fortzulassen; und bei der Bildung von $M^*(lt)$ ist jedenfalls der beiderseits abstossende Fixpunkt Q aus $M(lt)$ fortzulassen. Also liegen $M^*(t)$ und $M^*(lt)$ auf E getrennt. Also überdecken $\Omega(t)$ und $\Omega(lt)$ einander nicht.

P und Q sind reguläre Fixpunkte von lt , also nicht Grundpunkte. (In dem Fall, wo sie nicht die einzigen Randfixpunkte von lt sind, folgt dies schon daraus, dass sie isoliert sind.) Um das zu sehen, verbinde man zwei Punkte A und B der beiden E -Bögen, die $E - \bar{u} - \bar{v}$ ausmachen, durch einen Orthogonalbogen α . Siehe Fig. 13 und 14. Da der Punkt

$$l_n V^+ = l_n t^n V^+ = (lt)^n V^+$$

in beiden Figuren für alle $n > 0$ rechts von P liegt, ist dasselbe mit $l_n B$ der Fall. $l_n A$ liegt links von P . $l_n \alpha$ umschliesst also P und zwar mit wachsendem n immer enger. Nun ist nach (33)

$$ltl_n \alpha = l(l_n)_I t \alpha = l_n l_I^n t \alpha.$$

l_I^n ist für $n \rightarrow \infty$ eine zu V^+ gehörige Fundamentalfolge mit U^+ als einzigem eventuell vorhandenen Ausnahmepunkt. $t \alpha$ ist ein Jordanbogen, der den Punkt tA zwischen U^+ und V^- mit dem Punkt tB zwischen U^- und V^+ verbindet (das obere Zeichen für Fig. 13, das untere für Fig. 14). Also liegt $l_I^n t \alpha$ für genügend grosses n beliebig nahe bei V^+ , und der Abstand von $l_I^n t \alpha$ und α wächst daher mit n über alle Grenzen. Dasselbe ist daher mit dem Abstand der beiden aus ihnen durch l_n hervorgehenden Bögen $l_n \alpha$ und $ltl_n \alpha$ der Fall. P wird also beliebig nahe von Orthogonalbögen umschlossen, die ihr Bild bei lt ganz auf der P zugekehrten Seite in beliebig grossem Abstand haben. Nach dem letzten Absatz in § 13 kann P also nicht Grundpunkt sein.

Satz 18 a: *Ist l nicht Fixelement bei dem zu t gehörigen Automorphismus und sind die bei t fixpunktfreien Intervalle u und v , die die Grundpunkte von l enthalten, incl. Endpunkte verschieden, so ist lt im Allgemeinen vom Typus $\nu=0, \mu=1$. Nur wenn die Intervallendpunkte V^- und U^+ benachbarte reguläre Fixpunkte von t sind, kann lt mehr als zwei Randfixpunkte haben. Das Hauptgebiet $\Omega(lt)$, das es in diesem Fall gibt, überdeckt nicht $\Omega(t)$.*

Insbesondere ist lt immer vom Typus $\nu=0, \mu=1$, wenn t einem Typus $\nu > 1$ angehört und die Grundpunkte von l in verschiedenen Regularitätsintervallen liegen.

b) $u=v$, also $U^+ = V^+, U^- = V^-$.

Zunächst werde angenommen, dass die Punkte $V^-, U(l), V(l), V^+$ in dieser Reihenfolge in \bar{v} liegen (Fig. 15). Durch lt wird das Intervall von V^+ bis $V(l)$ auf ein inneres Teilintervall und das Intervall von $U(l)$ bis V^- auf ein dies

Intervall umfassendes Intervall abgebildet. In jedem dieser beiden Intervalle gibt es daher mindestens einen inneren Punkt, der Fixpunkt bei lt ist. Sei A irgend ein Punkt in v zwischen den Grundpunkten von l . tA liegt in der Figur rechts von A . Falls tA noch zwischen den Grundpunkten von l liegt, liegt ltA rechts von tA . Falls tA rechts von $V(l)$ liegt, liegt ltA auch rechts von $V(l)$. In jedem Fall liegt also ltA rechts von A . Das zu v gehörige Intervall zwischen $U(l)$ und $V(l)$ ist also einschliesslich seiner Endpunkte fixpunktfrei bei lt . Sei PQ das vollständige bei lt fixpunktfreie Intervall, von dem es ein Teil ist. Indem lt den Automorphismus $J=I_{t^{-1}}$ induziert, bilden die Elemente l_J^n für $n \rightarrow \infty$

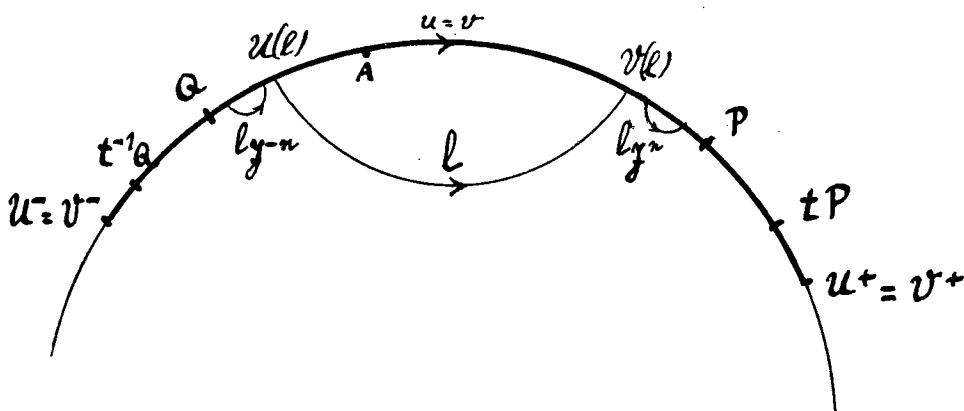


Fig. 15.

eine zu P und für $n \rightarrow -\infty$ eine zu Q gehörige Fundamentalfolge. — Der Punkt tP liegt zwischen P und V^+ , $t^{-1}Q$ zwischen Q und V^- . Nun hat man für $n \rightarrow \infty$:

$$(lt)^n t^{-1} Q = (lt)^{n-1} l Q = l_{J^{n-1}} (lt)^{n-1} Q = l_{J^{n-1}} Q \rightarrow P,$$

$$(lt)^{-n} tP = (lt)^{-n} t(lt)^{-1} P = (lt)^{-n} t^{-1} P = l_{J^{-n}}^{-1} (lt)^{-n} P = l_{J^{-n}}^{-1} P \rightarrow Q.$$

Also begrenzen P und Q auch nach der anderen Seite ein fixpunktfreies Intervall, sie sind also die einzigen Fixpunkte von lt . lt ist also entweder vom Typus $\nu=1, \mu=0$, oder $\nu=0, \mu=1$. Dies ist unabhängig davon, ob tE mehr als zwei Fixpunkte besitzt, oder nicht.

Alsdann werde angenommen, dass die Punkte $V^+, U(l), V(l), V^-$ in dieser Reihenfolge in \bar{v} liegen. (Fig. 16.) Hier machen wir von der Annahme Gebrauch, dass tE mehr als zwei Fixpunkte hat. Nach § 2 und 3 liegt $LM(t)$ in v höchstens mit Ausnahme von lV^+ . Wenn auch lV^+ in v liegt, so wird das Intervall $E-v$ durch t auf sich und weiter durch l auf ein Teilintervall von v , also durch lt

auf ein ganz zu ihm fremdes Intervall abgebildet, ist also fixpunktfrei bei lt . Wenn lV^+ aber ausserhalb v fällt, so muss nach § 3 der Punkt V^+ beiderseits anziehend und V^- beiderseits abstossend sein. A und B seien die anderen Endpunkte der an V^+ und V^- stossenden, von v verschiedenen, bei t fixpunktfreien Intervalle. Dann fällt lV^+ zwischen B und V^- und lA zwischen V^- und $V(l)$. lt bildet also das Intervall von V^+ bis A auf das Intervall von lV^+ bis lA , und das Intervall von A bis V^- auf das Intervall von lA bis lV^- ab. Beide Inter-

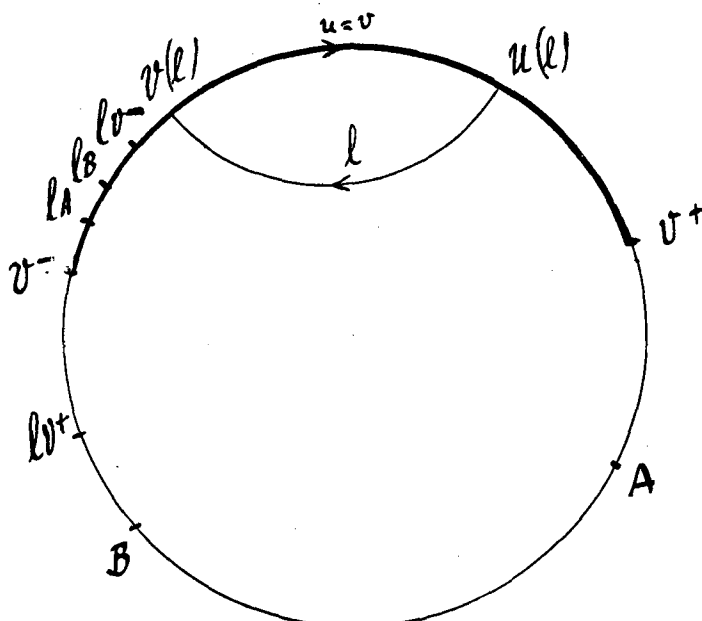


Fig. 16.

valle und daher auch das Gesamtintervall $E-v$ sind also bei lt fixpunktfrei. — In jedem Fall muss also die gesamte Fixpunktmenge von ltE in v liegen. Falls lt mehr als zwei Fixpunkte hat, so überdecken sich demnach $\Omega(lt)$ und $\Omega(t)$ nicht.

— Man kann auch in diesem Fall genauere Aussagen über die Lage der Randfixpunktmenge $M(lt)$ von lt machen. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Achsen von l und l_I einander schneiden oder nicht. Insbesondere kann ltE fixpunktfrei, also lt vom Typus $\nu=\mu=0$ sein. Auf die nähere Untersuchung dieser Verhältnisse soll aber in dieser Abhandlung nicht eingegangen werden.

Satz 18 b: *Liegen die Grundpunkte von l in demselben bei t fixpunktfreien Intervall v und ist in dem zu v gehörigen Intervall zwischen diesen Grundpunkten die Verschiebungsrichtung bei t und l die gleiche, so ist lt vom Typus*

$\nu=1, \mu=0$, oder $\nu=0, \mu=1$. Sind diese Verschiebungsrichtungen entgegengesetzt und hat tE mehr als zwei Fixpunkte, so kann auch ltE mehr als zwei Fixpunkte haben; in diesem Fall überdecken $\Omega(t)$ und $\Omega(lt)$ einander nicht.

c) Es bleibt der Fall, dass u und v zusammenstossen. Da t mehr als zwei Randfixpunkte haben soll, kann das nach Satz 4 nur so geschehen, dass entweder $U^- = V^-$, oder $U^+ = V^+$ ist.

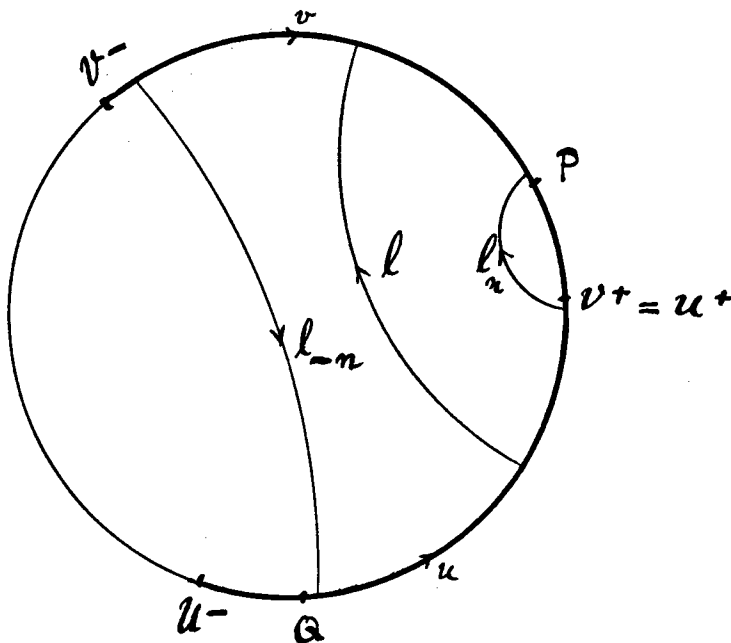


Fig. 17.

Es sei $U^- = V^-$. Sei $j = E - u - v - U^-$ der U^- nicht enthaltende Bogen von U^+ bis V^+ . j enthält $M^*(t)$. Nach Satz 2 liegt lj ganz in v . Also ist $ltj = lj$ zu j fremd. Die ganze eventuell vorhandene Fixpunktmenge von ltE liegt also in $u+v$. Also überdecken sich $\Omega(t)$ und $\Omega(lt)$ nicht.

Sodann sei $U^+ = V^+$. Man hat die Fig. 17, die aus Fig. 13 durch Zusammenführung der Punkte U^+ und V^+ entsteht. Genau wie im Fall a) dieses Paragraphen schliesst man nun, dass für $n \rightarrow \infty$ die Folge l_n eine zu P und l_{-n} eine zu Q gehörige Fundamentalfolge mit U^+ bzw. V^- als einzigem Ausnahmepunkt ist. Dabei ist P ein Punkt in v zwischen $V(l)$ und V^+ und Q ein Punkt in u zwischen $U(l)$ und U^- . Nun gilt entsprechend wie in a):

$$(lt)^n U^- = l_n t^n U^- = l_n U^- \rightarrow \begin{cases} P & \text{für } n \rightarrow \infty \\ Q & \text{für } n \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Also ist das U^- enthaltende Intervall PQ fixpunktfrei bei lt . Ferner für $n \rightarrow \infty$:

$$(lt)^{-n} V^+ = l_{-n} t^{-n} V^+ = l_{-n} V^+ \rightarrow Q.$$

Also ist das zu u gehörige Intervall von V^+ bis Q fixpunktfrei bei lt . Abgesehen von dem isolierten beiderseits abstossenden Fixpunkt Q liegt also die ganze Fixpunktmenge von ltE auf dem Bogen von V^+ (excl.) bis P (incl.). $\Omega(lt)$ und $\Omega(t)$ überdecken einander also nicht.

Satz 18 c: *Liegen die Grundpunkte von l in aneinanderstossenden bei t fixpunktfreien Intervallen, und haben sowohl t wie lt mehr als zwei Fixpunkte auf E , so überdecken $\Omega(t)$ und $\Omega(lt)$ einander nicht.*

19. Folgerungen.

Wenn eine T -Funktion t mehr als zwei Randfixpunkte hat, so gehört sie zu einem Typus, für welchen $\nu + \mu > 1$ ist, sie hat also nach (26), § 14, einen negativen Index; und umgekehrt. Aus den Sätzen 17 und 18 a—c folgt nun, dass die Hauptgebiete zweier verwandten T -Funktionen von negativem Index einander nie überdecken und nur im Falle des Satzes 17 längs einer Randseite aneinanderstossen können. Isogrediente T -Funktionen haben äquivalente Hauptgebiete. Sind t_1 und t_2 zwei verwandte, aber nicht isogrediente T -Funktionen, so ist kein innerer Punkt von $\Omega(t_1)$ mit einem Punkt von $\Omega(t_2)$ äquivalent; wohl aber können $\Omega(t_1)$ und $\Omega(t_2)$ äquivalente Randseiten haben. Die von einem Hauptgebiet $\Omega(t) = \Omega(I)$ überdeckte Punktmenge

$$\omega(t) = \omega(I) = \Omega(t) \bmod H(I)$$

möge ein »Hauptgebiet auf φ « heissen. Analog kann von »Kerngebieten auf φ « gesprochen werden. — Man hat somit:

Satz 19: *Ist $\tau\varphi$ eine Abbildung der Fläche φ auf sich, die die Orientierung erhält, und bildet man die (wegen der Endlichkeit der Klassenzahl endlich vielen) zugehörigen »Hauptgebiete auf φ «, d. h. die von den Hauptgebieten der über $\tau\varphi$ liegenden T -Funktionen mit negativem Index überdeckten Punktmenge auf φ , so greifen diese nicht übereinander. Zwei Haupt-*

gebiete auf φ können längs einer geschlossenen geodätischen Linie aneinandergrenzen; in diesem Fall gehen zwei T -Funktionen, deren Hauptgebiete längs einer über dieser Linie liegenden Achse in Φ aneinandergrenzen, durch ein zu dieser Achse gehöriges Element aus einander hervor.

Man beachte, dass dabei die Hauptgebiete auf φ nur von der Klasse von τ abhängen.

Nun betrachte man ein vollständiges System nicht isogredienter T -Funktionen von negativem Index über $\tau\varphi$. Sei Z^- ihre Anzahl. (Ebenso sei Z^+ die Anzahl solcher von positivem Index, sodass die »Klassenzahl«

$$Z = Z^- + Z^+$$

die Anzahl aller wesentlichen Fixpunktklassen der Abbildungsklasse von τ bedeutet.) Sei t_s eine solche T -Funktion. Für den Flächeninhalt $A_s = Ar(\omega(t_s))$ des zugehörigen Hauptgebietes auf φ hat man nach (24), § 12:

$$A_s = 2(\nu_s - 1) + \mu_s, \quad (\nu_s + \mu_s > 1) \quad (38)$$

wenn t_s vom $\nu_s - \mu_s$ -Typus ist. Da nun die Hauptgebiete auf φ einander nicht überdecken, gilt wegen (9), § 5:

$$\sum_{s=1}^{Z^-} A_s \leq Ar(\varphi) = 4(p-1). \quad (38 \text{ a})$$

Man hat also:

Satz 20: Für die den Typus einer Fixpunktklasse von negativem Index charakterisierenden Zahlen ν und μ gilt, wenn Z^- die Anzahl solcher negativen Klassen und ν_s und μ_s die charakteristischen Zahlen der s -ten Klasse sind, (und dabei also $\nu_s + \mu_s > 1$ ist), die Beschränkung

$$\sum_{s=1}^{Z^-} 2(\nu_s - 1) + \mu_s \leq 4(p-1). \quad (39)$$

Daraus lässt sich eine rein gruppentheoretische Folgerung ziehen: ν_s ist die Anzahl der freien Erzeugenden der Fixelementgruppe $H(I_s)$ des durch t_s induzierten Automorphismus I_s . Isogrediente T -Funktionen haben konjugierte Untergruppen von F als Fixelementgruppen. Betrachtet man nun die Menge derjenigen Untergruppen von F , die als Fixelementgruppen der Automorphismen einer vollständigen Automorphismenfamilie auftreten, so zerfällt diese in vollständige

Systeme untereinander konjugierter Untergruppen. Indem man nun von der Familie absieht, die den identischen Automorphismus enthält, schliesst man aus (39):

Satz 21: *Die Anzahl der untereinander nicht konjugierten Untergruppen von F , die als Fixelementgruppen in einer Automorphismenfamilie auftreten und mehr als eine freie Erzeugende haben, ist, wenn ν_s die Anzahl der freien Erzeugenden der s -ten Gruppe bezeichnet, durch*

$$\sum_s (\nu_s - 1) \leq 2p - 2 \tag{40}$$

beschränkt.

Insbesondere kann es also höchstens $2p - 2$ solche Gruppen geben, und dies nur, wenn jede genau 2 freie Erzeugende hat.

20. Abschätzung der Klassenzahl aus der Indexsumme.

Für die Anzahl $Z = Z^+ + Z^-$ der wesentlichen Fixpunktclassen ($\nu_s + \mu_s \neq 1$) hat man nun wegen

$$i_s = 1 - \nu_s - \mu_s$$

$$\Xi = \sum_{s=1}^Z (1 - \nu_s - \mu_s) = Z - \sum_{s=1}^Z (\nu_s + \mu_s),$$

wobei die letzte Summe nur über die Klassen mit $\nu_s + \mu_s > 1$ erstreckt zu werden braucht. Man hat also

$$Z = \Xi + \sum_{s=1}^{Z^-} (\nu_s + \mu_s), \tag{40 a}$$

indem man die Klassen so numeriert, dass der Stellzeiger s zunächst die negativen Klassen durchläuft. Da die aus (40 a) folgende Abschätzung $Z \geq \Xi$, die schon in (28), § 15, ausgesprochen ist, nur für $\Xi > 0$ etwas aussagt, und aus $\Xi = 0$ natürlich nur $Z \geq 0$ folgen kann, wird nun eine andere Abschätzung gesucht, die für $\Xi < 0$ Bedeutung gewinnt.

Man erhält unter Benutzung der für negative Klassen gültigen Arealzahlen A_s aus (38)

$$\begin{aligned}
\Xi &= \sum_{s=1}^Z i_s = \sum_{s=1}^{Z^-} (1 - \nu_s - \mu_s) + \sum_{s=Z^-+1}^{Z^-+Z^+} 1 \\
&= \sum_{s=1}^{Z^-} (-A_s + \nu_s - 1) + Z^+ \\
&= \sum_{s=1}^{Z^-} (-A_s + \nu_s) - Z^- + Z^+,
\end{aligned}$$

also

$$Z = Z^- + Z^+ = -\Xi + 2Z^+ - \sum_{s=1}^{Z^-} A_s + \sum_{s=1}^{Z^-} \nu_s. \quad (41)$$

Wegen (38 a) folgt hieraus

$$Z \geq -\Xi - 4(p-1),$$

und da es für $\Xi < 0$ mindestens eine Klasse geben muss, so hat man:

Satz 22: Die Anzahl Z der Fixpunktklassen mit einem von Null verschiedenen Index lässt sich mittels der Indexsumme Ξ , die man aus der Formel von ALEXANDER gewinnt, in folgender Weise nach unten abschätzen: Es ist

$$\left. \begin{aligned}
Z &\geq \Xi && \text{für } 0 \leq \Xi, \\
Z &\geq 1 && \text{für } -4(p-1) \leq \Xi < 0, \\
Z &\geq |\Xi| - 4(p-1) && \text{für } \Xi < -4(p-1).
\end{aligned} \right\} \quad (42)$$

21. Häufigkeit des Typus $\nu=0, \mu=2$.

Unter den negativen Klassen zeichnen sich diejenigen aus, denen ein strichförmig ausgeartetes Hauptgebiet (§ 3) entspricht. Ihnen entspricht $A_s=0$, also $\nu_s=0, \mu_s=2$ und $i_s=-1$. Ihre Anzahl sei Z_2^- . Ferner sei Z_1^- die Anzahl der negativen Klassen mit nicht strichförmig ausgeartetem Hauptgebiet. Man nummeriere die Z wesentlichen Klassen so, dass der Stellzeiger s zuerst diese Z_1^- negativen Klassen, dann jene Z_2^- negativen Klassen und zuletzt die Z^+ positiven Klassen durchläuft. Dann hat man

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{s=1}^Z i_s = \sum_{s=1}^{Z_1^-} (-A_s + \nu_s - 1) + \sum_{s=Z_1^+ + 1}^{Z_1^- + Z_2^-} (-1) + \sum_{Z^+ + 1}^Z 1 \\ &= - \sum_{s=1}^{Z_1^-} A_s + \sum_{s=1}^{Z_1^-} \nu_s - Z_1^- - Z_2^- + Z^+. \end{aligned}$$

Jede der ersten Z_1^- Klassen verbraucht mindestens eine Flächeneinheit von φ , also ist wegen (38 a)

$$Z_1^- \leq 4(p-1).$$

Somit folgt aus der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} Z_2^- &\geq -\Xi - 8(p-1) + \sum_{s=1}^{Z_1^-} \nu_s + Z^+ \\ &\geq -\Xi - 8(p-1). \end{aligned} \tag{43}$$

Satz 23: *Wenn die Indexsumme Ξ unterhalb $-8(p-1)$ liegt, so gibt es mindestens $|\Xi| - 8(p-1)$ Klassen vom Typus $\nu=0, \mu=2$. Wenn es genau $|\Xi| - 8(p-1)$ solche Klassen gibt, so gibt es ausserdem genau $4(p-1)$ Klassen vom Typus $\nu=0, \mu=3$ und keine weiteren wesentlichen Klassen.*

Denn $Z_2^- = -\Xi - 8(p-1)$ erfordert nach (43) $Z^+ = 0, \nu_s = 0$ und $Z_1^- = 4(p-1)$, also $A_s = 1, \mu_s = 3$ für $s = 1, \dots, Z_1^-$.

Nun kann man leicht Beispiele für Abbildungsklassen geben, deren Indexsumme negativ und numerisch beliebig gross ist. So erhält man durch Potenzieren der Exponentensummenmatrix des in I, 49 mit I bezeichneten Automorphismus der Reihe nach für I, I^2, I^3, \dots die folgenden Ξ -Werte:

$$4, 0, 10, -12, 24, -42, 88, -156, 298, \dots$$

u. s. w. mit abwechselndem Vorzeichen und wachsenden numerischen Werten; dabei ist $p=2$.

Für einen im Vergleich zu $8(p-1)$ numerisch grossen negativen Wert von Ξ sind nach Satz 23 »fast alle« negativen Klassen vom Typus $\nu=0, \mu=2$, tragen also zu Ξ mit einer negativen Einheit bei.

Das soeben genannte Beispiel ist in I, 49 und 51 durchgerechnet. Der Automorphismus $J = I^4$ ergab sich vom Typus $\nu=0, \mu=4$, also $i = -3$ und $A = 2$. Ebenso ergibt sich, wie in I, 51 genannt ist, der mit J verwandte Automorphismus

$J' = (I_c)^4$ von diesem Typus; und man weist leicht nach, dass J' und J nicht isogredient sind. Die beiden zugehörigen Hauptgebiete haben zusammen den Flächeninhalt 4, und das ist gleich $Ar(\varphi) = 4(p-1)$, da $p=2$ ist. Da in beiden Fällen $\nu=0$ ist, haben die beiden Hauptgebiete keine gemeinsamen Randseiten. Ihre Restmenge auf φ ist eine Nullmenge. Diese Fixpunktklassen und ihre Hauptgebiete gehören auch zu allen Potenzen von J . Da nun die Ξ -Werte der Potenzen von J sämtlich negativ sind und mit steigendem Exponenten numerisch über alle Grenzen wachsen, so hat J^n für genügend grosses n ausser diesen beiden negativen Klassen (mit der Indexsumme $-6 > -8(p-1)$) noch beliebig viele weitere negative Klassen. Diese müssen also alle vom Typus $\nu=0, \mu=2$ sein, und ihre strichförmigen Hauptgebiete müssen nebeneinander in jener Nullmenge Platz finden, die von den beiden nicht ausgearteten Hauptgebieten auf φ übriggelassen wurde. Bei den ungeraden Potenzen von I vertauschen sich die Endpunkte dieser strichförmigen Hauptgebiete auf E oder diese unter einander, sodass sie zu positiven Klassen führen.

22. Anwendung auf eine besondere Art von Abbildungsklassen.

Zum Schluss werde noch kurz eine Anwendung auf eine besondere Art von Abbildungsklassen gemacht, bei der die Lösung des in I, 37 aufgestellten allgemeinen Fixpunktproblems vollständig durchführbar ist.

Es sei I ein Automorphismus von einem Typus $\nu > 1, \mu = 0$. Dann sind Kerngebiet und Hauptgebiet identisch. Sei h ein primäres Element von F , dessen Achse A Seite des Kerngebietes $\mathcal{A}(I)$ ist. Angenommen nun, es gibt einen mit I verwandten Automorphismus I_1 von einem Typus $\nu > 1$, dessen Hauptgebiet längs A an $\mathcal{A}(I)$ stösst. A ist dann auch Seite des Kerngebietes $\mathcal{A}(I_1)$, da seine Endpunkte Grundpunkte sind. Sei t eine zu I gehörige T -Funktion. Wir suchen eine zu I_1 gehörige T -Funktion. Diese geht nach Satz 19 aus t durch eine Potenz von h hervor:

$$t_1 = h^m t. \quad (44)$$

(Vgl. Satz 17.) Sei j das fixpunktfreie Regularitätsintervall bei I , das zwischen den Grundpunkten von h liegt. Da man die Möglichkeit hat, h durch h^{-1} zu ersetzen, kann man voraussetzen, dass die Verschiebungsrichtung in j bei t von $V(h)$ gegen $U(h)$ geht. Alle $h^m t$ mit $m \leq 0$ sind dann in j fixpunktfrei. Sei P ein Punkt in j und α das Teilintervall von j von P bis hP . Dann ist $t\alpha$ auch ein Teilintervall von j . Ferner ist für alle Exponenten e

$$th^e\alpha = h^e t\alpha$$

wegen $th = ht$. Nun sei $m_0 > 0$ so gross gewählt, dass $h^{m_0} t\alpha$ ganz zwischen α und $V(h)$ fällt. Dann ist $h^m t$ für alle $m \geq m_0$ in j fixpunktfrei. In (44) sind daher nur endlich viele Exponenten

$$0 < m < m_0$$

zu prüfen, und es lässt sich — z. B. mittels der in I benutzten Methode der Randpunktentwicklung — eine Lösung für m in (44) finden, falls es eine gibt. Es kann nicht mehr als eine geben (vgl. I, 17). Angenommen nun, man hat eine gefunden. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: t_1 kann mit t isogredient sein, nämlich dann, wenn es ein f so gibt, dass $h^m = f f_I^{-1}$ ist. Dann ist $t_1 = f t f^{-1}$ und $\mathcal{A}(I_1) = f \mathcal{A}(I)$. Diese beiden Kerngebiete überdecken also dasselbe Kerngebiet δ auf φ . A liegt über einer geschlossenen geodätischen Linie auf φ , die mit beiden Seiten zur Berandung von δ beiträgt. Es lässt sich von vorneherein an den Randseiten von $\mathcal{A}(I)$ feststellen, ob δ eine solche Doppelrandseite hat. Wenn δ nicht aus der längs einer oder mehreren Kurven aufgeschnittenen ganzen Fläche φ besteht, so kann man A als eine solche Randseite von $\mathcal{A}(I)$ wählen, der eine nur einerseits berandende Randkurve von δ entspricht. Dann liegt die zweite Möglichkeit vor, nämlich dass t_1 nicht mit t isogredient ist; man hat also zwei verschiedene aneinandergrenzende Kerngebiete δ und δ_1 auf φ . Wenn nun wieder I_1 zu einem Typus mit $\mu = 0$ gehört, also $\Omega(I_1) = \mathcal{A}(I_1)$ ist, und $\delta + \delta_1$ noch nicht ganz φ ausmachen, so kann man wieder eine freie Randseite von $\delta + \delta_1$ auswählen und das Verfahren fortsetzen. Das Verfahren kann fortsetzbar sein, bis die Summe der Kerngebiete auf φ $\delta + \delta_1 + \dots + \delta_{N-1}$ ganz φ erfüllt. Es bricht von selbst ab in dem Augenblick, wo die erhaltenen Kerngebiete $\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_{N-1}$ mit ihren äquivalenten zusammen ganz \mathcal{O} ausmachen, was an der Korrespondenz der Randseiten erkennbar ist. — Mit andern Worten, es handelt sich hier um *diejenigen Abbildungsklassen von φ , deren Kerngebiete φ ganz ausfüllen*, indem sie längs einer gewissen Anzahl von doppelpunktlosen, zu einander fremden, geschlossenen geodätischen Linien an einander stossen.

Wie lassen sich nun diese Abbildungsklassen charakterisieren? Wir wollen eine Abbildung $\tau\varphi$ konstruieren, die diesem Fall entspricht. $\tau\varphi$ soll überall auf φ die Identität sein mit Ausnahme beliebig schmaler ringförmiger Bereiche, welche die endlich vielen Kurven einschliessen, durch die die Kerngebiete begrenzt werden. Diese ringförmigen Bereiche werden so schmal gewählt, dass sie nicht übereinander greifen. In diesen Ringbereichen bekommt die Abbildung den

Charakter einer »Verschraubung«, d. h. sie ist ähnlich der in Polarkoordinaten (r, θ) folgendermassen zu beschreibenden topologischen Abbildung des Kreisringes $R_1 \leq r \leq R_2$ auf sich:

$$r' = r + (R_2 - r) \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$$

$$\theta' = \theta + 2\pi m \frac{r - R_1}{R_2 - R_1},$$

die im Inneren des Kreisringes fixpunktfrei und auf den Rändern die Identität ist. Die ganze Zahl m ist dabei für jede Kurve der Exponent m aus der zugehörigen Gleichung (44), und das Vorzeichen von m , also der Verschraubungssinn, ist an jeder Grenzkurve zwischen Kerngebieten richtig zu wählen. Die zugehörigen T -Funktionen geben dann in ihren Kerngebieten die identische Abbildung $tx = x$ ausser in beliebig schmalen Abstandsstreifen längs der Randseiten. Als Fixpunktmenge von $\tau\varphi$ hat man N mehrfach zusammenhängende Bereiche, einen in jedem der N Kerngebiete, und sonst keine Fixpunkte. Die Indizes der N Klassen sind $1 - \nu_s$, wenn ν_s die zum s -ten Kerngebiet gehörige ν -Zahl ist. Man sieht übrigens leicht, dass man die Abbildung $\tau\varphi$ so abändern kann, dass jede der N negativen Klassen durch einen einzigen Fixpunkt befriedigt wird, ohne dass man dabei ausserwesentliche Fixpunktklassen einführt.

Das Beispiel 12, I, S. 343 gehört unter diesen Fall. Den beiden dort aufgezeigten wesentlichen Klassen entsprechen Kerngebiete, die zusammen φ ausmachen und längs derjenigen Kurven aneinandergrenzen, die den Achsen der Elemente b, c und $b^{-1}c$ entsprechen. Zu beiden gehört $\nu = 2, \mu = 0$, also $i = -1$. In der dort konstruierten Abbildung sind die 3 Ringbereiche so ausgedehnt gewählt, dass ihre Restmenge auf φ nur die beiden Kurven der Fig. 19 (I, S. 346) sind. Man kann sie aber auch beliebig schmal wählen, sodass die Fixpunktmenge fast die ganze Fläche füllt.

Satz 24: *Für diejenigen Abbildungsklassen, bei denen die zugehörigen Kerngebiete die ganze Fläche ausfüllen, die also durch Verschraubungen längs eines Systems von zu einander fremden und untereinander nicht homotopen einfachen Kurven hervorgebracht werden können, ist das allgemeine Fixpunktproblem vollständig lösbar.*