DIE DIRICHLET'SCHEN REIHEN, DIE ZAHLENTHEORETISCHEN
FUNKTIONEN UND DIE UNENDLICHEN PRODUKTE
VON ENDLICHEM GESCHLECHT

VON

HJ. MELLIN

in HELSINGFORS.

§ 1.

Die von ABEL in der Abhandlung *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies* entwickelten reciproken Formeln

$$\phi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}, \quad s = \frac{\sin n\pi}{\pi} x^n \int_0^1 \frac{\phi(xt)}{(1-t)^{1-n}} dt$$

haben bekanntlich eine ganze Reihe von bemerkenswerthen Untersuchungen veranlasst. Diese Formeln liefern in den Fällen, wo das fragliche Integral eine der obigen Formen besitzt und die gegebene Function gewisse Voraussetzungen erfüllt, die Lösung einer sehr ausdehnbaren Aufgabe, welche als Umkehrung (Inversion) eines bestimmten Integrals bezeichnet worden ist. Je nach den Voraussetzungen, welche über die Form der Integrale und über die Eigenschaften der Functionen gemacht werden, ist man für die Lösung der Aufgabe im allgemeinen gezwungen recht verschiedene Wege einzuschlagen. Ein für Untersuchungen dieser Art gemeinsames Ergebniss ist indess eine bemerkenswerthe Reciprocität zwischen den jedesmal in Betracht kommenden Funktionsklassen resp. Integralklassen.

Im Nachstehenden werde ich zunächst zwei solche reciproke Integralclassen (I) und (II) charakterisiren. In den folgenden Paragraphen be-

absichtliche ich sodann, den Zusammenhang zwischen den in der Überschrift dieser Arbeit erwähnten Begriffen mit Hülfe von Integralen der Klasse (I) von einer Seite zu beleuchten, welche bereits in meiner Arbeit¹ über unendliche Produkte von endlichem Geschlecht theilweise zur Sprache gekommen ist. Als neu dürften die allgemeinen Formeln angesehen werden können, welche ich für summatorische Funktionen zahlentheoretischer Funktionen erhalte, sowie der innige Zusammenhang, in welchen gewisse der genannten Produkte mit der analytischen Zahlentheorie gebracht werden.

Bezeichnet $F(z)$ eine von $z = u + iv$ abhängige Funktion, welche sich regulär verhält in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen, zur imaginären Axe parallelen Streifens $\alpha \leq u \leq \beta$ und für unendlich grosse, demselben Streifen angehörige Werthe von z auf die Form

$$(1) \quad |F(z)| = e^{-\vartheta|v|} f(u, v)$$

derart gebracht werden kann, dass ϑ eine von Null verschiedene positive Constante, während f eine Veränderliche ist, welche bei wachsendem $|v|$ endlich bleibt oder wenigstens nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon|v|}$ diese Eigenschaft bekommt, wie klein auch die positive Constante ε angenommen werden mag, so convergirt das Integral

$$(1) \quad J(x; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} dz \quad \alpha \leq a \leq \beta$$

gleichmässig in jedem endlichen Theile² des durch die Ungleichheiten

$$(2) \quad -(\vartheta - 2\varepsilon) \leq \theta \leq +(\vartheta - 2\varepsilon)$$

definirten Gebietes von $x = |x|e^{i\theta}$ und befriedigt daselbst zugleich die fundamentale Ungleichheit

$$(3) \quad |J(x; a)| < C(a, \varepsilon) |x|^{-a},$$

wo C eine von x unabhängige Grösse ist.

¹ Eine Formel für den Logarithmus transcenderter Funktionen von endlichem Geschlecht. Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 29. Der Anfang dieser Arbeit ist auch in Bd. 25 dieser Zeitschrift veröffentlicht worden.

² Eine kleine Umgebung der Stelle $x = 0$ ist eventuell auszuschliessen.

Das Integral (I) stellt also im Bereiche (2) eine analytische, daselbst überall (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgeschlossen) regulär sich verhaltende Function von x dar. Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes findet man zugleich, dass es für alle die Bedingung $\alpha \leq a \leq \beta$ erfüllenden Werthe von a eine und dieselbe analytische Function $\Phi(x)$ darstellt. In der Ungleichheit (3) kann hiernach C bei endlicher Breite des Parallelstreifens als eine bloss von ε abhängige Constante aufgefasst werden.

Setzt man in (3) das eine Mal $a = \alpha$, das andere Mal $a = \beta$, so ergeben sich die beiden, für den Bereich (2) gültigen Formeln

$$(4) \quad \lim_{x=0} x^k \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x=\infty} x^k \Phi(x) = 0,$$

wo k eine beliebige die Bedingung $\alpha < k < \beta$ erfüllende Constante bedeutet. Umgekehrt kann auch eine für den Bereich (2) gültige Ungleichheit $|\Phi(x)| < C|x|^{-a}$, $\alpha < a < \beta$, aus diesen Formeln gefolgert werden.

Zur vollständigen Kenntniss der Integrale (2) gehört überdies der innige Zusammenhang, in welchem sie mit einer anderen allgemeinen Gattung von Integralen der Form

$$(II) \quad \int_0^{\infty} \Phi(x) x^{z-1} dx$$

stehen. Bezeichnet nämlich hier $\Phi(x)$ die durch das Integral (I) definirte Function, so zeigt sich, dass dieses Integral (II) für jeden innerhalb des Streifens ($\alpha < u < \beta$) gelegenen Werth von $z = u + iv$ nicht nur einen bestimmten Sinn besitzt sondern auch gleich der ursprünglichen Function $F(z)$ ist. Man hat also die beiden Formeln

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} dz, & -\vartheta < \theta < +\vartheta, \\ & \alpha < a < \beta, \\ F(z) = \int_0^{\infty} \Phi(x) x^{z-1} dx, & \alpha < \Re(z) < \beta. \end{cases}$$

Soll $\Phi(x)$ die fundamentale Ungleichheit (3) befriedigen, so muss x im allgemeinen auf den engeren Bereich (2) beschränkt werden, wo ε eine zwar beliebig kleine aber constante Grösse bezeichnet. Dies ist ein wichtiger, bei allen weiteren Specialisirung zu beachtender Umstand.

Zwischen den Formeln (5) besteht zugleich eine vollständige Reciprocität, d. h. aus der letzteren kann auch die erstere gefolgert werden, wenn man von $\Phi(x)$ Folgendes annimmt: In dem durch die Ungleichheiten (2) definirten Bereich verhält sich $\Phi(x)$ überall (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ eventuell ausgenommen) regulär und besitzt bei beliebiger, innerhalb desselben Bereiches stattfindender Annäherung von x an die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ die beiden Eigenschaften (4).

Die aus (5) sich ergebenden Formeln

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-z} dz \int_0^{\infty} \Phi(x) x^{z-1} dx, \\ F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{dx}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) x^{-z} dz \end{array} \right.$$

bilden offenbar für die oben charakterisirten Funktionen $\Phi(x)$ und $F(z)$ das Analogon zur FOURIER'schen Integralformel für Funktionen einer *reellen* Veränderlichen. Durch passende Substitutionen ist auch ein näherer Zusammenhang nachweisbar.

Die bisher in der analytischen Zahlentheorie verwendeten Integrale, welche ebenfalls die allgemeine Form (I) besitzen, wie z. B.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \frac{x^z}{z} dz, \quad a > 1$$

dürfen mit den oben charakterisirten Integralen (I) jedoch nicht verwechselt werden. Aus den weiteren Darlegungen wird sich ohne Mühe ergeben, dass die ersteren aus Integralen der Gattung (I) als *Grenzfälle* erhalten werden können.

Die obigen Beziehungen zwischen den beiden allgemeinen Integralklassen (I) und (II) sind zuerst vom Verfasser in der Arbeit *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen* (§ 14 und § 29, Acta Fenn. T. 21) entwickelt worden. Eine vollständige Herleitung derselben findet sich auch in § 7 meiner Arbeit *Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzgleichungen* (Acta Mathematica Bd. 25), sowie

eine Ausdehnung derselben auf Funktionen mehrerer Veränderlichen in *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale* (Acta Fenn., T. 22).

§ 2.

Von den DIRICHLET'schen Reihen

$$(7) \quad \mathbf{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{a_n^z},$$

von denen die Rede sein wird, wollen wir annehmen, dass die Grössen a_n *reelle positive* mit n monoton ins Unendliche wachsende Zahlen sind. Es giebt bekanntlich¹ eine reelle Zahl l , welche dadurch eindeutig bestimmt ist, dass die Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $\Re(z)$ algebraisch grösser oder kleiner als l ist. Diese Grösse l nennen wir den *Convergenz-exponenten*² von $\mathbf{S}(z)$. Herr CAHEN zeigt (l. c.), dass die Reihe (7) *gleichmässig* convergirt in jedem endlichen Bereiche, welcher dem Innern der Halbebene $\Re(z) > l$ angehört. In dieser Halbebene stellt sie mithin eine eindeutige analytische Funktion von z dar. Beschränkt man z auf die Halbebene $\Re(z) \geq l + \varepsilon$, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so bleibt $\left| \frac{1}{z} \mathbf{S}(z) \right|$ unter einer endlichen Grenze. Dies wird von Herrn CAHEN nicht ausdrücklich hervorgehoben, geht aber aus § 4 seiner Arbeit ohne Mühe hervor. Das Gebiet der unbedingten Convergenz ist ebenfalls eine Halbebene $\Re(z) > \lambda$, welche in der Halbebene $\Re(z) > l$ enthalten ist oder mit dieser zusammenfällt: $l \leq \lambda$. Die Grössen l und λ sind, falls sie ≥ 0 sind, von Herrn CAHEN folgenderweise bestimmt worden:

$$l = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \left| \sum_{\nu=1}^n f(\nu) \right|}{\log a_n}, \quad \lambda = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{\nu=1}^n |f(\nu)|}{\log a_n}.$$

¹ Cf. CAHEN: *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*. Annales de l'école norm. 3^e Série. T. 9. 1894.

² Die analoge Benennung »Convergenzexponent eines unendlichen Produktes von endlichem Geschlecht« kommt schon früher vor in Herrn v. SCHAPERS Dissertation: *Über die Theorie der Hadamard'schen Funktionen*, Göttingen, 1898.

Man scheint aber bisher nicht bemerkt zu haben, dass diese Grössen, falls sie ≥ 0 sind, auch so charakterisirt werden können: l , resp. λ , ist gleich der unteren Grenze derjenigen Werthe von x , für welche die obere Grenze von

$$\left| \frac{\sum_{\nu=1}^n f(\nu)}{a_n^x} \right|, \quad \text{resp.} \quad \frac{\sum_{\nu=1}^n |f(\nu)|}{a_n^x}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty,$$

endlich ist. Auf den Beweis dieses Satzes muss ich hier verzichten.

In meiner oben citirten in Acta Fenn. T. 29 publicirten Arbeit habe ich mit Benutzung einer im letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit anzugebenden Formel nachgewiesen, dass es sehr ausgedehnte Gattungen DIRICHLET'scher Reihen mit den nachfolgenden Eigenschaften giebt. Die durch eine Reihe der betreffenden Art definirte Funktion $S(z)$ existirt in der ganzen z -Ebene, wo sie sich überall im Endlichen wie eine rationale Funktion verhält, und besitzt überdies die beiden folgenden Eigenschaften: 1) in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite findet sich höchstens nur eine endliche Anzahl Pole von $S(z)$, 2) in jedem solchen Streifen nähert sich $S(z)e^{-\varepsilon|z|}$ bei wachsendem $|z|$ der Null, wie klein auch die positive Constante ε angenommen werden mag. — Die hierdurch charakterisirten DIRICHLET'schen Reihen sollen bei den nachfolgenden Erörterungen vorzugsweise berücksichtigt werden. Die einfachste unter denselben ist die für die Zahlentheorie fundamentale Funktion $\zeta(z)$.

Die Bedeutung dieser Funktionen bei der Ermittlung von gewissen asymptotischen Formeln soll zunächst angegeben werden.

Bezeichnen $\Phi(x)$ und $F(z)$ zwei reciproke Funktionen der in § 1 angegebenen Art so ergeben sich mit Benutzung von (5) die Formeln

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)S(z)x^{-z} dz, \quad -\vartheta < \theta < +\vartheta, \\ F(z)S(z) = \int_0^{\infty} \Psi(x)x^{z-1} dx, \end{array} \right.$$

wo S durch (7), resp. Ψ durch die Reihe

$$(9) \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \Phi(a_n x)$$

definiert ist. Zur Gültigkeit der Formeln (8) ist indess erforderlich, dass die in (5) angegebene Parallelstreifen $\alpha < \Re(z) < \beta$ und die Halbebene $\Re(z) > l$ einen gemeinsamen Theil haben. Auf diesen Theil hat man die Veränderliche z des zweiten Integrals sowie den Integrationsweg des ersten zu beschränken. Durch die Annahme $\Phi(x) = e^{-x}$, $F(z) = \Gamma(z)$ ergeben sich die gewöhnlichsten in (8) enthaltenen Specialfälle.

Die erstere Formel (8) ist nun besonders bemerkenswerth. Ihr hauptsächlichstes Interesse erhält sie wegen der überaus grossen Menge *asymptotischer Formeln*, welche daraus für Reihen der Form (9) herfließt. Es bezeichne $S(z)$ eine DIRICHLET'sche Reihe der soeben angegebenen Art. Verhält sich nun auch die Funktion $F(z)$ in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite ähnlich wie S , während sie für unendlich grosse, dem betreffenden Streifen angehörige Werthe $z = u + iv$ auf die Form

$$F(z) = e^{-\vartheta|z|} f(u, v),$$

gebracht werden kann, wo ϑ und f die in § 1 angegebene Bedeutung haben, so kann der Integrationsweg des ersteren Integrals unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes beliebig weit in der negativen Richtung der reellen Axe verschoben werden, ohne dass das Integral aufhört, in jedem endlichen Theile des durch die Ungleichheiten

$$-(\vartheta - \varepsilon) \leq \theta \leq +(\vartheta - \varepsilon)$$

definierten Bereiches von $x = |x|e^{i\theta}$ gleichmässig zu convergiren. Die Summe der zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen stellt alsdann die Reihe (9) für *kleine* Werthe von x asymptotisch dar, während das Integral mit dem neuen Integrationswege das Restglied repräsentirt. Das Verhalten dieses Gliedes bei abnehmendem $|x|$ kann auf Grund der fundamentalen Ungleichheit (3) beurtheilt werden.

Im folgenden Paragraphen wird eines der bemerkenswerthesten in (8) enthaltenen Integrale besonders erörtert.

§ 3.

In diesem und in den Paragraphen 4, 5 und 6 werde ich den Zusammenhang besprechen, in welchen gewisse der in § 1 charakterisirten

Integrale mit einer der interessantesten Aufgaben der analytischen Zahlentheorie gebracht werden können, mit der Aufgabe, einen asymptotischen Ausdruck für die *summatorische Funktion*

$$F(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

einer gegebenen Zahlentheoretischen Function $f(n)$ zu finden.

In meiner Arbeit in Acta Math. Bd. 25 habe ich mit Hülfe der leicht zu bestätigenden Formel

$$(10) \quad \log(1+x) + \sum_{\lambda=1}^p (-1)^\lambda \frac{x^\lambda}{\lambda} = (-1)^p \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{x^z}{z} dz,$$

$$-\pi < \theta < +\pi, \quad p+1 < a < p+2,$$

für die Logarithmen unendlicher Produkte von endlichem Geschlecht (p):

$$(11) \quad \Pi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{-\frac{x}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \dots + (-1)^p \frac{1}{p} \left(\frac{x}{a_n}\right)^p} \right\}^{f(n)}$$

die folgende Formel enthalten:

$$(12) \quad \log \Pi(x) = (-1)^p S(p+1) \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} S(z) \frac{x^z}{z} dz,$$

$$p+1 < a < p+2,$$

wo

$$(13) \quad S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{a_n^z}.$$

Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass es sich um solche Produkte $\Pi(x)$ handelt, in denen die Grössen $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$ die Bedingung erfüllen

$$(14) \quad -\pi < -\vartheta \leq \theta_n \leq +\vartheta < +\pi \quad n = 1, 2, \dots, \infty,$$

unter ϑ eine reelle nicht negative Zahl verstanden, welche kleiner als π ist. *Unter dieser Voraussetzung (14) stellt alsdann die obige Formel (12) in dem durch die Ungleichheiten*

$$(15) \quad -(\pi - \vartheta) < \theta < +(\pi - \vartheta)$$

charakterisirten Bereiche von $x = |x| e^{i\theta}$ den Logarithmus von $\Pi(x)$ dar.

Setzen wir weiterhin, wie es bei den in der Zahlentheorie auftretenden DIRICHLET'schen Reihen meistens der Fall ist, die Grössen a_n als *reelle positive Zahlen* voraus, so ist $\vartheta = 0$, d. h. *der Convergencebereich des Integrals (12) wird alsdann durch die ganze x -Ebene, mit Ausschluss der negativen Hälfte der reellen Axe, geometrisch dargestellt.*

Die Formel (12) vermittelt nun offenbar einen bemerkenswerthen Zusammenhang zwischen den DIRICHLET'schen Reihen (13) und den unendlichen Produkten von endlichem Geschlecht (11). Ihr hauptsächlichstes Interesse erhält sie — ähnlich wie die erstere Formel (8) — wegen der unzähligen *asymptotischen Formeln*, welche daraus erhalten werden können. Gehört nämlich $S(z)$ der allgemeinen, in § 2 charakterisirten Gattung solcher DIRICHLET'schen Reihen an, welche ausserhalb ihrer Convergencebereiche analytisch fortgesetzt werden können und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzen, so kann der Integrationsweg von (12) unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes in negativer Richtung beliebig weit verschoben werden. Die Summe der zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen stellt dann den Logarithmus von $\Pi(x)$ für *grosse* Werthe von x asymptotisch dar, während das Integral mit dem neuen Integrationswege das *Restglied* repräsentirt. Das Verhalten dieses Gliedes bei wachsendem $|x|$ giebt die im Bereiche $-(\pi - \varepsilon) \leq \theta \leq +(\pi - \varepsilon)$ gültige fundamentale Ungleichheit

$$(16) \quad |J(x; b)| < C(b, \varepsilon) |x|^b \quad b < a$$

an, wo $J(x; b)$ das betreffende Integral bedeutet, während ε eine zwar beliebig kleine aber constante positive Grösse bezeichnet. Das Verhalten des Produktes $\Pi(x)$ im Unendlichen hängt also ab von dem Verhalten der Funktion $S(z)$ ausserhalb des Convergencebereiches der Reihe (13).

Die soeben angegebenen Bedeutung der Formel (12) ist schon in meiner früheren Arbeit (Acta Math. Bd. 25; Acta Fenn. T. 29) umständlich besprochen worden. Ich gehe nunmehr zur zahlentheoretischen Bedeutung derselben über.

Ich setze voraus, dass $S(z)$ eine Reihe der oben angegebenen Art bezeichnet. Durch Verschiebung des Integrationsweges in negativer Richtung ergibt sich eine Gleichung der Form

$$(17) \quad \log \Pi(x) = R(x) + J(x; b), \quad b < a,$$

wo $R(x)$ die Summe der Residuen bezeichnet, welche zu den zwischen den Integrationswegen $\Re(z) = a$ und $\Re(z) = b$ gelegenen Polen des Integranden gehören. Es verdient besonders beachtet zu werden, dass $J(x; b)$ bei wachsendem $|x|$ von kleinerer Ordnung ist als die sämtlichen Glieder der Summe $R(x)$. Man findet nämlich leicht, dass jedes Glied von $R(x)$ eine Potenz von x enthält, deren Exponent¹ grösser ist als b ; während $J(x; b)$ nach der fundamentalen Ungleichheit (16) von kleinerer Ordnung ist als $|x|^b$.

Die reellen positiven Grössen a_n seien so geordnet, dass $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots, \infty$. Substituiert man in (17) das eine Mal $x = \rho e^{(\pi-\varepsilon)i}$, das andere Mal $x = \rho e^{-(\pi-\varepsilon)i}$, so ergibt sich durch Subtraktion eine Gleichung, deren einzelne Theile bei abnehmendem ε gegen bestimmte endliche Grenzwerte convergiren. Nehmen wir nämlich ρ zwischen a_n und a_{n+1} an, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \log \frac{\prod(\rho e^{(\pi-\varepsilon)i})}{\prod(\rho e^{-(\pi-\varepsilon)i})} = 2\pi i [f(1) + f(2) + \dots + f(n)],$$

während $R(\rho e^{(\pi-\varepsilon)i}) - R(\rho e^{-(\pi-\varepsilon)i})$ sich ebenfalls einer endlichen Grenze nähert, für welche ein mathematischer Ausdruck $2\pi i r(\rho)$ stets ohne Mühe erhalten werden kann. Hieraus schliessen wir, dass sich auch der Ausdruck

$$J(\rho e^{(\pi-\varepsilon)i}) - J(\rho e^{-(\pi-\varepsilon)i}) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\sin(\pi-\varepsilon)z}{\sin \pi z} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz$$

einer bestimmten endlichen Grenze $2\pi i g(\rho)$ nähern muss. Auf diese Weise ergibt sich durch Grenzübergang

$$(18) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = r(\rho) + g(\rho), \quad a_n < \rho < a_{n+1},$$

wo $r(\rho)$ eine aus Potenzen von ρ und $\log \rho$ gebildete endliche Summe bedeutet, welche nach der Formel

$$(19) \quad r(\rho) = \frac{R(\rho e^{\pi i}) - R(\rho e^{-\pi i})}{2\pi i}$$

¹ Diese Exponenten sind *reelle* Zahlen, falls die Pole von $\mathbf{S}(z)$ alle auf der reellen Axe liegen, was in der That mit den oben beabsichtigten DIRICHLET'schen Reihen der Fall ist.

berechnet werden kann, während $g(\rho)$ bloss als Grenzwert definiert ist

$$(20) \quad g(\rho) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\sin(\pi - \varepsilon)z}{\sin \pi z} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz.$$

Da indess $J(x; b)$, wie oben gezeigt wurde, von geringerer Ordnung als $R(x)$ ist, so wird man zu der ganz natürlichen *Vermutung* veranlasst, dass auch die Grenzwerte $g(\rho)$ und $r(\rho)$ in derselben Beziehung zu einander stehen, *dass also $g(\rho)$ bei wachsendem ρ wahrscheinlich von geringerer Ordnung als $r(\rho)$ ist.* — Man stösst indess schon in einzelnen Fällen auf grosse Schwierigkeiten, wenn man die Richtigkeit dieser Vermutung streng zu beweisen versucht.

Die hier dargelegte *heuristische*¹ Methode zur Ermittlung eines asymptotischen Ausdrucks für die summatorische Funktion einer gegebenen zahlentheoretischen Funktion hat vor der verwandten Methode von HALPHEN² den Vorzug, dass unsere Betrachtungen von dem Umstande unabhängig sind, ob das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz = \lim_{h=\infty} \int_{b-ih}^{b+ih} \mathbf{S}(z) \frac{\rho^z}{z} dz$$

einen bestimmten Sinn hat oder nicht, während die Erörterungen von HALPHEN nur dann stichhaltig sind, wenn dieses Integral einen bestimmten Sinn besitzt, was indess ausserhalb des Convergencebereiches von $\mathbf{S}(z)$ nur ausnahmsweise der Fall sein kann. Zu Gunsten unserer Methode spricht noch die Aussicht, dass die Formel (20) als Ausgangspunkt für weitere, die Ordnung von $g(\rho)$ betreffende Untersuchungen vielleicht dienen kann.

¹ Siehe BACHMANN, *Anal. Zahlentheorie*. S. 468.

² *Comptes Rendus*. T. 96, p. 634.

§ 4.

Als Beispiele zu den Erörterungen des vorigen Paragraphen betrachten wir die beiden Produkte

$$(21) \quad \Pi_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right\}^{T(n)},$$

$$(22) \quad \Pi_2(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} \right)^2} \right\}^{S(n)},$$

wo $T(n)$ die Anzahl und $S(n)$ die Summe aller Theiler von n bezeichnet.

Nach der allgemeinen Formel (12) und auf Grund der bekannten Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^z} = [\zeta(z)]^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^z} = \zeta(z)\zeta(z-1)$$

hat man, falls der Integrationsweg zwischen p und $p+1$ verlegt wird:

$$(23) \quad \log \Pi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} [\zeta(z)]^2 \frac{x^z}{z} dz = J_1(x; a), \quad 1 < a < 2,$$

$$(24) \quad \log \Pi_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \zeta(z)\zeta(z-1) \frac{x^z}{z} dz = J_2(x; a), \quad 2 < a < 3.$$

Hieraus ergeben sich unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes die asymptotischen Entwicklungen:

$$(25) \quad \log \Pi_1(x) = R_1(x) + J_1(x; a), \quad -2k-1 < a < 2k+1,$$

$$(26) \quad \log \Pi_2(x) = R_2(x) + J_2(x; a), \quad -\infty < a < 0,$$

wo

$$(27) \quad R_2(x) = -\frac{1}{2}x \log^2 x + (1 - 2E)x \log x + (1 + 2E)x \\ + \frac{1}{4} \log x + \log \sqrt{2\pi} - E^2 + \sum_{\nu=1}^k \left(\frac{B_\nu}{2\nu}\right)^2 \frac{x^{-(2\nu-1)}}{2\nu-1},$$

$$(28) \quad R_1(x) = \frac{\pi^2}{12}x^2 \log x + \frac{1}{2} \left[\zeta'(2) - \frac{\pi^2}{12}(1 - 2E) \right] x^2 + \frac{1}{2}x \log x \\ + \left[\log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E \right] x + \frac{1}{24} \log x + \frac{1}{12} \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \zeta'(-1).$$

In diesen Formeln bezeichnet E die EULER'sche Constante.

Während die Anzahl der Glieder in $R_1(x)$ von der Lage des Integrationsweges abhängt, so ist diese Anzahl in $R_2(x)$ constant, sobald nur der Integrationsweg in der Halbebene $\Re(z) < 0$ gelegen ist. Dies rührt davon her, dass diese Halbebene infolge $\zeta(-n-1)\zeta(-n) = 0$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, keinen Pol des Integranden von $J_2(x; a)$ enthält. Der Werth dieses Restintegrals ist mithin von der Lage des Integrationsweges in der genannten Halbebene unabhängig. Hieraus folgt weiter mit Benutzung der fundamentalen Ungleichheit (16), dass der Ausdruck

$$x^m [\log \Pi_2(x) - R_2(x)] = x^m J_2(x; a),$$

obwohl die Anzahl der Glieder von $R_2(x)$ constant ist, die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, bei wachsendem $|x|$ sich der Grenze Null zu nähern, *wie gross auch die positive Zahl m angenommen werden mag.*

Wendet man nun die allgemeinen Formeln (18), (19), (20) auf die gegenwärtigen Fälle an, so folgt:

$$(29) \quad \sum_{\nu=1}^n T(\nu) = \rho \log \rho + (2E - 1)\rho + \frac{1}{4} + g_1(\rho),$$

$$n < \rho < n + 1.$$

$$(30) \quad \sum_{\nu=1}^n S(\nu) = \frac{\pi^2}{12}\rho^2 - \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{24} + g_2(\rho).$$

Vergleichen wir diese mit den aus der Zahlentheorie bekannten Formeln

$$\sum_{\nu=1}^n T(\nu) = \log n + (2E - 1)n + O(\sqrt{n}),$$

$$\sum_{\nu=1}^n S(\nu) = \frac{\pi^2}{12} n^2 + O(n \log n),$$

so bestätigt die erstere hinsichtlich der Ordnung von $g_1(\rho)$ die im vorigen Paragraphen motivirte Vermutung, während die letztere damit nicht in Widerspruch steht, da $O(n \log n)$ eine Grösse bezeichnet, welche *höchstens* von der Ordnung $n \log n$ ist. Unsere Formel (30) deutet aber an, dass sie wahrscheinlich nur von der Ordnung n ist.

§ 5.

Wir kehren wieder zu der allgemeinen Aufgabe zurück, einen Ausdruck für die summatorische Funktion einer gegebenen Zahlentheoretischen Funktion zu ermitteln. Diese Aufgabe ist durch die Formeln (18), (19), (20) wenigstens theoretisch gelöst worden, obwohl die sehr wesentliche Frage nach der Ordnung von $g(\rho)$ künftiger Untersuchungen bedürftig ist. Eben deshalb dürfte der Umstand ein gewisses Interesse beanspruchen können, dass diese Formeln keineswegs alleinstehend sind, sondern dass es vielmehr unendlich viele Integrale der in § 1 charakterisirten Art giebt, von denen $g(\rho)$ als Grenzwert dargestellt werden kann.

Zur Erzeugung solcher Integrale eignen sich besonders die hypergeometrischen Integrale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z - \rho_1) \dots \Gamma(z - \rho_m) x^{-z} dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z - \rho_1) \dots \Gamma(z - \rho_m) \Gamma(\sigma_1 - z) \dots \Gamma(\sigma_n - z) x^{-z} dz.$$

Bei dieser Gelegenheit werden wir nur das einfachste unter ihnen

$$(31) \quad J(x; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz$$

verwenden. Mit Hilfe desselben können wir unendlich viele *discontinuirliche Faktoren* erzeugen, je nachdem wir den Integrationsweg in verschiedene Theile der z -Ebene verlegen.

Ist erstens $a > 0$, so ist $J(x; a) = e^{-x}$ und mithin

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-\left(\frac{a_n}{x}\right)^m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) \mathbf{S}(mz) x^{mz} dz, \quad a > 0, ma > l,$$

wo m eine so grosse reelle positive Zahl bezeichnet, dass ma grösser ist als der Convergexponent l von

$$(33) \quad \mathbf{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{a_n^z}.$$

Durch eine einfache Substitution erhält die rechte Seite von (32) die Form

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-\left(\frac{a_n}{x}\right)^m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma\left(1 + \frac{z}{m}\right) \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z}, \quad a > l,$$

wo a grösser als der Convergexponent l von $\mathbf{S}(z)$ sein muss.

Lassen wir jetzt m ohne Ende wachsen, so ergibt sich mit Berücksichtigung des discontinuirlichen Faktors

$$(35) \quad \lim_{m=\infty} e^{-x^m} = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ e^{-1}, & x = 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

die Formel¹

$$(36) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma\left(1 + \frac{z}{m}\right) \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z}, \quad a > l, \\ a_n < x < a_{n+1}.$$

Wird durch die Reihe $\mathbf{S}(z)$ eine Funktion definirt, welche ausserhalb des Convergencesbereiches dieser Reihe existirt und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzt, so kann der Integrationsweg *vor dem Grenzübergange* unter Berücksichtigung des CAUCHY'schen Satzes in negativer

¹ Der genauere Beweis, dass die linke Seite von (36) der Grenzwert der linken Seite von (32) ist, wird dem Leser überlassen.

Richtung verschoben werden. Durch Wiederholung der in § 3 ange-
stellten Erörterungen gelangt man auch jetzt zu der Formel

$$(37) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = r(x) + g(x), \quad a_n < x < a_{n+1},$$

wo $r(x)$ eine aus Potenzen von x und $\log x$ gebildete endliche Summe
bezeichnet, während $g(x)$ bloss als Grenzwert definiert ist:

$$(38) \quad g(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma\left(1 + \frac{z}{m}\right) \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z}, \quad b < l.$$

Die Vermutung, dass $g(x)$ wahrscheinlich von geringerer Ordnung als $r(x)$
ist, kann ähnlich wie in § 3 motiviert werden.

Da aus den bei der Herleitung von (37) anzustellenden Erörterungen
die Existenz des Grenzwertes (38) unmittelbar einleuchtet, so sind die-
selben von dem Umstande unabhängig, ob das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z} = \lim_{h=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ih}^{b+ih} \mathbf{S}(z) x^z \frac{dz}{z}$$

einen Sinn hat oder nicht.

Es verdient beachtet zu werden, dass die Berechnung des Ausdruckes
 $r(x)$ sich hier einfacher gestaltet als in § 3, weil der Integrand in (34)
bei hinreichend grossem m keine anderen Pole zwischen den Integrations-
wegen $\Re(z) = a$ und $\Re(z) = b$ besitzt als diejenigen des Ausdruckes $\frac{x^z}{z} \mathbf{S}(z)$:
Es lässt sich ohne Mühe zeigen, dass $r(x)$ einfach gleich der Summe der
Residuen ist, welche zu den zwischen den genannten Geraden gelegenen Polen
dieses Ausdruckes gehören. — Hiermit vergleiche man die verwandte Me-
thode von HALPHEN.

§ 6.

Nehmen wir zweitens an, dass a in dem Integrale (31) einen zwischen
den negativen ganzen Zahlen $-k$ und $-(k+1)$ gelegenen Werth besitzt,
so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{(-x)^{\nu}}{|\nu|} = e^{-x} - \sum_{\nu=0}^k \frac{(-x)^{\nu}}{|\nu|}$$

$$-(k+1) < a < -k.$$

Setzt man also

$$(39) \quad E_k(x) = \frac{|k|}{(-x)^k} \left[\sum_{\nu=0}^k \frac{(-x)^{\nu}}{|\nu|} - e^{-x} \right] = (-1)^{k-1} \frac{|k|}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) x^{-k-z} dz,$$

$$-(k+1) < a < -k,$$

so ist

$$\lim_{x=0} E_k(x) = 0, \quad \lim_{x=\infty} E_k(x) = 1,$$

$$\lim_{x=1} E_k(x) = (-1)^{k-1} |k| \left[e^{-1} - \sum_{\nu=0}^k \frac{(-1)^{\nu}}{|\nu|} \right] = C.$$

Da $-k - a > 0$, so erhalten wir mit Benutzung von (39):

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) E_k \left[\left(\frac{x}{a_n} \right)^m \right] = (-1)^{k-1} \frac{|k|}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) \mathbf{S}(-mk - mz) x^{-mk-mz} dz,$$

$$-(k+1) < a < -k,$$

wo $\mathbf{S}(z)$ durch (33) definiert ist und m so gross sein muss, dass $(-k - a)$ grösser ist als der Convergenzexponent von $\mathbf{S}(z)$.

Lassen wir jetzt m ohne Ende wachsen, so ergibt sich mit Berücksichtigung des discontinuirlichen Faktors

$$(41) \quad \lim_{m=\infty} E_k(x^m) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ C, & x = 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

die Formel

$$(42) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = \lim_{m=\infty} (-1)^{k-1} \frac{|k|}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) \mathbf{S}(-mk - mz) x^{-mk-mz} dz$$

$$a_n < x < a_{n+1}, \quad -(k+1) < a < -k,$$

Die rechte Seite von (40) besitzt offenbar die Eigenschaft, dass sie sich der Grenze Null nähert, falls der Integrationsweg ohne Ende in negativer Richtung verschoben wird. Mit Hülfe des CAUCHY'schen Satzes ergibt sich also für (40) eine neue Reihenentwicklung. Setzt man dieselbe in (42) ein, so hat man die Formel

$$(43) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = \lim_{m=\infty} \left| k \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|k+\nu|} \mathbf{S}(m\nu) x^{m\nu} \right., \\ \left. a_n < x < a_{n+1}. \right.$$

Der einfachste Fall tritt ein, wenn $k = 0$ angenommen wird. Die obigen Formeln (40), (42), (43) nehmen alsdann die folgenden Formen an:

$$(44) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{a_n}\right)^m} \right\} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) \mathbf{S}(-mz) x^{-mz} dz,$$

$$(45) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = -\lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(z) \mathbf{S}(-mz) x^{-mz} dz, \\ -1 < a < 0, \quad a_n < x < a_{n+1}.$$

$$(46) \quad \sum_{\nu=1}^n f(\nu) = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|\nu|} \mathbf{S}(m\nu) x^{m\nu}, \quad a_n < x < a_{n+1}.$$

Die letzte Formel ist als Herrn HELGE VON KOCH zugehörig anzusehen. In seiner Arbeit *Sur la distribution des nombres premiers* (Acta Math. Bd. 24) wendet er nämlich mit bemerkenswerthem Erfolg einige Specialfälle von (46) an. Dass die Methode, wodurch er dieselben erhält, auch zu der allgemeinen Formel (46) führt, kann Herrn VON KOCH natürlich nicht entgangen sein, obgleich er die Allgemeinheit seiner Methode nicht Ausdrücklich hervorhebt. Die Übereinstimmung der beiden in (44) und (46) vorkommenden Reihenentwicklungen kann in der That auch ohne Zuhülfenahme des obigen Integrals erwiesen werden, worauf sich die Formel (46) ergibt, indem man $m = \infty$ setzt; und dies ist eben die Methode des Herren VON KOCH.

Der oben hervorgebrachte Zusammenhang dieser und aller vorangehenden Entwicklungen mit den betreffenden Integralen scheint vor allem deshalb nicht unwichtig zu sein, weil sich hierdurch die Aussicht eröffnet,

die Erforschung der Zahlentheoretischen Gesetze den Methoden der CAUCHY'schen Integraltheorie zugänglich zu machen.

Mit Hülfe der Formel (45) ist man im Stande, einen interessanten Zusammenhang zu entdecken zwischen den Formeln des Herrn VON KOCH und denjenigen, welche Herr VON MANGOLDT (Crelles Journ. Bd. 114) im Anschluss an RIEMANN zum ersten Male streng bewiesen hat. Nimmt man nämlich $\mathbf{S}(z)$ gleich $-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ an, so ist das Schlussresultat folgendes. Man gelangt zu den erstgenannten oder letztgenannten Formeln, je nachdem der Integrationsweg des Integrals (44) in negativer oder in positiver Richtung verschoben wird und sodann $m = \infty$ gesetzt resp. hinreichend gross angenommen wird.

§ 7.

Setzt man

$$\mathbf{S}(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{(w+n)^s},$$

$$F(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n),$$

$$\mathbf{T}(s, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{(w+n)^s},$$

so ist $\mathbf{T}(s, w+1) - \mathbf{T}(s, w) = -\mathbf{S}(s, w)$. Zwischen den beiden Reihen bestehen auch andere interessante Beziehungen.

In diesem Paragraphen werde ich eine Methode entwickeln, nach welcher man einen *asymptotischen* Ausdruck für die Summe

$$\sum_{n=1}^{m-1} \mathbf{S}(s, w+n)$$

in allen Fällen erhalten kann, wo die durch die Reihe $\mathbf{S}$ definirte Funktion ausserhalb des Convergencebereiches der Reihe existirt und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzt. Gleichzeitig mit dem asymptotischen Ausdrucke ergibt sich auch für die Reihe

$$(47) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{S}(s, w+\nu) = \mathbf{T}(s, w)$$

eine neue Entwicklung, welche ihre analytische Fortsetzung darstellt.

Mit Benutzung der leicht zu bestätigenden Formel

$$(48) \quad \frac{\Gamma(s)}{(x+y)^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{x^{s-z}y^z} dz \quad \Re(s) > a > 0,$$

ergibt sich zunächst die Formel

$$\Gamma(s)\mathbf{S}(s, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)}{w^{s-z}} \Gamma(z)\mathbf{S}(z) dz$$

$$a > 0, \quad a > l, \quad \Re(s) > a,$$

wo $\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(z, 0)$, und mit ihrer Hülfe

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathbf{S}(s, w + \nu) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{S}(s, w + \nu) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{S}(s, w + m + \nu) \\ &= \mathbf{T}(s, w) - \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)}{(w+m+\nu)^{s-z}} \Gamma(z)\mathbf{S}(z) dz \\ &= \mathbf{T}(s, w) - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)}{\Gamma(s)} \zeta(s-z, w+m) \Gamma(z)\mathbf{S}(z) dz \\ & \quad a > 0, \quad a > l, \quad \Re(s) > a + 1, \end{aligned}$$

wo l den Convergenzexponenten von $\mathbf{S}(z)$ bezeichnet und

$$\zeta(s, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s}.$$

In der obigen Formel muss s zunächst auf die durch die Ungleichheiten definierte Halbebene beschränkt werden. Gehört aber $\mathbf{S}(z)$ wieder der in § 2 charakterisirten, umfassenden Klasse solcher DIRICHLET'schen Reihen an, welche ausserhalb ihrer Convergencebereiche analytisch fortgesetzt werden können und die übrigen in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzen, so kann der Integrationsweg $\Re(z) = a$ unter Berücksichtigung des CAUCHY'-

schen Satzes beliebig weit in negativer Richtung verschoben werden, wodurch sich ergibt:

$$(49) \quad \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathbf{S}(s, w + \nu) = \mathbf{T}_1(s, w) - R(s, w + m; a) - I(s, w + m; a),$$

$$\Re(s) > a + 1,$$

wo R die Summe der zu den passirten Polen des Integranden gehörigen Residuen bezeichnet, während I das Integral mit dem neuen Integrationswege bedeutet. *Gleichzeitig mit dieser Verschiebung hat sich aber auch in derselben Richtung die Halbebene $\Re(s) > a + 1$ erweitert, in welcher das Integral I eine eindeutige und regulär sich verhaltende Funktion von s darstellt.* Da $\Re(s - z) > 1$, so ist $\lim_{m=\infty} \zeta(s - z, w + m) = 0$. Hieraus folgt leicht $\lim_{m=\infty} I(s, w + m; a) = 0$. Die Formel (49) stellt also die Summe zur Linken für grosse Werthe von m *asymptotisch* dar, wobei s einen beliebigen Werth in der Halbebene $\Re(s) > a + 1$ besitzen darf.

Die Formel (49) kann aber auch von einem anderen Gesichtspunkte aus aufgefasst werden. Dadurch wird nämlich $\mathbf{T}(s, w)$ zugleich folgenderweise als Grenzwert dargestellt:

$$(50) \quad \mathbf{T}_1(s, w) = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathbf{S}(s, w + \nu) + R(s, w + m; a) \right\},$$

und zwar gilt diese Darstellung für die Halbebene $\Re(s) > a + 1$. Die Anzahl der in R vorkommenden Glieder ist bei wachsendem m constant aber von a abhängig. Mit Benutzung von (50) lässt sich $\mathbf{T}(s, w)$ weiter in der Form einer Reihe darstellen:

$$(51) \quad \mathbf{T}(s, w)$$

$$= R(s, 0; a) + \sum_{m=0}^{\infty} \{ \mathbf{S}(s, w + m) + R(s, w + m + 1; a) - R(s, w + m; a) \},$$

und zwar convergirt die rechte Seite gleichmässig in jedem endlichen Theile der Halbebene $\Re(s) > a + 1$, welcher keine Pole der Glieder dieser Reihe enthält. Indem man $|a|$ hinreichend gross annimmt kann man bewirken, dass die rechte Seite die analytische Fortsetzung der linken Seite in einem beliebigen Theile der s -Ebene darstellt. Vergleicht man (51) mit

der Darstellung (47) welche einen beschränkteren Gültigkeitsbereich besitzt, so ist die Analogie mit dem neueren MITTAG-LEFFLER'schen Satze auffallend.

Ohne noch zu den im folgenden Paragraphen zu besprechenden vielfachen Integralen die Zuflucht zu nehmen, kann man die Untersuchung der durch die Reihe

$$\mathbf{R}(s, u + v) = \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} \frac{f(\mu)g(\nu)}{[a(u + \mu)^{\alpha} + b(v + \nu)^{\beta}]^s}$$

definirten Funktion auf eine Discussion des nachstehenden Integrals zurückführen

$$I(s)\mathbf{R}(s, u, v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s-z)\Gamma(z)}{a^{s-z}b^z} \mathbf{S}(\alpha s - \alpha z, u) \mathbf{T}(\beta z, v) dz$$

$$c > 0, c > \frac{l'}{\beta}, \Re(s) > c + \frac{l}{\alpha},$$

wo $\mathbf{S}$ und $\mathbf{T}$ durch die Reihen

$$\mathbf{S}(s, u) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{f(\mu)}{(u + \mu)^s}, \quad \mathbf{T}(s, v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g(\nu)}{(v + \nu)^s}$$

definirt sind, deren Convergenceexponenten mit l und l' bezeichnet sind. Diese Integralformel ist ebenfalls eine unmittelbare Folge von (48) und giebt zu Untersuchungen Veranlassung, welche den vorangehenden ähnlich, zugleich aber allgemeiner als dieselben sind.

§ 8.

Aus den nachfolgenden Auseinandersetzungen wird sich ergeben, welcher umfassenden Verallgemeinerung die im vorangehenden Paragraphen angewandte Methode noch fähig ist. Die erweiterte Methode hat zum Ziele, nicht nur die Existenz der analytischen Fortsetzung einer durch eine DIRICHLET'sche Reihe definirten Funktion unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen nachzuweisen, sondern auch das Verhalten dieser Fortsetzung im Unendlichen sowohl als im Endlichen genau festzustellen.

Bei dieser Gelegenheit muss ich mich auf einige Andeutungen allgemeiner Art beschränken und den Leser für das nähere hierüber auf meine

Arbeit *Eine Formel für den Logarithmus transcender Funktionen von endlicher Geschlecht* (Acta Fenn. T. 29) verweisen, wo die fragliche Methode ausführlich entwickelt worden ist.

Es handelt sich zunächst um die Herleitung einer fundamentalen Transformationsformel, mittels deren die betreffenden DIRICHLET'schen Reihen auf einfachere Formen zurückgeführt werden.

Zu dem Ende ersetze man in der Formel (48) y durch $y + v$ und wende unter dem Integralzeichen dieselbe Formel (48) an. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich die folgende Verallgemeinerung von (48):

$$(52) \quad \frac{\Gamma(s)}{(w_0 + w_1 + \dots + w_p)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} \dots \int_{a_p-i\infty}^{a_p+i\infty} \frac{\Gamma(s-z_1-\dots-z_p) \Gamma(z_1)}{w_0^{s-z_1-\dots-z_p} w_1^{z_1}} \dots \frac{\Gamma(z_p)}{w_p^{z_p}} dz_1 \dots dz_p$$

$$a_\nu > 0, \nu = 1, 2, \dots, p, \Re(s) > a_1 + a_2 + \dots + a_p > 0,$$

Durch eine nähere Erwägung überzeugt man sich, dass diese Formel wenigstens dann gültig ist, wenn die reellen Theile der Grössen w positiv sind.

Bezeichnet nun $R(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von $v_1, \dots, v_n$ oder, noch allgemeiner, ein Polynom der Form

$$(53) \quad R(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\nu=0}^p C_\nu v_1^{k_\nu^{(1)}} v_2^{k_\nu^{(2)}} \dots v_n^{k_\nu^{(n)}},$$

wo die Exponenten k reelle nicht negative Zahlen bezeichnen, so erhält man mit Hülfe von (52) die Formel:

$$(54) \quad \frac{\Gamma(s)}{[R(v_1, v_2, \dots, v_n)]^s}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} \dots \int_{a_p-i\infty}^{a_p+i\infty} \frac{\Gamma(l_0) \Gamma(z_1)}{C_0^{l_0} C_1^{z_1}} \dots \frac{\Gamma(z_p)}{C_p^{z_p} v_1^{l_1} \dots v_n^{l_n}},$$

wo

$$(55) \quad \begin{cases} l_0 = s - z_1 - z_2 - \dots - z_p, \\ l_1 = k_0^{(1)}(s - z_1 - \dots - z_p) + k_1^{(1)}z_1 + \dots + k_p^{(1)}z_p, \\ \dots \\ l_n = k_0^{(n)}(s - z_1 - \dots - z_p) + k_1^{(n)}z_1 + \dots + k_p^{(n)}z_p. \end{cases}$$

Diese Formel hat wenigstens dann einen bestimmten Sinn, wenn die reellen Theile der Coefficienten C sowie die Grössen v positiv sind.

Nunmehr stelle man sich die Grössen v als positive unstetige Veränderliche vor, von denen jede unabhängig von den übrigen eine solche Folge unbeschränkt wachsender Werthe durchläuft, dass die bezüglichen Reihen

$$(56) \quad \mathbf{S}_1(s) = \sum_{(v_1)} \frac{\varphi_1(v_1)}{v_1^s}, \quad \dots, \quad \mathbf{S}_n(s) = \sum_{(v_n)} \frac{\varphi_n(v_n)}{v_n^s},$$

unter $\varphi_\nu(v_\nu)$ eine nur von v_ν abhängige Grösse verstanden, für hinreichend grosse Werthe von $\Re(s)$ unbedingt convergiren. Da die reellen Theile der Coefficienten C als positiv vorausgesetzt sind, so ergibt sich ohne Mühe — und zwar am schnellsten mit Hülfe von (54) — dass auch die Reihe

$$(57) \quad \mathbf{S}(s) = \sum_{(v_1, \dots, v_n)} \frac{\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\dots\varphi_n(v_n)}{[R(v_1, v_2, \dots, v_n)]^s},$$

wo v_ν genau dieselben Werthe durchläuft wie in $\mathbf{S}_\nu(s)$, in einer gewissen Halbebene unbedingt convergirt. Mit Benutzung dieser Bezeichnungen ergibt sich nun schliesslich aus (54) die Transformationsformel

$$(58) \quad \begin{aligned} & I'(s)\mathbf{S}(s) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} \dots \int_{a_p-i\infty}^{a_p+i\infty} \frac{\Gamma(l_0)}{C_0^{l_0}} \frac{\Gamma(z_1)}{C_1^{z_1}} \dots \frac{\Gamma(z_p)}{C_p^{z_p}} \mathbf{S}_1(l_1) \dots \mathbf{S}_n(l_n) dz_1 \dots dz_p, \end{aligned}$$

wo die positiven Grössen a und der reelle Theil von s solche Werthe besitzen müssen, dass die l_ν in den Convergencebereichen der bezüglichen Reihen $\mathbf{S}_\nu$ bleiben. Es wird zugleich wie früher angenommen, dass die reellen Theile der Coefficienten C positiv sind.

Bezeichnet man die Werthe, welche v , in den obigen Formeln durchläuft mit $a_\lambda^{(v)}$, $\lambda = 0, 1, \dots, \infty$, sowie die entsprechenden Werthe von $\varphi_v(v)$ mit $f_v(\lambda)$, so können die Reihen (56) und (57) auch folgenderweise geschrieben werden

$$(59) \quad \mathbf{S}_1(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{f_1(\lambda)}{[a_\lambda^{(1)}]^s}, \quad \dots, \quad \mathbf{S}_n(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{[a_\lambda^{(n)}]^s},$$

$$(60) \quad \mathbf{S}(s) = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n=0}^{\infty} \frac{f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) \dots f_n(\lambda_n)}{[R(a_{\lambda_1}^{(1)}, a_{\lambda_2}^{(2)}, \dots, a_{\lambda_n}^{(n)})]^s}.$$

In meiner oben citirten Arbeit ist nun die durch die Reihe $\mathbf{S}(s)$ definirte Funktion unter den folgenden Voraussetzungen in Bezug auf die durch die Reihen $\mathbf{S}_v(s)$ definirten Funktionen ausführlich erörtert worden. Von diesen Funktionen $\mathbf{S}_v$ wurde nämlich angenommen, dass sie in der ganzen s -Ebene existirende eindeutige Funktionen sind, welche sich an jeder endlichen Stelle wie rationale Funktionen verhalten und überdies die beiden folgenden Eigenschaften besitzen: 1) in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite giebt es höchstens nur eine endliche Anzahl Pole der $\mathbf{S}_v$, 2) im jedem solchen Streifen convergiren die $\mathbf{S}_v$, nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon|s|}$, bei wachsendem $|s|$ gegen die Null, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag. Unter diesen Voraussetzungen wurde gezeigt, dass das Produkt $\Gamma(s)\mathbf{S}(s)$ ebenfalls eine in der ganzen s -Ebene existirende eindeutige Funktion ist, welche zugleich die beiden anderen Eigenschaften der $\mathbf{S}_v$ besitzt. Liegen die Pole der $\mathbf{S}_v$ alle auf der reellen Axe, so gilt dasselben auch von den Polen von $\mathbf{S}$. Sind die Coefficienten C insbesondere reelle positive Zahlen, so besitzt nicht nur das Produkt $\Gamma(s)\mathbf{S}(s)$ sondern auch die Funktion $\mathbf{S}(s)$ alle oben genannten Eigenschaften.

Sieht man von gewissen mit dem Problem der Primzahlen unmittelbar oder mittelbar zusammenhängenden Reihen ab, so dürften die meisten übrigen DIRICHLET'schen Reihen, welche für die Zahlentheorie von Interesse sind oder voraussichtlich sein werden, in der soeben charakterisirten allgemeinen Klasse enthalten sein. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass das Verhalten der durch die betreffenden Reihen definirten Funktionen im Unendlichen noch genauer dahin präcisirt werden kann, dass sie, schon nach Multiplikation mit einer passenden Potenz von s , bei wachsendem $|s|$ sich der Grenze Null nähern, falls s zugleich auf einen beliebigen Streifen der

oben angegebenen Art beschränkt ist. Eine nähere Begründung der letzteren Behauptung hängt mit dem Umstande zusammen, dass die Funktion $\zeta(s, w)$, welche bekanntlich in der analytischen Zahlentheorie eine fundamentale Rolle spielt, die letztgenannte Eigenschaft besitzt, falls w reell und positiv ist. Hierbei beachte man auch die nachfolgenden Specialisirungen der obigen Transformationsformel.

Setzt man beispielsweise $a_\lambda^{(\nu)} = w_\nu + \lambda$ und $f_\nu(\lambda) = 1$ für $\lambda = 0, 1, \dots, \infty$, so wird

$$S_\nu(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(w_\nu + \lambda)^s} = \zeta(s, w_\nu), \quad (\nu=1, 2, \dots, \infty)$$

$$S(s) = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{[R(w_1 + \lambda_1, \dots, w_n + \lambda_n)]^s}.$$

Da die Funktion $\zeta(s, w)$ alle von den S_ν angenommen Eigenschaften besitzt, so ist der folgende Satz nur ein einfaches Corollarium aus dem Obigen:

Bezeichnet $R(w_1, \dots, w_n)$ eine beliebige ganze rationale Funktion oder allgemeiner ein Polynom der Form (53), dessen Coefficienten die Bedingung erfüllen, dass ihre reellen Theile positiv sind, in welchem Falle die Reihe $S(s)$ einen durch eine gewisse Halbebene darstellbaren Convergencebereich besitzt, so wird durch diese Reihe eine in der ganzen s -Ebene existirende eindeutige Funktion defnirt, welche sich an jeder endlichen Stelle wie eine rationale Funktion verhält. Die Pole dieser Funktion liegen alle auf der reellen Axe. Beschränkt man die Veränderliche s auf einen beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite, so nähert sich $e^{-\varepsilon|s|} \Gamma(s) S(s)$ bei wachsendem $|s|$ der grenze Null, wie klein auch die positive Grösse ε angenommen werden mag. Sind die Coefficienten C reelle positive Zahlen, so besitzt nicht nur $e^{-\varepsilon|s|} \Gamma(s) S(s)$ sondern auch $e^{-\varepsilon|s|} S(s)$ die letztgenannte Eigenschaft.

Identificiren wir die Reihen (59) mit den bei der Bestimmung der Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen auftretenden Reihen

$$(61) \quad \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

so besitzen die durch die entsprechenden Reihen (60) defnirten Funktionen ebenfalls alle soeben genannten Eigenschaften. Aus der Abhandlung des

Herrn HURWITZ: *Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen etc.* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 27, S. 86) geht nämlich hervor, dass die Reihen (61) im wesentlichen linear durch Reihen der Form $\zeta(s, w)$ darstellbar sind und somit die für die Gültigkeit des obigen Satzes erforderlichen Eigenschaften besitzen. Die Reihen (61) machen einen Theil von denjenigen aus, welche DIRICHLET in der Arbeit über die arithmetische Progression gebraucht hat und Herr LIPSCHITZ in seiner Arbeit *Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen* (Crelles Journal, Bd. 105) einer eingehenden Erörterung unterworfen hat. Identificirt man die S_n mit diesen allgemeineren Reihen, so erfährt auch die Klasse der Reihen (60), welche die Transformationsformel (58) auf die S_n zurückführt, eine entsprechende Erweiterung.¹

¹ Der in § 1 charakterisirten, bisher wenig beachteten Klasse (I) von bestimmten Integralen habe ich schon früher grössere oder kleinere Theile der folgenden Arbeiten gewidmet: *Om defnita integraler, hvilka hafva till gränser hypergeometriska funktioner af särskilda ordningar*, 1893. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. 20. — *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen.* Acta Fenn. T. 21. — *Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale.* Acta Fenn. T. 22. — *Über eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$.* Acta Fenn. T. 24. — *Eine Formel für den Logarithmus transscendenter Functionen von endlichem Geschlecht.* Acta Fenn. T. 29 und Acta Math. Bd. 25. — *Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzgleichungen.* Acta Math. Bd. 25.

In diesen Arbeiten habe ich es nicht unterlassen, auf die neue und einfache, zugleich aber recht allgemeine Methode zur Herleitung von asymptotischen Formeln aufmerksam zu machen, welche aus der Anwendung des Residuenkalküls auf die betreffenden Integrale hervorgeht. (Cf. § 2 und § 3 der vorliegenden Arbeit.) Herr E. W. BARNES hat nun neuerdings, nachdem er im Jahre 1899 auf ein briefliches Ersuchen nebst anderen meiner Arbeiten auch diejenigen *Über eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$* erhalten hatte, in seinen Arbeiten *The Theory of the Gamma Function* (Messenger of Math. Bd. 29) und *The Theory of the Double Gamma Function* (Phil. Trans. Bd. 196) dieselbe Methode zur Herleitung der STIRLING'schen und einer analogen Formel angewandt, ohne dabei die Beziehung dieser Herleitungen zu meiner Arbeit deutlich anzugeben. Dies veranlässt mich hervorzuheben, dass die STIRLING'sche Formel in meiner genannten Arbeit zum ersten Male nach der betreffenden neuen Methode her-

geleitet worden ist, und dass ich daselbst (§ 12) ausdrücklich angegeben habe, dass dieselbe Methode auch in anderen Fällen anwendbar ist, um für unendliche Produkte von endlichem Geschlecht der STIRLING'schen analoge Formeln zu erhalten. Die allgemeine Formel (12) in § 3 der vorliegenden Arbeit, von welcher alle diese Formeln erhalten werden können, kommt bisher nur in meinen Arbeiten vor.