ÜBER DIE IRREGULÄREN INTEGRALE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN

VON

J. HORN
in CHARLOTTENBURG.

Im 8. Band der Acta mathematica hat sich Herr POINCARÉ mit der asymptotischen Darstellung der irregulären Integrale der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten durch die im allgemeinen divergenten Normalreihen beschäftigt. In der Differentialgleichung

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

seien die Coefficienten ganze rationale Functionen von x und zwar P_0 vom Grad m, P_λ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ höchstens von Grad $m + \lambda k$; dann ist $x = \infty$ eine singuläre Stelle der Unbestimmtheit[1] für die Integrale, und die Differentialgleichung hat an dieser Stelle den Rang $p = k + 1$.[2] Für eine Differentialgeichung vom Rang 1, in welcher der Grad der Coefficienten P_λ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ denjenigen von P_0 nicht übersteigt, untersucht Herr POINCARÉ[3] das Verhalten der Integrale bei der Annäherung der Veränderlichen x an die Stelle $x = \infty$ vermittels der Laplace'schen

---

[1] Bezeichnung von Herrn FUCHS (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1886). Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen.*

[2] POINCARÉ, a. a. O.

[3] American Journal, Bd. 7; Acta math. Bd. 8.

Transformation.[1] Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung vom Rang p ($p > 1$) wird auf eine Differentialgleichung $n^{p\,\text{ter}}$ Ordnung vom Rang 1 zurückgeführt; aus den Ausdrücken der Integrale y der ursprünglichen Gleichung durch geeignete Integrale der neuen Gleichung vom Rang 1 schliesst Herr POINCARÉ, dass, wenn die Veränderliche x mit einem bestimmten Argument ins Unendliche geht, das allgemeine Integral y durch eine der n Normalreihen asymptotisch dargestellt wird. Aber gerade die Differentialgleichungen *höheren Ranges* bedürfen noch einer eingehenderen Untersuchung, welche ich in dem vorliegenden Aufsatz zunächst für lineare Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* in Anknüpfung an die citirten Arbeiten des Herrn POINCARÉ durchführe.[2] Abgesehen davon, dass bei Herrn POINCARÉ die auf Differentialgleichungen höheren Ranges bezüglichen Untersuchungen weniger vollständig geführt sind als diejenigen für den Rang 1, beschränke ich mich nicht auf Wege, welche mit einem bestimmten Argument nach der Stelle $x = \infty$ gehen, sondern ich suche das *Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der singulären Stelle* so weit zu ergründen,[3] dass es gelingt, Aufschluss über die *Lage der Nullstellen in der Umgebung der Unbestimmtsheitsstelle* zu gewinnen und den *Begriff des Ranges als Verallgemeinerung des Begriffs des Geschlechts einer ganzen transcendenten Function* erscheinen zu lassen.

---

[1] Im 50. Bd. der Math. Annalen führe ich die auf Differentialgleichungen vom Rang 1 bezüglichen Untersuchungen in einer Richtung weiter, welche ich im 49. Bd. bereits für den einfachsten Fall, die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten, eingeschlagen habe.

[2] Im 118. Bd. von Crelles Journal habe ich die Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Rang $k + 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right)\frac{dy}{dx} + x^{2k}\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots\right)y = 0$$

ohne Benutzung der Laplace'schen Transformirten nach einer Methode untersucht, welche sich, wie ich im 119. Bd. zeige, auf nicht lineare Differentialgleichungen übertragen lässt. Die in der vorliegenden Arbeit behandelte Differentialgleichung ist insofern specieller, als ihre Coefficienten rational sind; ich kann jedoch unter dieser Beschränkung mit Benutzung bestimmter Integrale das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung weiter verfolgen, als es in meiner früheren Arbeit geschehen ist.

[3] Man vergleiche die Untersuchung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten im 49. Bd. der Math. Ann.

Die hier geführten Untersuchungen, die sich für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung besonders übersichtlich gestalten, gedenke ich in einer späteren Arbeit auf die allgemeinste lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auszudehnen.

---

§ 1.

Die Differentialgleichung

$$P_0 \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0 \tag{A}$$

habe als Coefficienten ganze rationale Funktion von den Graden m, $m + p - 1$, $m + 2p - 2$

$$P_0 = x^m + \ldots,$$

$$P_1 = a_1 x^{m+p-1} + \ldots,$$

$$P_2 = a_2 x^{m+2p-2} + \ldots,$$

so dass sie an der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ den Rang p besitzt.[1] Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

habe (in den drei ersten Paragraphen) zwei *verschiedene* Wurzeln α_1, α_2, so dass die Differentialgleichung (A) durch zwei Normalreihen

$$S_i = e^{\frac{\alpha_i x^p}{p} + \frac{\alpha_{i1} x^{p-1}}{p-1} + \ldots + \alpha_{i,p-1} x} x^{\rho_i} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \ldots \right) \qquad (i=1,2)$$

formell befriedigt wird. Wir setzen α_1 und α_2 als reell und $\alpha_1 > \alpha_2$ voraus, was durch eine Substitution von der Form

$$y = e^{\frac{\gamma x^p}{p}} y', \qquad x = cx'$$

erreicht werden kann.

---

[1] Der erste Coefficient von P_1 und die beiden ersten Coefficienten von P_2 sollen nicht gleichzeitig verschwinden.

Ist $y = f(x)$ ein Integral von (A) und ε eine primitive p^{te} Einheitswurzel, so genügt

$$y_\lambda = f(\varepsilon^\lambda x) \qquad (\lambda = 1, \ldots, p-1)$$

einer Differentialgleichung

$$(\mathrm{A}_\lambda) \qquad P_{\lambda 0}\frac{d^2 y}{dx^2} + P_{\lambda 1}\frac{dy}{dx} + P_{\lambda 2}y = 0,$$

welche durch die Normalreihen

$$S_1(\varepsilon^\lambda x)\ ,\ S_2(\varepsilon^\lambda x)$$

formell befriedigt wird.. Das Product

$$u = y y_1 \ldots y_{p-1}$$

genügt einer linearen Differentialgleichung $2^{p\text{ter}}$ Ordnung, welche, wenn

$$x^p = t$$

gesetzt wird, die Form

$$(\mathrm{B}) \qquad Q_0\frac{d^{2^p} u}{dt^{2^p}} + Q_1\frac{d^{2^p-1} u}{dt^{2^p-1}} + \ldots + Q_{2^p} u = 0$$

annimmt und worin Q_0 im allgemeinen [1] nicht identisch verschwindet; $Q_0, Q_1, \ldots$ sind ganze rationale Functionen von t

$$Q_\mu = b_\mu t^q + \ldots, \qquad (\mu = 0, 1 \ldots 2^p)$$

wo b_0 von Null verschieden angenommen werden kann, da die Differentialgleichung (B) vom Rang 1 ist.[2] Die Gleichung (B) wird durch die 2^p Reihen

$$S_{\lambda_0}\left(t^{\frac{1}{p}}\right) S_{\lambda_1}\left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}}\right) \ldots S_{\lambda_{p-1}}\left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}}\right),$$

wo jeder der Indices $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ den Werth 0 oder 1 haben kann, formell befriedigt, worunter sich die beiden Normalreihen von Rang 1

$$T_i = S_i\left(t^{\frac{1}{p}}\right) S_i\left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}}\right) \ldots S_i\left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}}\right) = e^{a_i' t} t^{\rho'}\left(D_i + \frac{D_{i1}}{t} + \frac{D_{i2}}{t^2} + \ldots\right) \qquad (i = 1, 2)$$

[1] Der hier ausgeschlossene Ausnahmefall $Q_0 = 0$ wird in § 2 behandelt.

[2] Poincaré, a. a. O., § 5. — Schlesinger, Handbuch Bd. I, S. 355.

befinden. Diejenigen Reihen, in welchen k der Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ gleich 1, die übrigen $p-k$ gleich 0 sind, enthalten einen Exponentialfactor von der Form

$$e^{\frac{k\alpha_1+(p-k)\alpha_2}{p}t+\ldots}.$$

Die charakteristische Gleichung

$$b_0\beta^{2^p} + b_1\beta^{2^p-1} + \ldots + b_{2^p} = 0$$

von (B) besitzt demnach die Wurzeln

$$\alpha_1, \frac{(p-1)\alpha_1+\alpha_2}{p}, \frac{(p-2)\alpha_1+2\alpha_2}{p}, \ldots, \alpha_2$$

und zwar α_1 und α_2 einfach, die übrigen mehrfach. Die Laplace'sche Transformirte von (B)

$$\text{(C)} \qquad R_0\frac{d^qv}{dz^q} + R_1\frac{d^{q-1}v}{dz^{q-1}} + \ldots + R_qv = 0$$

hat als Coefficienten ganze Functionen $2^{p\text{ten}}$ Grades von z und zwar ist

$$R_0 = b_0z^{2^p} + b_1z^{2^p-1} + \ldots = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots.$$

Sind $0, 1, \ldots, q-2$ und λ_i $(i = 1, 2)$ die Wurzeln der zu $z = \alpha_i$ gehörigen determinirenden Gleichung, so hat (C) ein Integral von der Form

$$v_i = (z-\alpha_i)^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(z-\alpha_i), \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

wo $\mathfrak{P}_i(z-\alpha_i)$ eine in der Umgebung von $z = \alpha_i$ convergente Potenzreihe ist.[1] Dann ist durch die Gleichung

$$u_i = \int\limits_{l_i} v_ie^{tz}dz \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

für ein gewisses Gebiet der Veränderlichen t ein Integral von (B) dargestellt, wenn der Integrationsweg l_i aus einer mit $\arg(z-\alpha_i) = \omega$ aus dem Unendlichen kommenden, vor α_i endigenden Geraden, einem kleinen

[1] Im Text ist angenommen, dass λ_i keine ganze Zahl sei; andernfalls treten die Acta math. Bd. 8, S. 308—314, angegebenen Modificationen ein, ohne dass die Resultate sich ändern.

den Punkt $z = \alpha_i$ einschliessenden Kreis und der rückwärts durchlaufenen Geraden besteht. Nehmen wir etwa $\omega = \pi$ an,[1] so gelten, wenn t als reelle positive Grösse ins Unendliche geht, die asymptotischen Gleichungen

$$u_1 \sim T_1\,,\ u_2 \sim T_2,$$

und es ist für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d\log u_1}{dt} = \alpha_1, \qquad \lim \frac{d\log u_2}{dt} = \alpha_2.$$

Der Grenzwerth der logarithmischen Ableitung eines Integrals u von (B) kann nur einen der Werthe

$$\alpha_1\,,\ \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_2$$

haben,[2] welche der oben gemachten Voraussetzung gemäss reell und absteigend geordnet sind. Dann ist, wenn Integrale, welche sich bloss um einen constanten Factor unterscheiden, nicht als verschieden betrachtet werden, u_2 *das einzige Integral* von (B), dessen logarithmische Ableitung für $\lim t = +\infty$ den Grenzwerth α_2 besitzt.

Um dies zu beweisen, setzen wir

$$u = u_2 \int w\,dt,$$

wodurch die Differentialgleichung (B), wenn vorübergehend $2^p = r$ gesetzt wird, in

$$L_0 \frac{d^{r-1}w}{dt^{r-1}} + L_1 \frac{d^{r-2}w}{dt^{r-2}} + \ldots + L_{r-1}w = 0$$

übergeht; dabei ist

$$L_0 = Q_0,$$

$$L_\lambda = (r)_\lambda Q_0 \frac{u_2^{(\lambda)}}{u_2} + (r-1)_{\lambda-1} Q_1 \frac{u_2^{(\lambda-1)}}{u_2} + \ldots + Q_{\lambda-1}\frac{u_2'}{u_2} + Q_\lambda. \qquad (\lambda=1,\ldots,r-1)$$

Aus

$$\lim \frac{u_2'}{u_2} = \alpha_2$$

---

[1] Der Integrationsweg l_1 muss dabei dem Punkt α_2 ausweichen.

[2] Poincaré, Am. Journ., Bd. 7.

folgt

$$\lim \frac{u_2^{(\lambda)}}{u_2} = \alpha_2^\lambda,$$

also

$$l_\lambda = \lim L_\lambda = (r)_\lambda b_0 \alpha_2^\lambda + (r-1)_{\lambda-1} b_1 \alpha_2^{\lambda-1} + \ldots.$$

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung für w

$$l_0 \gamma^{r-1} + l_1 \gamma^{r-2} + \ldots = 0$$

oder

$$b_0(\gamma + \alpha_2)^{r-1} + b_1(\gamma + \alpha_2)^{r-2} + \ldots = 0$$

hat als Wurzeln die um α_2 verminderten Wurzeln

$$\alpha_1\,, \quad \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{\alpha_1 + (p-1)\alpha_2}{p}$$

der charakteristischen Gleichung von (B) im ursprünglichen Vielfachheitsgrad, also lauter reelle positive Wurzeln. Es ist also

$$\lim \frac{d \log w}{dt}$$

für jedes Integral w reell und positiv. Wäre ein von u_2 verschiedenes Integral $\bar{u}_2$ von (B) mit

$$\lim \frac{d \log \bar{u}_2}{dt} = \alpha_2$$

vorhanden, so wäre

$$\lim \frac{d \log \frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = 0.$$

Wenn man

$$\frac{d \log \frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = \varphi(t)$$

setzt, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse

ε eine positive Zahl t_0 so angeben, dass für $t \geqq t_0$ $|\varphi(t)| < \varepsilon$ ist. Es ist also

$$\frac{d\frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt} = C\varphi(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(t)dt},$$

wo C eine Constante ist. Zu $u = \bar{u}_2$ gehört $w = \bar{w}$

$$\bar{w} = \frac{d\frac{\bar{u}_2}{u_2}}{dt},$$

und da

$$\lim \frac{d \log \bar{w}}{dt}$$

reell und positiv ist, so ist ein positive Grösse h so vorhanden, dass für $t \geqq t_0$

$$|\bar{w}| > e^{ht}$$

ist. Es ist also für $t \geqq t_0$

$$\begin{aligned} e^{ht} &< \left| C\varphi(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(t)dt} \right| \\ &< |C|\varepsilon e^{\varepsilon(t-t_0)}, \end{aligned}$$

was nicht möglich ist.

Wie ich im 118. Bd. von Crelles Journal gezeigt habe, besitzt die Differentialgleichung (A) *ein einziges Integral* η,[1] für welches für $\lim x = +\infty$

$$\lim x^{-(p-1)}\frac{d \log \eta}{dx} = \alpha_2$$

ist; ebenso ist für ein einziges Integral η_λ von (A_λ)

$$\lim x^{-(p-1)}\frac{d \log \eta_\lambda}{dx} = \alpha_2.$$

Wegen $x^p = t$ ist also für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log (\eta\eta_1 \dots \eta_{p-1})}{dt} = \alpha_2.$$

---

[1] Immer von einem constanten Factor abgesehen.

Da $\eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1}$ ein Integral von (B) ist, so muss sein:

$$u_2 = \eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1}.$$

Durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung und Berücksichtigung von (A) und (A_λ) erhält man Gleichungen von der Form [1]

$$\frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda} - A_{\lambda 0} u_2 = A_{\lambda 1} \frac{d\eta}{dx} \eta_1 \ldots \eta_{p-1} + \ldots + A_{\lambda, 2^p-1} \frac{d\eta}{dx} \frac{d\eta_1}{dx} \ldots \frac{d\eta_{p-1}}{dx},$$

$$(\lambda = 1, \ldots, 2^p)$$

wo $A_{\lambda 0}, A_{\lambda 1}, \ldots, A_{\lambda, 2^p-1}$ rationale Functionen von x sind. Da die Differentialgleichung (B) durch Elimination der $2^p - 1$ Producte $\frac{d\eta}{dx}\eta_1 \ldots \eta_{p-1}, \ldots$ aus diesen 2^p Gleichungen entsteht, so ist

$$Q_0 = |A_{\lambda\mu}|. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2^p - 1)$$

Wenn der bisherigen Annahme gemäss Q_0 nicht identisch verschwindet, so lässt sich aus den $2^p - 1$ ersten Gleichungen $\frac{d\eta}{dx}\eta_1 \ldots \eta_{p-1}$ in der Form berechnen:

$$\frac{d\eta}{dx}\eta_1 \ldots \eta_{p-1} = \sum_{\lambda=0}^{2^p-1} F_\lambda \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda},$$

wo F_λ eine rationale Function von x ist. In Verbindung mit

$$u_2 = \eta\eta_1 \ldots \eta_{p-1}$$

ergiebt sich

$$\frac{d \log \eta}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2^p-1} F_\lambda \frac{1}{u_2} \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda}.$$

Setzt man hierin für u_2 die asymptotische Reihe T_2, so erhält man hieraus die asymptotische Gleichung [2]

$$\eta \sim S_2$$

für den Fall, dass x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht.

---

[1] Poincaré, Acta math., Bd. 8.

[2] Acta math. Bd. 8, S. 338—342.

Man kann aber, und das ist für die Erforschung des Verhaltens der Integrale von (A) wesentlich, ohne Mühe einen Schritt weiter gehen. Falls der geradlinige Theil des Integrationsweges l_2 von

$$u_2 = \int_{l_2} v_2 e^{tz}\, dz$$

in der negativen reellen Axe verläuft, definirt das Integral die Function u_2 in der Nähe von $t = \infty$ für

$$-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2}.$$

Man kann aber den geradlinigen Theil von l_2 um weniger als π in positivem und um weniger als π in negativem Sinn drehen, ohne dass derselbe einen der auf der reellen Axe gelegenen singulären Punkte

$$\alpha_1\,,\ \frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}\,,\ \ldots\,,\ \frac{\alpha_1 + (p-1)\alpha_2}{p}$$

der Function v_2 überschreitet, so dass der Werth von $\arg z$ am Anfang von l_2 zwischen $-\pi$ und π variirt. Da das Integral einen Sinn behält, so lange $\arg t$ von $\pi - \arg z$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ nach der einen oder anderen Seite abweicht, so ist die Function u_2 in der Nähe von $t = \infty$ durch den Integralausdruck für

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$$

definirt, ohne dass der geradlinige Theil des Integrationsweges abgesehen von der Drehung deformirt werden muss. In den Math. Ann.[1] habe

[1] Im 49. Bd. führe ich die Untersuchung für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten und im 50. Bd. für eine beliebige lineare Differentialgleichung vom Rang 1 mit rationalen Coefficienten unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind. Aber auch für die Differentialgleichung (B) bleibt die ganze Entwickelung bestehen, soweit es sich um die Integrale u_1 und u_2 handelt, deren Integrationswege l_1, l_2 die *einfachen* Wurzeln α_1 und α_2 der charakteristischen Gleichung umkreisen. A. a. O. habe ich allerdings ganzzahlige Werthe von λ_i nicht berücksichtigt; dass aber der ausgesprochene Satz allgemein gilt, ersieht man, wenn man die von Herrn Poincaré (Acta math. Bd. 8, S. 310—314) gemachten Bemerkungen mit der Entwickelung in den Math. Ann. verbindet.

ich gezeigt, dass, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim T_2$$

in der Nähe von $t = \infty$ gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

besteht; d. h. wenn man, nachdem ein beliebiger Werth von n gewählt ist,

$$u_2 = e^{a_2 t} t^{\rho_2} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{D_{2\mu}}{t^{\mu}} + \frac{\delta_n}{t^n} \right)$$

setzt, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so bestimmen, dass für

$$|t| > R\,, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

$$|\delta_n| < \varepsilon$$

ist.[1] Wenn $x = t^{\frac{1}{p}}$ gesetzt und einem reellen positiven Werth von t der reelle positive Werth von x zugeordnet wird, so geht das Gebiet $-\frac{3\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$ in $-\frac{3\pi}{2p} < \arg x < \frac{3\pi}{2p}$ über. Demnach besteht in der Nähe von $x = \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\eta \sim S_2$$

gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta;$$

d. h. wenn man

$$\eta = e^{\frac{a_2 x^p}{p} + \dots} x^{\rho_2} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{C_{2\mu}}{x^{\mu}} + \frac{\gamma_n}{x^n} \right)$$

---

[1] In demselben Sinn bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\frac{du_2}{dt} \sim \frac{dT_2}{dt} \quad \text{u. s. w.}$$

setzt, so ist nach Angabe einer beliebigen positiven Grösse ε eine positive Grösse R so vorhanden, dass $|\gamma_n| < \varepsilon$ ist für

$$|x| > R\,,\ -\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta.$$

Wir zerlegen nun die Umgebung von $x = \infty$ in die $2p$ Gebiete $G^{(\rho)}$ $(\rho = 0, 1, \ldots, 2p - 1)$

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} < \arg x < \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p}.$$ [1]

Geht x mit einem dem Gebiet $G^{(2\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ angehörenden Argument ins Unendliche,[2] so ist für ein einziges Integral $\eta^{(2\nu)}$ der Differentialgleichung (A)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta^{(2\nu)}}{dx} = \alpha_2$$ [3]

und es besteht wie oben die Beziehung

$$\frac{d \log \eta^{(2\nu)}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2p-1} F_\lambda \frac{1}{u_2} \frac{d^\lambda u_2}{dx^\lambda},$$

woraus man schliesst, dass die asymptotische Gleichung $\eta^{(2\nu)} \sim S_2$ in der Nähe von $x = \infty$ gleichmässig für

$$\frac{(4\nu - 3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(4\nu + 3)\pi}{2p} - \delta$$

gilt. Dabei ist u_2 dieselbe Function von $t = x^p$ wie vorhin; es wird nur einem reellen positiven Werth von t der durch $\arg x = \frac{2\nu\pi}{p}$ bestimmte Werth von x zugeordnet.

---

[1] Das Gebiet

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p} - \delta$$

werde mit $\overline{G}^{(\rho)}$ bezeichnet.

[2] Vgl. Crelles Journ. Bd. 118, S. 267.

[3] Die bisher mit η bezeichnete Function heisst jetzt $\eta^{(0)}$.

Wenn x im Gebiet $G^{(2\nu+1)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ins Unendliche geht, besitzt (A) ein einziges Integral $\eta^{(2\nu+1)}$, für welches

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta^{(2\nu+1)}}{dx} = \alpha_1$$

ist. Nehmen wir etwa $\arg x = \frac{(2\nu+1)\pi}{p}$, so ist $\arg t = \pi$. Die Differentialgleichung (B) besitzt nur das eine Integral u_1, für welches

$$\lim \frac{d \log u_1}{dt} = \alpha_1$$

ist, wenn t als negative reelle Grösse ins Unendliche geht. Dieselben Schlüsse wie oben führen auf die Gleichung

$$\frac{d \log \eta^{(2\nu+1)}}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{2p-1} F_\lambda \frac{1}{u_1} \frac{d^\lambda u_1}{dx^\lambda},$$

woraus man schliesst, dass die asymptotische Gleichung

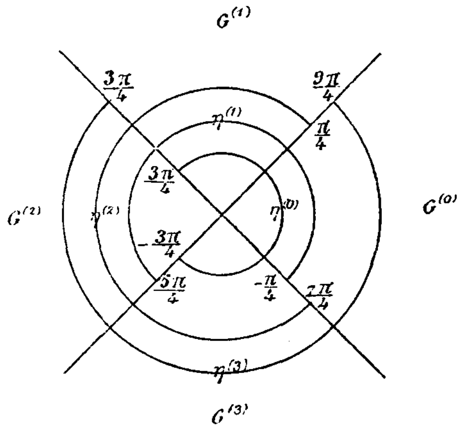
$$\eta^{(2\nu+1)} \sim S_1$$

in der Nähe von $x = \infty$ gleichmässig für

$$\frac{(2\nu-1)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\nu+5)\pi}{2p} - \delta$$

besteht.

Wenn x in einem der $2p$ Gebiete $G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots, G^{(2p-1)}$ ins Unendliche geht, strebt die logarithmische Ableitung des allgemeinen Integrals von (A) bezw. dem Grenzwerth $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_2$ zu; es entspricht aber jedem der $2p$ Gebiete ein bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmtes particuläres Integral $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(2p-1)}$, dessen logarithmische Ableitung den Grenzwerth α_2 oder α_1 hat, je nachdem der Grenzwerth der logarithmischen Ableitung des allgemeinen Integrals in dem betreffenden Gebiet α_1 oder α_2 ist. Das Integral $\eta^{(2\nu)}$ wird in dem aus $G^{(2\nu-1)}$, $G^{(2\nu)}$, $G^{(2\nu+1)}$ zusammengesetzten Gebiet durch die Reihe S_2, das Integral $\eta^{(2\nu+1)}$ in dem aus $G^{(2\nu)}$, $G^{(2\nu+1)}$, $G^{(2\nu+2)}$ zusammengesetzten Gebiet durch die Reihe S_1 asymptotisch dargestellt.



In der beigegebenen Figur, welche dem Rang $p = 2$ entspricht, bezeichnen die Buchstaben $\eta^{(0)}$ und $\eta^{(2)}$ die Gültigkeitsgebiete der asymptotischen Gleichungen $\eta^{(0)} \sim S_2$ und $\eta^{(2)} \sim S_2$, die Buchstaben $\eta^{(1)}$ und $\eta^{(3)}$ die Gültigkeitsgebiete der asymptotischen Gleichungen $\eta^{(1)} \sim S_1$ und $\eta^{(3)} \sim S_1$. Wenn beide Grenzen eines Gebietes beliebig wenig verengert werden, gilt die betreffende asymptotische Gleichung gleichmässig. An die Endpunkte des Bogens $\eta^{(\rho)}$ sind die Argumente gesetzt, durch deren Angabe die in S_1 und S_2 enthaltenen Potenzen x^{ρ_1} bezw. x^{ρ_2} in jedem Fall fixirt sind.

Bei beliebigem Rang p bilden wir im Gebiet $G^{(\rho)}$ ein Fundamentalsystem von (A) aus dem Integral $\eta^{(\rho)}$ und dem aus $G^{(\rho+1)}$ über die Gerade $\arg x = \frac{(2\rho + 1)\pi}{2p}$ nach $G^{(\rho)}$ fortgesetzten Integral $\eta^{(\rho+1)}$ (oder aus $\eta^{(\rho)}$ und dem aus $G^{(\rho-1)}$ über $\arg x = \frac{(2\rho - 1)\pi}{2p}$ nach $G^{(\rho)}$ fortgesetzten Integral $\eta^{(\rho-1)}$). Dann ist in $G^{(2\nu)}$

$$\eta^{(2\nu)} \sim S_2\,, \quad \eta^{(2\nu+1)} \sim S_1$$

und, wenn b von Null verschieden ist,

$$y = a\eta^{(2\nu)} + b\eta^{(2\nu+1)} \sim bS_1;\,[1]$$

[1] Es ist

$$y = be^{\frac{a_1 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_1}\left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \ldots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}\right) + ae^{\frac{a_2 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_2}(C_2 + \bar{\gamma})$$

$$= be^{\frac{a_1 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_1}\left(C_1 + \frac{C_{11}}{x} + \ldots + \frac{C_{1n}}{x^n} + \frac{\delta_n}{x^n}\right),$$

im Gebiet $G^{(2\nu+1)}$ ist

$$\eta^{(2\nu+1)} \sim S_1 \, , \; \eta^{(2\nu+2)} \sim S_2$$

und

$$y = a\eta^{(2\nu+1)} + b\eta^{(2\nu+2)} \sim bS_2,$$

wenn b von Null verschieden ist. Bewegt man sich in dem aus $G^{(0)}$ und $G^{(1)}$ zusammengesetzten Gebiet, so ist die asymptotische Gleichung in der Form

$$y = a\eta^{(0)} + b\eta^{(1)} \sim aS_2 + bS_1$$

beizubehalten, ohne dass von den Reihen S_1, S_2 die eine gegen die andere vernachlässigt wird.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen, soweit sie über die in der Arbeit des Verfassers im 118. Band von Crelles Journ.[1] enthaltenen hinausgehen, in den folgenden Satz zusammen:

Die characteristische Gleichung der Differentialgleichung (A) *mit rationalen Coefficienten und vom Rang p an der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ habe zwei verschiedene Wurzeln α_1, α_2, (und zwar seien beide reell und $\alpha_1 > \alpha_2$, worin keine Beschränkung liegt), so dass* (A) *durch zwei Normalreihen*

$$S_i = e^{\frac{\alpha_i x^p}{p} + \frac{\alpha_{i1} x^{p-1}}{p-1} + \dots} x^{\rho_i} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{C_{i\mu}}{x^\mu} \qquad (i=1,2)$$

formell befriedigt wird. Dann besitzt die Differentialgleichung $2p$ ausgezeichnete Integrale

$$\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(2p-1)}$$

von der Art, dass $\eta^{(\rho)}$ in der Nähe von $x = \infty$ für

$$\frac{(2\rho - 3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 3)\pi}{2p} - \delta \; [2]$$

---

wenn

$$\delta_n = \gamma_n + \frac{a}{b} e^{\frac{(\alpha_2-\alpha_1)x^p}{p} + \dots} x^{\rho_2-\rho_1+n}(C_2 + \bar{\gamma})$$

gesetzt wird; est ist $\lim \delta_n = 0$, wenn x im Gebiet $G^{(2\nu)}$ ins Unendliche geht.

[1] Vgl. den Satz auf S. 274.

[2] δ ist eine beliebig kleine positive Grösse.

bei ungeradem ρ durch die Reihe S_1, bei geradem ρ durch die Reihe S_2 gleichmässig asymptotisch dargestellt wird. [1]

Dass der Satz auch in denjenigen (darin nicht erwähnten) Ausnahmefällen gilt, welche in diesem Paragraphen ausgeschlossen worden sind, wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

§ 2.

Die bisherige Annahme, dass die Determinante Q_0, welche den ersten Coefficienten der Differentialgleichung (B) bildet, von Null verschieden sei, lassen wir jetzt fallen.

Da die 2^p Reihen

$$S_{\lambda_0}\left(t^{\frac{1}{p}}\right) S_{\lambda_1}\left(\varepsilon t^{\frac{1}{p}}\right) \dots S_{\lambda_{p-1}}\left(\varepsilon^{p-1} t^{\frac{1}{p}}\right)$$

mindestens $p + 1$ verschiedene Exponentialfactoren

$$e^{a_1 t}, \; e^{\frac{(p-1)a_1 + a_2}{p} t + \dots}, \; \dots, \; e^{a_2 t}$$

enthalten, so ist die Anzahl der verschiedenen Reihen mindestes $p + 1$, und die Ordnung der Differentialgleichung, welcher u genügt, kann nicht geringer als $p + 1$ sein. Für

$$u = y y_1 \dots y_{p-1}$$

ergeben sich wie in § 1 die Gleichungen

$$u^{(2)} - A_{\lambda 0} u = A_{\lambda 1} y' y_1 \dots y_{p-1} + \dots + A_{\lambda, 2^p-1} y' y_1' \dots y_{p-1}'$$

oder, wenn man durch u dividirt,

$$\frac{u^{(\lambda)}}{u} - A_{\lambda 0} = A_{\lambda 1} \frac{y'}{y} + \dots + A_{\lambda, 2^p-1} \frac{y'}{y} \frac{y_1'}{y_1} \dots \frac{y_{p-1}'}{y_{p-1}}. \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

Alle aus dem System

$$A_{\lambda 1}, \dots, A_{\lambda, 2^p-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, 2^p-1)$$

gebildeten Determinanten r^{ten} Grades seien gleich Null, während eine De-

[1] Vgl. Fig. S. 184 für $p = 2$.

terminante $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades von Null verschieden sei. Dann erhält man durch Elimination von $\frac{y'}{y}, \ldots$ aus r der angeschriebenen Gleichungen [1] für u eine lineare Differentialgleichung (B) mit rationalen Coefficienten deren Ordnung geringer als 2^p ist, und zwar ist diese Gleichung, wenn $t = x^p$ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird, wie früher vom Rang 1, und ihre charakteristische Gleichung hat die Wurzeln α_1 und α_2 einfach, die Wurzeln $\frac{(p-1)\alpha_1 + \alpha_2}{p}$ u. s. w. einfach oder mehrfach.

Im Falle $p = 2$ folgen aus

$$u = yy_1$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} u' \qquad &= y'y_1 + yy_1', \\ u'' - A_0 u &= A_1 y'y_1 + A_2 yy_1' + 2y'y_1', \\ u''' - B_0 u &= B_1 y'y_1 + B_2 yy_1' + B_3 y'y_1', \end{aligned}$$

wo die A und B rationale Functionen von x sind. Wenn

$$Q_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ A_1 & A_2 & 2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, genügt u der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} u' & , 1 & , 0 \\ u'' - A_0 u & , A_2 & , 2 \\ u''' - B_0 u & , B_2 & , B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man aus den Gleichungen

$$\frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} + \frac{y_1'}{y_1},$$

$$\frac{u''}{u} - A_0 = A_1 \frac{y'}{y} + A_2 \frac{y_1'}{y_1} + 2 \frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}$$

[1] Vgl. die folgenden Beispiele.

$\frac{y_1'}{y_1}$ eliminirt, erhält man für $\frac{y'}{y}$ die quadratische Gleichung

$$2\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \left(2\frac{u'}{u} + A_1 - A_2\right)\frac{y'}{y} + \left(\frac{u''}{u} - A_2\frac{u'}{u} - A_0\right) = 0,$$

welche unabhängig vom Verschwinden der Determinante Q_0 besteht. Wenn $Q_0 = 0$ ist, entsprechen einem beliebigen Integral u von (B) zwei Integrale y von (A), deren logarithmische Ableitungen der quadratischen Gleichung genügen.[1] Im Falle $Q_0 \neq 0$ gehört nur zu gewissen Integralen u von (B) ein Integral y von (A) und zwar ein einziges, dessen logarithmische Ableitung der quadratischen Gleichung genügt, aber auch wie früher rational durch $\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \frac{u'''}{u}$ ausgedrückt werden kann.

Im Falle $p = 3$ folgen aus

$$u = yy_1y_2$$

die Gleichungen

$$\frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} + \frac{y_1'}{y_1} + \frac{y_2'}{y_2},$$

$$\frac{u''}{u} - A_0u = A_1\frac{y'}{y} + A_2\frac{y_1'}{y_1} + A_2\frac{y_2'}{y_2} + 2\left(\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1} + \frac{y'}{y}\frac{y_2'}{y_2} + \frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}\right),$$

$$\frac{u'''}{u} - B_0u = B_1\frac{y'}{y} + \ldots + B_4\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1} + \ldots + 6\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2},$$

$$\frac{u^{(4)}}{u} - C_0u = C_1\frac{y'}{y} + \ldots + C_4\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1} + \ldots + C_7\frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}.$$

Wenn z. B. alle Determinanten vierten Grades aus den Coefficienten auf der rechten Seite verschwinden, genügt u der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{u'}{u} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{u''}{u} - A_0 & A_1 & 2 & 0 \\ \frac{u'''}{u} - B_0 & B_1 & B_4 & 6 \\ \frac{u^{(4)}}{u} - C_0 & C_1 & C_4 & C_7 \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Dabei sind constante Factoren von y und u als unwesentlich angesehen.

Ist der Rang p beliebig, so bestehen, welches auch die Ordnung von (B) sein mag, Gleichungen von der Form

$$\frac{u^{(\lambda)}}{u} - A_{\lambda 0} = \dots + \underline{|\lambda} \sum \frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}\cdots\frac{y_{\lambda-1}'}{y_{\lambda-1}}, \qquad (\lambda = 1, \dots, p)$$

wo

$$\sum \frac{y'}{y}\frac{y_1'}{y_1}\cdots\frac{y_{\lambda-1}'}{y_{\lambda-1}}$$

die Summe von je λ Producten der p Grössen

$$\frac{y'}{y}, \frac{y_1'}{y_1}, \dots, \frac{y_{p-1}'}{y_{p-1}}$$

bedeutet, während an Stelle der Punkte Ausdrücke stehen, deren Dimension in diesen Grössen geringer als λ ist. Durch Elimination von

$$\frac{y_1'}{y_1}, \dots, \frac{y_{p-1}'}{y_{p-1}}$$

aus diesen p Gleichungen erhält man in allen Fällen eine Gleichung von der Form

$$\sum_\nu L_\nu(u)\left(\frac{y'}{y}\right)^\nu = 0,$$

deren Coefficienten L_ν von $\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \dots$ und von x rational abhängen und nicht sämmtlich identisch verschwinden. Setzt man hierin für u ein Integral von (B), welches die Form $yy_1 \dots y_{p-1}$ hat, so genügt jedes Integral y von (A), aus welchem die angenommene Function u durch Multiplication mit geeigneten Integralen $y_1, \dots, y_{p-1}$ von $(A_1), \dots, (A_{p-1})$ hervorgeht, der angegebenen algebraischen Gleichung, wenn auch nicht umgekehrt jede Wurzel dieser Gleichung die logarithmische Ableitung eines Integrals y von (A) zu sein braucht.

Wir schalten den folgenden Hilfssatz ein:

Wenn die Coefficienten der algebraischen Gleichung

$$G(z) = \sum_\lambda A_\lambda z^\lambda = 0$$

Functionen von x sind, welche in der Nähe von $x = \infty$ für $\omega_1 < \arg x < \omega_2$

durch Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ gleichmässig asymptotisch dargestellt werden, so wird jede Wurzel z durch eine der die Gleichung formell befriedigenden Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ (oder von $\frac{1}{x^{\frac{1}{m}}}$ [1]) in dem bezeichneten Gebiet gleichmässig asymptotisch dargestellt.

Es sei

$$A_\lambda = A_{\lambda n} + \frac{\alpha_{\lambda n}}{x^n} = a_{\lambda 0} + \frac{a_{\lambda 1}}{x} + \ldots + \frac{a_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\alpha_{\lambda n}}{x^n},$$

wo $\alpha_{\lambda n}$ für $\omega_1 < \arg x < \omega_2$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Irgend eine Wurzel z erscheint als algebraische Function von $\frac{1}{x}$ und den $\alpha_{\lambda n}$, wenn die $\alpha_{\lambda n}$ vorübergehend neben $\frac{1}{x}$ als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden. Durch Nullsetzen der $\alpha_{\lambda n}$ geht z in eine Wurzel z_n der Gleichung

$$\sum_\lambda A_{\lambda n} z_n^\lambda = 0$$

über, welche sich als Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ [1] darstellen lässt:

$$z_n = c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\gamma_{n+2}}{x^{n+2}} + \ldots.$$

Wenn man

$$z = c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\zeta_n}{x^n}$$

setzt, ist ζ_n eine algebraische Function von $\frac{1}{x}$ und $\alpha_{\lambda n}$, welche für $\alpha_{\lambda n} = 0$ in

$$\frac{\gamma_{n+1}}{x} + \frac{\gamma_{n+2}}{x^2} + \ldots$$

übergeht, also für $\frac{1}{x} = 0$, $\alpha_{\lambda n} = 0$ verschwindet und in der Umgebung

[1] Durch eine Substitution $x = x'^{\mu}$ kann erreicht werden, dass keine gebrochenen Potenzen auftreten, und durch eine Substitution von der Form $y = x^m y'$, dass die Reihen keine positiven Potenzen von x enthalten. Im Beweis wird diese Voraussetzung der Einfachheit halber gemacht.

dieser Stelle stetig ist. Wenn x im Gebiet $\omega_1 < \arg x < \omega_2$ ins Unendliche geht, convergiren die $\alpha_{\lambda n}$ gleichmässig zur Grenze Null, so dass das Gleiche für ζ_n gilt. Durch die Reihe

$$z = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

wird die Gleichung $G(z) = 0$ formell befriedigt.

Wie in § 1 hat die Differentialgleichung (B) ein einziges Integral u_2 von der Eigenschaft, dass für $\lim t = +\infty$

$$\lim \frac{d \log u_2}{dt} = \alpha_2$$

ist; ebenso ist für ein einziges Integral η von (A)

$$\lim_{x=+\infty} x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta}{dx} = \alpha_2$$

und für ein einziges Integral η_λ von (A_λ)

$$\lim x^{-(p-1)} \frac{d \log \eta_\lambda}{dx} = \alpha_2,$$

so dass wie in § 1

$$u_2 = \eta\eta_1 \dots \eta\eta_{p-1}$$

ist. Es erscheint daher

$$z = \frac{\eta'}{\eta}$$

als Wurzel der algebraischen Gleichung

$$(\alpha) \qquad \sum_\lambda L_\lambda(u_2) z^\lambda = 0.$$

Die Gleichung

$$(\alpha') \qquad \sum_\lambda L_\lambda(T_2) z^\lambda = 0,$$

welche man erhält, wenn man für u_2 die asymptotische Reihe T_2 setzt, wird durch die Reihe

$$z = \frac{d \log S_2}{dx}$$

formell befriedigt. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze wird $\frac{\eta'}{\eta}$ als Wurzel von (α) durch eine der der Gleichung (α') formell genügenden Reihen mit unendlich vielen negativen und einer endlichen Anzahl potenzen von x (oder $x^{\frac{1}{m}}$) asymptotisch dargestellt; bezeichnet man diese Reihe mit $\frac{d \log \overline{S}}{dx}$, so ist $\overline{S}$ eine normale oder anormale Reihe. Aus der asymptotischen Gleichung $\eta \sim \overline{S}$ folgt, dass $\overline{S}$ der Gleichung (A) formell genügt, was nur möglich ist, wenn $\overline{S}$ mit S_2 identisch ist. Es ist also

$$\frac{\eta'}{\eta} \sim \frac{d \log S_2}{dx}$$

und

$$\eta \sim S_2.$$

Die sämmtlichen asymptotischen Gleichungen gelten zunächst, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht. Nun gilt aber die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim T_2$$

gleichmässig für

$$-\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg t < \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

woraus die gleichmässige Gültigkeit der asymptotischen Gleichung

$$\eta \sim S_2$$

für

$$-\frac{3\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2p} - \delta$$

folgt.

Wir haben dasselbe Resultat wie in § 2. Die weiteren Schlüsse gestalten sich wie früher.

§ 3.

Wir wollen die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (A) benutzen,[1] um über die Lage der *Nullstellen der Integrale in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle* $x = \infty$ Aufschluss zu gewinnen.

Setzt man

$$\eta^{(\rho)} = e^{\frac{\alpha x^p}{p}+\dots} x^\rho (C + \gamma),$$

wo die Grössen $\alpha, \dots, \rho$ und C mit dem Index 1 oder 2 zu versehen sind, je nachdem der Index ρ von η ungerade oder gerade ist, so lässt sich nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε ($|\varepsilon| < C$) eine positive Grösse r so bestimmen, dass für

$$|x| > r, \frac{(2\rho - 3)\pi}{2p} + \delta < \arg x < \frac{(2\rho + 3)\pi}{2p} - \delta$$

$|\gamma| < \varepsilon$ ist. Die Function $\eta^{(\rho)}$ ist demnach in dem bezeichneten Gebiet von Nullstellen frei.

Für ein beliebiges Integral

$$y = a\eta^{(0)} + b\eta^{(1)},$$

für welches im Gebiet $G^{(0)}$ die asymptotische Gleichung

$$y \sim bS_1$$

besteht, ist

$$y = be^{\frac{\alpha_1 x^p}{p}+\dots} x^{\rho_1}(C_1 + \gamma),$$

[1] Vgl. meine Arbeiten: *Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung* (Math. Ann. Bd. 49) und *Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle* (Crelles Journ. Bd. 120). Ich kann mich im gegenwärtigen Paragraphen kurz fassen, wo es sich um die Übertragung der in den genannten Arbeiten für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten und die lineare, nicht homogene Differentialgleichung erster Ordnung entwickelten Methoden auf eine beliebige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten handelt. Nach dem Muster der Arbeit im 49. Bd. der Math. Ann. liessen sich die jetzigen Entwickelungen weiter ausführen.

wo γ im verkleinerten Gebiet $\overline{G}^{(0)}$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt. Das Integral y kann daher im Gebiet $\overline{G}^{(0)}$ keine Nullstellen besitzen, wenn $|x|$ hinreichend gross genommen wird.

Wenn also ein Integral y von (A) Nullstellen x_λ von der Art besitzt, dass für $\lim \lambda = \infty$ $|x_\lambda| = \infty$ ist, so muss sich $\arg x_\lambda$ einem der Grenzwerthe

$$\frac{(2\rho - 1)\pi}{2p} \qquad (\rho = 0, 1, 2, \ldots)$$

nähern. Die im Unendlichen befindlichen Nullstellen eines Integrals y können nur in unendlicher Nähe der Trennungslinien der Gebiete $G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots$ liegen.

Betrachten wir z. B. die Gerade

$$\arg x = \frac{\pi}{2p},$$

so lässt sich das Integral

$$y = b\eta^{(0)} + a\eta^{(1)},$$

wenn a und b beide von Null verschieden sind, in der Form schreiben

$$y = a e^{\frac{a_1 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_1}(C_1 + \gamma_1) + b e^{\frac{a_2 x^p}{p} + \cdots} x^{\rho_2}(C_2 + \gamma_2),$$

wo γ_1 und γ_2 im Gebiet

$$\frac{\pi}{2p} - \omega < \arg x < \frac{\pi}{2p} + \omega,$$

wo ω eine kleine positive Grösse bedeutet, gleichmässig zur Grenze Null convergiren; dasselbe gilt für δ_1 und δ_2, wenn wir

$$y = a e^{(a_1 + \delta_1)\frac{x^p}{p}}(C_1 + \gamma_1) + b e^{(a_2 + \delta_2)\frac{x^p}{p}}(C_2 + \gamma_2)$$

setzen. Die Gleichung

$$y = 0$$

schreibt sich

$$e^{(a_1 - a_2 + \delta_1 - \delta_2)\frac{x^p}{p}} = -\frac{b}{a}\frac{C_2 + \gamma_2}{C_1 + \gamma_1}$$

oder

$$x = s_\lambda(1 + \varphi_\lambda),$$

wobei

$$s_\lambda = \sqrt[p]{\frac{p}{a_1 - a_2}\left(\log\left(-\frac{b}{a}\frac{C_2}{C_1}\right) + 2\lambda\pi i\right)}\ ^{1}$$

gesetzt ist und φ_λ eine Function von x bedeutet, welche gleichmässig zur Grenze Null geht, wenn x in dem oben bezeichneten Gebiet unendlich gross wird. Wir zeigen, unter ε eine beliebig kleine positive Grösse verstehend, dass ein mit dem Radius $\varepsilon|s_\lambda|$ um den Punkt $x = s_\lambda$ beschriebener Kreis K eine und nur eine Wurzel der Gleichung

$$x = s_\lambda(1 + \varphi_\lambda)$$

enthält, wenn λ hinreichend gross genommen wird. Das geschieht durch den Nachweis, dass für hinreichend grosse Werthe von λ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K d\log(x - s_\lambda - s_\lambda\varphi_\lambda) = 1$$

ist, wenn der Kreisumfang K als Integrationsweg genommen wird, oder, was dasselbe ist, durch den Nachweis, dass

$$\int_K d\log(x - s_\lambda - s_\lambda\varphi_\lambda) - \int_K d\log(x - s_\lambda)$$
$$= \int_K \frac{s_\lambda(\varphi_\lambda - (x - s_\lambda)\varphi_\lambda')}{(x - s_\lambda)(x - s_\lambda - s_\lambda\varphi_\lambda)}dx$$

beliebig klein wird, wenn man λ hinreichend gross annimmt. Das letzte Integral ist dem absoluten Betrage nach kleiner als das Product aus dem Kreisumfang $2\pi\varepsilon|s_\lambda|$ und dem Maximum des zu integrirenden Bruches auf K. Der Zähler ist dem absoluten Betrage nach kleiner als $|s_\lambda|\varepsilon\eta$ (wo η eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet), wenn man λ hinreichend gross wählt; da $|\varphi_\lambda|$ für hinreichend grosse Werthe von λ kleiner als $\eta\varepsilon$ ist, so ist der Nenner dem absoluten Betrage nach grösser als

$$\varepsilon|s_\lambda|(\varepsilon|s_\lambda| - |s_\lambda|\eta\varepsilon) = \varepsilon^2|s_\lambda|^2(1 - \eta).$$

[1] Dabei ist λ eine ganze positive Zahl; die Wurzel ist so fixirt, dass für

$$\lambda = +\infty \qquad \arg s_\lambda = \frac{\pi}{2p}$$

wird.

Der absolute Betrag unseres Integrals ist also kleiner als

$$2\pi\varepsilon\left|s_\lambda\right| \cdot \frac{|s_\lambda|\varepsilon\eta}{\varepsilon^2|\lambda_\lambda|^2(1-\eta)} = \frac{2\pi\eta}{1-\eta},$$

d. h. beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von λ, w. z. b. w.

Das Integral hat also die Nullstellen

$$x_\lambda = s_\lambda(1+\varepsilon_\lambda), \qquad \lim \lambda = +\infty,$$

wo

$$\lim \varepsilon_\lambda = 0$$

ist.

Wir bringen nun den Begriff des Geschlechtes einer ganzen transcendenten Function und den Begriff des Ranges einer linearen Differentialgleichung an einer Unbestimmtheitsstelle in Verbindung. Wenn die zur singulären Stelle $x=\infty$ gehörige Fundamentalgleichung zwei verschiedene Wurzeln $e^{2\pi i\sigma_1}$, $e^{2\pi i\sigma_2}$ besitzt, hat man ein Fundamentalsystem von der Form

$$y_i = x^{\sigma_i} P_i(x), \qquad (i=1,2)$$

wo $P_i(x)$ eine nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitende, für hinreichend grosse Werthe von $|x|$ convergente Reihe ist. Eine der beiden Functionen $P_i(x)$, welche kurz $P(x)$ heissen möge, habe die Nullstellen $x_\lambda^{(\rho)}$ $(\rho = 0, 1, \ldots)$, wo

$$\lim_{\lambda=\infty} \arg x_\lambda^{(\rho)} = \frac{(2\rho-1)\pi}{2p}$$

ist. Bezeichnet man mit

$$\varepsilon_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty)$$

diejenigen Nullstellen, deren absoluter Betrag grösser als die beliebig zu wählende Grösse r ist, so ist, wie man aus den asymptotischen Ausdrücken für die Nullstellen ersieht, von den beiden Reihen

$$\sum_\nu \frac{1}{|\varepsilon_\nu|^p}, \quad \sum_\nu \frac{1}{|\varepsilon_\nu|^{p+1}}$$

die erste divergent, die zweite convergent. Das unendliche Product

$$\Pi(x) = \prod_\nu \left(1-\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right) e^{\frac{x}{\varepsilon_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{\varepsilon_\nu}\right)^p}$$

ist daher für jeden endlichen Werth von x convergent. Dann ist

$$F(x) = \frac{P(x)}{\Pi(x)}$$

für $|x| > r$ von Nullstellen frei, so dass eine für $|x| > r$ convergente Entwickelung von der Form

$$\frac{d \log F(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{d\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$$

besteht, wo $g(x)$ eine nach positiven Potenzen von x fortschreitende, beständig convergente Reihe und $\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)$ eine für $|x| > r$ convergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt. Es ist also

$$F(x) = x^\mu e^{g(x)} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo μ eine positive oder negative ganze Zahl und

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = Ce^{\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)}$$

eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist, welche für $|x| > r$ von Nullstellen frei ist. Wir haben demnach

$$y = x^\sigma P(x) = x^{\sigma+\mu} e^{g(x)} \Pi(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mit Benutzung unserer asymptotischen Darstellungen und eines Satzes von Herrn HADAMARD[1] zeigt man, dass $g(x)$ eine ganze rationale Function ist, deren Grad nicht grösser als p sein kann, so dass

$$G(x) = e^{g(x)} \Pi(x)$$

eine ganze Function vom Geschlecht p ist. Wenn wir unserem Integral

$$y = x^{\sigma+\mu} G(x) \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

den Rang p an der singulären Stelle $x = \infty$ beilegen, so stellt sich der

[1] Liouv. Journ. 1893.

Begriff des Ranges als Verallgemeinerung des von LAGUERRE eingeführten Begriffs des Geschlechtes einer ganzen transcendenten Function dar.

Die Hauptergebnisse dieses Paragraphen mögen in der Satz zusammengefasst werden:

Das ausgezeichnete Integral $\eta^{(\rho)}$ *von* (A) *besitzt für*

$$\frac{(2\rho-3)\pi}{2p}+\delta<\arg x<\frac{(2\rho+3)\pi}{2p}-\delta\ ^{1}$$

keine Nullstelle, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt. Ein beliebiges Integral y *besitzt in der Umgebung von* $x=\infty$ *unendlich viele Nullstellen* $x_\lambda^{(\rho)}$ *von der Art, dass für* $\lim\lambda=\infty$

$$\lim|x_\lambda^{(\rho)}|=\infty,\qquad \lim\arg x_\lambda^{(\rho)}=\frac{(2\rho-1)\pi}{2p}$$

ist. Es ist z. B. für $y=b\eta^{(0)}+a\eta^{(1)}$

$$x_\lambda^{(1)}=\sqrt[p]{\frac{a_1-a_2}{p}\left(\log\left(-\frac{b}{a}\frac{C_2}{C_1}\right)+2\lambda\pi i\right)}\cdot(1+\varepsilon_\lambda),$$

$$\lim_{\lambda=\infty}\varepsilon_\lambda=0.$$

Ist

$$y_i=x^{\alpha}P_i(x)\qquad\qquad (i=1,2)$$

das zu $x=\infty$ *gehörige kanonische Fundamentalsystem von* (A), *so ist die Laurent'sche Reihe* $P_i(x)$ *von der Form*

$$P(x)=x^{\mu}G(x)\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $G(x)$ *eine ganze (transcendente) Function vom Geschlecht* p *ist, welche diejenigen Nullstellen von* y_i *besitzt, deren absoluter Betrag grösser als* r *(*r *beliebig) ist, während* μ *eine ganze Zahl und* $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ *eine für* $|x|>r$ *nicht verschwindende Potenzreihe von* $\frac{1}{x}$ *darstellt.*

---

[1] λ ist eine beliebig kleine positive Grösse.

§ 4.

Wir lassen jetzt die in § 1 gemachte Voraussetzung, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (A)

$$\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$$

verschieden seien, fallen.

Ist α eine Doppelwurzel, so wird die Gleichung (A) durch die Substitution

$$y = e^{\frac{\alpha x^p}{p}} z$$

übergeführt in

$$P_0 \frac{d^2 z}{dx^2} + (P_1 + 2\alpha x^{p-1} P_0) \frac{dz}{dx}$$

$$+ \left(P_2 + \alpha x^{p-1} P_1 + (\alpha^2 x^{2p-2} + (p-1)\alpha x^{p-2}) P_0\right) z = 0$$

oder wegen $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, $2\alpha + a_1 = 0$ in

$$(x^m + \ldots)\frac{d^2 z}{dx^2} + (b_1' x^{m+p-2} + \ldots)\frac{dz}{dx} + (b_2' x^{m+2p-3} + b_2'' x^{m+2p-4} + \ldots) z = 0.$$

Ist b_2' von Null verschieden, so führt die Substitution

$$x = t^2$$

auf die Differentialgleichung

$$(t^{2m+1} + \ldots)\frac{d^2 z}{dt^2} + (0 \,.\, t^{(2m+1)+2p-2} + \ldots)\frac{dz}{dt} + (4 b_2' t^{(2m+1)+4p-4} + \ldots) z = 0$$

vom Rang $2p-1$ mit der charakteristischen Gleichung

$$\beta^2 + 4 b_2' = 0,$$

deren Wurzeln β_1 und $\beta_2 = -\beta_1$ zwei Normalreihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_i t^{2p-1}}{2p-1} + \frac{\beta_{i1} t^{2p-2}}{2p-2} + \ldots} t^{\rho_i}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{t} + \ldots\right) \qquad (i=1,2)$$

entsprechen. Daraus ergeben sich für die Differentialgleichung (A) zwei anormale Reihen von der Form

$$S_i = e^{\frac{\alpha x^p}{p} + \frac{\beta_i x^{\frac{2p-1}{2}}}{2p-1} + \frac{\beta_{i1} x^{\frac{2p-2}{2}}}{2p-2} + \cdots} x^{\frac{\rho_i}{2}} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_{i2}}{x} + \cdots \right). \qquad (i=1,2)$$

Im Fall $b_2' = 0$ haben wir die Differentialgleichung vom Rang $p - 1$

$$(x^m + \ldots) \frac{d^2 z}{dx^2} + (b_1' x^{m+p-2} + \ldots) \frac{dz}{dx} + (b_2'' x^{m+2p-4} + \ldots) z = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$\beta^2 + b_1' \beta + b_2'' = 0.$$

Wir erhalten zwei Normalreihen vom Rang $p - 1$, wenn die Wurzeln dieser Gleichung verschieden sind, während im Fall einer Doppelwurzel $\beta = \alpha_1$ die Substitution

$$z = e^{\frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1}} z_1$$

angewandt wird. Nehmen wir an, man müsse l-mal nach einander eine solche Substitution anwenden, bis man auf eine Differentialgleichung stösst, welche unmittelbar oder nach Anwendung der Substitution $x = t^2$ durch Normalreihen befriedigt wird. Man hat dann

$$y = e^{\frac{\alpha x^p}{p} + \frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1} + \cdots + \frac{\alpha_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1}} z,$$

und die Differentialgleichung für z wird entweder durch zwei Normalreihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_i x^{p-l}}{p-l} + \frac{\beta_{i1} x^{p-l-1}}{p-l-1} + \cdots} x^{\rho_i} \left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \cdots \right) \qquad (i=1,2)$$

oder durch zwei anormale Reihen

$$T_i = e^{\frac{\beta_i x^{\frac{2p-2l+1}{2}}}{2p-2l+1} + \frac{\beta_{i1} x^{p-l}}{2p-2l} + \cdots} x^{\frac{\rho_i}{2}} \left(C_i + \frac{C_{1i}}{x^{\frac{1}{2}}} + \cdots \right) \qquad (i=1,2)$$

formell befriedigt. Aus der Differentialgleichung (A) erhält man demnach Reihen von der Form

$$S_i = e^{\frac{\alpha x^p}{p} + \frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1} + \dots + \frac{\alpha_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1} + \frac{\beta_i x^{p-l}}{p-l} + \frac{\beta_{i1} x^{p-l-1}}{p-l-1} + \dots} x^{\rho_i}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{x} + \dots\right) \qquad (i=1,2)$$

oder von der Form

$$S_i = e^{\frac{\alpha x^p}{p} + \frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1} + \dots + \frac{\alpha_{l-1} x^{p-l+1}}{p-l+1} + \frac{\beta_i x^{\frac{2p-2l+1}{2}}}{2p-2l+1} + \frac{\beta_{i1} x^{p-l}}{2p-2l} + \dots}$$
$$\times x^{\frac{\rho}{2}}\left(C_i + \frac{C_{i1}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_{i2}}{x} + \dots\right). \qquad (i=1,2)$$

Im Falle $l = p$ führt die Substitution

$$y = e^{\frac{\alpha x^p}{p} + \frac{\alpha_1 x^{p-1}}{p-1} + \dots + \alpha_{p-1} x} z$$

auf eine Differentialgleichung, für welche $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit ist.

Aus der Art, wie die Differentialgleichung (A) auf eine Differentialgleichung zurückgeführt wurde, deren charakteristische Gleichung zwei verschiedene Wurzeln besitzt, folgt *in allen Fällen die asymptotische Darstellung der Integrale von* (A) *durch die Normalreihen oder anormalen Reihen* S_1 *und* S_2. Das Nähere ergiebt sich aus den in § 1 gefundenen Resultaten.

Charlottenburg, 8. October 1897.
