DAS ABEL'SCHE THEOREM UND DAS LIE'SCHE THEOREM ÜBER TRANSLATIONSFLÄCHEN

VON

GEORG SCHEFFERS
in DARMSTADT.

Bei der hundertsten Wiederkehr von ABEL's Geburtstag gedenkt man unwillkürlich auch seines Landsmannes SOPHUS LIE. Wenn auch im Ganzen die Forschungen beider auf verschiedenen Gebieten stattfanden, so treffen sie sich doch an einigen Punkten. Eine besondere Genugthuung empfand LIE, als es ihm nach mühevollen Ansätzen gelang, ein rein geometrisches Problem, das der *Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung*, in einen höchst merkwürdigen Zusammenhang mit dem *Abel'schen Theorem* zu bringen.[1]

[1] Die Abhandlungen von SOPHUS LIE, die hier in Betracht kommen, sind folgende:

1) *Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien.* Christ. Forh. 1872, S. 27, Zeile 1—4.
2) *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. I. Über reelle algebraische Minimalflächen.* Archiv for Math. Bd. 2, 1877, S. 157—198.
3) *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.* I. und II. Math. Annalen Bd. 14 und 15, 1879, S. 331—416 bez. 465—506.
4) *Bestimmung aller in eine algebraische Developpabele eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung* $s = 0$. Archiv for Math. Bd. 4, 1879, S. 334—344.
5) *Weitere Untersuchungen über Minimalflächen.* Archiv for Math. Bd. 4, 1880, S. 477—506.
6) *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden.* Archiv for Math. Bd. 7, 1882, S. 155—176.
7) *Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel.* Comptes Rendus T. 114, 1892, S. 277—280.
8) *Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions.* Comptes Rendus T. 114, 1892, S. 334—337.

Die Art, wie LIE das Problem löste, ist für seine Forschungsweise charakteristisch: Zuerst, von 1869 an, fand er durch Benutzung von Abbildungen eines Raumes auf einen andern Beispiele von solchen Flächen, die mindestens vier Scharen von je einfach unendlich vielen congruenten und gleichgestellten Curven enthalten. Diese Flächen waren im allgemeinen *transcendent*. Er bemerkte aber, dass zu jeder von ihnen eine gewisse ebene *algebraische* Curve in enger Beziehung stand. Es zeigte sich nämlich, dass die Tangenten jener vier Curvenscharen die unendlich ferne Ebene in den Punkten einer Curve *vierter* Ordnung schnitten. Aber den inneren Grund für diese *nachträglich* festgestellte Erscheinung konnte er lange nicht erkennen, weshalb er von 1881 bis 1889 wiederholt gesprächsweise die Aufmerksamkeit anderer Mathematiker darauf hinlenkte. Dabei gab er auch der Vermutung Ausdruck, dass diese Erscheinung mit dem ABEL'schen Theorem in Zusammenhang stehen dürfte. Durch sehr umständliche Rechnungen gelang es ihm 1882, *alle* Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung zu bestimmen.[1]

Im Winter 1891 bis 92 fand er dann, dass das ABEL'sche Theorem, angewandt auf den Schnitt einer Curve vierter Ordnung mit einer veränderlichen Geraden, bei zweckmässiger Deutung eine ausgedehnte Familie von Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung lieferte. Ja, es zeigte sich, dass sich diese Flächenfamilie in ihrem Umfang mit der von ihm gefundenen deckte. Und so wurde er zu dem letzten Schritt geführt, direct zu beweisen, dass das ABEL'sche Theorem *alle* Flächen von der gesuchten Art liefert. Dabei kam es darauf an, die Integrabilitätsbedingungen eines Systems von zwei homogenen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu discutieren. Zunächst ergaben sich drei Bedingungen; vor ihrer directen Aufstellung schreckte er jedoch zurück, da sie nach seiner

---

9) *Untersuchungen über Translationsflächen.* Leipziger Berichte 1892, S, 447—472, 559—579.

10) *Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem.* Leipziger Berichte 1896, S. 141—198.

11) *Geometrie der Berührungstransformationen.* I. Bd. Dargestellt von LIE und SCHEFFERS, Leipzig 1896, S. 404—411.

12) *Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten* Leipziger Berichte 1897, S. 181—248.

[1] Siehe die 6. in der vorigen Anmerkung genannte Arbeit.

Meinung »fast unausführbare Rechnungen» erforderte.[1] Es gelang ihm aber in äusserst scharfsinniger Weise durch seine bewährte Methode, nämlich durch das Herbeiziehen begrifflicher geometrischer Überlegungen, diese analytischen Schwierigkeiten zu umgehen und zu erkennen, dass sich alle drei Bedingungen auf eine einzige reducieren, die er, ohne die Rechnungen auszuführen, dennoch vollständig genau aufstellen konnte. Von da bis zum Endergebnis war es nur ein leichter Schritt.

Nachdem LIE das Problem gelöst hat, wird man versuchen dürfen, eine einheitliche Methode bei der Behandlung einzuführen, d. h. den Wechsel zwischen rein analytischen und rein geometrischen Schlüssen zu vermeiden. Man wird wünschen, den analytischen Ansatz, den LIE selbst gegeben hat, auch auf rein analytischem Wege bis zum Schlussergebnis durchzuführen. Es gelingt in der That durch eine leichte Abänderung der analytischen Fassung, jene »fast unausführbaren Rechnungen» einfach zu gestalten; ja es zeigt sich, dass die wichtige Integrabilitätsbedingung in einer viel bequemeren Form hervorgeht, als es die von LIE selbst gefundene ist. Die LIE'sche Formel war so wenig handlich, dass er sich genötigt sah, bei ihrer geometrischen Deutung wieder andersartige Überlegungen heranzuziehen, nämlich die letzten Schlüsse auf Abzählungen zu stützen. Benutzt man dagegen die Integrabilitätsbedingung in jener wirklich überraschend einfachen Gestalt, die der rechnerische Weg liefert, so führt ihre Deutung von selbst, ohne dass man etwas vom Endergebnis zu wissen braucht, zur Curve vierter Ordnung und damit zum ABEL'schen Theorem.[2]

Ich glaube daher, diesem Berichte über den Zusammenhang zwischen dem ABEL'schen Theorem und dem LIE'schen Translationsflächen-Theorem einen selbständigen Wert geben zu können, indem ich, *ausgehend von dem Lie'schen Ansatze*, aber auf anderem, nämlich rein analytischem Wege, das Problem der Translationsflächen bis zu dem LIE'schen Ergebnis verfolge. Nachher würde ich daran einige Bemerkungen über die geometrischen Deutungen des Ergebnisses und über die Verallgemeinerungen anschliessen.

---

[1] Siehe die 10. in der ersten Anmerkung genannte Arbeit, S. 190. In dieser Arbeit berichtet LIE selbst ausführlich über die Geschichte seines Problems.

[2] Vgl. im Folgenden § 6 und § 8.

§ 1. *Allgemeines über Translationsflächen.*

Ehe wir an das Problem herangehen, ist der Begriff der Translationsfläche zu erörtern.[1]

Wird eine starr gedachte Curve, etwa die durch die Gleichungen

$$x = A_1(u_1), \qquad y = B_1(u_1), \qquad z = C_1(u_1) \tag{1}$$

mit dem Parameter u_1 dargestellte, ohne Änderung ihrer Stellung im Raume, also mittels Schiebungen oder Translationen stetig in neue Lagen übergeführt, so erzeugt sie eine *Schiebungs- oder Translationsfläche.* Die Fläche enthält daher unendlich viele congruente und gleichgestellte Curven; durch jeden Punkt der Fläche geht eine von ihnen.

Da alle Punkte der Curve (1) bei diesen stetigen Schiebungen beständig congruente und gleichgestellte Bahnen durchlaufen, so enthält die Fläche noch eine zweite Schar von congruenten und gleichgestellten Curven. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Curve der ersten und eine Curve der zweiten Schar.

Demnach gestattet die Translationsfläche noch eine zweite Erzeugung: Durch stetige Schiebungen kann man eine Curve der zweiten Art über die Fläche hinwegführen.

Jede Translationsfläche gestattet demnach zwei Arten der Erzeugung durch stetige Translationen von Curven.

Zum Überfluss zeigt dies ihre analytische Darstellung: Wollen wir den Punkten (x, y, z) der Curve (1) stetige Schiebungen erteilen, so haben wir zu ihren Coordinaten Functionen einer Veränderlichen u_2 zu addieren, etwa die Functionen $A_2(u_2)$, $B_2(u_2)$, $C_2(u_2)$, sodass die Curve (1) die Translationsfläche erzeugt:

$$x = A_1(u_1) + A_2(u_2), \qquad y = B_1(u_1) + B_2(u_2), \qquad z = C_1(u_1) + C_2(u_2). \tag{2}$$

Auf dieser Fläche sind u_1 und u_2 Gaussische Parameter; sowohl die Pa-

[1] Wir reproducieren hier Betrachtungen aus Lie's 10. Abhandlung, S. 162—164.

rametercurven $u_1 = \text{Const.}$ als auch die Parametercurven $u_2 = \text{Const.}$ sind einander congruent und gleichgestellt.

Die Tangenten der durch die Punkte *einer* Curve $u_1 = \text{Const.}$ gehen den ∞^1 Curven $u_2 = \text{Const.}$ haben Richtungscosinus proportional der Grössen:

$$A_1'(u_1), \qquad B_1'(u_1), \qquad C_1'(u_1),$$

die von u_2 frei sind, d. h. alle jene ∞^1 Tangenten sind einander parallel und bilden daher einen Cylinder, der die Translationsfläche (2) längs der betrachteten Curve $u_1 = \text{Const.}$ umhüllt. Hieraus folgt:

Die beiden Curvenschaaren $u_1 = \text{Const.}$ und $u_2 = \text{Const.}$ auf der Translationsfläche (2) *sind zu einander im Dupin'schen Sinne conjugiert.*

Es folgt dies auch daraus, dass die zweiten Ableitungen $x_{u_1 u_2}, y_{u_1 u_2}, y_{u_1 u_2}$ der Functionen (2) gleich Null sind.

Da alle Curven $u_2 = \text{Const.}$ einander congruent und gleichgestellt sind, sind die Richtungen der Tangenten einer von ihnen dieselben wie die der Tangenten aller andern. Legen wir z. B durch den Anfangspunkt die Parallelen zu allen Tangenten einer Curve $u_2 = \text{Const.}$, so entsteht ein Richtungskegel, dessen Erzeugende auch den Tangenten aller anderen Curven $u_2 = \text{Const.}$ parallel sind. Ebenso gehört zu den Curven $u_1 = \text{Const.}$ ein gemeinsamer Richtungskegel.

Denken wir uns das Unendlichferne wie in der projectiven Geometrie als eine Ebene, so können wir auch so sagen: Jene beiden Richtungskegel treffen die unendlich ferne Ebene in zwei Curven γ_1 und γ_2. *Alle Tangenten aller Curven $u_2 = \text{Const.}$ treffen die unendlich ferne Ebene in den Punkten der einen Curve γ_1 und alle Tangenten aller Curven $u_1 = \text{Const.}$ treffen sie in den Punkten der anderen Curve γ_2.*

Analytisch kann man die beiden unendlich fernen Curven so festlegen: Wenn wir diejenige Richtung, auf der x, y, z um dx, dy, dz wachsen, durch die beiden Bestimmungsstücke

$$\xi = \frac{dx}{dz}, \qquad \eta = \frac{dy}{dz} \tag{3}$$

ausdrücken, sodass ihre Cosinus proportional

$$\xi, \eta, 1$$

sind, so können wir zugleich ξ, η als Coordinaten desjenigen Punktes in der unendlich fernen Ebene deuten, in dem alle Geraden von dieser Richtung die unendlich ferne Ebene treffen. Für die Richtungen der Tangenten der Curven $u_2 =$ Const., bei denen u_1 veränderlich ist, wollen wir ξ und η mit dem Index 1 versehen. Alsdann giebt (2), wenn wir nur u_1 ändern:

$$\xi_1 : \eta_1 : 1 = A_1'(u_1) : B_1'(u_1) : C_1'(u_1).$$

Dies sind zwei Gleichungen, aus denen wir uns u_1 eliminiert denken:

$$\varphi_1(\xi_1 , \eta_1) = 0.$$

Dies ist alsdann die zwischen den Richtungen des ersten Richtungskegels bestehende Beziehung oder auch *die Gleichung der unendlich fernen Curve* γ_1. Analog folgt aus:

$$\xi_2 : \eta_2 : 1 = A_2'(u_2) : B_2'(u_2) : C_2'(u_2)$$

durch Elimination von u_2 die *Gleichung*

$$\varphi_2(\xi_2 , \eta_2) = 0$$

der unendlich fernen Curve γ_2.

§ 2. *Die partielle Differentialgleichung der Translationsflächen.*[1]

Es seien jetzt umgekehrt irgend zwei Curven γ_1 und γ_2 in der unendlich fernen Ebene gegeben, etwa durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad \varphi_1(\xi_1 , \eta_1) = 0, \qquad \varphi_2(\xi_2 , \eta_2) = 0.$$

Dann ist es leicht, eine partielle Differentialgleichung aufzustellen, der jede solche Translationsfläche genügen muss, bei der die Tangenten der einen Curvenschar nach γ_1 und die Tangenten der anderen Curvenschar nach γ_2 gehen.

Ist nämlich (x , y , z) ein Punkt einer solchen Translationsfläche, die wir uns analytisch in der Form

$$z = f(x , y)$$

[1] A. a. O., S. 165.

ausgedrückt denken, und bezeichnen wir wie üblich die Ableitungen von z so:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so ist für jede Fortschreitung $(dx:dy:dz)$ auf der Fläche vom Punkte (x, y, z) aus:

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0$$

oder, wenn $dx:dz$ und $dy:dz$ wie in (3) mit ξ und η bezeichnet werden:

(5) $$p\xi + q\eta = 1.$$

Dass die Gleichung *linear* in ξ und η ist, entspricht dem Umstande, dass die Tangentenebene des Flächenpunktes (x, y, z) die unendlich ferne Ebene in einer *Geraden* schneidet.

Nun soll durch den Punkt (x, y, z) der Fläche eine Curve $u_2 = \text{Const.}$ und eine Curve $u_1 = \text{Const.}$ gehen, und es ist vorgeschrieben, dass die Tangenten dieser beiden Curven nach den durch (4) gegebenen unendlich fernen Curven γ_1 und γ_2 laufen. Mithin werden die Bestimmungsstücke ξ_1, η_1 der Tangente der einen Curve durch die beiden Gleichungen

(6) $$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad p\xi_1 + q\eta_1 = 1$$

und die Bestimmungsstücke ξ_2, η_2 der Tangente der andern Curve durch die beiden Gleichungen:

(7) $$\varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0, \qquad p\xi_2 + q\eta_2 = 1$$

gegeben. Beide Richtungen aber sollen nach dem Früheren zu einander conjugiert sein. Da x und y längs der einen nach (3) um solche Grössen wachsen, die ξ_1, η_1 proportional sind, und längs der anderen um solche, die ξ_2, η_2 proportional sind, so drückt sich das Conjugiertsein nach bekannter Regel so aus:

(8) $$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0.$$

Setzen wir hierin die aus (6) und (7) folgenden Werte von ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2, die Functionen von p und q sind, ein, so geht *eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* hervor, die die Form hat:

$$\Phi(p, q)r + X(p, q)s + \Psi(p, q)t = 0,$$

und ihr müssen die zu den gegebenen unendlich fernen Curven oder Richtungskegeln (4) gehörigen Translationsflächen

$$z = f(x, y)$$

genügen.

Es ist sofort klar, dass die partielle Differentialgleichung auch von denjenigen ∞^4 Flächen erfüllt wird, die aus einer ihr genügenden Fläche durch alle ∞^3 Schiebungen oder durch ähnliche Vergrössung hervorgehen, da sich dabei p, q, $r : s : t$ nicht ändern. Aus einer Translationsfläche gehen auf diese Weise offenbar immer wieder Translationsflächen hervor. Die Differentialgleichung hat also, sobald sie eine Translationsfläche als Lösung zulässt, sicher unendlich viele Lösungen, die Translationsflächen vorstellen. Es ist leicht einzusehen, dass jede Lösung der Differentialgleichung eine Translationsfläche ist, sobald sie nicht abwickelbar ist. Doch brauchen wir hierauf an dieser Stelle nicht näher einzugehen.

§ 3. *Das Problem und sein Ansatz.*

Das Lie'sche Problem ist nun dies:

Es sollen alle diejenigen Translationsflächen bestimmt werden, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufzufassen sind. Da jede Translationsfläche an sich schon, wie wir sahen, zwei Erzeugungen durch stetige Schiebungen zulässt, so ist dies natürlich so gemeint:

Wir fragen nach denjenigen Flächen, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthalten, sodass durch jeden Punkt der Fläche je eine Curve c_1, c_2, c_3, c_4 von jeder Schar geht, indem dann die Fläche vier Erzeugungen zulässt, einmal durch Verschieben von c_1 längs c_2 (wobei ein bestimmter Punkt von c_1 längs c_2 hinläuft), dann durch Verschieben von c_2 längs c_1, drittens durch Verschieben von c_3 längs c_4 und viertens durch Verschieben von c_4 längs c_3.

Zu dem Curvenpaar c_1, c_2 gehören als Örter der Schnittpunkte ihrer Tangenten mit der unendlich fernen Ebene zwei Curven γ_1, γ_2. Ebenso gehören zu dem Curvenpaar c_3, c_4 zwei Curven γ_3, γ_4. Dabei seien ξ_3, η_3 die auf die Tangenten von c_3 und ξ_4, η_4 die auf die Tangenten von c_4 bezüglichen Bestimmungsstücke (3) der Richtungen.

Zu γ_3 und γ_4 könnten wir, wenn wir ihre Gleichungen analog (4) gegeben hätten, ebenfalls die partielle Differentialgleichung analog (8) aufstellen. Die gesuchten Translationsflächen müssten beiden partiellen Differentialgleichungen genügen. Demnach stellen wir uns zunächst das analytische Problem:

Man soll vier Gleichungen:

$$(9)\qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad \varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0, \qquad \varphi_3(\xi_3, \eta_3) = 0, \qquad \varphi_4(\xi_4, \eta_4) = 0$$

so bestimmen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen für z:

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0, \\ \xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0, \end{cases}$$

in denen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \xi_4, \eta_4$ die durch (9) *und durch*

$$(11)\qquad p\xi_1 + q\eta_1 = 1, \qquad p\xi_2 + q\eta_2 = 1, \qquad p\xi_3 + q\eta_3 = 1, \qquad p\xi_4 + q\eta_4 = 1$$

bestimmten Functionen der ersten Ableitungen p, q bedeuten, wenigstens eine gemeinsame Integralfläche

$$z = f(x, y)$$

haben.[1]

Wir werden nun die beiden Differentialgleichungen (10) ein wenig umformen, indem wir

$$(12)\qquad \frac{\eta_1}{\xi_1} = \tau_1, \qquad \frac{\eta_2}{\xi_2} = \tau_2, \qquad \frac{\eta_3}{\xi_3} = \tau_3, \qquad \frac{\eta_4}{\xi_4} = \tau_4$$

---

[1] So hat LIE selbst das Problem formuliert, siehe a. a. O., S. 167. Von hier ab verlassen wir den von LIE eingeschlagenen Weg, indem wir zunächst den Ansatz ein wenig abändern und darauf im nächsten Paragraphen an die analytische Lösung gehen.

einführen, wodurch sie die Formen annehmen:

$$r + (\tau_1 + \tau_2)s + \tau_1\tau_2 t = 0,$$
$$r + (\tau_3 + \tau_4)s + \tau_3\tau_4 t = 0.$$

Die aus (12) folgenden Werte von $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ setzen wir in (9) und (11) ein. Die Gleichungen (9) gehen dann in Gleichungen zwischen den ξ_i und τ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ über, sodass folgendes Problem vorliegt:

Man soll vier Gleichungen:

$$(13) \qquad \psi_1(\xi_1, \tau_1) = 0, \quad \psi_2(\xi_2, \tau_2) = 0, \quad \psi_3(\xi_3, \tau_3) = 0, \quad \psi_4(\xi_4, \tau_4) = 0$$

so bestimmen, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen für z:

$$(14) \qquad \begin{cases} r + (\tau_1 + \tau_2)s + \tau_1\tau_2 t = 0, \\ r + (\tau_3 + \tau_4)s + \tau_3\tau_4 t = 0, \end{cases}$$

in denen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ die durch (13) und durch:

$$(15) \qquad p\xi_1 + q\xi_1\tau_1 = 1, \quad p\xi_2 + q\xi_2\tau_2 = 1, \quad p\xi_3 + q\xi_3\tau_3 = 1, \quad p\xi_4 + q\xi_4\tau_4 = 1$$

bestimmten Functionen der ersten Ableitungen p, q bedeuten, wenigstens eine gemeinsame Integralfläche

$$z = f(x, y)$$

haben.

Von den abwickelbaren Flächen wollen wir dabei absehen. Denn es ist nicht schwer einzusehen, dass eine abwickelbare Fläche nur dann Translationsfläche ist, wenn sie eine Cylinder ist. Ein Cylinder aber kann auf unendlich viele Weisen durch Schiebung einen Curve erzeugt werden; man wähle nämlich irgend eine Curve auf dem Cylinder aus.

Ist nun aber die fragliche gemeinsame Integralfläche

$$z = f(x, y)$$

nicht abwickelbar, so sind bekanntlich

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

von einander unabhängige Functionen von x und y. *Daher können wir auf der Fläche p und q statt x und y als unabhängige Veränderliche benutzen.*

§ 4. *Die Integrabilitätsbedingung.*

Nach (14) muss auf der fraglichen Fläche:

$$(16)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{(\tau_1 + \tau_2)\tau_3\tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} \,.\, s, \\[2ex] t = -\dfrac{\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} \,.\, s \end{cases}$$

sein. Auch müssen r, s, t die Bedingungen erfüllen:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x},$$

die wir, wenn wir p und q als Veränderliche statt x, y benutzen wollen, so schreiben werden:

$$\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}$$

oder, da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = t$$

ist, so

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial p} s + \dfrac{\partial r}{\partial q} t = \dfrac{\partial s}{\partial p} r + \dfrac{\partial s}{\partial q} s, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial p} s + \dfrac{\partial s}{\partial q} t = \dfrac{\partial t}{\partial p} r + \dfrac{\partial t}{\partial q} s. \end{cases}$$

Hierin wollen wir die Werte (16) von r und t einführen. Es empfiehlt sich, dabei zur Abkürzung die in (16) rechts auftretenden Factoren von s mit U und V zu bezeichnen:

$$(18)\qquad \frac{(\tau_1 + \tau_2)\tau_3\tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} = U, \qquad -\frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} = V,$$

sodass nach (16):

$$r = Us, \qquad t = Vs$$

ist. Setzen wir diese Werte in (17) für r und t ein, so kommt:

$$\frac{\partial \log s}{\partial p} = \frac{V_q + UV_p}{1 - UV}, \qquad \frac{\partial \log s}{\partial q} = \frac{U_p + VU_q}{1 - UV}.$$

Eine Function s von p und q giebt es hiernach nur dann, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{V_q + UV_p}{1 - UV} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{U_p + VU_q}{1 - UV} \tag{19}$$

ist.

Mithin ist (19) eine *notwendige* Bedingung; wir werden später sehen, dass sie auch hinreicht.[1]

§ 5. *Ausrechnung der Bedingung.*

Zur Ausrechnung der Bedingung bedürfen wir vorerst der Ableitungen von U und V nach p und q. Nach (18) sind U und V Functionen der τ; und diese sind nach (13) und (15) Functionen von p und q. Nach (13) sind z. B. ξ_1 und τ_1 von einander abhängig, und nach (15) ist:

$$(p + q\tau_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial p} + q\xi_1\frac{\partial \tau_1}{\partial p} = -\xi_1,$$

$$(p + q\tau_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial q} + q\xi_1\frac{\partial \tau_1}{\partial q} = -\xi_1\tau_1.$$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen mit

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial q} \quad \text{bez.} \quad -\frac{\partial \tau_1}{\partial p}$$

und addiren wir sie dann, so kommt mit Rücksicht auf die Abhängigkeit von ξ_1 und τ_1:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial q} - \tau_1\frac{\partial \tau_1}{\partial p} = 0.$$

[1] Lie stellt drei Integrationsbedingungen auf, die höhere Differentialquotienten nach p und q, nämlich vierte, enthalten, während unsere Bedingung (19) nur erste und zweite enthält. Lie beweist, dass seine drei Bedingungen auf eine zurückkommen. Diesen Nachweis brauchen wir garnicht zu führen. Unsere Bedingung wird, wie wir sehen werden, gerade jene eine Lie'sche liefern.

So ist überhaupt allgemein:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \tau_i \frac{\partial \tau_i}{\partial p}. \tag{20} \qquad (i=1,2,3,4)$$

Im Folgenden soll zur Abkürzung der Bezeichnung der Accent die Differentiation nach p andeuten, sodass

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial p} = \tau_i' \qquad (i=1,2,3,4)$$

und nach (20):

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \tau_i \tau_i' \tag{21} \qquad (i=1,2,3,4)$$

ist.

Nach der zweiten Gleichung (18) ist nun:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_p = \quad (\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4)\tau_1' + (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)\tau_2' \\ + (\tau_4 - \tau_1)(\tau_4 - \tau_2)\tau_3' + (\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)\tau_4'$$

oder kürzer:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_p = \alpha_1\tau_1' + \alpha_2\tau_2' + \alpha_3\tau_3' + \alpha_4\tau_4', \tag{22}$$

wenn wir nämlich für den Augenblick

$$\begin{cases} (\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) = \alpha_1, \\ (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4) = \alpha_2, \\ (\tau_4 - \tau_1)(\tau_4 - \tau_2) = \alpha_3, \\ (\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2) = \alpha_4 \end{cases} \tag{23}$$

setzen. Infolge von (21) ergiebt sich aus (22) sofort noch:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_q = \alpha_1\tau_1\tau_1' + \alpha_2\tau_2\tau_2' + \alpha_3\tau_3\tau_3' + \alpha_4\tau_4\tau_4',$$

sodass hieraus und aus (22) folgt:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2(V_q + UV_p) = \sum_1^4 {}_i\, \alpha_i(\tau_i + U)\tau_i'.$$

Aber nach (18) ist

$$\tau_1 + U = \frac{\tau_2\alpha_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4},$$

und ähnliche Werte gehen für $\tau_2 + U$, $\tau_3 + U$, $\tau_4 + U$ hervor, sodass wir schliesslich wegen der Werte (23) erhalten:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^3(V_q + UV_p) &= (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4)\\ &\times [\tau_2\tau_1' + \tau_1\tau_2' - \tau_4\tau_3' - \tau_3\tau_4'].\end{aligned}\right.$$

Aus (18) folgt ferner

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 U_p = -\alpha_1\tau_3\tau_4\tau_1' - \alpha_2\tau_3\tau_4\tau_2' - \alpha_3\tau_1\tau_2\tau_3' - \alpha_4\tau_1\tau_2\tau_4',$$

und hieraus ziehen wir nach (21) sofort den Schluss:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 U_q = -\alpha_1\tau_1\tau_3\tau_4\tau_1' - \ldots,$$

wo es genügt, das erste der vier Glieder hinzuschreiben. Beide Formeln geben:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2(U_p + VU_q) = -\alpha_1\tau_3\tau_4(1 + \tau_1 V)\tau_1' - \ldots.$$

Weil aber nach (18):

$$1 + \tau_1 V = -\frac{\alpha_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}$$

u. s. w. ist, so folgt hieraus wegen der Werte (23):

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^3(U_p + VU_q) &= (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4)\\ &\times [\tau_3\tau_4(\tau_1' + \tau_2') - \tau_1\tau_2(\tau_3' + \tau_4')].\end{aligned}\right.$$

Nach (18) ist ferner:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2(1 - UV) = (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4).$$

Daher giebt (24) und (25):

$$\frac{V_q + UV_p}{1 - UV} = \frac{\tau_2\tau_1' + \tau_1\tau_2' - \tau_4\tau_3' - \tau_3\tau_4'}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4},$$

$$\frac{U_p + VU_q}{1 - UV} = \frac{\tau_3\tau_4(\tau_1' + \tau_2') - \tau_1\tau_2(\tau_3' + \tau_4')}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}.$$

Hiermit sind die in der auszuwertenden Bedingung (19) auftretenden Quotienten berechnet, sodass die Bedingung so geschrieben werden kann:

$$(26)\qquad \frac{\partial}{\partial q}\frac{\tau_2\tau_1' + \tau_1\tau_2' - \tau_4\tau_3' - \tau_3\tau_4'}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\tau_3\tau_4(\tau_1' + \tau_2') - \tau_1\tau_2(\tau_3' + \tau_4')}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}.$$

Um nun die noch erforderlichen partiellen Differentiationen nach q und p auszuführen, haben wir zu bedenken, dass der Accent die Differentiation nach p bedeutet. Aus (21) schliessen wir, dass

$$\frac{\partial \tau_i'}{\partial q} = \frac{\partial^2 \tau_i}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \frac{\partial(\tau_i \tau_i')}{\partial p} = \tau_i'^2 + \tau_i \tau_i''$$

ist. Bei der Ausführung der Differentiationen in (26) haben wir hiernach die folgenden vier Regeln zu beachten:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial p} = \tau_i', \qquad \frac{\partial \tau_i}{\partial q} = \tau_i \tau_i',$$

$$\frac{\partial \tau_i'}{\partial p} = \tau_i'', \qquad \frac{\partial \tau_i'}{\partial q} = \tau_i'^2 + \tau_i \tau_i''.$$

Wenn wir hiernach die Differentiation nach q bez. p in (26) ausführen, so finden wir *ein überraschend einfaches Ergebnis.* Es zeigt sich nämlich, dass alle Glieder bis auf vier einander gegenseitig fortheben, indem einfach bleibt:

$$\tau_1'' + \tau_2'' + \tau_3'' + \tau_4'' = 0. \tag{27}$$

Dies also ist die zu discutirende Bedingung.[1]

[1] Bei LIE ergiebt sich a. a. O., S. 193, diese Bedingung:

$$\sum_1^4 {}_i \frac{\dfrac{d^2\eta_i}{d\xi_i^2}}{\left(p + q\dfrac{d\eta_i}{d\xi_i}\right)^3} = 0.$$

Dass dies nichts anderes als die Gleichung (27) oben ist, erkennt man leicht, wenn man die Relationen

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{\xi_i}$$

und

$$\xi_i p + \eta_i q = 1, \qquad \xi_i' p + \eta_i' q = -\xi_i, \qquad \xi_i'' p + \eta_i'' q = -2\xi_i'$$

benutzt, insbesondere auch die aus den drei letzten folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & 1 \\ \xi_i' & \eta_i' & -\xi_i \\ \xi_i'' & \eta_i'' & -2\xi_i' \end{vmatrix} = 0.$$

§ 6. *Die Curve vierter Ordnung.*

Wir gehen jetzt an die Deutung dieser Bedingung (27). Da die Accente die Differentiation nach p andeuten, so sagt sie aus, *dass die Summe der τ_i linear in p ist:*

$$\Sigma \tau_i = \alpha p + \beta, \tag{28}$$

wo α und β Functionen von q sind. Aber hieraus können wir noch mehr schliessen. Differenzieren wir nämlich diese Formel nach q, so folgt wegen (21):

$$\Sigma \tau_i \tau_i' = \frac{d\alpha}{dq} p + \frac{d\beta}{dq}.$$

Weil aber der Strich die Differentiation nach p andeutet, so ist die linke Seite der halbe Differentialquotient von $\Sigma \tau_i^2$ nach p. Also folgt hieraus, *dass die Summe der τ_i^2 quadratisch in p ist.* Wenden wir auf sie nochmals dasselbe Verfahren an, so ergiebt sich mit Hülfe von (21), *dass die Summe der τ_i^3 vom dritten Grade in p ist.* Ebenso ist *die Summe der τ_i^4 vom vierten Grade in p.* Dabei sind die Coefficienten Functionen von q.

Nun erfüllen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ die biquadratische Gleichung für τ:

$$(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4) = 0.$$

Ordnen wir sie nach Potenzen von τ:

$$\tau^4 - a_1 \tau^3 + a_2 \tau^2 - a_3 \tau + a_4 = 0,$$

so sind die Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 symmetrische Functionen von $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Bekanntlich lassen sich die Summen der Potenzen von τ_i durch sie wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\Sigma \tau_i &= a_1, \\
\Sigma \tau_i^2 &= a_1^2 - 2a_2, \\
\Sigma \tau_i^3 &= a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3, \\
\Sigma \tau_i^4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4.
\end{aligned}$$

Da nun, wie wir sahen, die linken Seiten vom 1., 2., 3. bez. 4. Grade in p sind, so lehrt die erste Gleichung, dass a_1 linear in p ist, die zweite alsdann, dass a_2 vom 2. Grade, die dritte, dass a_3 vom 3. Grade und die vierte, dass a_4 vom vierten Grade in p ist.

Also erfüllen τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 eine biquadratische Gleichung:

$$\tau^4 - a_1\tau^3 + a_2\tau^2 - a_3\tau + a_4 = 0,$$

in der a_1, a_2, a_3, a_4 ganze Functionen von p sind, deren Grade durch die Indices angegeben werden. Die Coefficienten dieser Functionen sind Functionen von q.

Nun war allgemein, vgl. (12), das Zeichen τ für $\eta : \xi$ gebraucht worden. Jedes Wertepaar ξ_i, η_i erfüllt also die Gleichung in ξ und η:

$$\eta^4 - a_1\eta^3\xi + a_2\eta^2\xi^2 - a_3\eta\xi^3 + a_4\xi^4 = 0.$$

Ferner ist nach (11):

$$p = \frac{1 - q\eta_i}{\xi_i}.$$

Setzen wir aber in den Functionen a_1, a_2, a_3, a_4 für p den Wert

$$\frac{1 - q\eta}{\xi}$$

ein, so heben sich die Nenner ξ fort, da a_1 mit ξ, a_2 mit ξ^2, a_3 mit ξ^3 und a_4 mit ξ^4 behaftet ist. Also geht alsdann eine Gleichung vierten Grades zwischen ξ und η hervor, deren Coefficienten nur noch von q abhängen.

Alle vier Wertepaare ξ_i, η_i erfüllen somit eine in ξ und η biquadratische Gleichung, deren Coefficienten nur noch von q abhängen.

Da diese Gleichung von dem Wertepaare ξ_1, η_1 z. B. erfüllt wird, andererseits aber nach (9) und (11) die Grössen ξ_1, η_1 zwei Gleichungen:

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad p\xi_1 + q\eta_1 = 1$$

erfüllen sollen, so muss jene Gleichung, gebildet für ξ_1, η_1, eine Folge von diesen beiden sein. Weil sie aber von p frei ist, kann sie nur eine Folge der ersten, $\varphi_1 = 0$, allein sein, d. h. sie ist auch von q frei.

Somit hat sich ergeben:

Alle vier Wertepaare ξ_i, η_i *erfüllen eine in* ξ *und* η *biquadratische Gleichung mit constanten Coefficienten.*

Anders ausgesprochen:

Alle vier unendlich fernen Curven γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 *gehören ein und derselben Curve vierter Ordnung an.*[1]

Wenn es also Translationsflächen giebt, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthalten, *so müssen die Tangenten aller vier Scharen die unendlich ferne Ebene in ein und derselben Curve vierter Ordnung schneiden.*

§ 7. *Anwendung des Abel'schen Theorems.*

Unser Problem kommt hiernach auf folgendes hinaus:

In der unendlich fernen Ebene ist eine Curve vierter Ordnung gegeben. Gefragt wird, ob es eine Fläche giebt, die vier Scharen von je ∞^1 *congruenten und gleichgestellten Curven enthält, deren Tangenten sämtlich jene Curve vierter Ordnung treffen.*

Nun liefert uns das Abel'sche Theorem, angewandt auf die Schnitte jener Curve vierten Ordnung mit einer veränderlichen Geraden, in der That derartige Flächen.[2]

Ist nämlich

$$F(\xi, \eta) = 0$$

eine Gleichung vierten Grades in ξ und η, also F eine ganze Function

[1] Lie schliesst dies aus seiner in der letzten Anmerkung angegebenen Bedingung a. a. O., S. 194—196, so: Nach einem Satze von Reiss ist die Bedingung für die Schnitte einer Curve vierter Ordnung mit einer beweglichen Geraden erfüllt. Andererseits kann man durch Abzählung erkennen, dass die Bedingung nur von ∞^{14} Curven erfüllt sein kann. Es giebt aber gerade ∞^{14} ebene Curven vierter Ordnung; also giebt die Bedingung gerade und nur alle Curven vierter Ordnung.

[2] Dies erkannte Lie 1891—92. Siehe die 7. oben erwähnte Abhandlung.

vierten Grades von ξ und η, so ist, wenn die durch $F=0$ dargestellte Curve vierter Ordnung durch die veränderliche Gerade

$$p\xi + q\eta = 1$$

in den vier Punkten (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4) geschnitten wird; nach dem Abel'schen Theorem:

$$\int \frac{\xi_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int \frac{\xi_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}} + \int \frac{\xi_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} + \int \frac{\xi_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}} = 0,$$
$$\int \frac{\eta_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int \frac{\eta_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}} + \int \frac{\eta_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} + \int \frac{\eta_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}} = 0,$$
$$\int \frac{d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int \frac{d\xi_2}{F_{\eta_2}} + \int \frac{d\xi_3}{F_{\eta_3}} + \int \frac{d\xi_4}{F_{\eta_4}} = 0,$$

sobald die Grenzen der Integrale die zu zwei Lagen der Geraden gehörigen Schnittpunktscoordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sind. Hierbei bedeutet natürlich F_{η_i} die partielle Ableitung vom $F(\xi_i, \eta_i)$ nach η_i. Aus allen Integralen hat man sich die η mittels der Gleichungen

$$F(\xi_i, \eta_i) = 0 \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3,4)}$$

entfernt zu denken, sodass unter den Integralen nur die Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ vorkommen. Bildet man nun die Gleichungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} x = \int \frac{\xi_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int \frac{\xi_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}}, \\ y = \int \frac{\eta_1 d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int \frac{\eta_2 d\xi_2}{F_{\eta_2}}, \\ z = \int \frac{d\xi_1}{F_{\eta_1}} + \int \frac{d\xi_2}{F_{\eta_2}}, \end{cases}$$

so ist nach den obigen Formeln des Abel'schen Theorems auch:

$$(20) \qquad \begin{cases} x = -\int \frac{\xi_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} - \int \frac{\xi_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}}, \\ y = -\int \frac{\eta_3 d\xi_3}{F_{\eta_3}} - \int \frac{\eta_4 d\xi_4}{F_{\eta_4}}, \\ z = -\int \frac{d\xi_3}{F_{\eta_3}} - \int \frac{d\xi_4}{F_{\eta_4}}. \end{cases}$$

Nun stellen aber die Gleichungen (19) eine Fläche mit den Gaussischen Parameter ξ_1, ξ_2 und die Gleichungen (20) also dieselbe Fläche, aber mit den Gaussischen Parameter ξ_3, ξ_4, dar. Da jedesmal jede der Coordinaten eine Summe von zwei Functionen ist, von denen die eine nur den einen Parameter, die andere nur den anderen Parameter enthält, so haben die Gleichungen (19) und (20) die für Translationsflächen charakteristische allgemeine Form (2).

Mithin haben wir eine Fläche erhalten, die sich in *zwei* Arten, (19) und (20), als Translationsfläche darstellen lässt. Beide Darstellungen sind wesentlich von einander verschieden, denn die durch den Punkt (x, y, z) der Fläche gehenden Parameterlinien $\xi_2 = \text{Const.}$ und $\xi_1 = \text{Const.}$ haben dort Tangenten, deren Richtungscosinus proportional

$$\xi_1, \eta_1, 1 \quad \text{bez.} \quad \xi_2, \eta_2, 1$$

sind, während die Parameterlinien $\xi_4 = \text{Const.}$ und $\xi_3 = \text{Const.}$ dort Tangenten haben, deren Richtungscosinus proportional

$$\xi_3, \eta_3, 1 \quad \text{bez.} \quad \xi_4, \eta_4, 1$$

sind. Weil nun für alle Wertepaare ξ_i, η_i die Gleichung

$$p\xi + q\eta = 1$$

besteht, so gehen die vier Tangentenrichtungen in der Tangentenebene des Punktes (x, y, z) nach denjenigen vier unendlich fernen Punkten (ξ_i, η_i) der Curve vierter Ordnung

$$F(\xi, \eta) = 0,$$

in denen sie von der unendlich fernen Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

geschnitten wird, und sind daher für einen allgemein gewählten Punkt (x, y, z) der Fläche von einander verschieden.

In der That also stellen die Gleichungen (19) *oder* (20) *eine Fläche dar, die* **vier** *Scharen von je* ∞^1 *congruenten und gleichgestellten Curven enthält derart, dass in einem allgemein gewählten Punkte der Fläche die Richtungen der vier hindurchgehenden Curven von einander verschieden sind.*

§ 8. *Die allgemeinste Lösung des Problems.*

Hat uns somit das ABEL'sche Theorem, angewandt auf den Schnitt der gefundenen unendlich fernen Curve vierter Ordnung mit einer veränderlichen Geraden, *eine* Lösung des gestellten Problems gegeben, so ist es schliesslich auch leicht, unabhängig hiervon die allgemeinste Lösung abzuleiten.[1]

Denn wenn wieder
$$F(\xi, \eta) = 0$$
eine gegebene unendlich ferne Curve vierter Ordnung ist, so handelt es sich darum, eine Translationsfläche zu finden, deren erzeugende Curven solche Tangenten haben, die diese Curve treffen. Da nach (3) längs einer Richtung $(dx : dy : dz)$ die Proportion:
$$dx : dy : dz = \xi : \eta : 1$$
besteht, so wird die *allgemeinste* Curve, deren Tangenten nach jener unendlich fernen Curve $F = 0$ hingehen, gegeben durch:
$$x = \int \rho \xi d\xi, \qquad y = \int \rho \eta d\xi, \qquad z = \int \rho d\xi,$$
wo ρ eine zunächst beliebige Function von ξ bedeutet und unter η die durch
$$F(\xi, \eta) = 0$$
bestimmte Function von ξ zu verstehen ist, sodass längs der Curve ξ die Veränderliche ist. Ist nun auf der fraglichen Fläche
$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$
so müssen die Tangenten der vier durch den Punkt (x, y, z) der Fläche

[1] LIE begnügt sich damit, zu zeigen, dass die Curve vierter Ordnung mittels des ABEL'schen Theorems Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung liefert. Aber natürlich muss noch gezeigt werden, dass die Curve vierter Ordnung sonst keine (ausser ähnlich vergrösserten) ergiebt. Diesen übrigens sehr leichten Nachweis deuten wir im gegenwärtigen Paragraphen an.

gehenden Curven der vier Scharen von je ∞^1 congruenten Curven die unendlich ferne Ebene in den vier Schnittpunkten (ξ_i, η_i) der Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

mit der Curve $F = 0$ treffen. Demnach muss die Fläche, wenn ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 zu dem ersten Curvenpaar und ξ_3, η_3 und ξ_4, η_4 zu dem zweiten Curvenpaar gehören, sowohl in der Form:

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \int \rho_1 \xi_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \xi_2 d\xi_2, \\ y = \int \rho_1 \eta_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \eta_2 d\xi_2, \\ z = \int \rho_1 d\xi_1 \quad + \int \rho_2 d\xi_2 \end{cases}$$

als auch in der Form:

$$\begin{aligned} x &= \int \sigma_3 \xi_3 d\xi_3 + \int \sigma_4 \xi_4 d\xi_4, \\ y &= \int \sigma_3 \eta_3 d\xi_3 + \int \sigma_4 \eta_4 d\xi_4, \\ z &= \int \sigma_3 d\xi_3 \quad + \int \sigma_4 d\xi_4 \end{aligned}$$

darstellbar sein, wobei $\rho_1, \rho_1, \sigma_3, \sigma_4$ bezüglich Functionen von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ bedeuten. Es muss also, wenn wir σ_3, σ_4 mit $-\rho_3, -\rho_4$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} \int \rho_1 \xi_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \xi_2 d\xi_2 + \int \rho_3 \xi_3 d\xi_3 + \int \rho_4 \xi_4 d\xi_4 &= 0, \\ \int \rho_1 \eta_1 d\xi_1 + \int \rho_2 \eta_2 d\xi_2 + \int \rho_3 \eta_3 d\xi_3 + \int \rho_4 \eta_4 d\xi_4 &= 0, \\ \int \rho_1 d\xi_1 \quad + \int \rho_2 d\xi_2 \quad + \int \rho_3 d\xi_3 \quad + \int \rho_4 d\xi_4 \quad &= 0 \end{aligned}$$

sein, vorausgesetzt, dass die Integrale wieder erstreckt sind zwischen zwei Lagen der Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

in der unendlich fernen Ebene. Indem man die sich durch totale Differentiation ergebenden Formeln:

$$p d\xi_i + q d\eta_i = -\xi_i dp - \eta_i dq \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3,4)}$$

und

$$F_{\xi_i} d\xi_i + F_{\eta_i} d\eta_i = 0 \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3,4)}$$

benutzt, um hierin und ebenso in den früheren drei Formeln des ABEL'schen Theorems (S. 83) die Differentiale $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ durch dp und dq auszudrücken, ist es leicht, durch Vergleichung zu erkennen, dass $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ proportional

$$\frac{1}{F_{\eta_1}}, \frac{1}{F_{\eta_2}}, \frac{1}{F_{\eta_3}}, \frac{1}{F_{\eta_4}}$$

sein müssen. Da nun ρ_1 nur von ξ_1, ρ_2 nur von ξ_2 u. s. w. abhängt, so folgt, dass allgemein:

$$\rho_i = \frac{c}{F_{\eta_i}}$$

ist, wo c eine für alle vier ρ_i gemeinsame *Constante* bedeutet. Setzen wir nun die Werte:

$$\rho_1 = \frac{c}{F_{\eta_1}}, \qquad \rho_2 = \frac{c}{F_{\eta_2}}$$

in (21) ein, so finden wir wieder die Werte (19) von x, y, z, aber multipliciert mit einer Constanten c. *Die allgemeinste Fläche also, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, geht aus der Fläche* (19) *durch ähnliche Vergrössung hervor.*

Natürlich liefert auch jede *Schiebung* der Fläche (19) wieder eine Lösung, aber alle diese Lösungen sind schon in (19) enthalten, da die *unteren* Grenzen der Integrale verschieden gewählt werden können, indem die Anfangslage der Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

willkürlich ist.

§ 9. *Formulierung des Lie'schen Theorems.*

Wir sind zu Ende mit der Lösung des Problems und können das Ergebnis formulieren: [1]

Jede nicht abwickelbare Fläche, die vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven enthält, sodass die durch einen allgemein gewählten Punkt der Fläche gehenden Curven verschiedene Tangenten haben, ergiebt sich

---

[1] Siehe die 10. der oben genannten LIE'schen Abhandlungen, S. 197.

so: Man stellt die Gleichung einer beliebigen algebraischen Curve vierter Ordnung in ξ und η auf:

$$F(\xi, \eta) = 0$$

und bildet die drei Abel'schen Integrale erster Gattung:

$$\varphi(\xi) = \int \frac{\xi d\xi}{F_\eta}, \qquad \chi(\xi) = \int \frac{\eta d\xi}{F_\eta}, \qquad \psi(\xi) = \int \frac{d\xi}{F_\eta}.$$

Sind $\varphi(\xi_i)$, $\chi(\xi_i)$, $\psi(\xi_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ diese Integrale, hinerstreckt zwischen den vier Schnittpunkten einer festen Geraden und den vier Schnittpunkten (ξ_i, η_i) einer veränderlichen Geraden

$$p\xi + q\eta = 1$$

mit der Curve vierter Ordnung $F(\xi, \eta) = 0$, so sind:

$$x = c[\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)],$$
$$y = c[\chi(\xi_1) + \chi(\xi_2)],$$
$$z = c[\psi(\xi_1) + \psi(\xi_2)]$$

die Gleichung einer Fläche von der gesuchten Art; sie lässt sich auch so darstellen:

$$x = -c[\varphi(\xi_3) + \varphi(\xi_4)],$$
$$y = -c[\chi(\xi_3) + \chi(\xi_4)].$$
$$z = -c[\psi(\xi_3) + \psi(\xi_4)].$$

*Dabei bedeutet c eine beliebige Constante. So findet man **alle** Flächen von der gewünschten Art.*

§ 10. ***Zur Anwendung des Lie'schen Theorems.***

Wir haben, um das Wesentliche der Folgerungen hervortreten zu lassen, einige nebensächliche Punkte mit Stillschweigen übergangen, die Lie ausführlich hervorgehoben hat. Mit einigen Worten seien sie hier erwähnt:

Ist die Curve vierter Ordnung irreducibel, so bilden alle vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven auf der zugehörigen Fläche im Grunde genommen eine einzige irreducible Schar. Sie ist aber so beschaffen, dass durch jeden allgemein gewählten Punkt P der Fläche vier verschiedene Curven c_1, c_2, c_3, c_4 der Schar gehen. Sie sind alle vier einander congruent und gleichgestellt, aber der Punkt P ist natürlich nicht auf den vier Curven überall der homologe Punkt. Wenn man c_1 mit einem ihrer Punkte längs c_2 stetig hinschiebt, geht die Fläche hervor; ebenso umgekehrt, wenn c_2 mit einem ihrer Punkte längs c_1 stetig hingeschoben wird. Ebenso liefern c_3 und c_4 zwei Erzeugungsarten.

Ist die Curve vierter Ordnung reducibel, so darf sie nicht etwa aus zwei zusammenfallenden Curven zweiter Ordnung bestehen, vielmehr muss immer noch eine allgemein gewählte Gerade sie in vier verschiedenen Punkten treffen.

Die Curve vierter Ordnung kann in zwei verschiedene Kegelschnitte zerfallen. *Dies giebt Anlass zu zwei wesentlich verschiedenen Flächenarten.* Man kann nämlich, wenn man die Curve durch eine Gerade schneidet, als Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) entweder Punkte auf demselben Kegelschnitt oder Punkte auf verschiedenen Kegelschnitten wählen. Im ersteren Falle hat die Fläche eine höchst merkwürdige Eigenschaft; LIE hat gezeigt, dass die beiden Kegelschnitte durch irgend ein Paar von Kegelschnitten desjenigen Büschels ersetzt werden dürfen, das von jenen beiden Kegelschnitten bestimmt wird. D. h. alsdann *gestattet die Fläche unendlich viele Erzeugungen durch Translation von Curven.* Wenn insbesondere der eine Kegelschnitt der Kugelkreis ist, so gehen *Minimalflächen* hervor. Unter anderen tritt hier die SCHERK'sche Minimalfläche und die Minimalschraubenfläche auf.[1]

Im Fall des Büschels von Kegelschnitten hat die Fläche mindestens eine Schar von ebenen Erzeugenden, da das Büschel mindestens einen in Geraden zerfallenden Kegelschnitt enthält.

Auch wenn die Curve vierter Ordnung in eine Curve dritter Ordnung und eine Gerade zerfällt, hat die Fläche eine Schar von ∞^1 congruenten gleichgestellten ebenen Curven. Ist die Gerade eine Wendetangente der

---

[1] Unter Leitung des Verfassers hat R. KUMMER (siehe seine Dissertation, Leipzig 1894) Modelle der Translationsflächen mit unendlich vielen Erzeugungen hergestellt, die Eigentum des mathem. Instituts an der Universität Leipzig sind.

Curve dritter Ordnung, so sind diese Curven Parabeln, und nur in diesem Fall treten Parabeln als erzeugende Curven auf.[1]

Die grosse Zahl verschiedenartiger Typen von Translationsflächen, die sich aus dem Lie'schen Theorem ergeben, ist bisher, so viel ich weiss, noch nicht genauer untersucht worden, obgleich ihre Betrachtung wegen des innigen Zusammenhanges mit dem Abel'schen Theorem sowohl in geometrischer als auch in analytischer Hinsicht gewiss sehr lohnend sein würde.

§ 11. *Verallgemeinerungen und andere Beweise des Lie'schen Theorems.*

Dass sich das Theorem über die Translationsflächen mit mehrfacher Erzeugung auf Räume höherer Dimensionenzahl verallgemeinern lässt, hat Lie selbst schon erkannt und zum Teil in seinen Schriften mitgeteilt.[2] So hat er ausführlich gezeigt, dass das Abel'sche Theorem alle dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des Raumes von vier Dimensionen liefert, die in mehrfache Weise als Translationsmannigfaltigkeiten aufgefasst werden können. Auf diese Verallgemeinerungen gedenke ich jedoch nicht einzugehen; meine Absicht war es nur, dem Wunsche zu entsprechen, im gegenwärtigen Aufsatze das Lie'sche Theorem für die Translationsflächen des gewöhnlichen Raumes so abzuleiten, dass auch denjenigen, die den Lie'schen Ideenkreisen ferner stehen oder den von Lie mit so grosser Meisterschaft gehandhabten Wechsel zwischen analytischen und synthetischen Betrachtungen nicht lieben, ein Einblick in den Beweis und das Wesen des Lie'schen Theorems gegeben wird. Schliesslich möchte ich noch erwähnen, dass Poincaré zwei andere Beweise des Lie'schen Theorems geliefert hat, von denen der zweite sozusagen intuitiv und ohne, dass man die Lie'schen partiellen Differentialgleichungen braucht, zum Ziele führt.[3]

---

[1] Von G. Wiegner (siehe seine Dissertation, Leipzig 1893, auch Archiv for Math. Bd. 14) sind hierzu Modelle hergestellt worden, die sich ebenfalls im Leipziger math. Institut befinden.

[2] Vgl. die 7. und 12. der oben angegebenen Abhandlungen.

[3] *Remarques diverses sur les fonctions abéliennes*, Journal de Math. pures et appl. 5. série, t. 1 (1895), S. 219—314, und: *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes,* Bulletin de la Société math. t. 29 (1901). S. 61—86.

Er beruht wesentlich auf Continuitätsbetrachtungen und ist von POINCARÉ selbst auf höhere Dimensionenzahlen ausgedehnt worden. LIE's eigener Weg darf gewiss nicht als intuitiv bezeichnet werden, was aus den Bemerkungen in der Einleitung und in den Anmerkungen, in denen ich den oben eingeschlagenen Weg mit dem LIE'schen verglichen habe, wohl zur Genüge erhellt. Man darf aber nicht vergessen, dass es etwas ganz anderes ist, ob man ein neues Theorem zum ersten Mal entdeckt und beweist oder ob man nachträglich einen anderen Zugang zu ihm sucht. Wer den von LIE selbst gegebenen Beweis in den Leipziger Berichten von 1896 verfolgt, wird vielmehr dem Scharfsinn, mit dem er in langen Jahren das neue Theorem allmählich auffand und bewies, die grösste Bewunderung zollen und sich freuen, dass seine eigenartige Methode der Wissenschaft diesen höchst merkwürdigen Zusammenhang zwischen seinem rein geometrischen Problem und dem Theorem von ABEL geschenkt hat.

Darmstadt, 8. Febr. 1902.