

# ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLUNG DER AUTOMORPHEN FUNKTIONEN DURCH BEDINGT KONVERGENTE REIHEN UND PRODUKTE.

VON

P. J. MYRBERG

in HELSINGFORS.

## Einleitung.

1. Während die Frage nach der Existenz der uniformisierenden Transzendenten bei Riemannschen Flächen schon eingehend behandelt worden ist, ist die zweite fundamentale Aufgabe der Uniformisierungstheorie, das Problem der analytischen Darstellung der verschiedenen zur gegebenen Riemannschen Fläche gehörigen Funktionen als automorphe Funktionen der uniformisierenden Variablen fast unbeachtet geblieben. Und doch harren hier wichtige Probleme ihrer Lösung. Freilich hat man in den Poincaréschen Reihen<sup>1</sup> ein Mittel, für jede in der komplexen Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe automorphe Funktionen zu bilden. Die genannten Reihen haben jedoch den Nachteil, dass sie nicht direkt zu den gesuchten automorphen Funktionen führen, sondern erst nach Bildung von Quotienten derselben, wobei die Reihen selbst von der zu bestimmenden Funktion in ziemlich komplizierter Weise abhängen.

Dieser Übelstand kann allerdings vermieden werden, wenn bei der gegebenen Gruppe schon die Poincaréschen Reihen  $(-2)$ -ter Dimension absolut konvergieren, d. i. die Reihen

$$\sum R(S_\nu(z)) \frac{dS_\nu(z)}{dz}, \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> H. POINCARÉ, *Mémoire sur les fonctions fuchsienues* (Acta mathematica, Bd. I (1882)).

wo  $R$  rational ist und  $S_\nu$  die linearen Substitutionen

$$S_\nu(z) = \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

der gegebenen Gruppe durchläuft, weil man dann durch eine Integration aus denselben unmittelbar analytische Ausdrücke für die Abelschen Integrale und hiernach für die automorphen Funktionen selbst gewinnen kann.<sup>1</sup> Leider gehören die wegen der Anwendung in der Uniformisierung wichtigsten Fuchsschen Gruppen, nämlich diejenigen, für welche der Hauptkreis zugleich Grenzkreis ist, also u. a. die bekannte Modulgruppe, nicht zur genannten Kategorie.<sup>2</sup>

Es entsteht bei dieser Sachlage die Frage, ob man nicht im allgemeinen zur analytischen Darstellung automorpher Funktionen bedingt konvergente Reihen oder Produkte anwenden könnte.<sup>3</sup> Dass dies wenigstens in sehr allgemeinen Fällen wirklich möglich ist, soll im Folgenden gezeigt werden.

2. Indem wir uns der Kürze halber auf eine bestimmte Klasse von Fuchsschen Gruppen beschränken, nämlich auf diejenigen Gruppen vom Geschlecht Null, die ein Kreisbogenpolygon mit lauter verschwindenden Winkeln zum Fundamentalbereich haben, werden wir für jede automorphe Funktion derselben eine Reihendarstellung finden, welche eine Partialbruchreihe der einfachsten Art ist und z. B. im Falle von einfachen Polen

$$S_\nu(a) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

bis auf eine ganze lineare Transformation mit der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z - S_\nu(a)} \frac{dS_\nu(a)}{da} \quad (3)$$

identisch ist, die als Funktion von  $a$  eine Poincarésche Reihe  $(-2)$ -ter Dimension ist. Unsere Reihen haben ihr Analogon in der Theorie der elliptischen Funktionen in den Reihen der  $\wp$ -Funktion und verwandter Funktionen, noch besser aber in den entsprechenden Ausdrücken der trigonometrischen Funktionen.

<sup>1</sup> R. FRICKE und F. KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Bd. II (1912), S. 264—.

<sup>2</sup> P. J. MYRBERG, *Zur Theorie der Konvergenz der Poincaréschen Reihen*, II (Annales academiae scientiarum fennicae, tom. A, XI (1917), S. 22—).

<sup>3</sup> Vgl. F. KLEIN, *Zu den Verhandlungen betreffend automorphe Funktionen* (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 21, 6/7 Heft (1912)).

Der Hauptgedanke unserer Betrachtungen besteht darin, dass wir die gegebene Fuchssche Gruppe  $I'$  durch eine Untergruppe  $I$  derselben vom Index  $\infty$  ersetzen, deren Nebengruppe im vorliegenden Falle aus den Potenzen

$$T^m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

einer gewissen parabolischen erzeugenden Substitution besteht. Der Fundamentalbereich der so erhaltenen fuchsoiden Gruppe  $I'$  ist identisch mit der Summe derjenigen unendlich vielen Polygone, welche aus dem Fundamentalbereich von  $I$  durch die Substitutionen (2) erhalten werden. Beide Gruppen  $I'$  und  $I$  besitzen eine bis auf eine lineare Transformation bestimmte *Hauptfunktion*, d. i. eine automorphe Funktion, die in dem zugehörigen Fundamentalbereich keinen Wert mehr als einmal annimmt. Wenn wir die genannten Funktionen resp. mit  $f(z)$  und  $\varphi(z)$  bezeichnen, so wird ihre gegenseitige Abhängigkeit bei geeigneter Normierung durch die Gleichung

$$f(z) = e^{\varphi(z)}$$

dargestellt.

3. Die Herleitung der gesuchten bedingt konvergenten Reihen wollen wir auf zweierlei Weise ausführen.

Die erste, in den Kapiteln I und III gegebene Darstellung beruht wesentlich auf einem geometrischen, die Fuchsschen Gruppen betreffenden Satze, welcher uns schon in einem anderen Zusammenhang wichtige Dienste geleistet hat.<sup>1</sup> Mit Hilfe des genannten Satzes wird die Existenz von unendlich vielen, ausserhalb einander im Hauptkreise liegenden geschlossenen Linien

$$L_1, L_2, L_3, \dots$$

gezeigt derart, dass das Minimum von  $\varphi(z)$  auf  $L_\nu$  für  $\nu \rightarrow \infty$  unbegrenzt wächst. Durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel ergibt sich hieraus unmittelbar für die Funktion

$$\frac{\varphi'(a)}{\varphi(z) - \varphi(a)} = g(z, a) \quad (5)$$

und hiernach für die Funktion  $f(z)$  eine Reihe der Form (3). Die entsprechenden Reihen für beliebige andere automorphe Funktionen erhält man hiernach ohne weiteres, weil jede derselben eine rationale Funktion von  $f(z)$  ist.

---

<sup>1</sup> P. J. MYRBERG, *Ein Approximationssatz für die fuchsschen Gruppen* (Acta mathematica, Bd. 57 (1931), S. 402).

Indem man die beiden Seiten von (5) in bezug auf den Parameter  $a$  integriert, erhält man eine Produktdarstellung für jede automorphe Funktion mit gegebenen Polen und Nullstellen.

4. Die zweite, im Kap. IV gegebene Herleitung der Reihen (3) beruht darauf, dass man die fuchsoiden Gruppe  $\Gamma$  durch eine unendliche Folge von Untergruppen derselben

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots \quad (6)$$

approximiert, die alle Fuchssche Gruppen sind, welche noch auf gewissen Teilen des Hauptkreises eigentlich diskontinuierlich sind. Jede der Gruppen (6) besitzt wieder eine Hauptfunktion, welche jetzt durch eine absolut konvergente Reihe der Form (3) darstellbar ist. Wenn man nun von irgend einer unendlichen, gegen Null konvergierenden Reihe positiver Grössen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$$

ausgeht und allgemein die Hauptfunktion  $g_h(z, a)$  von  $\Gamma_h$  durch die aus ihrer Reihe (3) erhaltene Summe

$$\sum_{v=0}^{\lambda_h} \frac{1}{z - S_v(a)} \frac{dS_v(a)}{da}$$

mit der Genauigkeit  $\varepsilon_h$  approximiert, ergibt sich aus

$$\lim_{h \rightarrow \infty} g_h(z, a) = g(z, a)$$

für die Funktion (5) wieder die gesuchte Reihe (3).

Das bekannteste Beispiel von den hier betrachteten Gruppen bietet diejenige Gruppe, zu welcher man gelangt, wenn man den Modul  $\lambda$  des in der Legendreschen Normalform

$$\int \frac{dx}{V(1-x^2)(1-\lambda x^2)}$$

gegebenen elliptischen Integrals als Funktion des Periodenquotienten betrachtet. Bei dieser Gruppe, die eine Untergruppe der bekannten Modulgruppe ist, kann man bei der Darstellung der Reihenentwicklungen von den gewöhnlichen Kettenbrüchen Gebrauch machen.

Die von uns angewandte Methode führt noch zu einer anderen, von der oben besprochenen verschiedenen Darstellung der automorphen Funktionen, nämlich als Quotienten von zwei Funktionen, von denen die im Nenner stehende im allgemeinen von der zu bildenden automorphen Funktion unabhängig, nämlich gleich der Funktion  $g(z, a)$  ist. Unsere Methode ist in sehr allgemeinen Fällen anwendbar, indem man in dieser Weise u. a. jede algebraische Riemannsche Fläche uniformisieren kann.

I.

1. §. Die Gruppe  $\Gamma$ .

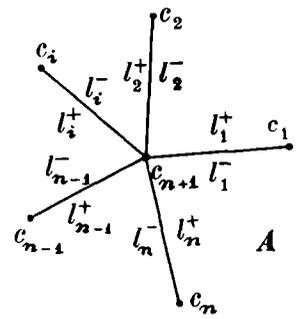
5. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet die in den endlich vielen Punkten

$$c_1, c_2, \dots, c_{n+1} \quad (n \geq 2) \quad (1)$$

markierte  $x$ -Ebene, deren wir drei, z. B. die letzten vermittle einer linearen Transformation in die spezielle Lage

$$c_{n-1} = 1, \quad c_n = 0, \quad c_{n+1} = \infty$$

überführen (Fig. 1). Indem wir einen der Punkte,  $c_{n+1}$ , mit jedem anderen  $c_i$  durch die Linien  $l_i$  verbinden, die keine von  $c_{n+1}$  verschiedenen Schnittpunkte besitzen, erhalten wir ein Schnittsystem, welches die  $x$ -Ebene in einen einfach zusammenhängenden Bereich  $A$  verwandelt. Die Begrenzung von  $A$  besteht aus der Kurve



$x$ -Ebene  
Fig. 1.

$$l_1^- l_1^+ l_2^- l_2^+ \dots l_n^- l_n^+, \quad (2)$$

wo allgemein mit  $l_i^-$  und  $l_i^+$  die von  $c_{n+1}$  aus gerechnet rechte bzw. linke Ufer des Schnittes  $l_i$  bezeichnet.

Wir denken uns jetzt unendlich viele Exemplare der Bereiche  $A$  vorhanden und mit einander paarweise längs den Schnitten  $l_i$  derart zusammengeheftet, dass eine unendlichvielblättrige, über die  $x$ -Ebene verbreitete einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche  $U$  erhalten wird, die in den Punkten (1) Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung hat. Diese Fläche kann bekanntlich konform auf das Innere des Einheitskreises

$$|z| = 1 \quad H$$

abgebildet werden, wenn die Anzahl der Punkte (1), wie vorausgesetzt,  $\geq 3$  ist. Die konforme Abbildung wird durch eine linearpolymorphe Funktion

$$z = z(x)$$

geleistet, d. i. eine unendlichvieldeutige Funktion von  $x$ , deren Zweige von einander durch lineare Transformationen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (3)$$

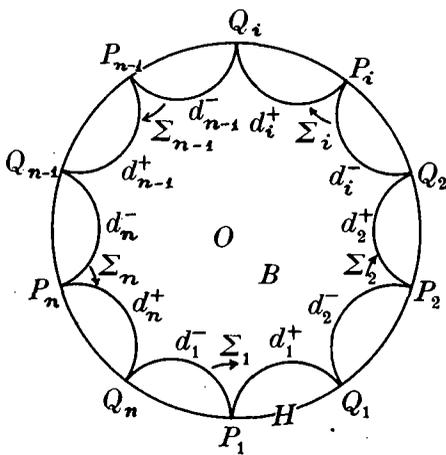
abhängen, welche das Innere des Hauptkreises  $H$  in sich selbst überführen. Jedes Blatt von  $U$  wird dabei auf ein krummliniges Polygon abgebildet, wobei man bekanntlich die Schnitte  $l_i$  stets so wählen kann, dass die Seiten der Polygone zum Hauptkreis  $H$  orthogonale Kreisbogen werden, die einander in den auf  $H$  liegenden Ecken der Polygone berühren. Die Polygone, welche aus einander vermittlems der Substitutionen (3) erhalten werden, bedecken einfach und lückenlos das Innere von  $H$ , wobei jeder Punkt von  $H$  eine Häufungsstelle derselben ist. Die betreffenden Substitutionen bilden eine Fuchssche Gruppe  $\Gamma$ ; für welche der Hauptkreis zugleich Grenzkreis ist.

6. Wir wählen nun ein bestimmtes Polygon, z. B. dasjenige  $B$ , welches den Nullpunkt enthält, zum Fundamentalbereich der Gruppe (Fig. 2). Die Begrenzung von  $B$  besteht aus den  $2n$  Seiten

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, \dots, d_n^-, d_n^+,$$

die in der obigen Reihenfolge den beiden Ufern der Schnitte  $l_i$  entsprechen. Dabei entspricht allgemein dem Punkt  $c_i$  der gemeinsame Eckpunkt  $P_i$  der Seiten  $d_i^-$  und  $d_i^+$ , während dem Punkt  $c_{n+1}$  die übrigen  $n$  Eckpunkte  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  von  $B$  zugeordnet sind.

Dem positiven Umkreis um den Punkt  $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) entspricht eine parabolische Substitution  $\Sigma_i$ , welche  $d_i^-$  auf  $d_i^+$  abbildet



z-Ebene  
Fig. 2.

und in  $P_i$  ihren Fixpunkt hat. Dabei ist allgemein

$$\Sigma'_i = \Sigma_{i+1} \Sigma_{i+2} \dots \Sigma_n \Sigma_1 \dots \Sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)'$$

eine parabolische Substitution mit dem Fixpunkt  $Q_i$ .

Die  $2n$  Substitutionen

$$\begin{aligned} & \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n; \\ \Sigma_{n+1} = \Sigma_1^{-1}, \Sigma_{n+2} = \Sigma_2^{-1}, \dots, \Sigma_{2n} = \Sigma_n^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

bilden ein System von Erzeugenden unserer Gruppe  $\Gamma$ .

In der Funktion

$$x = f(z) \quad (5)$$

besitzt  $\Gamma$  eine automorphe Funktion, die jeden von (1) verschiedenen Wert in  $B$  genau einmal annimmt. Die Gruppe  $\Gamma$  hat das Geschlecht Null und jede automorphe Funktion derselben ist eine eindeutige Funktion von  $f(z)$  und umgekehrt.

Zwischen den Substitutionen von  $\Gamma$  herrschen keine anderen Relationen, ausser denjenigen, die sich unmittelbar auf die Identitäten

$$SS^{-1} \equiv 1$$

reduzieren. Hieraus folgt, dass jede Substitution von  $\Gamma$  eindeutig in der Form<sup>1</sup>

$$S = \Sigma_{v_1} \Sigma_{v_2} \dots \Sigma_{v_m} \quad (6)$$

als Produkt der Erzeugenden darstellbar ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass allgemein

$$\Sigma_{v_{i+1}} \neq \Sigma_{v_i}^{-1}.$$

Wir nennen (6) nach der Anzahl ihrer Primfaktoren eine *Substitution m.ter Stufe*. Die Bezeichnung (6) soll zugleich für das aus  $B$  durch die Substitution (6) erhaltene Polygon, ferner für den äusseren Randkreis dieses Polygons sowie für denjenigen Bogen ( $< \pi$ ) des Hauptkreises angewandt werden, dessen Endpunkte zum genannten Randkreis gehören. Das fragliche Polygon oder Kreis oder Bogen soll dabei ein *Polygon*, bzw. *Kreis*, bzw. *Bogen m.ter Stufe* genannt werden.

Das Polygon (6) hat  $2n - 1$  innere Randkreise, die resp. den Substitutionen ( $m + 1$ )-ter Stufe

<sup>1</sup> Wir bezeichnen allgemein mit  $ST$  diejenige Substitution, die erhalten wird, wenn man zuerst  $S$  und dann  $T$  ausführt.

$$\Sigma_i S \quad (i = 1, 2, \dots, 2n),$$

wo  $\Sigma_i \neq \Sigma_{v_1}^{-1}$ , entsprechen. Wenn man das Fundamentalpolygon  $B$  mit dem Polygon (6) durch eine einfache Linie, z. B. radial verbindet, begegnet man der Reihe nach den Polygonen

$$\Sigma_{v_m}, \Sigma_{v_{m-1}}, \Sigma_{v_m}, \dots, \Sigma_{v_2}, \Sigma_{v_3}, \dots, \Sigma_{v_m}, \quad (7)$$

die resp. von der Stufe 1, 2, 3, ...,  $m-1$  sind.

## 2. §. Ein geometrischer Hilfssatz.

7. Wir gehen jetzt zum Beweis des folgenden Satzes über, welcher die geometrische Grundlage unserer funktionentheoretischen Betrachtungen bildet.

*Sind  $\mathcal{A}_{q(m+1)}$  und  $\mathcal{A}_{qm}$  die Längen zweier beliebigen Bogen  $q(m+1)$ :ter bzw.  $qm$ :ter Stufe, von denen der erste ein Teilbogen des letzteren ist, so ist*

$$\mathcal{A}_{q(m+1)} : \mathcal{A}_{qm} > \frac{\varrho_q}{m}, \quad (8)$$

wo  $\varrho_q$  die von  $m$  unabhängige durch  $q$  bestimmte Zahl  $\varrho_q = \frac{\varrho r^q}{q^3}$  ist.

Hier sind  $\varrho$  und  $r$  sowie die im Folgenden mit  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$  bezeichneten Grössen durch die Gruppe  $\Gamma$  bestimmte endliche positive Konstanten.

Einen Beweis des vorstehenden Satzes haben wir schon in der S. 331 genannten Arbeit, doch ohne Angabe des Wertes der Grösse  $\varrho_q$  gegeben. Wir werden im Folgenden jenen Beweis in unwesentlich modifizierter Form wiedergeben.

Es seien (Fig. 3)

$$K_{q(m+1)}, K_{qm} \quad (9)$$

zwei beliebige Kreise des zu  $\Gamma$  gehörigen Netzes  $q(m+1)$ :ter bzw.  $qm$ :ter Stufe, von denen der erstgenannte innerhalb des letzteren liegt. Ist

$$\Sigma_{v_1}, \Sigma_{v_2}, \dots, \Sigma_{v_{qm}}$$

der Ausdruck von  $K_{qm}$ , so hat  $K_{q(m+1)}$  einen Ausdruck der Form

$$\Sigma_{\mu_1}, \Sigma_{\mu_2}, \dots, \Sigma_{\mu_q}, \Sigma_{v_1}, \Sigma_{v_2}, \dots, \Sigma_{v_{qm}}.$$

Man bestätigt unmittelbar, dass die Kreise (9) aus den Kreisen (q + 1):ter bzw. erster Stufe

$$K_{q+1} = \Sigma_{\mu_1} \Sigma_{\mu_2} \dots \Sigma_{\mu_q} \Sigma_{v_1}, \quad K_1 = \Sigma_{v_1}, \quad (10)$$

von denen der erste innerhalb des letzteren liegt, durch die Substitution (qm - 1):ter Stufe

$$S_{(qm-1)} = \Sigma_{v_2} \Sigma_{v_3} \dots \Sigma_{v_{qm}} \quad (11)$$

erhalten werden.

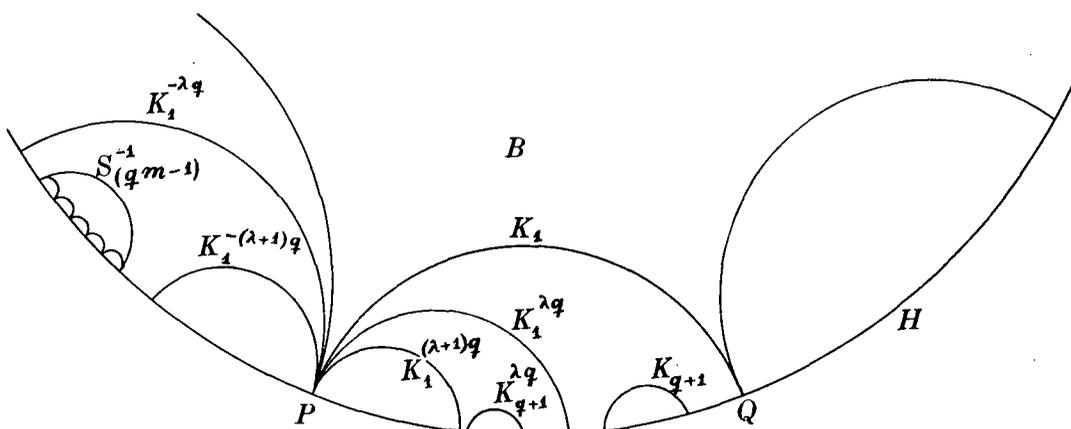


Fig. 3.

Es seien

$$P, Q \quad (12)$$

die beiden Schnittpunkte von  $K_1$  mit  $H$  und

$$\Sigma, \Sigma' \quad (13)$$

diejenigen parabolischen Substitutionen niedrigster Stufe, welche resp. die Punkte (12) als Fixpunkt haben und deren zugeordnete Polygone innerhalb des Kreises  $K_1$  liegen. Nach N: 6 sind die Substitutionen (13) resp. von der Stufe 1 und  $n$ . Das Polygon

$$S_{(qm-1)}^{-1} \quad (14)$$

der Stufe  $(qm - 1)$ , welches der inversen Substitution von (11) entspricht, liegt ausserhalb des Kreises  $K_1$ . Denn durch die Substitution (11) wird das Polygon (14) auf  $B$ , das Innere von  $K_1$  dagegen auf das Innere von  $K_{qm}$  abgebildet.

8. Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Polygon (14) ausserhalb der beiden Kreise

$$\Sigma^{-q}(K_1), \quad (15)$$

$$\Sigma'^{-q}(K_1) \quad (15)'$$

liegt, die den Kreis  $K_1$  von aussen resp. in den Punkten (12) berühren. Beachtet man, dass allgemein die Länge des zu (15) oder (15)' gehörigen Bogens eine untere Grenze  $\frac{\varrho_1}{q}$  hat, so muss offenbar der Abstand des Poles der linearen Funktion (11), welches im Spiegelbild des Polygons (14) in bezug auf  $H$  liegt, vom Kreise  $K_1$  einen Abstand  $> \frac{\varrho_2}{q}$  haben. Durch Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf die lineare Funktion (11) im Kreise  $K_1$  erhält man die Ungleichung

$$\mathcal{A}_{q(m+1)} : \mathcal{A}_{qm} > \frac{\varrho_2}{q^2} (\mathcal{A}_{q+1} : \mathcal{A}_1), \quad (16)$$

wo  $\mathcal{A}_{q+1}$  und  $\mathcal{A}_1$  die Länge des zu  $K_{q+1}$  bzw.  $K_1$  gehörigen Bogens bezeichnet.

Ist ferner  $r$  das positive Minimum der absoluten Werte der Ableitungen der erzeugenden Substitutionen von  $\Gamma$  auf  $H$ , so ist

$$\mathcal{A}_{q+1} : \mathcal{A}_1 > \varrho_1 r^q \quad (16)'$$

und also nach (16)

$$\mathcal{A}_{q(m+1)} : \mathcal{A}_{qm} > \frac{\varrho}{q^2} r^q, \quad (17)$$

welche Ungleichung sogar mehr als die zu beweisende Ungleichung (8) besagt.

9. Wenn zweitens das Polygon (14) allgemein zwischen den Kreisen

$$\Sigma_{(k)}^{-\lambda q}(K_1), \quad \Sigma_{(k)}^{-(\lambda+1)q}(K_1) \quad (\lambda \geq 1) \quad (18)$$

liegt, wo  $\Sigma_{(k)}$  eine von den Substitutionen (13) und  $k$  ihre Stufenzahl bezeichnet, so kann (11) in der Form

$$S_{(q m - 1)} = \Sigma_{(k)}^{\lambda q} S_{(l)} \quad (19)$$

geschrieben werden, wo  $S_{(l)}$  eine Substitution bezeichnet, deren  $kq$  erste Primfaktoren (= Erzeugenden) eine von  $\Sigma_{(k)}^q$  verschiedene Substitution bilden. (Vgl. Fig. 3, wo allgemein statt  $\Sigma_{(k)}^q(K_i)$  kurz  $K_i^q$  geschrieben ist.) Hieraus folgt,

dass das Polygon  $S_{(l)}^{-1}$  ausserhalb der Kreise (15) und (15)' liegt. Die Stufenzahlen der in (19) auftretenden Substitutionen genügen dabei der Gleichung

$$qm - 1 = k\lambda q + l \tag{20}$$

woraus folgt, dass

$$m > \lambda. \tag{20}'$$

Es sei nun

$$z' \frac{1}{z - \pi} = \frac{1}{z - \pi} + \omega$$

der Ausdruck von  $\Sigma_{(k)}$  und also

$$\frac{1}{z^{(\lambda q)} - \pi} = \frac{1}{z - \pi} + \lambda q \omega \tag{21}$$

derjenige von  $\Sigma_k^{\lambda q}$ , woraus

$$\frac{dz^{(\lambda q)}}{dz} = \frac{1}{[1 + \lambda q \omega (z - \pi)]^2} \tag{22}$$

erhalten wird. Für die Länge des zum Kreis

$$\Sigma_{(k)}^{\lambda q}(K_1) \tag{23}$$

gehörigen Bogens ergibt sich aus (21) die Ungleichung

$$A_1^{(\lambda q)} < \frac{\rho_5}{\lambda q} \tag{24}$$

und für die Länge des zu

$$\Sigma_{(k)}^{\lambda q}(K_{q+1}) \tag{23}'$$

gehörigen Bogens aus (22) die Ungleichung

$$A_{q+1}^{(\lambda q)} > \frac{\rho_6}{\lambda^2 q^2} r^{-q}. \tag{25}$$

Aus (20)', (24) und (25) folgt

$$A_{q+1}^{(\lambda q)} : A_1^{(\lambda q)} > \frac{\rho_7}{m q} r^{-q}. \tag{26}$$

Nun werden aber die gegebenen zu den Kreisen (9) gehörigen Bogen aus den innerhalb des Kreises  $K_1$  liegenden zu den Kreisen (23) und (23)' gehörigen Bogen durch die Substitution  $S_{(7)}$  erhalten, welche die im ersten Falle für die Substitution (11) aufgestellten Bedingungen erfüllt. Nach (16) ist

$$A_{q(m+1)} : A_{qm} > \frac{e_3}{q^3} \cdot (A_{q+1}^{(\lambda q)} : A_1^{(\lambda q)})$$

und also wegen (26):

$$A_{q(m+1)} : A_{qm} > \frac{er^q}{q^3} \cdot \frac{1}{m},$$

womit die Richtigkeit der Ungleichung (8) in jedem Falle bewiesen worden ist.

### 3. §. Die Untergruppe $\Gamma$ .

10. Wir gehen hiernach zur Bestimmung einer gewissen Untergruppe von  $\Gamma$  über, die in den folgenden Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielen wird.

Es sei  $T$  eine von den erzeugenden Substitutionen (4) von  $\Gamma$ , z. B.  $\Sigma_n$ . Indem wir auf  $B$  die Gesamtheit der Potenzen

$$T^m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (27)$$

von  $T$  anwenden, und die so erhaltenen unendlich vielen, gegen den Punkt  $P_n$  konvergierenden Polygone zusammenfassen, erhalten wir ein unendlichvielseitiges Polygon  $\bar{B}$ , dem vermittels der Funktion (5) eine unendlichvielblättrige Teilfläche von  $U$  entspricht, welche offenbar identisch mit der Riemannschen Fläche der Funktion

$$\log x$$

ist. Man erkennt somit in  $\bar{B}$  einen Fundamentalbereich derjenigen Untergruppe  $\bar{\Gamma}$  von  $\Gamma$ , deren Substitutionen die für

$$|z| < 1 \quad (28)$$

eindeutig erklärte Funktion

$$\log x = \varphi(z) \quad (29)$$

ungeändert lassen. Die fuchsoiden Gruppe  $\Gamma$ , welche eine ausgezeichnete Untergruppe von  $\Gamma$  vom Index  $\infty$  ist, hat das System der unendlich vielen Substitutionen

$$\Sigma_{i,k}^{\pm 1} = T^{-k} \Sigma_i^{\pm 1} T^k \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right) \quad (30)$$

als Erzeugende. Von den unendlich vielen Seiten des Polygons  $\bar{B}$  sind die benachbarten, in der Fig. 4 mit  $\rightarrow$  bezeichneten mit einander konjugiert. Die Funktion (29) nimmt in  $\bar{B}$  jeden von

$$\log c_\nu + 2\pi i h \quad \left( \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, n-1 \\ h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right) \quad (31)$$

verschiedenen Wert genau einmal an. Die Grössen (31) sind Grenzwerte von (29) in den Spitzen von  $\bar{B}$ , der Wert  $\infty$  ihr Häufungswert.

Die fragliche Figur erhält eine sehr anschauliche Form, wenn der Hauptkreis durch eine lineare Transformation auf die reelle Achse abgebildet wird, wobei die Gruppe  $\Gamma$  in eine Gruppe von reellen linearen Substitutionen positiver Determinante übergeht. Wenn dabei der Fixpunkt von  $T$  in den unendlich fernen Punkt überführt wird, erhält  $T$  einen Ausdruck der Form

$$z' = z + \omega.$$

Der Bereich  $\bar{B}$  besteht dann aus der Gesamtheit der mit  $B$  kongruenten Polygone, welche aus  $B$  durch die von den verschiedenen Potenzen von  $T$ -bewirkten Parallelverschiebungen erhalten werden (Fig. 5).

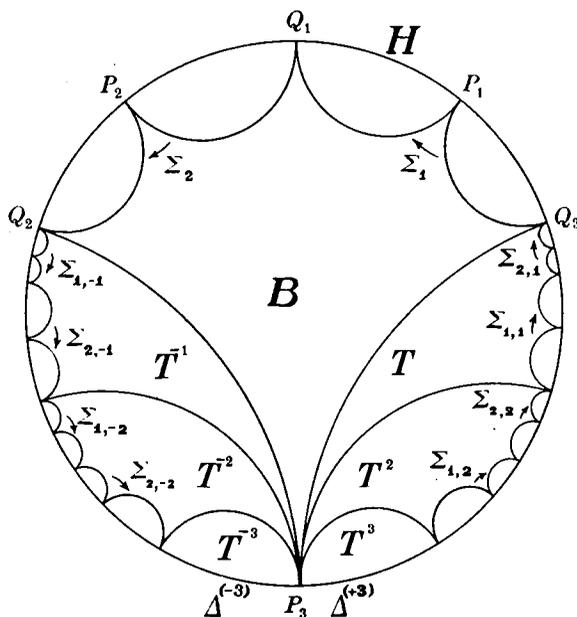


Fig. 4.

11. Weil  $\bar{\Gamma}$  eine Untergruppe von  $\Gamma$  ist, lässt sich jede Substitution  $S$  von  $\Gamma$  in der Form

$$S = T^d S \quad (32)$$

darstellen, wo  $\bar{S}$  eine Substitution von  $\bar{\Gamma}$  und  $d$  eine ganze Zahl bezeichnet, die wir den *Index* von  $S$  nennen werden. Es sei

$$S = \Sigma_{v_1}^{\lambda_1} \Sigma_{v_2}^{\lambda_2} \dots \Sigma_{v_k}^{\lambda_k} \quad (33)$$

der Ausdruck von  $S$  als Produkt der Potenzen der Erzeugenden (4) von  $\Gamma$ , wobei allgemein

$$\Sigma_{v_{p+1}} \neq \Sigma_{v_p}^{\pm 1}$$

ist. Wir behaupten, dass der *Index* von (33) gleich der Summe der Exponenten der dort auftretenden Potenzen von  $T$  ist.

Wir bemerken zu diesem Zweck zuerst, dass die genannte Summe nach (30) für jede erzeugende Substitution von  $\bar{\Gamma}$  und daher überhaupt für jede Substitution von  $\Gamma$  gleich Null ist. Es sei umgekehrt  $S$  eine Substitution von  $\Gamma$ . Wir schreiben ihren Ausdruck (33) in der Form

$$S = T^{\alpha_0} S_1 T^{\alpha_1} S_2 \dots T^{\alpha_{\mu-1}} S_{\mu} T^{\alpha_{\mu}}, \quad (33)'$$

wo  $S_1, S_2, \dots, S_{\mu}$  Substitutionen von  $\Gamma$  bezeichnen, die lauter von  $T^{\pm 1}$  verschiedene Primfaktoren enthalten. Ist

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\mu} = 0,$$

so können die ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \dots, g_{\mu}$$

aus der Gleichungen

$$-g_1 = \alpha_0, \quad g_1 - g_2 = \alpha_1, \quad g_2 - g_3 = \alpha_2, \quad \dots, \quad g_{\mu-1} - g_{\mu} = \alpha_{\mu-1}, \quad g_{\mu} = \alpha_{\mu}$$

bestimmt werden, wodurch  $S$  den Ausdruck

$$S = \prod_{v=1}^{\mu} (T^{-g_v} S_v T^{g_v}) \quad (33)''$$

erhält. Ist nun

$$S_v = \Sigma_{\lambda_1} \Sigma_{\lambda_2} \dots \Sigma_{\lambda_p}$$

der Ausdruck von  $S_v$  als Produkt der Erzeugenden von  $\Gamma$ , so ist wegen der Identität

$$T^{-g_v} \Sigma_{\lambda_1} \Sigma_{\lambda_2} \dots \Sigma_{\lambda_p} T^{g_v} = \prod_{i=1}^p (T^{-g_v} \Sigma_{\lambda_i} T^{g_v})$$

jeder Faktor von (33)'' und somit auch von  $S$  als Produkt der Erzeugenden von  $\bar{\Gamma}$  eine Substitution von  $\bar{\Gamma}$ .

Es sei nun  $S$  eine Substitution von  $\Gamma$  und  $d$  die Summe der Exponenten von  $T$  in der Darstellung (33)'. Dann ist die betreffende Summe für die Substitution  $\bar{S} = T^{-d} S$  gleich Null, woraus nach dem oben Bewiesenen folgt, dass  $\bar{S}$  zu  $\bar{\Gamma}$  gehört. Weil  $S = T^d \bar{S}$ , so ist  $d$  zugleich der Index von  $S$ , w. z. b. w.

Nach der Definition ist der Index eine positive oder negative ganze Zahl inkl. Null, die absolut höchstens gleich der Stufenzahl ist. Den Begriff des Index können wir auf Polygone, Kreise und Bogen wie oben den Begriff der Stufe überführen.

Es sei  $S$  mit dem Ausdruck (6) ein Kreis der Stufe  $m$  und vom Index  $d$ . Ist der erste Primfaktor in (6) von  $T$  und  $T^{-1}$  verschieden, so haben von den  $2n - 1$  innerhalb (6) liegenden Kreisen  $(m + 1)$ :ter Stufe die Kreise

$$TS, T^{-1}S \tag{34}$$

den Index  $d + 1$  bzw.  $d - 1$ , die übrigen den Index  $d$ . Ist dagegen  $\Sigma_{v_1} = T^{\pm 1}$ , so liegt von den Kreisen (34) nur der eine innerhalb des Kreises  $S$ . Jedenfalls gibt es unter den innerhalb des Kreises  $S$  liegenden Kreisen  $(m + 2)$ :ter Stufe sowohl solche vom Index  $d + 1$  als vom Index  $d - 1$ , nämlich die Kreise

$$T\Sigma S \text{ und } T^{-1}\Sigma S,$$

wo  $\Sigma$  einen von  $T$ ,  $T^{-1}$  und  $\Sigma_{v_1}^{-1}$  verschiedenen Primfaktor bezeichnet.

Aus dem Obigen folgt, dass es innerhalb jedes Kreises  $m$ :ter Stufe, dessen Index absolut  $< q$  ist, Kreise  $(m + q)$ :ter Stufe vom Index  $q$  oder  $-q$  gibt.

#### 4. §. Die Linien $L_q$ und $L_{q, N}$ .

12. Wir wollen jetzt die Existenz von geschlossenen Kurven nachweisen, die aus unendlich vielen Kreisen vom Index  $\pm q$  zusammengesetzt sind, wo  $q$  eine beliebig gegebene positive ganze Zahl ist.

Wir markieren zu diesem Zweck zuerst die beiden Kreise

$$T^q, T^{-q}; \tag{35}$$

welche die einzigen Kreise  $q$ :ter Stufe sind, deren Index absolut  $= q$  ist. Innerhalb jedes der übrigen Kreise  $q$ :ter Stufe, deren Index also absolut  $< q$  ist, gibt

es nach der obigen Bemerkung wenigstens einen Kreis  $2q$ :ter Stufe, deren Index  $\pm q$  ist. Wir markieren alle so erhaltenen Kreise  $2q$ :ter Stufe und des Index  $\pm q$ , die also sämtlich ausserhalb einander und der schon früher markierten Kreise liegen. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die nicht markierten Kreise  $2q$ :ter Stufe, die also zwischen den bisher markierten Kreisen liegen, findet man innerhalb jedes von denselben wenigstens einen Kreis  $3q$ :ter Stufe, dessen Index gleich  $\pm q$  ist. Indem man so fortfährt, erhält man ein unendliches System von ausserhalb einander liegenden Kreisen, die sämtlich vom Index  $\pm q$  sind.

Wir behaupten, dass die Summe der zu den markierten Kreisen gehörigen Bogen gleich  $2\pi$  ist.

Einen Beweis für unsere Behauptung erhält man, wenn man die Ungleichung (8) der Reihe nach für  $m = 1, 2, 3, \dots$  anwendet.

Nach der Definition der Grösse  $r$  ist die Gesamtlänge der zu den Kreisen (35) gehörigen Bogen  $> 2\pi\varrho_0 r^q$ , wo  $2\pi\varrho_0$  die Länge des zum kleinsten Randkreis von  $B$  gehörigen Bogens von  $H$  bezeichnet, also die Summe der Bogen zwischen (35)  $< 2\pi\varrho_0(1-r^q)$ . Indem man von diesen Bogen diejenigen Teilbogen entfernt, die den markierten Kreisen  $2q$ :ter Stufe entsprechen, bleibt eine Anzahl Bogen zurück, deren Gesamtlänge nach (8), wo  $m=1$ , kleiner als

$$2\pi\varrho_0(1-r^q)\left(1 - \frac{\varrho_q}{1}\right)$$

ist. Von den so erhaltenen Restbogen hat man nun diejenigen Teile zu entfernen, die den markierten Kreisen  $3q$ :ter Stufe entsprechen. Für die Summe der Restbogen hat man jetzt nach (8) für  $m=2$  die obere Grenze

$$2\pi\varrho_0(1-r^q)\left(1 - \frac{\varrho_q}{1}\right)\left(1 - \frac{\varrho_q}{2}\right).$$

Nach Ausführung des  $p$ :ten Schrittes erhält man die obere Grenze

$$2\pi\varrho_0(1-r^q)\left(1 - \frac{\varrho_q}{1}\right)\left(1 - \frac{\varrho_q}{2}\right)\dots\left(1 - \frac{\varrho_q}{p}\right) \quad (36).$$

für die Summe der Bogen zwischen den markierten Kreisen der Stufe  $N=pq$ . Weil der Wert von (36) für  $p \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, ist bewiesen, dass die Summe der zu den markierten Kreisen gehörigen Bogen  $2\pi$  ist.

Indem wir zu der Gesamtheit der markierten Kreise die Menge  $M_0$

ihrer Häufungsstellen auf  $H$  hinzufügen, welche Menge das lineare Mass Null hat, erhalten wir eine einfache geschlossene Linie, die wir mit  $L'_q$  bezeichnen.

13. Von der Linie  $L'_q$  ausgehend soll jetzt eine neue Linie  $L_q$  konstruiert werden, die ebenfalls von lauter Kreisen des Index  $\pm q$  und den Punkten von  $M_0$  besteht, welche aber ausserdem die Eigenschaft hat, dass innerhalb derselben keine Kreise des Index  $\pm q$  vorhanden sind. Der Übergang von  $L'_q$  zu  $L_q$  wird durch die folgende Reduktion geleistet.

Es sei

$$\Sigma_{v_1} \Sigma_{v_2} \dots \Sigma_{v_m} \tag{37}$$

der Ausdruck irgend eines zu  $L'_q$  gehörigen Kreises. Wenn dieser Kreis mit  $B$  z. B. radial verbunden wird, begegnet man der Reihe nach den Kreisen

$$\Sigma_{v_2} \Sigma_{v_3} \dots \Sigma_{v_m}, \Sigma_{v_3} \dots \Sigma_{v_m}, \dots, \Sigma_{v_m}. \tag{38}$$

Wenn erstens der Index jedes Kreises (38) absolut  $< q$  ist, so gehört der Kreis (37) der gesuchten Linie  $L_q$ . Es bezeichne andernfalls

$$\Sigma_{v_p} \Sigma_{v_{p+1}} \dots \Sigma_{v_m} \tag{39}$$

den letzten der Kreise (38), deren Index absolut gleich  $q$  ist. Wir ersetzen dann den Kreis (37) durch (39) und wir denken uns dasselbe Verfahren auf jeden zu  $L'_q$  gehörigen Kreis angewandt. Dadurch wird eine geschlossene Linie  $L_q$  innerhalb  $L'_q$  erhalten, die aus lauter Kreisen vom Index  $\pm q$  besteht und deren Bogen die Gesamtlänge  $2\pi$  haben, sodass innerhalb  $L_q$  keine Kreise vom Index  $\pm q$  mehr vorhanden sind.

Aus der Definition der »reduzierten Linie«  $L_q$  ergibt sich zur Konstruktion derselben die folgende Methode.

Man bilde zuerst alle Kreise  $q$ :ter Stufe und markiere unter denselben  $T^q$  und  $T^{-q}$ , welche einzig den Index  $\pm q$  haben. Man gehe jetzt von jedem nichtmarkierten Kreis  $q$ :ter Stufe  $S = \Sigma_{v_1} \Sigma_{v_2} \dots \Sigma_{v_q}$  aus zu den innerhalb desselben liegenden  $2n - 1$  Kreisen  $(q + 1)$ :ter Stufe  $\Sigma_{\lambda_1} S$  über, wo  $\Sigma_{\lambda_1} \neq \Sigma_{v_1}^{-1}$  und markiere alle diejenigen von den so erhaltenen Kreisen, welche den Index  $\pm q$  haben. Von jedem nichtmarkierten Kreise  $(q + 1)$ :ter Stufe  $\Sigma_{\lambda_1} S$  aus gehe man dann zu den darin liegenden  $2n - 1$  Kreisen  $(q + 2)$ :ter Stufe  $\Sigma_{\lambda_2} \Sigma_{\lambda_1} S$  über, wo  $\Sigma_{\lambda_2} \neq \Sigma_{\lambda_1}^{-1}$  und markiere wieder alle so erhaltenen Kreise vom Index  $\pm q$ . Indem man so

fortfährt, erhält man eine unendliche Anzahl von Kreisen vom Index  $\pm q$ , die nach wachsender Stufenzahl geordnet sind und welche zusammen mit den Punkten von  $M_0$  die gesuchte Linie  $L_q$  bilden.

Aus der Konstruktion der Linie  $L_q$  geht hervor, dass man die Gesamtheit der innerhalb derselben liegenden Kreise (und somit auch Polygone) erhält, wenn man zur Gesamtheit der Kreise der Stufe  $< q$  sämtliche bei dem obigen Verfahren begegneten nichtmarkierten Kreise hinzufügt.

14. Wir denken uns jetzt das obige Konstruktionsverfahren bei den Kreisen  $N$ :ter Stufe abgebrochen. Wenn wir zur Gesamtheit der dabei vorhandenen markierten Kreise die Gesamtheit der nichtmarkierten Kreise  $N$ :ter Stufe adjungieren, erhalten wir eine aus endlich vielen Kreisen zusammengesetzte geschlossene Linie  $L'_{q,N}$ . Es ist für die funktionentheoretischen Zwecke nützlich, wenn auch nicht notwendig, die erhaltene Linie einer analogen Reduktion wie früher die Linie  $L'_q$  zu unterwerfen, so dass eine neue, innerhalb  $L'_{q,N}$  liegende geschlossene Linie  $L_{q,N}$  erhalten wird, welche die nämlichen markierten Kreise wie  $L'_{q,N}$  enthält, die aber dazu eine minimale Anzahl von nichtmarkierten Kreisen enthält.

Die fragliche Reduktion kann offenbar derart ausgeführt werden, dass man jeden zu  $L'_{q,N}$  gehörigen Kreis durch den nächst umschliessenden Kreis ersetzt, wenn dieser Kreis keinen zu  $L'_{q,N}$  gehörigen markierten Kreis umschliesst und so fortfährt, bis keine Reduktion mehr möglich ist.

Aus der Definition der Linien  $L_{q,N}$  geht hervor, dass allgemein jede der Linien

$$L_{q',N}, L_{q,N'} \quad (q' > q, N' > N)$$

die Linie  $L_{q,N}$  umschliesst. Für jeden zu  $L_{q,N}$  gehörigen markierten Kreis ist die Stufe  $\geq q$ , weil der Index  $\pm q$  ist. Ferner ist die Stufe jedes zur genannten Linie gehörigen nichtmarkierten Kreises  $> N - q$ . Denn nach N: 11 enthält jeder Kreis der Stufe  $N - q$  und dessen Index absolut  $< q$  ist, wenigstens einen Kreis  $N$ :ter Stufe und vom Index  $\pm q$ , d. h. einen zu  $L_{q,N}$  gehörigen markierten Kreis. Hieraus folgt, dass wenn die Zahlen  $q$  und  $N$  derart unbegrenzt wachsen, dass  $N - q \rightarrow \infty$ , so konvergieren die Linien  $L_{q,N}$  gegen den Hauptkreis.

II.

5. §. Anwendung auf die Modulgruppe.

15. Die zu dem Legendreschen elliptischen Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} \tag{1}$$

gehörige Modulgruppe  $\Gamma$  ist eine Untergruppe vom Index sechs der gewöhnlichen Modulgruppe, die aus der Gesamtheit der unimodularen ganzzahligen Substitutionen

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc = 1) \tag{2}$$

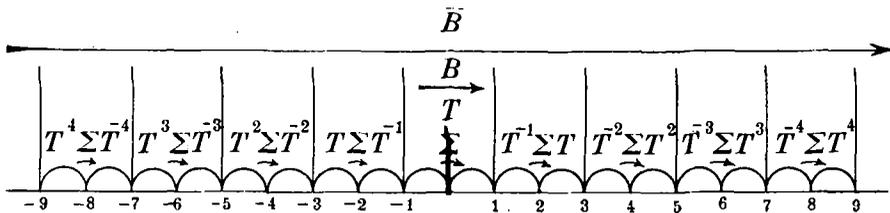


Fig 5.

besteht. Die Gruppe  $\Gamma$  hat die erzeugenden Substitutionen

$$T: z' = z + 2, \quad \Sigma: z' = \frac{z}{2z + 1}. \tag{3}$$

Als Fundamentalbereich derselben kann dasjenige vierseitige Polygon  $B$  gewählt werden, das von den durch die Punkte  $-1$  und  $+1$  zur imaginären Achse gezogenen Parallelen und den beiden über die Strecken  $(-1, 0)$  und  $(0, +1)$  konstruierten Orthogonalkreisen der reellen Achse begrenzt wird (Fig. 5).

Die zugehörige Untergruppe  $\bar{\Gamma}$ , welche die Funktion

$$\log \lambda(z) \tag{4}$$

als Hauptfunktion hat, wird von den unendlich vielen Substitutionen

$$T^{-m} \Sigma^{\pm 1} T^m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{5}$$

erzeugt. Ihr Fundamentalbereich  $\bar{B}$  ist identisch mit der Summe derjenigen unendlich vielen Polygone, die aus  $B$  durch die verschiedenen positiven und negativen Potenzen von  $T$  geleisteten Parallelverschiebungen erhalten werden.

Jede Substitution von  $\Gamma$  lässt sich eindeutig in der Form

$$S = T^{\tau_m} \Sigma^{\nu_m} T^{\tau_{m-1}} \Sigma^{\nu_{m-1}} \dots T^{\tau_1} \Sigma^{\nu_1} T^{\tau_0} \quad (6)$$

darstellen, wo die Exponenten positive oder negative ganze Zahlen sind, von denen nur die extremen  $\tau_m$  und  $\tau_0$  verschwinden können. Aus (3) ergibt sich für (6) der Ausdruck

$$z' = 2\tau_0 + \frac{1}{2\nu_1 + \frac{1}{2\tau_1 + \dots + \frac{1}{2\nu_m + \frac{1}{2\tau_m + z}}}} \quad (7)$$

in der Form eines gewöhnlichen endlichen Kettenbruches, dessen Teilnenner gerade ganze Zahlen sind. Umgekehrt stellt (7) stets eine Substitution von  $\Gamma$  dar, wenn die Grössen  $\tau$  und  $\nu$  ganz und von beiden extremen unter denselben möglicherweise abgesehen von Null verschieden sind.

Nach den Definitionen von Nr. 6 und 10 ist die Stufe von (6) gleich

$$\sum_{i=0}^m |\tau_i| + \sum_{i=1}^m |\nu_i|, \quad (8)$$

der Index gleich

$$\sum_{i=0}^m \tau_i. \quad (9)$$

Damit der Kreis (6) zur Linie  $L_q$  gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\left| \sum_{i=0}^m \tau_i \right| = q \quad (10)$$

und

$$\left| \sum_{i=0}^{\mu} \tau_i \right| < q \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, m-1). \quad (11)$$

Man erhält somit alle zu  $L_q$  gehörigen Kreise nach wachsender Stufenzahl geordnet, wenn man der Reihe nach für  $k=q, q+1, q+2, \dots$  sämtliche Systeme von ganzen Zahlen  $\tau, \nu$  bestimmt, welche der Gleichung

$$\sum_{i=0}^m |\tau_i| + \sum_{i=1}^m |\nu_i| = k \tag{12}$$

sowie der Gleichung (10) und den Ungleichungen (11) genügen. Daraus gelangt man zur Linie  $L_{q,N}$ , wenn man in der obigen Berechnung mit dem Wert  $k=N$  abbricht, ausserdem aber noch alle diejenigen Lösungen von (12) für  $k=N$  berücksichtigt, welche den Ungleichungen (11) genügen.

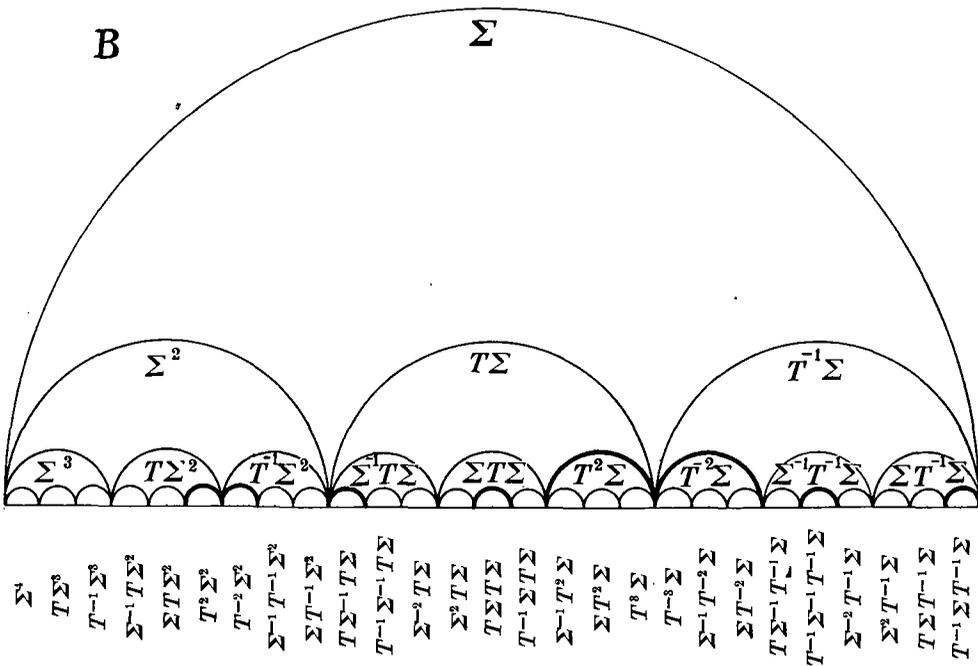


Fig. 6.

16. Wir wollen zum Abschluss die obige Methode an einem Beispiel erläutern, wo wir  $q=2$  und  $N=4$  gewählt haben (Fig. 6).

Wir bilden von den vier Substitutionen erster Stufe

$$T, T^{-1}, \Sigma, \Sigma^{-1} \tag{13}$$

ausgehend die 12 Substitutionen zweiter Stufe

$$\begin{aligned} \overline{T^2}, \quad \Sigma T, \quad \Sigma^{-1} T; \quad \overline{T^{-2}}, \quad \Sigma T^{-1}, \quad \Sigma^{-1} T^{-1}; \\ T \Sigma, \quad T^{-1} \Sigma, \quad \Sigma^2; \quad T \Sigma^{-1}, \quad T^{-1} \Sigma^{-1}, \quad \Sigma^{-2}; \end{aligned} \quad (14)$$

von denen die zwei markierten (überstrichenen) den Index  $\pm 2$  haben. Indem wir vor jede nichtmarkierte Substitution zweiter Stufe alle zulässigen Primfaktoren schreiben, erhalten wir die folgenden 30 Substitutionen dritter Stufe

$$\begin{aligned} \overline{T \Sigma T}, \quad T^{-1} \Sigma T, \quad \Sigma^2 T; \quad \overline{T \Sigma^{-1} T}, \quad T^{-1} \Sigma^{-1} T, \quad \Sigma^{-2} T; \\ T \Sigma T^{-1}, \quad \overline{T^{-1} \Sigma T^{-1}}, \quad \Sigma^2 T^{-1}; \quad T \Sigma^{-1} T^{-1}, \quad \overline{T^{-1} \Sigma^{-1} T^{-1}}, \quad \Sigma^{-2} T^{-1}; \\ \overline{T^2 \Sigma}, \quad \Sigma T \Sigma, \quad \Sigma^{-1} T \Sigma; \quad \overline{T^{-2} \Sigma}, \quad \Sigma T^{-1} \Sigma, \quad \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma; \quad (15) \\ T \Sigma^2, \quad T^{-1} \Sigma^2, \quad \Sigma^3; \quad \overline{T^2 \Sigma^{-1}}, \quad \Sigma T \Sigma^{-1}, \quad \Sigma^{-1} T \Sigma^{-1}; \\ \overline{T^{-2} \Sigma^{-1}}, \quad \Sigma T^{-1} \Sigma^{-1}, \quad \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma^{-1}; \quad T \Sigma^{-2}, \quad T^{-1} \Sigma^{-2}, \quad \Sigma^{-3}; \end{aligned}$$

von denen 8 den Index  $\pm 2$  haben und also markiert werden. Wenn wir jetzt vor jede nichtmarkierte Substitution dritter Stufe alle zulässigen Primfaktoren schreiben, erhalten wir die folgenden 66 Substitutionen vierter Stufe

$$\begin{aligned} T^{-2} \Sigma T, \quad \Sigma T^{-1} \Sigma T, \quad \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma T; \quad \overline{T \Sigma^2 T}, \quad T^{-1} \Sigma^2 T, \quad \Sigma^3 T; \\ T^{-2} \Sigma^{-1} T, \quad \Sigma T^{-1} \Sigma^{-1} T, \quad \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma^{-1} T; \quad \overline{T \Sigma^{-2} T}, \quad T^{-1} \Sigma^{-2} T, \quad \Sigma^{-3} T; \\ T^2 \Sigma T^{-1}, \quad \Sigma T \Sigma T^{-1}, \quad \Sigma^{-1} T \Sigma T^{-1}; \quad T \Sigma^2 T^{-1}, \quad \overline{T^{-1} \Sigma^2 T^{-1}}, \quad \Sigma^3 T^{-1}; \\ T^2 \Sigma^{-1} T^{-1}, \quad \Sigma T \Sigma^{-1} T^{-1}, \quad \Sigma^{-1} T \Sigma^{-1} T^{-1}; \quad T \Sigma^{-2} T^{-1}, \quad \overline{T^{-1} \Sigma^{-2} T^{-1}}, \quad \Sigma^{-3} T^{-1}; \\ \overline{T \Sigma T \Sigma}, \quad T^{-1} \Sigma T \Sigma, \quad \Sigma^2 T \Sigma; \quad \overline{T \Sigma^{-1} T \Sigma}, \quad T^{-1} \Sigma^{-1} T \Sigma, \quad \Sigma^{-2} T \Sigma; \\ T \Sigma T^{-1} \Sigma, \quad \overline{T^{-1} \Sigma T^{-1} \Sigma}, \quad \Sigma^2 T^{-1} \Sigma; \quad T \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma, \quad \overline{T^{-1} \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma}, \quad \Sigma^{-2} T^{-1} \Sigma; \quad (16) \\ \overline{T^2 \Sigma^2}, \quad \Sigma T \Sigma^2, \quad \Sigma^{-1} T \Sigma^2; \quad \overline{T^{-2} \Sigma^2}, \quad \Sigma T^{-1} \Sigma^2, \quad \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma^2; \\ T \Sigma^3, \quad T^{-1} \Sigma^3, \quad \Sigma^4; \quad \overline{T \Sigma T \Sigma^{-1}}, \quad T^{-1} \Sigma T \Sigma^{-1}, \quad \Sigma^2 T \Sigma^{-1}; \\ \overline{T \Sigma^{-1} T \Sigma^{-1}}, \quad T^{-1} \Sigma^{-1} T \Sigma^{-1}, \quad \Sigma^{-2} T \Sigma^{-1}; \quad T \Sigma T^{-1} \Sigma^{-1}, \quad \overline{T^{-1} \Sigma T^{-1} \Sigma^{-1}}, \quad \Sigma^2 T^{-1} \Sigma^{-1}; \\ T \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma^{-1}, \quad \overline{T^{-1} \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma^{-1}}, \quad \Sigma^{-2} T^{-1} \Sigma^{-1}; \quad \overline{T^2 \Sigma^{-2}}, \quad \Sigma T \Sigma^{-2}, \quad \Sigma^{-1} T \Sigma^{-2}; \\ \overline{T^{-2} \Sigma^{-2}}, \quad \Sigma T^{-1} \Sigma^{-2}, \quad \Sigma^{-1} T^{-1} \Sigma^{-2}; \quad T \Sigma^{-3}, \quad T^{-1} \Sigma^{-3}, \quad \Sigma^{-4}; \end{aligned}$$

von denen die 16 markierten den Index  $\pm 2$  haben.

Nach der Definition in N: 14 besteht die Linie  $L'_{2,4}$  aus den oben markierten 26 Kreisen und den 50 nichtmarkierten Kreisen vierter Stufe.

Zur Ausführung der Reduktion, welche von  $L'_{2,4}$  aus zur Linie  $L_{2,4}$  führt, bemerken wir, dass die folgenden 6 Kreise dritter Stufe

$$T^{-1} \Sigma T, \quad T^{-1} \Sigma^{-1} T, \quad T \Sigma T^{-1}, \quad T \Sigma^{-1} T^{-1}, \quad \Sigma^3, \quad \Sigma^{-3} \quad (17)$$

keinen zu  $L'_{2,4}$  gehörigen markierten Kreis enthalten. Weil diese Eigenschaft keinem Kreis der Stufe  $< 3$  zukommt, so gehören die Kreise (17) zur Linie  $L_{2,4}$ . Der Übergang von  $L'_{2,4}$  zu  $L_{2,4}$  geschieht in der Weise, dass die aus (17) abgeleiteten 18 Kreise vierter Stufe, also die drei ersten Kreise auf der ersten, zweiten, dritten, vierten und achten Zeile und die drei letzten Kreise von (16) durch die Kreise (17) ersetzt werden, während die übrigen zu  $L'_{2,4}$  gehörigen Kreise beibehalten werden. Die Linie  $L_{2,4}$  besteht demnach aus 64 Kreisen, von denen 26 markiert sind.

Nachdem aus (13), (14) und (15) die 10 markierten Substitutionen und die 6 Substitutionen (17) fortgelassen werden, bleiben mit der identischen Substitution zusammen 31 Substitutionen zurück, welche die innerhalb der Linie  $L_{2,4}$  gelegenen Kreise und Polygone repräsentieren.

### III.

#### 6. §. Reihendarstellung für $g(z, a)$ .

17. Den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bildet die in  $N$ : 10 definierte Untergruppe  $I'$ , welche in der Funktion

$$\varphi(z) = \log f(z) \tag{1}$$

eine Hauptfunktion besitzt, d. h. eine automorphe Funktion, die in dem Fundamentalbereich  $\bar{B}$  von  $\Gamma$  keinen Wert mehr als einmal annimmt. Die Funktion (1), welche erst nach Fixierung ihres Wertes in einem Punkt bestimmt wird, erleidet bei Ausführung der Substitution  $T$  die Transformation

$$\varphi(T(z)) = \varphi(z) + 2\pi i. \tag{2}$$

Bekanntlich<sup>1</sup> hat die Funktion  $x = f(z)$  allgemein im Eckpunkte  $z_v = z(c_v)$  eine Darstellung der Form

$$x = c_v + \mathcal{O}_v(t_v), \quad t_v = e^{\frac{2\pi i}{(z - c_v)^{k_v}}} \quad (k_v \text{ reell}) \tag{3}$$

wo  $\mathcal{O}_v(t_v)$  eine in der Umgebung des Punktes  $t_v = 0$  konvergente Potenzreihe bezeichnet, die mit einem Glied ersten Grades beginnt, dessen Koeffizient von

<sup>1</sup> Vgl. die S. 329 zitierte Arbeit von H. POINCARÉ, S. 273.

Null verschieden ist. (Für  $\nu = n + 1$  hat man  $x - c_\nu$  durch  $\frac{1}{x}$  zu ersetzen.)

In den Eckpunkten  $z_n$  und  $z_{n+1}$ , wo  $x = 0$  bzw.  $\infty$  ist, ergibt sich hieraus für die Funktion (1) die Darstellung

$$\varphi(z) = \frac{2\pi i}{(z - z_n)k_n} + \Psi_n(t_n) \text{ bzw. } \varphi(z) = -\frac{2\pi i}{(z - z_{n+1})k_{n+1}} + \Psi_{n+1}(t_{n+1}),$$

wo  $\Psi_\nu(t_\nu)$  ( $\nu = n, n + 1$ ) nach den positiven Potenzen von  $t_\nu$  fortschreitende Potenzreihen bezeichnen. Aus dieser Darstellung geht hervor, dass der imaginäre Teil  $\Im(\varphi(z))$  der Funktion  $\varphi(z)$  in den Ecken  $z_n, z_{n+1}$  von  $B$  beschränkt bleibt. Weil die genannte Funktion in allen anderen Eckpunkten von  $B$  endliche Grenzwerte besitzt und sonst überall im Bereich  $B$  und auf dessen Berandung regulär ist, so ist  $|\Im(\varphi(z))|$  im Bereich  $B$  beschränkt.

Wegen (2) folgt hieraus, dass die Schwankung von  $\Im(\varphi(z))$  in jedem Bildbereich von  $B$  beschränkt ist und also

$$|\Im(\varphi(z)) - \Im(\varphi(z_0))| \leq K < \infty, \quad (4)$$

wenn die Punkte  $z$  und  $z_0$  einem und demselben Polygon von  $\Gamma$  angehören.

Wegen (4) folgt aus (2), dass im Bereich  $B$  gleichmässig

$$\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \varphi(T^k(z)) = \infty \quad (5)$$

ist.

18. Wir bilden jetzt die von (1) linear abhängige Funktion

$$g(z, a) = \frac{\varphi'(a)}{\varphi(z) - \varphi(a)}, \quad (6)$$

die ebenfalls eine Hauptfunktion von  $\bar{\Gamma}$  ist. Ihre Pole fallen mit dem Punkt  $z = a$ , wo das Residuum gleich 1 ist, und den hinsichtlich  $\Gamma$  äquivalenten Punkten zusammen. Ferner gilt in  $B$  gleichmässig die Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \pm \infty} g(T^k(z), a) = 0.$$

Zur genaueren Abschätzung der Funktion (6) bezeichnen wir mit  $T^m$  dasjenige zu  $B$  gehörige Polygon, wo der Pol  $z = a$  gelegen ist. Dann ist also

$$a = T^m(a_0), \tag{7}$$

wo  $a_0$  den in bezug auf  $\Gamma$  genommenen Bildpunkt von  $a$  in  $B$  bezeichnet. Es sei

$$\frac{1}{z' - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} + \omega \tag{8}$$

der Ausdruck von  $T$ . Wegen der aus (2) folgenden Gleichung

$$\varphi'(T^m(z)) = \varphi'(z) \frac{dz}{dT^m(z)} = [m\omega(z - \zeta) + 1]^2 \varphi'(z) \tag{9}$$

ergibt sich aus (6)

$$g(z, a) = \frac{[m\omega(a_0 - \zeta) + 1]^2 \varphi'(a_0)}{\varphi(z) - \varphi(a_0) - 2\pi im},$$

und allgemeiner wegen (2)

$$g(T^q(z), a) = \frac{[m\omega(a_0 - \zeta) + 1]^2 \varphi'(a_0)}{\varphi(z) - \varphi(a_0) + 2\pi i(q - m)}. \tag{9'}$$

Weil nach (4) in  $B$

$$|\Im(\varphi(z)) - \Im(\varphi(a_0))| \leq K \tag{10}$$

ist, so folgt aus (9)' und (10) in den Polygonen  $T^{\pm q}$  für  $q > 2|m| + \frac{K}{\pi}$  die Ungleichung

$$|g(z, a)| < \frac{[|m\omega(a_0 - \zeta)| + 1]^2 |\varphi'(a_0)|}{2\pi(|q| - |m|) - K} < \varrho_m, \tag{11}$$

wo  $\varrho_m$  die von  $q$  unabhängige endliche Grösse

$$\varrho_m = \frac{[|m\omega(a_0 - \zeta)| + 1]^2 |\varphi'(a_0)|}{\pi} \tag{11'}$$

bezeichnet.

19. Es sei nun  $\varepsilon$  eine beliebig gegebene positive Grösse. Ferner sei  $D$  ein Bereich innerhalb  $H$ , der keinen Pol der Funktion (6) enthält. Wir wählen die positiven ganzen Zahlen  $q$  und  $N$  zuerst so, dass die Linie  $L_{q, N}$  den Bereich  $D$  umschliessen wird. Es sei  $d$  der kleinste Abstand der Linie  $L_{q, N}$  von  $D$  und ferner sei  $M$  das Maximum von (6) auf den Seiten des zu  $\Gamma$  gehörigen Polygonnetzes, das eine endliche Grösse hat, wenn der Pol  $a$ , wie wir an-

nehmen wollen, auf keiner Polygonseite gewählt wird. Wir wählen dann die positiven Grössen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  derart, dass

$$\frac{\pi \varepsilon_1}{2d} + \frac{M \varepsilon_2}{4d} < \varepsilon \quad (12)$$

und hiernach die Zahlen  $q$  und  $N = pq$  derart, dass sie ausser der obigen Bedingung noch den Ungleichungen

$$\frac{q_m}{q} < \varepsilon_1, \quad 2\pi \varrho_0 (1-r^q) \left(1 - \frac{\varrho_q}{1}\right) \left(1 - \frac{\varrho_q}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varrho_q}{p}\right) < \varepsilon_2 \quad (13)$$

genügen.

Aus der Cauchyschen Integralformel leiten wir für (6) den Ausdruck

$$g(z, a) = \sum_{\nu=1}^{\lambda_\varepsilon} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{q,N}} \frac{g(\zeta, a)}{\zeta - z} d\zeta \quad (14)$$

her, wo die Summierung über die Gesamtheit der innerhalb der Kurve  $L_{q,N}$  liegenden endlich vielen Pole zu erstrecken ist, während die Integration sich auf die Kurve  $L_{q,N}$  bezieht. Dieses Integral wollen wir jetzt in zwei Teile  $\int_1$  und  $\int_2$  zerlegen, indem wir in  $\int_1$  die an  $L_{q,N}$  beteiligten markierten Kreise, in  $\int_2$  die übrigen zusammenfassen.

Weil in jedem Punkt der markierten Kreise, welche nach der Definition den Index  $\pm q$  haben, nach (11) und (13)

$$|g(\zeta, a)| < \frac{q_m}{q} < \varepsilon_1 \quad (15)$$

und die Länge von  $L_{q,N} < \pi^2$  ist, so ist in  $D$

$$\left| \int_1 \right| < \frac{\pi^2}{d} \varepsilon_1. \quad (16)$$

Weil ferner nach (36) N: 12 und (13) die Gesamtlänge der an  $L_{q,N}$  beteiligten nichtmarkierten Kreise  $< \frac{\pi}{2} \varepsilon_2$  ist, und auf diesen Kreisen  $|g(\zeta, a)| < M$ , so ist

$$\left| \int_2 \right| < \frac{M\pi}{2d} \varepsilon_2. \tag{16}'$$

Aus (12), (16) und (16)' folgt dann

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{L_{q,N}} \frac{g(\zeta, a)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \varepsilon,$$

welche Ungleichung gleichmässig im Bereich  $D$  gültig ist.

20. Wir gehen nun von einer beliebigen monotonen, gegen Null konvergierenden Reihe positiver Grössen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$$

aus und bestimmen für jede  $\varepsilon_\mu$  derselben die zugehörigen ganzen Zahlen  $q_\mu, N_\mu, \lambda_{\varepsilon_\mu}$  in der oben angegebenen Weise, wodurch eine unendliche Anzahl von ausserhalb einander liegenden geschlossenen Kurven

$$L_{q_\mu, N_\mu} \tag{(\mu = 1, 2, 3, \dots)}$$

erhalten wird. Aus der Formel (14), wo das Integral

$$\int_{L_{q_\mu, N_\mu}} \frac{g(\zeta, a)}{\zeta - z} d\zeta$$

in  $D$  für  $\mu \rightarrow \infty$  gleichmässig gegen Null konvergiert, folgt für die Funktion (6) die Darstellung

$$g(z, a) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_{\varepsilon_\mu}} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} \tag{17}$$

durch eine bedingt konvergente Partialbruchreihe, die offenbar in jedem innerhalb des Hauptkreises liegenden Bereich gleichmässig konvergiert, nachdem die endlich vielen zu den dort möglicherweise vorhandenen Polen gehörigen Glieder fortgelassen werden.

21. Wir gehen zur Bestimmung der Residuen in  $A_\nu$  von der in der Umgebung des Poles  $a_\nu = S_\nu(a)$  geltenden Potenzreihe

$$g(z, a) = \frac{A_\nu}{z - a_\nu} + \tau_0^{(\nu)} + \tau_1^{(\nu)}(z - a_\nu) + \tau_2^{(\nu)}(z - a_\nu)^2 + \dots$$

aus. Wegen

$$g(S_\nu(z), a) = g(z, a),$$

wo  $S_\nu(z)$  eine Substitution von  $\bar{\Gamma}$  ist, folgt hieraus die Reihenentwicklung

$$g(z, a) = \frac{A_\nu}{S_\nu(z) - S_\nu(a)} + \tau_0^{(\nu)} + \tau_1^{(\nu)}(S_\nu(z) - S_\nu(a)) + \dots$$

in der Umgebung des Poles  $a$ . Hieraus ergibt sich für das Residuum im Pole  $a$  der Ausdruck  $\frac{A_\nu}{S_\nu'(a)}$ . Weil dies = 1 sein soll, so ist

$$A_\nu = S_\nu'(a).$$

Die Reihe (17) bekommt dadurch den Ausdruck

$$g(z, a) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{\lambda_{\epsilon_\mu}} \int_{\nu=1}^{\mu} \frac{dS_\nu(a)}{z - S_\nu(a)} \quad (18)$$

oder kürzer

$$g(z, a) = \sum_{\bar{\Gamma}} \frac{S'(a)}{z - S(a)}, \quad (18)'$$

welche in ihrer Abhängigkeit von  $a$  eine Poincarésche Reihe  $(-2)$ -ter Dimension ist. Wegen der Identität

$$\frac{S'(a)}{z - S(a)} = \int_{S^{-1}(z) - a}^{\int} \int_{S^{-1}(\infty) - a}^{\int} \quad (19)$$

kann (18)' auch in der Form

$$g(z, a) = \sum_{\bar{\Gamma}} \left[ \int_{S(z) - a}^{\int} - \int_{S(\infty) - a}^{\int} \right] \quad (18)''$$

geschrieben werden, wo  $S^{-1}$  durch  $S$  ersetzt worden ist. Betreffs der Reihenfolge der Glieder in (18) mag Folgendes bemerkt werden.

Wesentlich ist nur, dass man von einer unbegrenzt wachsenden Folge von positiven ganzen Zahlen

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

ausgeht und derselben eine zweite ebenfalls wachsende Folge von positiven ganzen Zahlen

$$N_1, N_2, N_3, \dots$$

derart zuordnet, dass die Gesamtlänge der allgemein an der Linie  $L_{q_\nu, N_\nu}$  beteiligten nichtmarkierten Kreise für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Der aus (13) bei gegebenem Wert von  $q$  für  $N$  erhaltene Wert ist allzu hoch. Man kann aber in jedem speziellen Falle einen genaueren Wert für  $N$  gewinnen, indem man die zu den Kreisen von  $L_{q, N}$  gehörigen Substitutionen wirklich berechnet, wodurch zugleich die genaue Länge der an der fraglichen Linie beteiligten Kreise erhalten wird.

Wir bemerken ferner, dass in der Reihe (18) nur die Substitutionen der Untergruppe  $\bar{\Gamma}$  vorkommen, woraus folgt, dass man nur diejenigen Polygone innerhalb  $L_{q, N}$  zu berücksichtigen hat, deren Index Null ist, was eine wesentliche Verminderung der Anzahl der Polygone bedeutet.

Nehmen wir wieder das numerische Beispiel der Modulgruppe.

Von den innerhalb der Linie  $L_{2, 4}$  liegenden 31 Polygonen sind nur die folgenden 5

$$I, \Sigma, \Sigma^{-1}, \Sigma^2, \Sigma^{-2}$$

vom Index Null. Für  $N = 5$  kommen dazu die folgenden 6 Polygone

$$T^{-1}\Sigma T, T^{-1}\Sigma^{-1}T, T\Sigma T^{-1}, T\Sigma^{-1}T^{-1}, \Sigma^3, \Sigma^{-3},$$

während die Gesamtanzahl der Polygone innerhalb der Linie  $L_{2, 5}$  gleich 87 ist.

### 7. §. Darstellung der automorphen Funktionen von $\Gamma$ durch Reihen.

22. Wir haben in der Reihe (18) einen Ausdruck für die von dem Logarithmus der Funktion  $x = f(z)$  linear abhängige Funktion (6), der von den Polen dieser Funktion in einfachster Weise abhängt. Der Übergang zur Funktion  $f(z)$  wird hiernach durch die Gleichung

$$f(z) = f(a) \frac{\varphi'(a)}{e^{\varphi(z, a)}} \quad (20)$$

vermittelt. Man kann aber auch die Funktion  $f(z)$  selbst und dadurch jede automorphe Funktion der gegebenen Fuchsschen Gruppe direkt durch Partialbruchreihen darstellen, welche durch die zu den Polen der Funktion gehörigen unendlichen Bestandteile bestimmt werden.

Wir gehen zu diesem Zweck von der Funktion

$$\frac{1}{x - x_0} \frac{dx_0}{dz_0} = \frac{e^{\varphi(z_0)}}{e^{\varphi(z)} - e^{\varphi(z_0)}} \frac{d\varphi(z_0)}{dz_0} \quad (21)$$

aus, welche eine Hauptfunktion von  $\Gamma$  ist, die im Bereich  $B$  den Pol  $z_0$  mit dem Residuum 1 hat. Aus der bekannten Reihe

$$\frac{e^{\varphi(z_0)}}{e^{\varphi(z)} - e^{\varphi(z_0)}} = \frac{1}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\varphi(z) - \varphi(z_0) - 2\pi im} + \frac{1}{\varphi(z) - \varphi(z_0) + 2\pi im} \right] \quad (22)$$

ergibt sich für (21) zunächst wegen

$$\varphi(T^m(z)) = \varphi(z) + 2\pi im$$

die Darstellung

$$\frac{1}{x - x_0} \frac{dx_0}{dz_0} = \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{dz_m}{dz_0} \frac{\varphi'(z_m)}{\varphi(z) - \varphi(z_m)} + \frac{dz_{-m}}{dz_0} \frac{\varphi'(z_{-m})}{\varphi(z) - \varphi(z_{-m})} \right], \quad (23)$$

wo

$$z_m = T^m(z_0), \quad z_{-m} = T^{-m}(z_0).$$

Im allgemeinen Glied von (23) stellt

$$\frac{\varphi'(z_m)}{\varphi(z) - \varphi(z_m)} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24)$$

eine Hauptfunktion von  $\bar{\Gamma}$  dar, deren einziger zu  $\bar{B}$  gehöriger Pol  $z_m$  im Polygon  $T^m$  liegt.

Es sei nun  $D$  ein Teilbereich von  $B$ , welcher den Pol von (21) nicht enthält. Um einen Ausdruck zu finden, welcher die Funktion (21) in  $D$  mit der vorgeschriebenen Genauigkeit  $\varepsilon$  approximiert, wählen wir zuerst  $m_\varepsilon$  so gross, dass im Bildbereich von  $D$  in der  $\varphi$ -Ebene

$$\left| \sum_{m=m_\epsilon+1}^{\infty} \left[ \frac{dz_m}{dz_0} \frac{\varphi'(z_m)}{\varphi(z) - \varphi(z_m)} + \frac{dz_{-m}}{dz_0} \frac{\varphi'(z_{-m})}{\varphi(z) - \varphi(z_{-m})} \right] \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (25)$$

Aus (18) ergibt sich für das allgemeine Glied von (23) der approximative Ausdruck

$$\frac{dz_m}{dz_0} \frac{\varphi'(z_m)}{\varphi(z) - \varphi(z_m)} = \frac{dz_m}{dz_0} \sum_{\nu=1}^{\nu_\epsilon} \frac{S'_\nu(z_m)}{z - S_\nu(z_m)} = \sum_{\nu=1}^{\nu_\epsilon} \frac{S'_{\nu,m}(z_0)}{z - S_{\nu,m}(z_0)}, \quad (26)$$

wo wir  $S_{\nu,m} = T^m S_\nu$  gesetzt haben. Aus (23) und (26) folgt für die Funktion (21) der approximative Ausdruck

$$\frac{1}{x - x_0} \frac{dx_0}{dz_0} = \sum_{\nu=1}^{\nu_\epsilon} \frac{S'_{\nu,0}(z_0)}{z - S_{\nu,0}(z_0)} + \sum_{m=1}^{m_\epsilon} \sum_{\nu=1}^{\nu_\epsilon} \left[ \frac{S'_{\nu,m}(z_0)}{z - S_{\nu,m}(z_0)} + \frac{S'_{\nu,-m}(z_0)}{z - S_{\nu,-m}(z_0)} \right], \quad (27)$$

der die genannte Funktion im Bereich  $D$  mit der Genauigkeit  $\epsilon$  darstellt, wenn  $\nu_\epsilon$  so gross gewählt wird, dass

$$\left| \sum_{\nu=\nu_\epsilon+1}^{\infty} \frac{S'_{\nu,\pm m}(z_0)}{z - S_{\nu,\pm m}(z_0)} \right| < \frac{\epsilon}{2(2m_\epsilon + 1)} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, m_\epsilon.$$

Durch den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  erhält man aus (27) eine bedingt konvergente Reihe, die wir kurz

$$\frac{1}{x - x_0} \frac{dx_0}{dz_0} = \sum_{\Gamma} \frac{S'(z_0)}{z - S(z_0)} \quad (28)$$

schreiben wollen, wo die Summierung sich über die Gesamtheit der Substitutionen von  $\Gamma$  in der oben angegebenen Reihenfolge erstreckt. In ihrer Abhängigkeit vom Pol  $z_0$  ist (28) eine Poincarésche Reihe  $(-2)$ -ter Dimension. Wegen (19) kann sie auch in der Form

$$\frac{1}{x - x_0} \frac{dx_0}{dz_0} = \sum_{\Gamma} \left[ \frac{1}{S(z) - z_0} - \frac{1}{S(\infty) - z_0} \right] \quad (29)$$

geschrieben werden.

Die Reihen (28) und (29) konvergieren offenbar gleichmässig in jedem innerhalb des Hauptkreises liegenden Bereich, nachdem die endlich vielen zu den dort möglicherweise vorhandenen Polen zugehörigen Glieder fortgelassen werden.

23. Indem man die Reihe (29) gliedweise in bezug auf den Parameter  $z_0$  differenziert, erhält man Reihen für automorphe Funktionen mit mehrfachen Polen, z. B.

$$\frac{1}{x-x_0} \frac{d^2 x_0}{dz_0^2} + \frac{1}{(x-x_0)^2} \left( \frac{dx_0}{dz_0} \right)^2 = \sum_I \left[ \frac{1}{(S(z)-z_0)^2} - \frac{1}{(S(\infty)-z_0)^2} \right], \quad (30)$$

$$\frac{1}{x-x_0} \frac{d^3 x_0}{dz_0^3} + \frac{3}{(x-x_0)^2} \frac{dx_0}{dz_0} \frac{d^2 x_0}{dz_0^2} + \frac{2}{(x-x_0)^3} \left( \frac{dx_0}{dz_0} \right)^3$$

$$= 2 \sum_I \left[ \frac{1}{(S(z)-z_0)^3} - \frac{1}{(S(\infty)-z_0)^3} \right],$$

welche sukzessiv nach den Potenzen

$$\frac{1}{(x-x_0)^2}, \quad \frac{1}{(x-x_0)^3}, \quad \dots$$

aufgelöst werden können. Aus den Reihen (29) und (30) erhält man durch lineare Verbindungen Reihen für jede automorphe Funktion von  $\Gamma$ , wenn die Pole der Funktion mit den zugehörigen unendlichen Bestandteilen gegeben sind.

Hinsichtlich der Berechnung der Koeffizienten

$$x_0, \quad \frac{dx_0}{dz_0}, \quad \frac{d^2 x_0}{dz_0^2}, \quad \dots \quad (31)$$

in den obigen Reihen bemerken wir Folgendes.

Weil die zum gegebenen Punktsystem (1)  $N:5$  gehörige polymorphe Funktion  $z(x)$  nur bis auf eine lineare, den Hauptkreis in sich selbst überführende Transformation bestimmt ist, kann man z. B. die drei den Punkten  $c_{n-1}, c_n, c_{n+1}$  entsprechenden Punkte  $z_{n-1}, z_n, z_{n+1}$  auf  $H$  beliebig wählen. Lassen wir jetzt in der Reihe (29)  $z$  gegen  $z_{n-1}$ , bzw.  $z_n$  konvergieren, so können wir die Werte der Größen

$$\frac{1}{1-x_0} \frac{dx_0}{dz_0}, \quad -\frac{1}{x_0} \frac{dx_0}{dz_0}$$

mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Hiernach kann man die Werte der Koeffizienten  $x_0, \frac{dx_0}{dz_0}$  und hiernach die Werte der übrigen Koeffizienten (31) aus (30) mit vorgeschriebener Genauigkeit berechnen.

8. §. Produktdarstellung für die automorphen Funktionen von  $\Gamma$ .

24. Die aus (6) und (18)' erhaltene Gleichung

$$g(z, t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(z) - \varphi(t)} = \sum_{\Gamma} \frac{S'(t)}{z - S(t)}$$

führt durch Integration in bezug auf den Parameter  $t$  zwischen den innerhalb des Hauptkreises liegenden Punkten  $a$  und  $b$  zur Gleichung

$$\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{\varphi(z) - \varphi(t)} = \sum_{\Gamma} \log \frac{z - S(a)}{z - S(b)},$$

woraus folgt, dass

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(b)} = \prod_{\Gamma} \frac{z - S(a)}{z - S(b)} \tag{32}$$

und ferner

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(b)} \cdot \frac{\varphi(z_0) - \varphi(a)}{\varphi(z_0) - \varphi(b)} = \prod_{\Gamma} \left[ \frac{z - S(a)}{z - S(b)} \cdot \frac{z_0 - S(a)}{z_0 - S(b)} \right], \tag{32}'$$

wo  $z_0$  ein Punkt innerhalb  $H$  ist. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses ist

$$\frac{z - S(a)}{z - S(b)} \cdot \frac{z_0 - S(a)}{z_0 - S(b)} = \frac{S^{-1}(z) - a}{S^{-1}(z) - b} \cdot \frac{S^{-1}(z_0) - a}{S^{-1}(z_0) - b}, \tag{33}$$

woraus folgt, dass (32)' auch in der Form

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(b)} \cdot \frac{\varphi(z_0) - \varphi(a)}{\varphi(z_0) - \varphi(b)} = \prod_{\Gamma} \left[ \frac{S(z) - a}{S(z) - b} \cdot \frac{S(z_0) - a}{S(z_0) - b} \right] \tag{32}''$$

geschrieben werden kann. Damit haben wir eine bedingt konvergente Produktdarstellung für diejenige Hauptfunktion von  $\bar{\Gamma}$ , die in den mit  $a$  bzw.  $b$  äquivalenten Punkten eine einfache Nullstelle bzw. einen einfachen Pol hat, und in den mit  $z = z_0$  äquivalenten Punkten den Wert eins annimmt.

25. Um einen analogen Ausdruck für die Hauptfunktion

$$\frac{x - A}{x - B} \cdot \frac{x_0 - A}{x_0 - B} = \frac{f(z) - f(a)}{f(z) - f(b)} \cdot \frac{f(z_0) - f(a)}{f(z_0) - f(b)} \tag{34}$$

von  $\Gamma$  zu gewinnen, gehen wir von der bekannten Produktdarstellung der Sinusfunktion

$$\sin u = u \prod_{m=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{u}{m\pi} \right) \left( 1 + \frac{u}{m\pi} \right) \right]$$

aus, woraus für die Funktion

$$\frac{x - A}{x - B} = \frac{e^{\varphi(z)} - e^{\varphi(a)}}{e^{\varphi(z)} - e^{\varphi(b)}} = e^{\frac{1}{2}(\varphi(a) - \varphi(b))} \frac{\sin \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{2i}}{\sin \frac{\varphi(z) - \varphi(b)}{2i}}$$

der Ausdruck

$$\frac{x - A}{x - B} = e^{\frac{1}{2}(\varphi(a) - \varphi(b))} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(b)} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\varphi(z) - \varphi(a) - 2\pi im)(\varphi(z) - \varphi(a) + 2\pi im)}{(\varphi(z) - \varphi(b) - 2\pi im)(\varphi(z) - \varphi(b) + 2\pi im)} \quad (35)$$

erhalten wird. Aus (32) ergibt sich für das allgemeine Glied von (35) die Darstellung

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(a) - 2\pi im}{\varphi(z) - \varphi(b) - 2\pi im} = \frac{\varphi(z) - \varphi(T^m(a))}{\varphi(z) - \varphi(T^m(b))} = \prod_{\Gamma} \frac{z - S(T^m(a))}{z - S(T^m(b))}$$

Hieraus ergibt sich wegen (33) für die Funktion (34) der Ausdruck

$$\frac{f(z) - f(a)}{f(z) - f(b)} \cdot \frac{f(z_0) - f(a)}{f(z_0) - f(b)} = \prod_{\Gamma} \left[ \frac{S(z) - a}{S(z) - b} \cdot \frac{S(z_0) - a}{S(z_0) - b} \right], \quad (36)$$

wo die Glieder in derselben Reihenfolge wie in der Reihe (29) zu nehmen sind. Zur Darstellung (36) kann man natürlich auch dadurch gelangen, dass man die Reihe (29) gliedweise in bezug auf den Parameter  $z_0$  integriert.

Aus den Ausdrücken der Form (36) gelangt man durch Produktbildung zur Darstellung jeder automorphen Funktion von  $\Gamma$  als bedingt konvergentes Produkt, wenn die Null- und Unendlichkeitspunkte gegeben sind.

Wir wollen zum Abschluss noch betonen, dass die Reihenfolge der Glieder in unseren obigen Reihen und Produkten nicht von der zu bildenden Funktion, sondern nur von der Gruppe  $\Gamma$  allein wesentlich abhängig ist.

## IV.

9. §. Neue Herleitung der Reihen für  $g(z, a)$ .

26. Wie schon in der Einleitung erwähnt, gelangt man zu den im Vorhergehenden betrachteten Reihen auch dadurch, dass man die der gegebenen Fuchs'schen Gruppe  $\Gamma$  entsprechende fuchssoide Gruppe  $\bar{\Gamma}$  durch eine unendliche Folge von Fuchsschen Gruppen

$$\Gamma_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

approximiert, die Untergruppen von  $\bar{\Gamma}$  sind, deren Geschlecht Null ist, und für welche der Hauptkreis kein Grenzkreis ist. Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn man allgemein  $\Gamma_h$  als diejenige Gruppe definiert, die von den endlich vielen zu (30) in N: 10 gehörigen Substitutionen

$$T^{-\nu} \Sigma_i^{\pm 1} T^{\nu} \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (h-1) \end{array} \right) \quad (2)$$

erzeugt wird.

In der Tat folgt aus der Definition der Gruppe  $\Gamma_h$  zunächst, dass dieselbe eine Untergruppe von  $\Gamma$  ist. Weil ferner allgemein die Substitution (2) mit  $\pm$  Zeichen die Seiten

$$T^{\nu}(d_i^-), T^{\nu}(d_i^+) \quad (3)$$

des Bereichs  $T^{\nu}(B)$  einander derart paarweise zuordnet, dass das Innere des ersteren auf das Äussere des letzteren abgebildet wird, so ist offenbar der von den Kreisen (3) und dem zwischen denselben liegenden Bogen  $\mathcal{A}^{(h)}$  von  $H$  begrenzte Bereich  $B_h$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma_h$ , woraus hervorgeht, dass  $H$  kein Grenzkreis ist. Wenn zu  $B_h$  sein Spiegelbild in bezug auf  $H$  hinzugefügt wird, erhält man einen Bereich  $B'_h$ , der ein Fundamentalbereich von  $\Gamma_h$  ist, wenn man die Gesamtheit der Punkte der  $z$ -Ebene und nicht nur diejenigen innerhalb  $H$  berücksichtigt.

Dass  $\Gamma_h$  das Geschlecht  $p = 0$  hat, ergibt sich aus der bekannten Formel<sup>1</sup>

$$p = n_h - q_h \quad (n_h = (n-1)(2h-1)),$$

wo  $2n_h$  die Anzahl der innerhalb des Hauptkreises liegenden Seiten von  $B_h$  und  $q_h$  die Anzahl der geschlossenen Zyklen bezeichnet. Hier ist  $q_h = n_h$ , weil

<sup>1</sup> H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsians (Acta mathematica, I (1882), S. 43).

jeder Punkt  $T^{\pm v}(P_i)$  für sich allein einen Zyklus bildet, während der Zyklus der Punkte  $T^{\pm v}(Q_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) offen ist, und es ist somit  $p = 0$ .

27. Durch den Häufungspunkt  $P_n$  der Ecken des Fundamentalbereichs  $\bar{B}$  der Gruppe  $\bar{I}$  wird der zu  $B_h$  gehörige Bogen  $\mathcal{A}^{(h)}$  in zwei Teile  $\mathcal{A}^{(+h)}$  und  $\mathcal{A}^{(-h)}$  zerlegt, denen im Netze der Gruppe  $I$  die mit  $T^h$  und  $T^{-h}$  bezeichneten Orthogonalkreise von  $H$  entsprechen (Fig. 4).

Es sei nun

$$S = \prod_{v=1}^k (T^{-\lambda_v} \Sigma_{i_v} T^{\lambda_v}), \quad (|\lambda_v| \leq h-1) \quad (4)$$

wo  $\Sigma_{i_v} = \Sigma_{i_v}^{\pm 1}$ , eine beliebige Substitution von  $I_h$ . Das zugehörige Polygon enthält einen Bogen  $\mathcal{A}_S^{(h)}$  von  $H$ , welcher durch den darauf liegenden Bildpunkt von  $P_n$  in zwei Teile  $\mathcal{A}_S^{(+h)}$  und  $\mathcal{A}_S^{(-h)}$  zerlegt wird. Die über diese Teilbogen konstruierten Orthogonalkreise haben offenbar als Seiten des zu  $I$  gehörigen Polygonnetzes resp. den Ausdruck

$$T^h S \text{ und } T^{-h} S \quad (5)$$

und haben somit den Index  $+h$  bzw.  $-h$ .

Wir behaupten, dass die Kreise (5) gerade die Linie  $L_h$  ausmachen.

Wir betrachten zu diesem Zweck die Ausdrücke derjenigen Kreise, welche die Kreise (5) umschliessen. Sie können in der Form

$$S' \prod_{v=v_0+1}^k T^{-\lambda_v} \Sigma_{i_v} T^{\lambda_v} \quad (6)$$

geschrieben werden, wo  $S'$  einen Ausdruck der Form

$$T^{-\mu} \Sigma_{i_{v_0}} T^{\lambda_{v_0}} \text{ oder } T^{\mu}, \quad (|\mu| < h, \mu \lambda_{v_0} \leq 0)$$

besitzt. Weil nun der Index von  $S'$  absolut  $\leq h-1$  ist, so ist dies auch mit dem Index der Kreise (6) der Fall. Nach der Definition der Linie  $L_h$  in N: 13 gehört daher jeder Kreis (5) zu derselben.

Es sei umgekehrt  $S$  ein zu  $L_h$  gehöriger Kreis. Dann ist

$$S = T^{\pm h} \bar{S},$$

wo  $\bar{S}$  als Substitution von  $\bar{I}$  sich in der Form

$$\bar{S} = \prod_{\nu=1}^k (T^{-\lambda_\nu} \Sigma_{i_\nu} T^{\lambda_\nu}) \tag{7}$$

als Produkt der Erzeugenden von  $\bar{\Gamma}$  darstellen lässt. Weil der Index der umschliessenden Kreise absolut  $< h$  sein soll, so muss nach den obigen Überlegungen jede der Zahlen  $\lambda_\nu$  absolut  $< h$  sein. Somit gehört jeder Faktor von (7) und folglich auch (7) selbst zur Gruppe  $\Gamma_h$ , w. z. b. w.

Nach N: 12 ist die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{A}S_\nu^{(h)} \tag{8}$$

der aus  $\mathcal{A}^{(h)}$  durch die verschiedenen Substitutionen erhaltenen Bogen (5) gleich  $2\pi$ . Die komplementäre Menge, diejenige der Grenzpunkte von  $\Gamma_h$ , hat daher das lineare Mass Null.

28. Nach der allgemeinen Theorie hat  $\Gamma_h$  eine eindeutig bestimmte Hauptfunktion

$$g_h(z, a), \tag{9}$$

d. h. eine im Bereich  $B'_h$  einwertige automorphe Funktion, die im Punkte  $z = a$  einen einfachen Pol mit einer Entwicklung der Form

$$g_h(z, a) = \frac{1}{z - a} + c_1^{(h)}(z - a) + c_2^{(h)}(z - a)^2 + \dots$$

besitzt. Wir wählen den Punkt  $a$  im Innern des Bereichs  $B$ . Ist  $d$  sein kürzester Abstand vom Rande von  $B$ , so hat der absolute Wert der Funktion (9), welche  $B_h$  schlicht abbildet, auf dem Kreise  $|z - a| = d$  und somit auch auf den Seiten der Polygone von  $\Gamma$  eine endliche von  $d$  allein abhängige obere Grenze  $M_d$ .<sup>1</sup>

Es sei nun  $D$  ein Bereich innerhalb  $H$ , der keinen Pol von (9) enthält. Um für die Funktion (9) einen Ausdruck zu finden, welcher dieselbe im Bereich  $D$  mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit darstellt, wählen wir zuerst eine kleine positive Grösse  $\varepsilon$  beliebig und dann die ganze Zahl  $N = ph$  derart, dass

$$2\pi Q_0(1 - r^h) \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{Q_h}{k}\right) < \varepsilon \tag{10}$$

---

<sup>1</sup> P. KOEBE, *Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven* (Math. Ann. 69 (1910), S. 46).

wo links der Ausdruck (36) von  $N:12$  auftritt. Wir konstruieren hiernach die Linie  $L_{h,N}$  und bezeichnen mit  $B_{h,N}$  die Summe derjenigen endlich vielen Bildpolygone von  $B'_h$ , welche die zu  $L_{h,N}$  gehörigen markierten Kreise, also die Kreise des Index  $\pm h$  und der Stufe  $\leq N$  enthalten. Wie leicht einzusehen ist  $B_{h,N}$  ein mehrfach zusammenhängender Bereich, dessen Rand  $l_{h,N}$  aus den zu  $L_{h,N}$  gehörigen nichtmarkierten Kreisen und ihren Spiegelbildern in bezug auf  $H$  besteht. Für die Länge  $\lambda_{h,N}$  von  $l_{h,N}$  erhält man wegen (10) die Abschätzung

$$\lambda_{h,N} < \varrho_0 \varepsilon, \quad (11)$$

wo  $\varrho_0$  eine endliche vom Fundamentalbereich  $B$  abhängige Grösse ist.

Durch Anwendung der Cauchyschen Formel auf die Funktion (9) im Bereich  $B_{h,N}$  erhält man die Gleichung

$$g_h(z, a) = \sum_{B_{h,N}} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{h,N}} \frac{g_h(\zeta, a)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (12)$$

wo die Summierung über die Gesamtheit derjenigen Substitutionen von  $\Gamma_h$  zu erstrecken ist, deren zugeordnete Polygone im Bereich  $B_{h,N}$  liegen.

Wir wählen jedenfalls  $h$  und  $N$  so gross, dass  $D$  innerhalb des Bereichs  $B_{h,N}$  liegen wird. Ist  $\mathcal{A}$  der kürzeste Abstand des Randes von  $B_{h,N}$  und  $D$ , so gilt in  $D$  wegen (11) die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{h,N}} \frac{g_h(\zeta, a)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M_d}{\mathcal{A}} \varrho_0 \varepsilon. \quad (13)$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich hieraus für (12) die Reihe

$$g_h(z, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{B_{h,N}} \frac{S'(a)}{z - S(a)}, \quad (14)$$

welche als Poincarésche Reihe ( $-2$ )-ter Dimension sogar absolut konvergiert. Wir haben zugleich in (13) ein Kriterium für die Schnelligkeit der Konvergenz von (14).

29. Wir betrachten hiernach die unendliche Folge der Hauptfunktionen von (1):

$$x_h = g_h(z, a) \quad (15)$$

und behaupten, dass diese Funktionen in jedem Bereich innerhalb  $H$  gleichmässig gegen die entsprechende Hauptfunktion

$$x' = g(z, a) = \frac{\varphi'(a)}{\log x - \varphi(a)} \tag{16}$$

von  $\bar{\Gamma}$  konvergieren.

Wir bemerken zu diesem Zweck, dass die Funktion (16) als automorphe Funktion von  $\bar{\Gamma}$  zugleich eine automorphe Funktion der Untergruppe  $\Gamma_h$  von  $\bar{\Gamma}$  ist, und daher eine eindeutige Funktion der Hauptfunktion (15) von  $\Gamma_h$ . Betrachten wir jetzt die einwertige inverse Funktion

$$x_h = x_h(x'). \tag{17}$$

Dieselbe hat im Punkte  $x' = \infty$  eine Entwicklung der Form

$$x_h(x') = x' + \frac{\alpha_1}{x'} + \frac{\alpha_2}{x'^2} + \dots$$

Ferner ist sie regulär in jedem endlichen von den Punkten

$$\frac{\varphi'(a)}{\log c_i + 2\pi im - \varphi(a)} \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{matrix} \right) \tag{18}$$

verschiedenen Punkt. Wir behaupten, dass (17) noch in denjenigen unter den Punkten (18) regulär ist, für welche  $|m| < h$  ist.

In der Tat, wenn  $x'$  einen der genannten Punkte umkreist, so erleidet  $z$  eine lineare Substitution, nämlich diejenige parabolische erzeugende Substitution von  $\bar{\Gamma}$ , deren Fixpunkt mit dem zugeordneten Eckpunkt von  $\bar{B}$  zusammenfällt. Die betreffende Substitution gehört aber für  $|m| < h$  zur Untergruppe  $\Gamma_h$ , woraus folgt, dass die Funktion (17) in der Umgebung der genannten Punkte eindeutig ist. Aus der Einwertigkeit der Funktion (17) folgt dann, dass sie in den genannten Punkten (18) regulär ist. Weil der absolute Wert der Grössen (18) für  $|m| \geq h$  eine obere Grenze der Form  $\frac{\varrho}{h}$  besitzt, so gilt im Bereich

$$|x'| > \frac{\varrho}{h}$$

nach einem bekannten Satz von KOEBE<sup>1</sup> eine Ungleichung der Form

$$|x_h(x') - x'| < \frac{\varrho'}{h} \tag{19}$$

---

<sup>1</sup> Vgl. die oben zitierte Arbeit von KOEBE.

30. Wir gehen jetzt von einer monotonen, gegen Null konvergierenden unendlichen Folge positiver Grössen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$$

aus und ordnen allgemein der Grösse  $\varepsilon_\nu$  die ganzen Zahlen  $h_\nu, N_\nu$  derart zu, dass erstens

$$\frac{\rho'}{h_\nu} < \frac{\varepsilon_\nu}{2}$$

und zweitens

$$\lambda_{h_\nu, N_\nu} < \frac{\pi A}{M_d} \varepsilon_\nu.$$

Wegen der ersten Bedingung ist im Bereich  $D$

$$|g(z, a) - g_{h_\nu}(z, a)| < \frac{\varepsilon_\nu}{2}, \quad (20)$$

und wegen der zweiten Bedingung ist nach (12) und (13)

$$\left| g_{h_\nu}(z, a) - \sum_{B_{h_\nu, N_\nu}} \frac{S'(a)}{z - S(a)} \right| < \frac{\varepsilon_\nu}{2}. \quad (21)$$

Aus (20) und (21) folgt für die Funktion  $g(z, a)$  im Bereich  $D$  die Ungleichung

$$\left| g(z, a) - \sum_{B_{h_\nu, N_\nu}} \frac{S'(a)}{z - S(a)} \right| < \varepsilon_\nu,$$

woraus folgt, dass in  $D$  gleichmässig

$$g(z, a) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{B_{h_\nu, N_\nu}} \frac{S'(a)}{z - S(a)} \quad (22)$$

ist. Damit haben wir wieder unsere frühere Darstellung (18) N: 21 für die Funktion  $g(z, a)$  gefunden.

V.

10. §. Uniformisierung beliebiger algebraischer Riemannscher Flächen.

31. Es sei

$$R(x, y) = 0 \quad : R \quad (1)$$

eine beliebige über die  $x$ -Ebene verbreitete  $q$ -blättrige algebraische Riemannsche Fläche und

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \quad (2)$$

die  $x$ -Koordinaten ihrer Windungspunkte. Ferner sei  $z(x)$  diejenige früher betrachtete polymorphe Funktion, die ihre Windungspunkte unendlich hoher Ordnung in den Punkten (2) besitzt. Nach dem Obigen ist  $x(z)$  eine innerhalb des Hauptkreises

$$|z| = 1 \quad : H$$

meromorphe Funktion. Dies ist aber auch mit der Funktion  $y(z)$  der Fall, die erst nach Fixierung ihres Wertes in irgend einem gegebenen Punkt bestimmt wird. Denn jedem Punkt innerhalb  $H$  entspricht ein von den Punkten (2) verschiedener Punkt der  $x$ -Ebene, und in einem solchen Punkt ist die Funktion  $y(x)$  meromorph.

Während  $x(z)$  eine automorphe Funktion der zur Funktion  $z(x)$  gehörigen Fuchsschen Gruppe  $I$  vom Geschlecht Null ist, ist  $y(z)$  eine automorphe Funktion für eine Untergruppe  $\widehat{I}$  von  $I$ , deren Index gleich  $q$  und deren Geschlecht gleich dem Geschlecht  $p$  der Riemannschen Fläche (1) ist. Als Fundamentalbereich von  $\widehat{I}$  kann man ein Kreisbogenpolygon  $\widehat{B}$  wählen, welches aus  $q$  Polygonen des zu  $I$  gehörigen Netzes zusammengesetzt ist. Das Funktionenpaar

$$x(z), y(z) \quad (3)$$

vermittelt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von  $\widehat{B}$  und  $R$ , vorausgesetzt, dass die mit einander konjugierten Randpunkte von  $\widehat{B}$  als identisch angesehen werden.

Handelt es sich z. B. um die hyperelliptische Fläche

$$y^2 = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}),$$

so erhält man einen Fundamentalbereich für die zugeordnete Gruppe  $\widehat{\Gamma}$ , wenn man den Fundamentalbereich  $B$  von  $\Gamma$  mit dem Bereich  $\Sigma(B)$  vereinigt, wo  $\Sigma$  eine beliebige erzeugende Substitution von  $\Gamma$ , z. B.  $\Sigma_n$  bezeichnet. Die Erzeugenden von  $\widehat{\Gamma}$  sind dann

$$\Sigma_i^{\pm 1} \Sigma_n, \Sigma_n^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

und die inversen Substitutionen.

32. Es sei jetzt  $F(x, y)$  eine beliebige rationale Funktion auf  $R$ . Als Funktion von  $z$

$$F(x, y) = F(z) \quad (4)$$

ist sie meromorph für  $|z| < 1$  und eine automorphe Funktion von  $\Gamma$ . Um für dieselbe einen Ausdruck zu finden, bilden wir die Funktion

$$G(z) = F(z)g(z), \quad (5)$$

wo  $g(z)$  die in N: 18 definierte Funktion  $g(z, a)$  bezeichnet, welche eine automorphe Funktion der früher mit  $\Gamma$  bezeichneten Untergruppe von  $\Gamma$  ist. Es seien

$$z_1, z_2, \dots, z_\mu \quad (6)$$

die endlich vielen Pole von  $F(z)$  im Bereich  $\widehat{B}$ . Wir nehmen der Kürze halber an, dass sämtliche Pole einfach sind.

Wir wählen ferner  $a$  von den Punkten (6) verschieden. Dann ist (5) eine mit lauter einfachen Polen behaftete Funktion, die ihre Pole in den Punkten

$$\widehat{S}(z_\lambda) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \mu) \quad (7)$$

und

$$\overline{S}(a) \quad (8)$$

hat, wo  $\widehat{S}$  die Substitutionen von  $\widehat{\Gamma}$  und  $\overline{S}$  diejenigen von  $\overline{\Gamma}$  durchläuft.

Wir schreiben zur Bestimmung der Residuen der Funktion (5) in den Polen (7) die Substitution  $\widehat{S}$  in der Form

$$\widehat{S} = T^m \overline{S},$$

wo  $m$  den Index von  $\widehat{S}$  bezeichnet. Nach (2) in N: 17 ist dann

$$g(\widehat{S}(z_\lambda)) = g(T^m(z_\lambda)) = \frac{g(z_\lambda)}{1 + m\omega g(z_\lambda)},$$

wo  $\omega = \frac{2\pi i}{\varphi'(\bar{a})}$ .

Ist nun  $r_\lambda$  das Residuum der Funktion  $F'(z)$  im Pole  $z_\lambda$ , so ist das Residuum derselben im Pole  $\widehat{S}(z_\lambda)$  nach N: 21 gleich  $r_\lambda \widehat{S}'(z_\lambda)$ . Somit ist das Residuum der Funktion (5) im Pole  $\widehat{S}(z_\lambda)$  gleich

$$r_\lambda(\widehat{S}) = \frac{r_\lambda \widehat{S}'(z_\lambda) g(z_\lambda)}{1 + m\omega g(z_\lambda)}.$$

Weil ferner das Residuum der Funktion  $g(z, a)$  im Punkte  $S(a)$  gleich  $\widehat{S}'(a)$  ist, so ist dasjenige von (5) gleich  $F_v \widehat{S}'(a)$ , wo  $F_v = F'(S(a))$  einen von den  $q$  zu  $x(a)$  gehörigen Werten von  $F(x, y)$  bezeichnet.

33. Es sei nun wieder  $D$  ein Bereich im Innern von  $H$ , der keinen Pol der Funktion (5) enthält. Um für die Funktion (5) in  $D$  einen Ausdruck zu finden, welcher dieselbe mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit darstellt, nehmen wir zuerst an, dass kein Pol der Funktion (5) mit irgend einem Eckpunkt der Polygone zusammenfällt, oder was dasselbe ist, dass die Funktion  $F(x, y)$  in den über die Stellen (2) liegenden Punkten der Riemannschen Fläche endlich bleibt. Wir können dann ohne Einschränkung annehmen, dass der absolute Wert der Funktion (5) auf den Polygonseiten des Netzes von  $\Gamma$  ein endliches Maximum  $M$  hat, weil man andernfalls die Polygonseiten einer Abänderung unterwerfen könnte.

Weil das Maximum von  $g(z)$  auf  $L_h$  für  $h \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, und  $|F(z)| \leq M$ , so konvergiert auch das Maximum von  $G(z)$  dabei gegen Null. Wie in N: 19 folgt daraus, dass der absolute Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h,N}} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

auf der Kurve  $L_{h,N}$  bei hinreichend grossen Werten der ganzen Zahlen  $h$  und  $N$  kleiner als eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl  $\epsilon$  wird. Sind die genannten Zahlen zugleich so gewählt, dass die Linie  $L_{h,N}$  ausserhalb des Bereichs  $D$  verlaufen wird, so kann man die Cauchysche Integralformel anwenden und erhält für die Punkte  $z$  von  $D$  die Gleichung

$$\left| G(z) - \sum_{L_{h,N}} \frac{r_\lambda(\widehat{S})}{z - \widehat{S}(z_\lambda)} - \sum_{L_{h,N}} \frac{F_v \widehat{S}'(a)}{z - S(a)} \right| < \epsilon, \tag{9}$$

wo die beiden Summierungen über die Gesamtheit der innerhalb der Linie  $L_{h, N}$  liegenden Pole

$$\widehat{S}(z_\lambda) \text{ bzw. } \overline{S}(a)$$

zu erstrecken sind.

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich aus (9) für die Funktion (5) in jedem Punkt innerhalb des Hauptkreises eine bedingt konvergente Reihe, die wir kurz

$$G(z) = \sum \frac{r_\lambda(\widehat{S})}{z - \widehat{S}(z_\lambda)} + \sum \frac{F_\nu S'(a)}{z - \overline{S}(a)} \quad (10)$$

schreiben wollen.

Aus (5) ergibt sich für die Funktion  $F(z)$  der Ausdruck

$$F(z) = \frac{G(z)}{g(z)}, \quad (11)$$

der die gegebene automorphe Funktion  $F(z)$  von  $\widehat{I}$  als Quotient zweier bedingt konvergenter Reihen darstellt, von denen die im Nenner stehende Funktion  $g(z)$  von der Funktion  $F(z)$  unabhängig ist.

Wir haben oben angenommen, dass die Funktion  $F(z)$  in den Ecken der Polygone endlich bleibt. Ist dies nicht der Fall, so kann man  $G(z)$  durch die Funktion

$$\overline{G}(z) = G(z) \prod_{i=1}^{n+1} (x(z) - x_i)^{\lambda_i} \quad (12)$$

ersetzen, wo die ganzen Exponenten  $\lambda_i \geq 0$  stets so gewählt werden können, dass (12) in den Eckpunkten endlich ist. Man kann jetzt die Funktion  $\overline{G}(z)$  sowie

die Funktion  $g(z) \prod_{i=1}^{n+1} (x(z) - x_i)^{\lambda_i}$  in eine bedingt konvergente Reihe der Form (10)

entwickeln. Aus

$$F(z) = \frac{\overline{G}(z)}{g(z) \prod_{i=1}^{n+1} (x(z) - x_i)^{\lambda_i}}$$

ergibt sich dann wieder für die Funktion  $F(z)$  eine Darstellung als Quotient von zwei bedingt konvergenten Reihen.

