ÜBER DIE HERSTELLUNG TRANSZENDENTER FUNKTIONEN ALS GRENZWERTE RATIONALER FUNKTIONEN.

Von

ROLF NEVANLINNA

in Helsingfors.

Professor Dr. Anders Wiman zum fünfundsechzigsten Geburtstage gewidmet.

§ 1. Bemerkungen über die Hauptsätze der Theorie der meromorphen Funktionen.

1. Bei einer anderen Gelegenheit[1] habe ich einige Betrachtungen über rationale Approximation meromorpher Funktionen angestellt, welche die neuesten Ergebnisse über die Wertverteilung in Zusammenhang mit den elementaren Eigenschaften der rationalen Funktionen bringen. Mein Bestreben ging darauf aus zu zeigen, dass jene Resultate gewissermassen als ein Grenzfall der Riemannschen Formel

$$\Sigma(r-1)=2n-2$$

für die gesamte Ordnung der Verzweigungspunkte einer n-blättrigen Fläche vom Geschlechte Null aufgefasst werden kann. Auf den folgenden Seiten werden zu dieser Frage einige ergänzende Bemerkungen und Ausführungen gegeben.

2. Denken wir uns eine transzendente, in jedem endlichen Punkte z meromorphe Funktion $w=f(z)$ als Grenze einer Folge von rationalen Funktionen $f_n(z)$ entstehen:

$$f(z)=\lim f_n(z).$$

Die Anzahl der Verzweigungspunkte der entsprechenden n-blättrigen, über die w-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche F_n, welche an der Grenze in die

[1] VII. skand. Mathematikerkongress, Oslo 1929.

unendlich vielblättrige Fläche F der meromorphen Funktion f übergeht, wird für jedes n mittels der Riemannschen Formel bestimmt. Es sei nun $n(a)$ die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = a$, wo a eine (endliche oder unendliche) von z unabhängige Zahl bedeutet; jede Wurzel wird hierbei so oft berücksichtigt als ihre Multiplizität angibt. Die Anzahl der unter einander verschiedenen Wurzeln sei wiederum gleich $\bar{n}(a)$. Für jedes a ist $n = n(a) \geqq \bar{n}(a)$; die Grösse n gibt die Gesamtanzahl der über der Stelle a gelagerten Blätter der Fläche F_n an, während $\bar{n}(a)$ gleich der Anzahl der über a belegenen verschiedenen Blätterzykeln ist. Hiernach ist die Summe der Ordnungen der über derselben Stelle liegenden Verzweigungspunkte gleich $n - \bar{n}(a)$, und es wird also gemäss der Riemannschen Formel

$$\Sigma(n - \bar{n}(a)) = 2n - 2,$$

wo die Summation über alle Werte a zu erstrecken ist. Nach Division beiderseits mit n ergibt sich hieraus für $n \to \infty$

$$\sum\left(1 - \frac{\bar{n}(a)}{n}\right) = 2 - \frac{2}{n} \to 2. \tag{1}$$

Insbesondere schliesst man:

Die Menge derjenigen Werte a, für welche die untere Grenze

$$\vartheta(a) = \varliminf_{n=\infty}\left(1 - \frac{\bar{n}(a)}{n}\right)$$

positiv ist, ist abzählbar. Die Summe der entsprechenden Werte $\vartheta(a)$ ist endlich und nicht grösser als zwei:

$$\Sigma\vartheta(a) \leqq 2. \tag{1'}$$

3. Andererseits lässt sich ein Hauptsatz in der Theorie der Wertverteilung in folgender Weise ausdrücken. Es sei $n(r, a)$ die Gesamtanzahl der innerhalb des Kreises $|z| = r$ belegenen a-Stellen der betrachteten meromorphen Funktion $f(z)$; die Anzahl der unter einander verschiedenen a-Stellen sei wiederum $\bar{n}(r, a)$. Man bilde die Mittelwerte

$$N(r, a) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a)}{t}\, dt, \quad \bar{N}(r, a) = \int_{r_0}^{r} \frac{\bar{n}(t, a)}{t}\, dt \qquad (r_0 > 0),$$

und setze

$$N(r) = \max N(r, a),$$

wobei alle Werte a zu berücksichtigen sind. Mit diesen Bezeichnungen hat man folgenden Hauptsatz[1]:

Die Menge der Werte a, für welche die untere Grenze

$$\theta(a) = \varliminf_{r=\infty} \left(1 - \frac{N(r, a)}{N(r)}\right)$$

positiv ist, ist abzählbar. Die Summe der entsprechenden Werte $\theta(a)$ ist endlich und nicht grösser als zwei:

$$\Sigma\theta(a) \leqq 2. \tag{2}$$

4. Die formale Übereinstimmung der Beziehungen $(1)'$ und (2) ist auffallend. Um ihren inneren Zusammenhang zu verdeutlichen, empfiehlt es sich, die Grösse θ, wie es in der Theorie der meromorphen Funktionen üblich ist (loc. cit., p. 99), in zwei nichtnegative Bestandteile zu spalten. Man hat

$$1 - \frac{N(r, a)}{N(r)} = \left(1 - \frac{\bar{N}(r, a)}{N(r)}\right) + \frac{N(r, a) - \bar{N}(r, a)}{N(r)}$$

und also

$$\theta(a) \geqq \delta(a) + \mu(a),$$

wo

$$\delta(a) = \varliminf_{r=\infty} \left(1 - \frac{\bar{N}(r, a)}{N(r)}\right), \quad \mu(a) = \varliminf_{r=\infty} \frac{N(r, a) - \bar{N}(r, a)}{N(r)}.$$

Die Beziehung (2) enthält also insbesondere nachstehenden Folgesatz:

$$\Sigma\delta(a) + \Sigma\mu(a) \leqq 2. \tag{3}$$

Die Grösse $\mu(a)$ charakterisiert die algebraische Verzweigtheit der Stelle a in bezug auf die Riemannsche Fläche der betrachteten meromorphen Funktion. Sie ist um so grösser, je höher die relative Anzahl und die Ordnungen der über die Stelle a belegenen algebraischen Verzweigungspunkte der Fläche F sind. Im

[1] Vgl. z. B. meine zusammenfassende Darstellung: *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, Paris 1929).

besonderen Fall einer rationalen Funktion stimmt sie offenbar mit dem Beitrag überein, welche die Stelle a zur linken Seite der Riemannschen Formel (1) liefert. Ich nenne $\mu(a)$ den *Verzweigungsindex* des Wertes a in Bezug auf die meromorphe Funktion.

Die Grösse $\delta(a)$, die ich auf Vorschlag des Herrn WIMAN den *Defekt* des Wertes a nenne, gibt ein Mass für die relative Anzahl der fehlenden a-Stellen an. Diesem Begriff fehlt ein Gegenstück auf dem rationalen Gebiete, denn eine rationale Funktion f nimmt ja jeden Wert a gleich oft (n-mal) an, und sämtliche Defekte verschwinden also für eine solche Funktion. Dass dessenungeachtet einzelne Werte in Bezug auf die transzendente Grenzfunktion positive Defekte erhalten können, erklärt sich, wenn man sich den Verlauf des Grenzüberganges in folgender Weise vorstellt.

Man denke sich, dass der betrachtete Wert a für die Näherungsfunktion f_n verzweigt ist, so dass der Verzweigungsindex des über der Stelle a liegenden Verzweigungspunktes, d. h. die betreffende Ordnung gemessen durch die Blätterzahl n, gegen einen positiven Grenzwert konvergiert. Die entsprechende a-Stelle in der z-Ebene, deren Mehrfachheit also in der geschilderten Weise ins Unendliche wächst, wird für $n=\infty$ mit dem wesentlich singulären Unendlichkeitspunkt zusammenfallen. Hierdurch ist also ein Teil sämtlicher a-Stellen verloren gegangen und der Wert a erhält also in Bezug auf die Grenzfunktion einen Defekt, der offenbar gleich dem Grenzwert des Verzweigungsindex sein wird. Es sei z. B. an den Grenzprozess erinnert, durch welchen die Exponentialfunktion als Grenze einer Potenz gewonnen wird und wo die zwei Ausnahmewerte (0 und ∞) vom Defekt 1 genau in der soeben beschriebenen Weise entstehen.

5. Nach dem oben Gesagten kann man die Hauptsätze der neueren Theorie der meromorphen Funktionen als eine Übertragung von zwei Fundamentaleigenschaften der rationalen Funktionen auf transzendente auffassen.

Die erste Eigenschaft besteht darin, dass eine rationale Funktion alle Werte gleich oft annimmt. Nach dem Obigen hat man sich zu denken, dass dies auch für transzendente Funktionen der Fall ist: ein defekter Wert wird im unendlich fernen Punkt »unendlich oft» angenommen und zwar so stark, dass der im Endlichen vorhandene Defekt kompensiert wird. Hierdurch entsteht in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes eine relativ starke Konvergenz der betrachteten Funktion gegen den defekten Wert. Als den genauen Ausdruck der in Frage stehenden Symmetrieeigenschaft der meromorphen Funktionen kann man den s. g. *ersten Hauptsatz* betrachten, nach welchem jeder solchen Funktion eine *charakteristische Funktion,* $T(r)$, zugeordnet werden kann, die den für verschiedene Werte a invarianten Betrag der Summe

$$N(r, a) + m(r, a)$$

angibt, wo das erste Glied die oben besprochene Anzahlsfunktion, das zweite Glied wiederum den Mittelwert

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi$$

bezeichnet[1], welcher als ein Mass für die oben erwähnte Konvergenz angesehen werden kann.[2]

Die zweite Eigenschaft ist von topologischer Natur. Als eine Fläche vom Geschlechte Null genügt die Riemannsche Fläche einer rationalen Funktion der Bedingung (1). Der *zweite Hauptsatz* der Theorie der meromorphen Funktionen, der als fast unmittelbare Folgerung die Beziehung (2) liefert, erscheint gemäss den obigen Erörterungen als eine Erweiterung jener Beziehung (1); sowohl die Riemannsche Formel wie jener Hauptsatz besagen, dass die totale relative Verzweigtheit der betrachteten Riemannschen Fläche nicht grösser als zwei sein kann. Während aber der Verzweigungscharakter einer Stelle a einer Fläche von endlicher Blattanzahl mittels des Verzweigungsindex μ allein angegeben werden kann, kommen bei den unendlich vielblättrigen Flächen die Defekte δ, als Indikatoren für die Verzweigungen unendlich hoher Ordnung hinzu.

6. Es liegt in der Natur der Sache, dass eine quantitative Beschreibung der Verzweigungsverhältnisse einer unendlich vielblättrigen Fläche nur durch eine geeignete Näherung mittels einer Folge von endlich vielblättrigen Flächen geschehen kann. Eine derartige Ausschöpfung der transzendenten Fläche kann aber in verschiedenen Weisen bewerkstelligt werden. Tatsächlich ist im Vorigen von zwei völlig verschiedenartigen Annäherungen die Rede gewesen. Die höchst einfachen und elementaren Betrachtungen der Nr. 2 beruhen auf Approximation

---

[1] Für $a = \infty$ hat man hier $f - a$ durch $\frac{1}{f}$ zu ersetzen.

[2] Es sei bemerkt, dass die Grössen $T(r)$ und $N(r)$ von derselben Grössenordnung sind, indem $T : N \to 1$ für $r \to \infty$.

durch eine geschlossene (rationale) Fläche, während dem ziemlich tiefliegenden zweiten Hauptsatz, der als das Hauptergebnis der neueren Theorie anzusehen ist, der Grenzübergang $r \to \infty$ zu Grunde liegt, wodurch also die gegebene Riemannsche Fläche F als Grenze derjenigen endlich vielblättrigen Fläche F_r erscheint, auf welche der Kreis $|z| = r$ durch die gegebene Funktion abgebildet wird. Die formale Übereinstimmung der Ergebnisse dieser Betrachtungen scheint auf eine eigentümliche Stabilität im Aufbau der Riemannschen Fläche einer rationalen Funktion hinzuweisen.

7. In diesem Zusammenhang möchte ich noch auf gewisse offene Fragen der Wertverteilung aufmerksam machen, zu denen auch die vorhergehenden Betrachtungen in natürlicher Weise leiten. Oben wurde der Defekt $\delta(a)$ als Indikator für die unendlich hohe Verzweigtheit des Wertes a aufgefasst. Diese Betrachtungsweise legt die Vermutung nahe, dass einem Wert positiven Defekts eine *transzendente Singularität* der Umkehrfunktion entspricht, oder, was bekanntlich damit äquivalent ist, dass ein solcher Wert a asymptotischer Wert der gegebenen meromorphen Funktion ist. Nur für die aller einfachsten Arten der defekten Werte ist diese Vermutung streng bewiesen.[1]

Die obigen Bemerkungen lassen ferner vermuten, dass die Beziehung (2) für besonders regelmässig aufgebaute meromorphe Funktionen in eine *Gleichheit* übergeht. Man kennt auch zahlreiche Funktionen dieser Art; zu diesen gehören u. a. sämtliche einfach- und doppelperiodischen Funktionen. Andererseits ist es an der Hand einzelner Beispiele leicht zu erkennen, wie eine Erniedrigung des Wertes der links in (3) stehenden Indexsumme zu Stande kommen kann. Ein eingehendes Studium derjenigen Funktionsklassen, für welche »die totale Verzweigtheit» ihren maximalen Wert 2 erreicht, scheint uns für eine weitere Entwicklung der Theorie von besonderer Bedeutung zu sein.[2]

Wir erinnern schliesslich daran, dass die Definitionen der Verzweigungsindizes und der Defekte nicht direkt auf die Anzahlsfunktionen $n(r, a)$, sondern auf die aus diesen abgeleiteten Mittelwerte N fussen. Es dürfte von gewissem

---

[1] Vgl. insb. E. F. COLLINGWOOD: *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières d'ordre fini* (Comptes rendus, t. 179, p. 1125, 1924).

[2] Zur weiteren Orientierung über diese Fragen verweisen wir, ausser auf das in Nr. 3 zitierte Werk, auf folgende neuerschienene Arbeiten: A. SPEISER: *Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen* (Commentarii math. Helvetici, vol. 1, H. 4, 1929, S. 289—312); E. ULLRICH: *Über die Ableitung einer meromorphen Funktion* (Ber. der preuss. Akademie der Wiss., B. 27, 1929).

Interesse sein zu entscheiden, ob die Hauptsätze gültig bleiben, wenn man in jenen Definitionen N durch n ersetzt. Hierdurch würden sämtliche Hilfsgrössen eine äusserst anschauliche Bedeutung in Bezug auf die Riemannsche Fläche F_r erhalten; insbesondere würde $n(r) = \max n(r, a)$ einfach die Blattanzahl dieses Flächenstückes angeben.

§ 2. Konstruktion gewisser spezieller meromorpher Funktionen.

8. Die bisher bekannten Herleitungen der Hauptresultate der Theorie der meromorphen Funktionen sind mit Rechnungen behaftet, welche ziemlich lang und undurchsichtig sind. Bei dieser Sachlage dürften die obigen heuristischen Bemerkungen über den anschaulichen Inhalt und Sinn jener Resultate von gewissem Interesse sein, nicht nur als Orientierungsmittel für den mit dieser Theorie weniger Vertrauten, sondern auch, weil sie Fingerzeige zur Stellung neuer Probleme zu geben scheinen.

In dem anfangs zitierten Vortrag haben wir darauf hingewiesen, dass diese Betrachtungen ein Konstruktionsprinzip nahelegen, durch welches spezielle, vom Standpunkte der Wertverteilung besonders interessante Beispiele tatsächlich konstruiert werden können. Im Folgenden werden wir dies an der Hand eines besonderen Beispiels, das wir an zitierter Stelle schon kurz berührt haben, etwas näher erläutern.

9. Stellen wir uns die Aufgabe, eine meromorphe Funktion $f(z)$ zu konstruieren, die $q \geqq 2$ vorgegebene Werte $a_1, a_2, \ldots, a_q$ als Ausnahmewerte vom gleichen Defekt $\frac{2}{q}$ hat; der totale Defekt wird also sein Maximum 2 erreichen. Für eine solche Funktion verschwindet gemäss (3) der Gesamtindex $\Sigma\mu$ der algebraischen Verzweigtheit, und es ist deshalb natürlich von vornherein zu fordern, dass die gesuchte Funktion überhaupt keine algebraisch verzweigten Werte haben soll. Nach den Bemerkungen des ersten Paragraphen würde also hiernach die entsprechende Riemannsche Fläche F folgende charakteristische Eigenschaft besitzen: Über jeder der Stellen a liegt genau ein logarithmischer Verzweigungspunkt und zwar haben diese Verzweigungen dieselbe relative Stärke; an allen übrigen Stellen ist die Fläche unverzweigt.

Nach Obigem liegt es nun nahe, die gesuchte Fläche F als Grenze einer geschlossenen n-blättrigen Fläche F_n von folgender Art zu bestimmen. Die

Fläche F_n ist vom Geschlechte Null und hat über jedem der Punkte a einen Verzweigungspunkt von derselben Ordnung $2h$; sonst soll sie unverzweigt sein. Nach der Riemannschen Formel ist also

$$n = qh + 1.$$

Es wird nun zu dieser Fläche eine einwertige, algebraische Funktion konstruiert; sie ist bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt. Die Umkehrfunktion $f_h(z)$ ist rational und von n:ter Ordnung. Die Wurzeln der Gleichung $f_h = a$ sind einfach, ausser für die Werte $a = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$, für welche nur $(q-2)h$ einfache Wurzeln vorhanden sind, während die fehlenden $n-(q-2)h = 2h+1$ Wurzeln in einem mehrfachen Punkt $z = z_\nu$ zusammenfallen. Es sei schon hier auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht, durch welche der Fall $q = 2$ sich von dem allgemeinen $q > 2$ unterscheidet und die vom Standpunkte des Picardschen Theorems bedeutungsvoll ist: Während für $q = 2$ die Verzweigungspunkte alle n Blätter der Fläche im Zyklus umfassen, liegen für $q > 2$ über jeder der Stellen a, ausser dem Verzweigungspunkt der Ordnung $2h$, eine Anzahl $(q-2)h$ schlichter Blätter.

Lässt man nun h über alle Grenzen wachsen, so erwartet man, dass bei geeigneter Normierung der oben genannten linearen Transformation die mehrfachen Punkte ins Unendliche rücken werden, während die rationale Funktion f gegen eine transzendente Funktion $f(z)$ konvergiert, welche den unendlich fernen Punkt als einzige singuläre Stelle haben wird und somit meromorph ist. Die Werte a aber, welche für die rationale Näherungsfunktion f_h verzweigt waren mit dem Verzweigungsindex

$$\frac{2h}{n} = \frac{2}{q + \frac{1}{h}},$$

werden hierbei voraussichtlich in defekte Werte vom Defekt $\frac{2}{q}$ übergehen.

10. In speziellen Fällen lässt sich dieser Grenzprozess rechnerisch vollkommen beherrschen. Besonders einfach stellt sich die Aufgabe, wenn man

$$a_\nu = \varepsilon^\nu, \quad \text{wo} \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{q}}, \qquad (\nu = 1, \ldots, q)$$

wählt. Da das Ergebnis des Grenzüberganges im Falle $q = 2$ evident ist, wollen wir im Folgenden $q > 2$ annehmen.

Aus Symmetriegründen nehmen wir zunächst an, es existiere eine rationale Funktion f_h von der in der vorigen Nummer angegebenen Art, welche ausserdem folgender speziellen Bedingung genügt

$$f_h(\varepsilon^\nu) = \varepsilon^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, q).$$

Es wurde oben darauf hingewiesen, dass die rationale Funktion f_h schon durch die Bedingungen von Nr. 9 bis auf eine lineare Transformation bestimmt ist. Durch die obige komplementäre Bedingung wird sie tatsächlich eindeutig festgelegt. Denn angenommen, es existiere eine zweite Funktion f_h^* von derselben Art, so ist $f_h = f_h^*$ in den Punkten z_ν $(\nu = 1, \ldots, q > 2)$, und die gesamte Anzahl der Nullstellen der rationalen Funktion $f_h - f_h^*$, deren Ordnung höchstens gleich $2n$ ist, ist wenigstens gleich $q(2h+1) = 2n + (q-2) > 2n$; die Differenz $f_h - f_h^*$ muss also identisch verschwinden, w. z. b. w.

Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$f_h(z) \equiv \frac{f_h(\varepsilon z)}{\varepsilon} \equiv \overline{f_h(\bar{z})} \equiv \frac{1}{f_h\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

In der Tat genügen alle diese Funktionen den aufgestellten Forderungen und sind somit unter einander identisch. Aus diesen Funktionalgleichungen lassen sich folgende Eigenschaften der Funktion f_h ohne weiteres ablesen.

Der Quotient $\frac{f_h}{z}$ bleibt invariant, wenn z durch εz ersetzt wird; er ist also eine rationale Funktion von z^q und zwar von h:ter Ordnung. Für $z = 0$ nimmt er einen endlichen Wert an, denn sonst würde f_h hier eine mehrfache Stelle haben, was unmöglich ist, weil die einzigen mehrfachen Stellen von f_h in den Punkten $z = \varepsilon^\nu$ liegen. Es ist also $f_h(0) = 0$, $f_h(\infty) = \infty$ und

$$f_h(z) = \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} = z\,\frac{a_h^h z^{hq} + a_{h-1}^h z^{(h-1)q} + \cdots + a_0^h}{b_h^h z^{hq} + b_{h-1}^h z^{(h-1)q} + \cdots + b_0^h}, \tag{4}$$

wo P_h und Q_h teilerfremd sind.

Die Funktion f_h ist reell für reelle Werte von z; also sind die Koeffizienten der Polynome P_h und Q_h ebenfalls reell. Aus der Beziehung $f_h(z) f_h\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ folgt ferner dass

$$a^h_\mu = b^h_{h-\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, h). \tag{5}$$

Speziell ist also $|f| = 1$ für $|z| = 1$.

Die Differenz $P_h - \varepsilon^\nu Q_h$ hat im Punkte $z = \varepsilon^\nu$ eine $(2h+1)$-fache Nullstelle; ihre zweite Ableitung verschwindet also hier von der Ordnung $2h-1$. Weil ferner die Polynome P_h'' und Q_h'' den gemeinsamen Teiler z^{q-2} haben, so folgt dass der Quotient

$$\frac{P^*_{h-1}}{Q^*_{h-1}},$$

wo der Zähler und Nenner durch Division mit z^{q-2} aus P_h'' bzw. Q_h'' erhalten und somit Polynome vom Grade $(h-1)q+1$ bzw. $(h-1)q$ sind, eine rationale Funktion der Ordnung $n-q=(h-1)q+1$ ist, welche für $z=\varepsilon^\nu$ den Wert ε^ν mit der Multiplizität $2h-1$ annimmt. Sie muss folglich mit der rationalen Funktion f_{h-1} übereinstimmen, und man schliesst somit, dass die Polynome P und Q, bei geeigneter Wahl der in ihnen enthaltenen willkürlichen Proportionalitätsfaktor, den Rekursionsformeln

$$\begin{cases} P_h'' = z^{q-2} P_{h-1} \\ Q_h'' = z^{q-2} Q_{h-1} \end{cases} \tag{6}$$

genügen.

Aus diesen Beziehungen werden wir nun die Koeffizienten a^h_ν und b^h_ν der Polynome P_h und Q_h bestimmen. Zunächst ist offenbar

$$f_0(z) = z, \text{ also } P_0 = z \text{ und } Q_0 = 1,$$

woraus $a^0_0 = b^0_0 = 1$. Führt man dann die Ausdrücke

$$P_h = z\,(a^h_0 + \cdots + a^h_h z^{hq}), \quad Q_h = b^h_0 + \cdots + b^h_h z^{hq}$$

in (6) ein, so wird

$$\nu q\,(\nu q + 1)\, a^h_\nu = a^{h-1}_{\nu-1}, \quad \nu q\,(\nu q - 1)\, b^h_\nu = b^{h-1}_{\nu-1}$$

für $\nu = 1, \ldots, h$. Diese Formeln bestimmen die Koeffizienten der Polynome P_h und Q_h mittels den Koeffizienten von P_{h-1} und Q_{h-1}, bis auf die ersten a^h_0 und b^h_0, welche unter Beachtung der notwendigen Bedingung (5) durch die Vorschrift

$$a^h_0 = b^h_h, \quad b^h_0 = a^h_h.$$

festgelegt werden. Es wird demnach

$$a_\nu^h = \frac{a_0^{h-\nu}}{q^\nu \nu!\,(1+q)\cdots(1+\nu q)}, \quad b_\nu^h = \frac{b_0^{h-\nu}}{q^\nu \nu!\,(q-1)\cdots(\nu q-1)},$$

und also, da $a_0^0 = b_0^0 = 1$,

$$(7) \qquad \begin{cases} a_0^h = b_h^h = \dfrac{1}{q^h h!\,(q-1)\cdots(\nu q-1)}, \\[2ex] b_0^h = a_h^h = \dfrac{1}{q^h h!\,(q+1)\cdots(\nu q+1)}. \end{cases}$$

Schliesslich wird somit für $\nu = 1, \ldots, h$

$$(7)' \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_\nu^h} = q^h \nu!\,(h-\nu)!\,(q+1)\cdots(\nu q+1)(q-1)\cdots((h-\nu)q-1), \\[2ex] \dfrac{1}{b_\nu^h} = q^h \nu!\,(h-\nu)!\,(q-1)\cdots(\nu q-1)(q+1)\cdots((h-\nu)q+1). \end{cases}$$

12. Es erübrigt noch zu zeigen, dass die durch (4), (7) und (7)' bestimmte rationale Funktion $f_h(z)$ tatsächlich den geforderten Bedingungen genügt. Man bestätigt sofort, dass die Bedingungen (5) erfüllt sind, und es ist also

$$P_h(\varepsilon^\nu) = \varepsilon^\nu, \quad Q_h(\varepsilon^\nu) = 1 \text{ und somit } f_h(\varepsilon^\nu) = \varepsilon^\nu.$$

Um weiter zu bewiesen, dass die Stellen $z = \varepsilon^\nu$ genau $(2h+1)$-fach sind, bilde man die Ableitung

$$f_h' = \frac{P_h' Q_h - P_h Q_h'}{Q_h^2}.$$

Wir werden zeigen, dass der Zähler gleich

$$(8) \qquad P_h' Q_h - P_h Q_h' = a_0^h b_0^h (z^q - 1)^{2h}$$

ist. Für $h = 0$ ist dies offenbar richtig. Wir nehmen nun an, dass diese Beziehung für den Index $h-1$ gilt, und werden hieraus ihre Richtigkeit für den Indexwert h ableiten.

Da $Q_{h-1}(0) \neq 0$ ist, so folgt aus der Voraussetzung, dass f'_{h-1} eine $(2h-1)$-fache Nullstelle im Punkte $z = 1$ hat; es ist hiernach

$$P_{h-1} - Q_{h-1} = (z-1)^{2h-1} H,$$

wo H ein Polynom ist. Multipliziert man mit z^{q-2}, so ergibt sich nach zweimaliger Integration

$$P_h - Q_h = (z-1)^{2h+1} K + az + b, \tag{9}$$

wo K ein Polynom und a und b Konstanten sind. Setzt man für einen Augenblick

$$R_h = P_h - az, \quad S_h = Q_h - b,$$

so wird nach (9) die Determinante $R_h' S_h - R_h S_h'$ durch $(z-1)^{2h}$ divisibel. Da sie ferner eine rationale Funktion von z^q ist, enthält sie jede Potenz $(z-\varepsilon^\nu)^{2h}$ als Faktor und ist somit gleich

$$R_h' S_h - R_h S_h' = \alpha (z^q - 1)^{2h},$$

wo α eine Konstante ist. Die Vergleichung der Koeffizienten ergibt nun

$$\alpha = a_h^h b_h^h = a_0^h b_0^h \text{ und } a = b = 0;$$

es ist somit $R_h = P_h$, $S_h = Q_h$ und

$$P' Q - P Q' = a_0^h b_0^h (z^q - 1)^{2h},$$

womit diese Beziehung als allgemein richtig erkannt worden ist.

Weil nun $Q_h \neq 0$ für $z = \varepsilon^\nu$ $(\nu = 0, \ldots, q-1)$, so folgt dass die Ableitung f_h' in jedem dieser Punkte eine $2h$-fache Nullstelle hat. Die Funktion f_h erfüllt also tatsächlich die geforderten Bedingungen: sie hat die Punkte ε^ν als einzige mehrfache, und zwar als $(2h+1)$-fache Stellen.

13. Wir werden jetzt den Grenzübergang $h \to \infty$ vornehmen. Mittels der Stirlingschen Formel erhält man für die Koeffizienten die Ausdrücke

$$a_\nu^h = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right) : \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)}{q^h h! (q+1) \cdots (hq+1)} \cdot \frac{q^\nu h^{\frac{2}{q}(\nu q + 1)}}{\nu! (q+1) \cdots (\nu q + 1)} (1 + \eta),$$

$$b_\nu^h = \frac{1}{q^h h! (q+1) \cdots (hq+1)} \cdot \frac{q^\nu h^{\frac{2}{q}\nu q} (1 + \eta)}{\nu! (q-1) \cdots (\nu q - 1)},$$

wo $\eta \to 0$ für $h \to \infty$. Man setze nun

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)} q^h h!\,(q+1)\cdots(hq+1)\,P_h\left(h^{-\frac{2}{q}}z\right) = A_h(z) = \sum_0^h \alpha_\nu^h z^{\nu q},$$

$$q^h h!\,(q+1)\cdots(hq+1)\,Q_h\left(h^{-\frac{2}{q}}z\right) = B_h(z) = \sum_0^h \beta_\nu^h z^{\nu q},$$

wo also

$$\alpha_\nu^h = \frac{q^\nu(1+\eta)}{\nu!\,(q+1)\cdots(\nu q+1)}, \quad \beta_\nu^h = \frac{q^\nu(1+\eta)}{\nu!\,(q-1)\cdots(\nu q-1)}.$$

Die rationale Funktion

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)} f_h(z) = \frac{A_h}{B_h}$$

nimmt in den Punkten $z_\nu = h^{\frac{2}{q}}\varepsilon^\nu$ $(\nu = 0, \ldots, q-1)$ die Werte

(10) $$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)}\varepsilon^\nu$$

an mit der Multiplizität $2h+1$ an.

Lässt man nunmehr h über alle Grenzen wachsen, so rücken die mehrfachen Punkte z_ν tatsächlich ins Unendliche. Die obige rationale Funktion aber strebt hierbei gegen den Quotienten

(11) $$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

wo A und B folgende ganze Funktionen bezeichnen:

(12) $$A = z\left(1 + \sum_1^\infty \frac{q^\nu z^{\nu q}}{\nu!\,(q+1)\cdots(\nu q+1)}\right), \quad B = 1 + \sum_1^\infty \frac{q^\nu z^{\nu q}}{\nu!\,(q-1)\cdots(\nu q-1)}.$$

13. Wenn es auch auf Grund des Vorhergehenden einleuchtend ist, dass die konstruierte meromorphe Grenzfunktion f die erwünschten Eigenschaften

hat, d. h. dass sie die Werte (10) als Ausnahmewerte vom Defekt $\frac{2}{q}$ hat, wollen wir zum Schluss kurz angeben, wie dies auch streng nachgewiesen werden kann.

Hierzu bemerken wir zunächst, dass die ganzen Funktionen A und B offenbar der Differentialgleichung

$$y'' = q^2 z^{q-2} y \tag{13}$$

genügen. Diese gehört einem Typus an, über welche in der Literatur eingehende Untersuchungen vorliegen. Dass der Quotient von zwei Fundamentallösungen der allgemeineren Differentialgleichung

$$y'' = G(z) y,$$

wo G ein Polynom von z ist, eine gewisse Anzahl defekter Werte aufweist, ist zuerst von Herrn HILLE[1] bemerkt worden. Die von ihm angewandten Methoden liefern genaue Auskünfte über die Verteilung der Stellen z, wo jener Quotient einzelne Werte a annimmt, erlauben dagegen nicht die defekten Werte selbst zu bestimmen. Im vorliegenden, besonders einfachen Fall (13) kann man aber in wohlbekannter Weise die Laplacesche Transformation zur Herleitung von asymptotischen Entwicklungen der Lösungen anwenden, aus denen dann die Ausnahmewerte und die entsprechenden Defekte ohne weiteres berechnet werden können.

14. Zu diesem Zweck transformieren wir zunächst die Gleichung (13) durch die Substitution

$$x = 4 z^{\frac{q}{2}};$$

es wird dann

$$4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 8p \frac{dy}{dx} - xy = 0, \tag{14}$$

wo $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \left(0 < p < \frac{1}{2}\right)$.

---

[1] *Zero point problems for linear differential equations of second order* (Matematisk Tidskrift, B, Nr. 2, 1927). — Dasselbe Thema ist eingehender von F. Nevanlinna in einem auf dem 7. skand. Mathematikerkongress gehaltenen Vortrag behandelt worden (Oslo 1929).

Sucht man nun dieser Gleichung durch einen Ausdruck der Form

$$y = \int e^{tx} u(t)\,dt$$

zu genügen, so findet man bei geeigneter Wahl des Integrationsweges (vgl. z. B. Picard, Traité d'Analyse, t. III, Chap. XIV) für $u(t)$ die Bedingung

$$4\frac{d}{dt}(t^2 u) - 8ptu - \frac{du}{dt} = 0,$$

woraus

$$u(t) = C\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{p-1} \qquad (C = \text{const.}).$$

Man bestätigt nun leicht, dass z. B. die Integrale

$$y_1 = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} e^{tx}\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{p-1} dt = e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{p-1}(t+1)^{p-1}\,dt,$$

$$y_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{tx}\left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} dt = e^{\frac{x}{2}} \int_0^{1} e^{-tx} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

für jeden Wert x von positivem Realteil zwei Fundamentallösungen der Gleichung (14) darstellen.

Aus den obigen Ausdrücken lässt sich unmittelbar eine vollständige asymptotische Entwicklung der Funktionen y_1 und y_2 herleiten. Für unsere Zwecke genügt es indessen zu bemerken, dass

(15) $$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} x^{-p} \Gamma(p)(1+\eta), \quad y_2 = e^{\frac{x}{2}} x^{-p} \Gamma(p)(1+\eta),$$

wo η im Winkelraume

(16) $$|\arg x| < \frac{\pi}{2} - \delta \qquad (\delta > 0)$$

für $|x| \to \infty$ gleichmässig gegen Null strebt.

Für kleine Werte von x hat man wiederum

$$y_1 = c_0 + c_1 x^{1-2p} + \cdots, \quad y_2 = d_0 + d_1 x + \cdots,$$

wo

$$c_0 = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-2p)}{\Gamma(1-p)}, \quad c_1 = \Gamma(2p-1) \text{ und } d_0 = \frac{(\Gamma(p))^2}{\Gamma(2p)}. \tag{17}$$

Nach Übergang zu der ursprünglichen Veränderlichen z ergeben sich nun für die Funktionen A und B die Ausdrücke

$$\begin{cases} A = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \\ B = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, \end{cases} \tag{18}$$

wo die konstanten Koeffizienten α und β durch die Anfangsbedingungen (vgl. (12))

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = 1, \quad B(0) = 1, \quad B'(0) = 0$$

zu bestimmen sind. Es wird

$$\alpha_1 = \frac{1}{16^{1/q} c_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{q}\right)}{16^{1/q}\Gamma(1/2 + 1/q)\Gamma(1/2 - 1/q)}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{q}\right)}{(\Gamma(1/2 - 1/q))^2}.$$

Unter Beachtung der Entwicklungen (15) folgt hieraus nach einigen Reduktionen, dass

$$f(z) = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_1 y_1}{\beta_2 y_2} = \frac{\Gamma(1 + 1/q)}{\Gamma(1 - 1/q)}\left(1 - 2\sin\frac{\pi}{q} \cdot e^{-4z^{q/2}}(1 + \eta)\right), \tag{19}$$

wo η wieder im Winkelraume (16) für $|z| \to \infty$ verschwindet.

15. Wegen der Relation $f(\varepsilon z) = \varepsilon f(z)$ schliesst man aus der asymptotischen Entwicklung (19), dass die betrachtete Funktion $f(z)$ im Winkelraume

$$\left|\arg z - \frac{2\pi\nu}{q}\right| < \frac{\pi}{q} - \delta \qquad (\nu = 1, \ldots, q) \tag{20}$$

für unbeschränkt wachsendes z gleichmässig gegen den Grenzwert

$$a_\nu = \varepsilon^\nu \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right)}$$

strebt. Um schliesslich zu beweisen, dass jeder dieser asymptotischen Werte den Defekt $\frac{2}{q}$ hat, soll die charakteristische Funktion $T(r,f)$ berechnet werden.

Hierzu bildet man zunächst den Mittelwert

$$m(r, a_\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a_\nu}\right| d\varphi$$

und findet gemäss der Beziehung (19), dass

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{m(r, a_\nu)}{r^{q/2}} \geqq \frac{8}{\pi q}, \tag{21}$$

wonach a fortiori

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{q/2}} \geqq \frac{8}{\pi q}. \tag{22}$$

Zur genauen Berechnung von[1] $T(r) = m(r,f) + N(r,f)$ beachte man nun, dass die Beiträge der Winkelräume (20) zu dem Mittelwert $m(r,f) \equiv m(r, \infty)$ beschränkt sind. Die kleinen Komplementärbogen der Gesamtlänge $2q\delta$ wiederum liefern hierzu einen Betrag, der, wie aus (19) ersichtlich, kleiner ist als

$$\frac{q\delta}{\pi} \log M_1(r) + m\left(r, \frac{1}{y_2}\right) + O(1),$$

wo M_1 den Maximalmodul der ganzen Funktion y_1 auf dem Kreis $|z| = r$ bezeichnet. Diese letzte Funktion ist aber nach den obigen Entwicklungen vom s. g. Normaltypus der Ordnung $r^{q/2}$, und da δ beliebig klein gewählt werden kann, so folgt unter Beachtung von (22), dass

$$m(r,f) < m\left(r, \frac{1}{y_2}\right) + \eta T(r),$$

wo $\eta \to 0$ für $r \to \infty$. Durch Anwendung des ersten Hauptsatzes auf die ganze Funktion y_2 ergibt sich aber weiter, dass

$$m\left(r, \frac{1}{y_2}\right) = m(r, y_2) - N\left(r, \frac{1}{y_2}\right) + O(1),$$

[1] Wir gebrauchen im folgenden die üblichen Bezeichnungen der Wertverteilungstheorie (vgl. das in Nr. 3 zitierte Werk).

und also, weil nach (19) $N\left(r, \frac{1}{y_2}\right) \geqq N(r, f)$,

$$T(r, f) \equiv m(r, f) + N(r, f) < m(r, y_2) + O(1).$$

Der letzte Mittelwert $m(r, y_2)$ ist aber gemäss (15) asymptotisch gleich

$$\frac{4r^{q/2}}{\pi}(1 + \eta),$$

und es ist somit wegen (21)

$$\delta(a_\nu) \equiv \varliminf_{r=\infty}\left(1 - \frac{N(r, a)}{T(r)}\right) = \varliminf_{r=\infty} \frac{m(r, a)}{T(r)} \geqq \frac{2}{q}.$$

Hieraus folgt schliesslich das erwünschte Ergebnis

$$\delta(a_\nu) = \frac{2}{q} \qquad (\nu = 1, \ldots, q),$$

denn sonst würde der totale Defekt grösser als zwei sein, was unmöglich ist.

16. Die obigen Resultate sind unter der Voraussetzung $q > 2$ hergeleitet. Man sieht aber sofort ein, dass die konstruierte Funktion (11) auch in dem einfachsten Falle $q = 2$ die geforderten Eigenschaften hat. In der Tat ist dann $A = -\frac{i}{2}\sin 2iz$, $B = \cos 2iz$ und also $f = -\frac{i}{2}\operatorname{tg} 2iz$; die kritischen Werte gehen hierbei über in $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, und haben als Picardsche Ausnahmewerte beide den Defekt 1.