SUR LA POLARISATION PAR DIFFRACTION

(Seconde partie)

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

VII.

Je reprends, après un assez long intervalle, mon mémoire sur la polarisation par diffraction.[1] Depuis, ce problème a été l'objet d'un travail très important de M. SOMMERFELD, qui a paru dans les Mathematische Annalen, et dans lequel cet auteur retrouve et complète mes résultats par une méthode extrêmement ingénieuse. J'aurai donc, dans ce qui va suivre, non seulement à compléter les résultats précédemment obtenus, mais à les comparer à ceux de M. SOMMERFELD.

Je vais examiner dans ce paragraphe ce qui arrive quand j'abandonne la 4^e hypothèse énoncée dans la première partie de ce travail (page 305) à la fin du § II; c'est à dire quand je ne suppose plus que la lentille ait une ligne focale coïncidant exactement avec le bord du biseau.

Conservons d'ailleurs les autres hypothèses, et imaginons que l'angle du biseau soit infiniment petit et que l'écran soit parfaitement conducteur.

Voyons comment les résultats du § III vont se trouver modifiés. Nous aurons toujours (cf. $1^{\text{ère}}$ partie, page 308):

$$Z = \Sigma A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}$$

ou si ρ est très grand:

$$(b) \qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin\frac{n\omega}{2}.$$

[1] Ce journal, t. 16, p. 297—340.

Le coëfficient A_n doit dépendre du temps et, d'après nos hypothèses, être de la forme:

$$A_n^0 \cos pt + A_n^1 \sin pt. \qquad (p = \alpha V)$$

Mais si Z est de la forme

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt \qquad \text{(cf. 1}^{\text{ère}} \text{ partie, page 306)}$$

ce sera la partie réelle de

$$Z' = (Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Comme Z' satisfait aux mêmes équations que Z, il sera plus simple de considérer Z' au lieu de Z et d'écrire:

$$Z' = \sum (A_n^0 - iA_n^1) J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin \frac{n\omega}{2} e^{ipt}$$

ou:

$$Z' = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin \frac{n\omega}{2} \qquad (a_n = A_n^0 - iA_n^1)$$

ou en supprimant l'accent de Z' devenu inutile:

$$Z = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin \frac{n\omega}{2}.$$

En supposant ρ très grand, on a:

$$J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) = \frac{e^{i\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + e^{-i\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{2\alpha\pi\rho}}$$

d'où:

$$(1) \qquad Z = \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(\alpha\rho + pt - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + \sum \frac{a_n \sin \frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(pt - \alpha\rho + \frac{n+1}{4}\pi\right)}.$$

Le premier terme correspond au faisceau incident, et le second aux divers faisceaux transmis.

Nous avons supposé jusqu'ici que la lentille avait sa ligne focale sur l'axe des z, ce qui se traduisait analytiquement par cette condition que a_n était essentiellement réel; car il ne devait pas y avoir de différence de phase entre les divers rayons incidents.

Mais il n'en est plus de même si la ligne focale ne coïncide pas exactement avec l'axe des z.

Soit en effet O l'origine des coordonnées, soient FM et FM' deux rayons venant se croiser au point F sur la ligne focale. Prenons FM très grand par rapport à OF et $FM' = FM$; la phase du mouvement lumineux devra être la même en M et en M', puisque ces deux points sont à la même distance de la ligne focale. Mais ces deux points ne sont pas à la même distance du point O.

Prenons au contraire sur les deux rayons FM et FM' deux points M_1 et M'_1 situés à une même distance ρ du point O, ρ étant très grand. Si la distance OM_1 est très grande, OM_1 fera un angle très petit avec FM; mais les deux points M_1 et M'_1 n'étant pas à la même distance du point F, la phase ne sera pas la même en ces deux points.

La phase au point M_1 sera proportionnelle à la distance OF multipliée par le cosinus de l'angle de OF avec FM.

L'expression $a_n \sin\frac{n\omega}{2}$ sera donc imaginaire et l'argument de

$$F(\omega) = \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a\rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

sera

$$l\cos(\omega - \omega_0),$$

l étant proportionnel à OF et ω_0 représentant l'angle de OF avec l'axe des x.

L'intensité et la phase de la lumière incidente sera ainsi définie par la fonction $F(\omega)$, l'intensité et la phase de la lumière transmise, tant directement que par reflexion ou par diffraction sera alors définie par la fonction:

$$F_1(\omega) = \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a\rho}} e^{+i\frac{(n+1)\pi}{4}}.$$

Posons maintenant

$$\Phi(\omega) = \sum \frac{a_n \cos\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a\rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}},$$

$$\Phi_1(\omega) = \sum \frac{a_n \cos\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi a\rho}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}},$$

il viendra:

$$\Phi + iF = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \Sigma a_n e^{in\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi - iF = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \Sigma a_n e^{in\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi_1 + iF_1 = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \Sigma a_n e^{in\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi_1 - iF_1 = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi a\rho}} \Sigma a_n e^{in\left(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$

d'où:

$$\Phi(\omega) + iF(\omega) = \Phi(-\omega) - iF(-\omega),$$

$$(2) \qquad i\Phi(\omega + \pi) - F(\omega + \pi) = \Phi_1(\omega) + iF_1(\omega),$$

$$i\Phi(\pi - \omega) - F(\pi - \omega) = \Phi_1(\omega) - iF_1(\omega).$$

d'où enfin:

$$(3) \qquad F_1(\omega) = \frac{\Phi(\omega + \pi) - \Phi(\pi - \omega)}{2} + i\frac{F(\omega + \pi) - F(\pi - \omega)}{2}.$$

Le calcul, sous une autre forme, est tout à fait pareil à celui du § III; $F(\omega)$ dans les notations de la page 308 du § III s'écrirait:

$$F(\omega) = \frac{f(\omega)e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\rho}}.$$

On aurait de même (cf. 1ère partie page 309)

$$F_1(\omega) = \frac{f_1(\omega) - if_2(\omega)}{\sqrt{\rho}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et avec les notations de la page 312:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{a\pi\rho}} f(\omega) e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$F_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{a\pi\rho}} [\psi_1(\omega) - i\psi_2(\omega)] e^{+\frac{i\pi}{4}}.$$

La seule différence, c'est que la fonction $F(\omega)$ n'est plus supposée réelle.

Le problème est ainsi ramené à la détermination de $\Phi(\omega)$ quand on connaît $F(\omega)$.

Or la formule de Fourier nous donne:

$$F(\omega) = \sum \frac{\sin \frac{n\omega}{2}}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin \frac{n\alpha}{2} d\alpha$$

d'où:

$$\Phi(\omega) = \sum \frac{\cos \frac{n\omega}{2}}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin \frac{n\alpha}{2} d\alpha.$$

d'où on tire:

$$(4) \qquad \Phi(\omega) = \int_0^{2\pi} F(\alpha) \frac{d\alpha}{4\pi} \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega + \alpha}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha - \omega}{4}\right).$$

Mais cette formule demande une interpretation: en effet la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\alpha = \omega$; (je suppose ω compris entre o et 2π) l'intégrale semble donc indéterminée à moins qu'on n'en précise le sens.

L'intégrale $\int_0^{2\pi}$ est indéterminée, mais l'intégrale:

$$\int_0^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^{2\pi}$$

est parfaitement déterminée et tend vers une limite déterminée quand ε tend vers o.

C'est cette limite que Cauchy appelle *valeur principale* de l'intégrale.

C'est cette valeur principale qu'il faut prendre pour $\Phi(\omega)$.

D'après notre hypothèse, l'argument de $F(\omega)$ est égal à

$$l \cos(\omega - \omega_0)$$

et l est égal à $2\pi OF$ divisé par la longueur d'onde; ce sera donc un très grand nombre, à moins que OF ne soit très petit.

Nous conviendrons donc de considérer les quantités qui contiennent en facteurs $\frac{1}{\sqrt{l}}$ comme très petites du premier ordre, et celles qui contiennent en facteur $\frac{1}{l}$ comme très petites du 2^d ordre.

L'intégrale

$$\int_a^b e^{il\alpha} f(\alpha)\,d\alpha$$

est alors du second ordre, pourvu que $f(\alpha)$ soit finie dans l'intervalle de a à b ainsi que sa dérivée; car elle est égale à:

$$\frac{e^{ilb}}{il} f(b) - \frac{e^{ila}}{il} f(a) - \frac{1}{il}\int_a^b e^{il\alpha} f'(\alpha)\,d\alpha.$$

Dans les mêmes conditions, l'intégrale:

$$\int_0^b e^{il\alpha^2} f(\alpha)\,d\alpha$$

sera du 1^er ordre; en effet la dérivée de $f(\alpha)$ étant finie, nous pourrons poser:

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha\varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ restant finie, et notre intégrale peut alors s'écrire (en posant $\alpha^2 = \beta$):

$$\int_0^\infty e^{il\alpha^2} f(0)\,d\alpha - \int_b^\infty e^{il\beta}\frac{f(0)\,d\beta}{2\sqrt{\beta}} + \int_0^b e^{il\beta}\varphi(\sqrt{\beta})\frac{d\beta}{2}.$$

La première intégrale est du 1^er ordre et égale à

$$f(0)\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2l}}$$

et les deux autres sont du 2^d ordre en vertu du théorème précédent.

L'intégrale

$$(5) \qquad \int_a^b e^{il\varphi(\alpha)} f(\alpha)\,d\alpha$$

sera du 2^d ordre si dans l'intervalle d'intégration $f(\alpha)$ est finie ainsi que sa dérivée et que $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ et $\frac{1}{\varphi'(\alpha)}$; et en effet en posant

$$\varphi(\alpha) = \beta; \qquad \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = f_1(\beta),$$

l'intégrale devient:

$$\int e^{il\beta} f_1(\beta) d\beta.$$

Supposons maintenant que $\varphi'(\alpha)$ s'annule dans l'intervalle d'intégration, par exemple pour $\alpha = \alpha_0$; posons:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) + \beta^2$$

d'où

$$\varphi'(\alpha) d\alpha = 2\beta d\beta$$

l'intégrale (5) deviendra:

$$e^{il\varphi(\alpha_0)} \int e^{il\beta^2} f_1(\beta) d\beta$$

où

$$f_1(\beta) = f(\alpha) \frac{2\beta}{\varphi'(\alpha)}.$$

D'après les hypothèses faites $[f(\alpha), f'(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha), \frac{1}{\varphi'(\alpha)}$ finis], $f_1(\beta)$ et sa dérivée

$$\frac{df_1}{d\beta} = \frac{4\beta^2 f'}{\varphi'^2} + \frac{2f}{\varphi'} - \frac{4f\varphi''\beta^2}{\varphi'^3}$$

restent finies.

Donc l'intégrale (5) est égale à des quantités près du 2^d ordre à l'intégrale:

$$f_1(0) e^{il\varphi(\alpha_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\beta^2} d\beta = \frac{f_1(0) e^{il\varphi(\alpha_0)}}{\sqrt{2l}} \sqrt{\pi}(1 + i).$$

Supposons maintenant que nous envisagions l'intégrale

$$(6) \qquad \int e^{il\alpha} f(\alpha) d\alpha,$$

où nous supposerons que $f(\alpha)$ devienne infinie pour $\alpha = \alpha_0$. Soit par exemple

$$(7) \qquad f(\alpha) = \frac{A}{\alpha - \alpha_0} + \varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ étant finie et continue. L'intégrale (6) n'a pas elle-même aucun sens; mais nous envisagerons sa valeur principale; cette valeur sera évidemment égale à des quantités près du 2^d ordre à la valeur principale de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\alpha} \frac{A d\alpha}{\alpha - \alpha_0}$$

qu'il est aisé de trouver et qui est égale à:

$$A\pi e^{il\alpha_0}.$$

De même l'intégrale

$$\int e^{il\varphi(\alpha)} f(\alpha) d\alpha,$$

où $f(\alpha)$ est de la forme (7), où $\varphi(\alpha)$ est finie et continue et où $\varphi'(\alpha)$ ne s'annule pas, sera égal à des quantités du second ordre près à

$$A\pi e^{il\varphi(\alpha_0)}.$$

Appliquons ces principes à l'intégrale (4) qui peut s'écrire:

$$\int_0^{2\pi} e^{il\cos(\alpha-\omega_0)} F_0(\alpha) \frac{d\alpha}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right),$$

où $F_0(\alpha)$ qui est le module de $F(\alpha)$ a une valeur finie; nous pouvons même supposer que $F_0(\alpha)$ soit continu.

La fonction

$$F_0(\alpha)\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right)$$

ne cesse d'être finie et continue que pour $\alpha = \omega$. L'exposant

$$il\cos(\alpha - \omega_0)$$

a sa dérivée qui s'annule pour

$$\alpha = \omega_0, \qquad \alpha = \omega_0 + \pi.$$

Si donc nous négligeons les quantités du 2[d] ordre, nous n'aurons à envisager que les éléments de l'intégrale qui sont voisins de $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega_0$, $\alpha = \omega_0 + \pi$.

Considérons d'abord les premiers; la valeur principale de l'intégrale dans le voisinage de $\alpha = \omega$, sera:

$$e^{il\cos(\omega-\omega_0)} F_0(\omega) = F(\omega).$$

Tenons compte enfin des éléments voisins de $\alpha = \omega_0 + \pi$, il viendra:

$$\alpha_0 = \omega_0 + \pi; \qquad \varphi(\alpha) = \cos(\alpha - \omega_0); \qquad \varphi'(\alpha) = -\sin(\alpha - \omega_0);$$

$$\beta^2 = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha_0) = \cos(\alpha - \omega_0) - \cos\pi = 2\cos^2\left(\frac{\alpha - \omega_0}{2}\right)$$

$$\frac{2\beta}{\varphi'(\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha - \omega_0}{2}}{-\sin(\alpha - \omega_0)} = \frac{-\sqrt{2}}{\sin\frac{\alpha - \omega_0}{2}};$$

$$f(\alpha) = \frac{F_0(\alpha)}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega + \alpha}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha - \omega}{4}\right)$$

$$f_1(\beta) = f(\alpha)\frac{-\sqrt{2}}{\sin\frac{\alpha - \omega_0}{2}};$$

$$f_1(0) = \frac{-\sqrt{2}\,F_0(\omega_0 + \pi)}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega + \omega_0 + \pi}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi + \omega_0 - \omega}{4}\right).$$

La partie correspondante de l'intégrale sera donc:

$$-\frac{e^{-il}(1 + i)}{\sqrt{l}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}F_0(\omega_0 + \pi)\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi + \omega_0 + \omega}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi + \omega_0 - \omega}{4}\right).$$

La partie de l'intégrale qui correspond à $\omega = \omega_0$ se calculerait de la même manière.

On trouverait

$$\frac{e^{il}(1 - i)}{\sqrt{l}}\frac{4}{\sqrt{\pi}}F_0(\omega_0)\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega + \omega_0}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\omega_0 - \omega}{4}\right);$$

mais pour mener à bien ce calcul il faudrait observer que $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha = \omega_0$ atteint non pas un minimum, mais un maximum; et poser, non pas:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) + \beta^2,$$

mais bien

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) - \beta^2.$$

L'interprétation de ces résultats est aisée.

Négligeons d'abord les termes du 1^er^ ordre et ne tenons compte que des termes finis; il vient alors:

$$\Phi(\omega) = F(\omega)$$

d'où:

$$F_1(\omega) = (1 + i)\frac{F(\omega + \pi) - F(\pi - \omega)}{2}. \tag{8}$$

Comparons ce résultat avec celui que nous avons obtenu au n° 3, c'est à dire dans les conditions d'une mise au point parfaite.

Nous devions alors diviser $F_1(\omega)$ en deux termes dont le premier:

$$\frac{\Phi(\omega + \pi) - \Phi(\pi - \omega)}{2}$$

représente la lumière diffractée tandis que l'autre

$$i\frac{F(\omega + \pi) - F(\pi - \omega)}{2} \tag{9}$$

représente la lumière transmise directement ou réfléchie.

Alors on retrouvait une moitié de l'énergie incidente dans la lumière diffractée, un quart dans la lumière transmise et un quart dans la lumière réfléchie.

Pour passer de l'expression (9) à l'expression (8), il suffit de la multiplier par $(1 - i)$. Les intensités correspondantes se trouvent doublées et on retrouve la moitié de l'énergie incidente dans la lumière transmise et une moitié dans la lumière réfléchie. La portion de l'énergie qui se transforme en lumière diffractée est de l'ordre des quantités négligées, c'est à dire du 1^er^ ordre.

Tenons compte maintenant des termes du 1^{er} ordre.

On voit qu'en ce qui concerne ces termes, tout se passe comme si l'intégrale qui donne $\Phi(\omega)$ se réduisait à deux éléments, celui qui est voisin de $\alpha = \omega_0$ et celui qui est voisin de $\alpha = \omega_0 + \pi$. Dans chacun de ces éléments, l'argument de $F(\alpha)$ qui passe par un maximum ou un minimum demeure sensiblement constant; de sorte que pour chacun d'eux tout se passe comme dans le n° III.

Le rôle prépondérant joué par ces éléments est aisé à comprendre; et la signification physique de cette prépondérance est manifeste; les seuls rayons qui subissent l'effet de la diffraction sont ceux qui passent près du bord de l'écran. Evidemment d'ailleurs ceux qui se rapprochent le plus du bord de l'écran, c'est à dire de O, sont ceux dont la direction est voisine de OF, puisque tous passent par le foyer, c'est à dire par F.

Dans les expériences telles qu'elles sont ordinairement faites, un seul de ces éléments interviendra. En effet le faisceau concentré par la lentille aura une ouverture limitée, en tout cas inférieure à π. Par conséquent la fonction $F(\alpha)$ qui définit l'intensité et la phase du faisceau incident sera nulle sauf quand α sera compris entre deux limites α_0 et α_1, conformément aux inégalités

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha_1.$$

Si ω_0 est compris entre α_0 et α_1, il n'en sera pas de même de $\omega_0 + \pi$. Si donc $F(\omega_0)$ n'est pas nul, $F(\omega_0 + \pi)$ sera nul; de sorte que l'élément correspondant à ω_0 interviendra seul.

En résumé, dans le calcul des termes du 1^{er} ordre, tout se passera comme si le faisceau au lieu d'avoir une ouverture égale à $\alpha_1 - \alpha_0$ avait une ouverture beaucoup plus petite et si l'angle α variait seulement de $\omega_0 - \varepsilon$ à $\omega_0 + \varepsilon$. A cela près, il n'y aura rien de changé aux conclusions du n° III.

Dans le mémoire que j'ai cité, M. SOMMERFELD retrouve les mêmes résultats que moi, bien qu'il traite un problème en apparence bien différent. Après ce qui précède, nous ne devons plus nous en étonner; le cas qu'il traite et qui est celui de la lumière parallèle peut être regardée comme le cas extrême de la mauvaise mise au point, et nous venons de voir que le défaut de mise au point n'influait pas sur nos résultats les plus essentiels.

VIII.

Je voudrais maintenant indiquer le moyen de tenir compte de la courbure du tranchant du biseau. Pour cela j'attribuerai à la section droite de ce biseau une forme aussi simple que possible, à savoir celle d'une hyperbole dont le sommet sera très voisin du centre. Alors cette hyperbole se confondra sensiblement avec ses asymptotes sauf dans la partie très voisine du sommet qui présentera au contraire un rayon de courbure très faible. Nous nous rapprocherons ainsi suffisamment du cas réalisé par un biseau dont le tranchant est imparfait.

Soit

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

l'équation d'un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales. Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point; soient λ et μ ses coordonnées elliptiques, λ étant le paramètre correspondant à l'ellipse et μ à l'hyperbole.

Soit alors

$$\mu = \mu_0$$

l'équation de la section droite du biseau.

Comme l'angle de ce biseau doit être très aigu et son tranchant presque parfait, il faut que c soit très petit et $\mu_0 < c$, mais très voisin de c; je veux dire que $\frac{c - \mu_0}{c}$ doit être très petit; car cette dernière quantité est de l'ordre de l'angle des deux asymptotes.

Il vient alors:

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}$$

$$dx^2 + dy^2 = d\lambda^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} + d\mu^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}$$

$$(\lambda^2 - \mu^2)\Delta u = (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + (c^2 - \mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} - \mu\frac{du}{d\mu}.$$

Si maintenant nous considérons, soit Z dans l'hypothèse où le plan de polarisation est le plan d'incidence, soit la force magnétique γ, ci ces deux plans sont rectangulaires, nous verrons que Z ou γ devra être la partie réelle de ue^{ipt}; u satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + \alpha^2 u = 0,$$

et cette équation devient:

$$(\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + (c^2 - \mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - \mu\frac{du}{d\mu} + \alpha^2(\lambda^2 - \mu^2)u = 0.$$

Nous pourrons satisfaire à cette équation en posant:

$$u = LM,$$

L étant fonction de λ seulement et M de μ seulement et en supposant que L et M satisfassent aux équations:

$$(\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda\frac{dL}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k)L = 0, \tag{1}$$

$$(\mu^2 - c^2)\frac{d^2 M}{d\mu^2} + \mu\frac{dM}{d\mu} + \alpha^2(\mu^2 - k)M = 0, \tag{2}$$

où k est une constante quelconque.

Il faut voir comment doit être choisie la constante k et aussi parmi toutes les intégrales des équations du second ordre (1) et (2) quelles sont celles qu'il faut choisir.

D'abord λ peut varier depuis c jusqu'à $+\infty$ et μ depuis $-c$ jusqu'à μ_0.

Nous étudierons donc l'équation (1) dans le voisinage de $\lambda = c$ et nous verrons que cette équation admet deux intégrales, la première développable suivant les puissances entières de $\lambda - c$, la seconde suivant les puissances impaires de $\sqrt{\lambda - c}$. La première pourra s'appeler la solution paire et la seconde la solution impaire.

Nous étudierons de même l'équation (2) dans le voisinage de $\mu = -c$ et nous trouverons de même deux solutions, une solution paire développable suivant les puissances entières de $\mu + c$ et une solution impaire développable suivant les puissances impaires de $\sqrt{\mu + c}$.

Si l'on veut que LM soit une fonction uniforme de x et de y, il faut choisir pour L soit la solution paire, soit la solution impaire de (1), et pour M la solution de même parité de (2).

Ainsi, L devra être soit la solution paire, soit la solution impaire et non pas une combinaison linéaire de ces deux solutions, et on obtiendra M en changeant dans L la variable λ en $-\mu$. Pour déterminer la constante k on aura l'une des deux conditions suivantes:

1°. Si le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence on devra avoir

$$M = 0 \qquad \text{pour } \mu = \mu_0.$$

2°. Si au contraire le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, on devra avoir:

$$\frac{dM}{d\mu} = 0 \qquad \text{pour } \mu = 0.$$

Si nous posons

$$\mu = -c \cos \omega$$

l'équation qui donne u devient:

$$(3) \qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + \frac{d^2u}{d\omega^2} + \alpha^2(\lambda^2 - c^2\cos^2\omega)u = 0$$

et l'équation (2) devient

$$(2') \qquad \frac{d^2M}{d\omega^2} = \alpha^2 M(c^2\cos^2\omega - k).$$

Nous désignerons par ω_0 la valeur de ω qui correspond à $\mu = \mu_0$.

Si on avait supposé $c = 0$, on serait retombé sur les conditions du n° IV, l'écran aurait été un biseau parfait limité par les deux plans

$$\omega = -\omega_0, \qquad \omega = \omega_0$$

tandis que dans le n° IV, nous avions pris comme plans limites de notre biseau

$$\omega = 0, \qquad \omega = \lambda\pi;$$

(cf. loco citato page 321); mais ce n'est qu'une différence de notation.

Si nous supposons en outre $\omega_0 = \pi$, nous retombons sur les conditions du § III, c'est à dire sur le cas d'un écran plan infiniment miuce; seulement le plan de l'écran est $\omega = \pi$ et non $\omega = 0$, ce qui n'est encore qu'une différence de notation.

Enfin si ne supposant plus $c = 0$, nous faisons $\omega_0 = \pi$ d'où $\mu_0 = c$;

l'hyperbole $\mu = \mu_0$ se réduit à une droite et nous retombons encore sur le cas du § III.

Supposons maintenant que le plan de polarisation soit perpendiculaire au plan d'incidence; ce n'est plus M, mais $\frac{dM}{d\omega}$ qui doit s'annuler pour $\omega = \pm \omega_0$.

Disons quelques mots du cas de $\omega_0 = \pi$ qui comme nous l'avons vu se ramène au cas du § III. Nous distinguerons alors quatre sortes de solutions.

1[ère] sorte: plan de polarisation parallèle au plan d'incidence; M est une fonction impaire de ω; c'est de plus une fonction périodique de ω de période 2π.

On a alors

$$M_0 = \sin\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \sin m\omega, \qquad (m \text{ entier}).$$

2[e] sorte: plan de polarisation parallèle au plan d'incidence; M est une fonction paire de ω; elle se change en $-M$ quand ω se change en $\omega + 2\pi$

$$M_0 = \cos\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \cos m\omega, \qquad (2m \text{ impair}).$$

3[e] sorte: plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence; M est une fonction impaire de ω et se change en $-M$ quand ω se change en $\omega + 2\pi$

$$M_0 = \sin\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \sin m\omega, \qquad (2m \text{ impair}).$$

4[e] sorte: plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence; M fonction paire de ω, périodique de periode 2π

$$M_0 = \cos\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \cos m\omega, \qquad (m \text{ entier})$$

(ces quatre sortes de solution se retrouvent d'ailleurs dans le cas général où ω_0 n'est pas égal à π).

S'il n'y avait pas d'écran, les solutions de la 1[ère] et de la 4[e] sortes subsisteraient seules.

Mais si nous examinons l'équation (2'), nous reconnaitrons une équation que l'on rencontre fréquemment en mécanique céleste et qu'ont étudiée MM. Gyldén, Bruns, Tisserand, Callandreau. J'ai résumé les principaux résultats connus au sujet de cette équation dans le chapitre XVIII du tome II de mon ouvrage sur les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.

Cette équation admet deux solutions qui sont de la forme

$$e^{a\omega}F(\omega)\ ,\ e^{-a\omega}F_1(\omega).$$

$F(\omega)$ et $F_1(\omega)$ étant périodiques de période 2π.

Pour certaines valeurs des constantes, l'exposant a devient un multiple de $\frac{i}{2}$; alors une des deux solutions subsiste seule et elle est périodique de période 2π ou 4π. Ce sont précisément les solutions qui conviennent au cas de $\omega_0 = \pi$; les quatre sortes de solutions correspondent dans un ordre convenable aux cas où le nombre entier $\frac{2a}{i}$ est congru $0, 1, 2$, ou $3 \pmod 4$.

Une autre remarque mérite de retenir un instant notre attention. On sait que M. Gyldén a ramené approximativement l'équation (2') à l'équation de Lamé. D'autre part la façon dont nous l'avons obtenue la rattache également à l'équation de Lamé, mais il faut chercher à se rendre compte de la nature du lien qui les unit.

Soit

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

un système d'ellipsoïdes homofocaux; soient ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point et soit:

$$\xi = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}; \qquad \eta = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}};$$

$$\zeta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}}.$$

L'équation $\Delta V = 0$ devient alors:

$$(5) \qquad (\mu^2 - \nu^2)\frac{d^2 V}{d\xi^2} + (\nu^2 - \rho^2)\frac{d^2 V}{d\eta^2} + (\rho^2 - \mu^2)\frac{d^2 V}{d\zeta^2} = 0.$$

Si alors nous posons

$$V = RMN,$$

et que R soit défini par l'équation

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} = R(A\rho^2 + B) \tag{6}$$

où A et B sont des constantes quelconques; si M et N se déduisent de R en changeant ρ en μ et en ν; l'équation (5) se trouvera satisfaite.

L'équation (6) n'est autre chose que ce qu'on appelle l'équation de Lamé.

Si l'on suppose b très grand, et que l'on ait:

$$\rho^2 > b^2 > \mu^2 > c^2 > \nu^2,$$

on voit que ρ sera également très grand et que l'on aura sensiblement

$$\mu = c\cos(b\eta), \qquad \nu = c\cos(b\zeta).$$

L'équation (6) ou plutôt l'équation analogue:

$$\frac{d^2M}{d\eta^2} = M(A\mu^2 + B)$$

devient alors en posant $b\eta = \omega$:

$$\frac{d^2M}{d\omega^2} = M\left(\frac{A}{b^2}\cos^2\omega + \frac{B}{b^2}\right)$$

de sorte que nous retrouvons l'équation (2').

Il nous reste à voir comment l'équation (5) se ramène à l'équation en u; c'est à dire à l'équation (3).

Nous avons supposé b et ρ très grands; posons

$$V = Ru,$$

R dépendant seulement de ξ, u dépendant seulement de η et de ζ. Nous poserons

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} = b^2\alpha^2\rho^2R; \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2V}{d\xi^2} = b^2\alpha^2\rho^2V;$$

nous voyons que α^2 ne dépend que de ξ; ce sera donc une constante, si nous regardons ρ et ξ comme des constantes; je supposerai que α^2 est fini et $b^2\alpha^2\rho^2$ très grand et je ne conserverai dans l'équation (5) que les termes qui contiennent ρ^2 en facteur. Il viendra en divisant par $\rho^2 R$:

$$b^2\alpha^2(\mu^2 - \nu^2)u + \frac{d^2u}{d\zeta^2} - \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0$$

ou, en divisant par b^2:

$$\frac{d^2u}{d\mu^2}(c^2 - \mu) - \mu\frac{du}{d\mu} + \frac{d^2u}{d\nu^2}(\nu^2 - c^2) + \nu\frac{du}{d\nu} + \alpha^2(\nu^2 - \mu^2)u = 0,$$

ce qui est bien notre équation en u à la différence des notations près, λ étant remplacé par ν.

IX.

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent les fonctions M; les fonctions L, comme nous l'avons vu, s'en déduisent en changeant μ en $-\lambda$.

Mais j'ai surtout besoin de connaître les propriétés de ces fonctions L pour les valeurs très grandes de λ.

Il est clair, d'après la forme de l'équation (1) que la valeur approchée de cette fonction pour λ très grand sera:

$$A\frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + B\frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

où A et B sont des constantes, et le principal problème qu'il nous reste à résoudre est la détermination du rapport $\frac{B}{A}$.

Il y a des cas où nous savons faire cette détermination.

1°. Si $c = 0$; la fonction L n'est alors autre chose que la fonction de Bessel; et on a:

$$L = J_{\alpha\sqrt{k}}(\alpha\lambda)$$

d'où: pour λ très grand

$$L = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} \cos\left[\alpha\lambda - \left(\frac{\alpha\sqrt{k}}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi\right].$$

Le rapport $\frac{B}{A}$ est alors égal à

$$e^{i\pi\left(\alpha\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Quant à la valeur de k, il est aisé de la déduire de celle de ω_0; on voit que $\alpha\sqrt{k}$ doit être un multiple de $\frac{\pi}{2\omega_0}$. En résumé le rapport $\frac{B}{A}$ devra être égal à

$$e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{m\pi}{\omega_0}+1\right)},$$

m étant entier.

2°. Si $\omega_0 = \pi$; l'écran se réduit alors à un plan infiniment mince et les conclusions du § III doivent s'appliquer. La fonction L n'est plus une fonction J_n, mais elle est développable en série procédant suivant les fonctions J_n.

Supposons d'abord que L (et M) soit une solution de la 1ère sorte. Alors LM est une fonction de λ et de μ qui change de signe quand on change $\sqrt{c^2-\mu^2}$ en $-\sqrt{c^2-\mu^2}$ ou quand on change $\sqrt{\lambda^2-c^2}$ en $-\sqrt{\lambda^2-c^2}$; on peut également l'exprimer en fonction de x et de y; on voit alors que c'est une fonction uniforme de x et de y qui change de signe avec y.

Mais il vaut mieux poser:

$$x = c + \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega$$

de façon à introduire des coordonnées polaires ρ et ω; l'angle ω n'est pas alors le même que celui qu'on a introduit en posant $\mu = -c\cos\omega$.

On voit alors que l'on doit avoir:

$$LM = A_1 J_1(\alpha\rho)\sin\omega + A_2 J_2(\alpha\rho)\sin 2\omega + A_3 J_3(\alpha\rho)\sin 3\omega + \ldots;$$

A_1, A_2, A_3 étant des coëfficients quelconques.

Pour ρ très grand on a sensiblement:

$$\mu = -c\cos\omega; \qquad \lambda = \rho + c\cos\omega,$$

$$J_n(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\cos\left(\alpha\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

ou approximativement:

$$J_n(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} \cos\left(\alpha\lambda - \alpha c \cos\omega - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

d'où:

$$LM = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} e^{\alpha i\lambda - \alpha i c \cos\omega}\left[A_1 \sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + A_3 \sin 3\omega\, e^{-\frac{7i\pi}{4}} + \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}} e^{-\alpha i\lambda + \alpha i c \cos\omega}\left[A_1 \sin\omega\, e^{+\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + \ldots\right].$$

Le rapport $\frac{B}{A}$ est donc égal à

$$e^{2\alpha i c \cos\omega} \frac{A_1 \sin\omega\, e^{+\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + A_3 \sin 3\omega\, e^{\frac{7i\pi}{4}} + \ldots}{A_1 \sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + A_3 \sin 3\omega\, e^{-\frac{7i\pi}{4}} + \ldots}$$

et il doit être indépendant de ω.

Si nous faisons dans l'expression précédente $\omega = \frac{\pi}{2}$, les termes qui contiennent les sinus d'un multiple pair de ω disparaissent et il reste:

$$\frac{B}{A} = -i.$$

Si L est M étaient des solutions de la 4^e sorte on aurait eu:

$$LM = A_1 J_1(\alpha\rho) \cos\omega + A_2 J_2(\alpha\rho) \cos 2\omega + \ldots$$

et après un calcul tout pareil au précédent:

$$\frac{B}{A} = e^{2\alpha i c \cos\omega} \frac{A_0 e^{\frac{i\pi}{4}} + A_1 \cos\omega\, e^{\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \cos 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + \ldots}{A_0 e^{-\frac{i\pi}{4}} + A_1 \cos\omega e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \cos 2\omega\, e^{-\frac{5\pi i}{4}} + \ldots}.$$

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$ on aurait vu disparaître les termes qui tenaient en facteur un cosinus d'un multiple impair de ω et on aurait trouvé:

$$\frac{B}{A} = i.$$

Si L et M étaient des solutions de la seconde sorte on aurait eu:

$$LM = \Sigma A_m J_m(\alpha\rho) \cos m\omega,$$

m étant la moitié d'un nombre impair; d'où:

$$\frac{B}{A} = e^{2aic\cos\omega} \frac{\Sigma A_m \cos m\omega\, e^{\frac{2m+1}{4}i\pi}}{\Sigma A_m \cos m\omega\, e^{-\frac{2m+1}{4}i\pi}}.$$

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$, il vient:

$$\frac{B}{A} = \frac{\Sigma A_k + i\Sigma A_p}{\Sigma A_k - i\Sigma A_p}$$

où ΣA_k est la somme des coëfficients A_m tels que $2m \equiv 3 \pmod 4$ tandis que ΣA_p est la somme des coëfficients A_m tels que $2m \equiv 1 \pmod 4$.

On voit que le rapport $\frac{B}{A}$ dépend de c et il en serait encore de même en ce qui concerne les solutions de la 3e sorte.

Revenons aux solutions de la 1ère sorte; on voit que la série

$$A_1 \sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + \ldots$$

représente le développement par la formule de Fourier de

$$Ke^{aic\cos\omega} M,$$

K désignant une constante et où dans la fonction M on a remplacé μ par $-c\cos\omega$.

Je dis maintenant que le rapport $\frac{B}{A}$ a toujours pour module l'unité. En effet d'après ce que nous avons vu plus haut, L est développable suivant les puissances de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}};$$

le développement est convergent pour toutes les valeurs de λ dont la partie réelle est positive; il contient seulement des puissances impaires ou seulement des puissances paires. Le rapport d'un coëfficient au précédent est facile à calculer; on peut sans restreindre la généralité supposer que le premier coefficient est égal à 1; alors tous les autres seront réels et L sera une fonction réelle.

La valeur approchée de L devra donc être aussi une fonction réelle; c'est à dire que A et B devront être imaginaires conjugués; donc leur rapport aura pour module l'unité. Nous poserons donc:

$$\frac{B}{A} = e^{i\theta}$$

où θ est un nombre réel qui fait connaître l'excès de la marche optique sur la marche géométrique des rayons correspondant au mouvement lumineux représenté par la fonction LM près de l'écran.

Ce nombre θ est une fonction continue de $\alpha^2 c^2$ et de $\alpha^2 k$.

X.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda \frac{dL}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k)L = 0.$$

Parmi les solutions de cette équation, nous en distinguerons deux: la solution paire qui est développable suivant les puissances paires de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}},$$

le premier coefficient se réduisant à l'unité. Nous la représenterons par la notation

$$L = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k\right);$$

et la solution impaire qui est développable suivant les puissances impaires de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}},$$

le premier coëfficient se réduisant à l'unité. Nous la représenterons par

$$L = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2c^2, \alpha^2k\right).$$

Pour une valeur donnée de $\frac{\lambda}{c}$, F_1 et F_2 sont des fonctions *entières* de α^2c^2 et α^2k.

Ce n'est pas tout. Reprenons les coëfficients que nous avons appelés A et B dans le paragraphe précédent; et qui, nous l'avons vu, sont imaginaires conjugués.

Voici alors comment se présentent les diverses solutions de notre problème:

1°. Solutions de la 1ère sorte; plan de polarisation parallèle à celui d'incidence; M fonction impaire de ω.

On déterminera k_i par l'équation:

$$(\mathrm{A}_1) \qquad F_2\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2c^2, \alpha^2k_i\right) = 0$$

dont le premier membre est une fonction entiere de k_i; et on prendra:

$$L_i = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2c^2, \alpha^2k_i\right); \qquad M_i = F_2\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2c^2, \alpha^2k_i\right)$$

$$u = L_iM_i.$$

2e sorte; les deux plans parallèles, M pair.

On déterminera k_i par

$$(\mathrm{A}_2) \qquad F_1\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2c^2, \alpha^2k_i\right)$$

et on prendra

$$L_i = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2k_i\right); \qquad M_i = F_1\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2k_i\right).$$

3e sorte; les deux plans perpendiculaires, M impair.

On déterminera k_i par

$$(\mathrm{A}_3) \qquad F_2'\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2c^2, \alpha^2k_i\right) = 0.$$

Je désigne par F_1' et F_2' les dérivées de F_1 et F_2 par rapport à $\frac{\lambda}{c}$; on prendra

$$L_i = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_2\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

4ᵉ sorte; les deux plans perpendiculaires, M pair.

On détermine k_i par

$$(A_4) \qquad F_1'\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0$$

et on prend

$$L_i = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_1\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

Soient M_i et M_n deux solutions *de la même sorte,* soient M_i', M_n', M_i'', M_n'' leurs dérivées premières et secondes par rapport à ω.

On aura les équations:

$$(2) \qquad \begin{aligned} M_i'' &= \alpha^2 M_i (c^2 \cos^2 \omega - k_i) \\ M_n'' &= \alpha^2 M_n (c^2 \cos^2 \omega - k_n). \end{aligned}$$

L'expression

$$(3) \qquad M_i M_n' - M_n M_i'$$

a pour dérivée:

$$M_i M_n'' - M_n M_i''.$$

Mais pour $\omega = \pm \omega_0$, M_i et M_n s'annulent toutes deux, à moins que ce ne soient leurs dérivées M_i' et M_n'; dans tous les cas l'expression (3) s'annule de sorte que l'on a:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (M_i M_n'' - M_n M_i'') d\omega = 0$$

ou en tenant compte des équations (2)

$$(k_i - k_n) \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i M_n \, d\omega = 0$$

ou (si l'on suppose $k_i \gtrless k_n$):

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i M_n d\omega = 0. \tag{4}$$

Cela montre que M_i et M_n ne peuvent être imaginaires conjuguées et par conséquent que les équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) ne peuvent avoir de racines imaginaires.

Soit maintenant l'expression $M_i M_i'$ dont la dérivée est

$$M_i'^2 + M_i M_i''.$$

Cette expression s'annulant pour $\omega = \pm\, \omega_0$, on aura:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (M_i'^2 + M_i M_i'') d\omega = 0,$$

ou en tenant compte de (2):

$$\alpha^2 k_i \int M_i^2 d\omega = \alpha^2 c^2 \int M_i^2 \cos^2 \omega d\omega + \int M_i'^2 d\omega,$$

ce qui montre que k_i ne peut être négatif.

Les équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) ne peuvent donc avoir que des racines réelles positives.

Les équations (A_1) et (A_3) ne peuvent avoir de racine commune car si pour $\lambda = -\mu_0$, la fonction F_2 s'annulait ainsi que sa dérivée; cette fonction en vertu de l'équation (1) serait identiquement nulle.

Les équations (A_1) et (A_2) ne peuvent avoir de racine commune, car si pour $\lambda = -\mu_0$, les deux fonctions F_1 et F_2 s'annulaient, la solution générale de l'équation (1) qui n'est qu'une combinaison linéaire de F_1 et de F_2 devrait s'annuler également, ce qui est absurde, puisque l'équation (1) doit admettre une solution dont la valeur pour $\lambda = -\mu_0$, ainsi que celle de sa dérivée première, doit pouvoir être choisie arbitrairement.

On démontrerait de même que (A_2) et (A_4), (A_3) et (A_4) ne peuvent avoir de solution commune.

Mais pour $\alpha^2 c^2 = 0$, les équations (A_1) et (A_4) admettent pour racines

$$\alpha^2 k^2 = \frac{m^2 \pi^2}{\omega_0^2} \qquad (m \text{ entier})$$

et les équations (A_2) et (A_3) admettent

$$\alpha^2 k^2 = \frac{m^2\pi^2}{\omega_0^2} \qquad (2m \text{ entier impair}).$$

On voit que pour $\alpha^2 c^2 = 0$ les racines de (A_1) et de (A_3) sont réelles et se séparent mutuellement. Mais comme ces racines ne peuvent jamais cesser d'être réelles et que deux d'entre elles ne peuvent jamais se confondre, elles ne pourront jamais cesser de se séparer.

Donc quelque soit $\alpha^2 c^2$ les racines de (A_1) et de (A_3) se sépareront mutuellement et il en sera de même de celles de (A_1) et de (A_2); de celles de (A_2) et de (A_4); de celles de (A_3) et de (A_4).

Nous admettons que toute fonction impaire de ω, $f(\omega)$, peut pour $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ être développée en série procédant suivant les diverses solutions $M_i(\omega)$ de la 1$^{\text{ère}}$ sorte correspondant aux diverses racines de (A_1). Soit alors:

$$f(\omega) = \Sigma A_i M_i(\omega);$$

il s'agit de calculer les coëfficients A_i; en intégrant de $-\omega_0$ à $+\omega_0$ après avoir multiplié par $M_i(\omega)$ et tenant compte des relations (4), on trouve:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i f d\omega = A_i \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i^2(\omega) d\omega;$$

désignons pour abréger par H_i les constantes

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i^2(\omega) d\omega,$$

il viendra:

$$(5) \qquad f(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} f(\alpha) d\alpha \sum \frac{M_i(\alpha) M_i(\omega)}{H_i}.$$

De même nous admettrons

1° que toute fonction paire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 2$^{\text{e}}$ sorte correspondant aux racines de (A_2);

2° que toute fonction impaire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 3$^{\text{e}}$ sorte correspondant aux racines de (A_3);

3° que toute fonction paire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 4e sorte correspondant aux racines de (A_4).

Tous ces développements, on le verrait par la même analyse, seraient encore représentés par la formule (5).

Cela posé, envisageons une solution du problème de la diffraction; nous supposerons d'abord que le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence, et que le champ présente une symétrie telle que Z ait des valeurs égales et de signe contraire en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport au plan des xz.

On aura alors:

$$Z = \text{partie réelle } ue^{ipt}$$

et

$$u = \Sigma C_n L_n M_n.$$

Les M_n sont des solutions de la 1ère sorte de nos équations, les L_n sont les fonctions L correspondantes, les C_n des coëfficients constants.

En un point très éloigné on aura sensiblement (cf. § IX au début):

$$L_n = A_n \frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + B_n \frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Les deux constantes A_n et B_n sont imaginaires conjuguées et leur rapport est égal à $e^{i\theta_n}$; nous pourrons poser

$$A_n = |A_n| e^{\frac{i\theta^n}{2}}; \qquad B_n = |A_n| e^{-\frac{i\theta}{2}}.$$

A chaque racine k_n de l'équation (A_1) correspond une fonction M_n, une fonction L_n et trois constantes A_n, B_n et θ_n.

Nous tirerons de là:

$$u = \frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \Sigma A_n C_n M_n + \frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \Sigma B_n C_n M_n. \tag{6}$$

Le premier terme correspond à la lumière incidente, le second à la lumière diffractée, réfléchie ou transmise. Si donc nous posons:

$$\Sigma A_n C_n M_n = F(\omega), \qquad \Sigma B_n C_n M_n = F_1(\omega),$$

la fonction $F(\omega)$ pourra être regardée comme donnée et c'est $F_1(\omega)$ qu'il s'agit de calculer.

D'après la formule (5), on aura:

$$F(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\psi)d\psi \sum \frac{M_n(\psi)M_n(\omega)}{H_n} \tag{7}$$

et

$$F_1(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\psi)d\psi \sum \frac{e^{i\theta_n} M_n(\psi)M_n(\omega)}{H_n} \tag{8}$$

(j'emploie la lettre ψ au lieu de α comme dans la formule (5) afin d'éviter toute confusion avec le coëfficient α qui figure dans l'exponentielle $e^{i\alpha\lambda}$).

Nous avons supposé que la force électrique Z était une fonction impaire de y et que les deux plans d'incidence et de polarisation étaient parallèles.

Qu'y aurait-il à changer:

1° si Z était une fonction paire de y et si les deux plans restaient parallèles.

2° si les deux plans étaient perpendiculaires et si la force magnétique N était une fonction impaire de y.

3° si les deux plans étaient perpendiculaires et si N était une fonction paire de y.

Il est clair que dans ces trois cas les formules (6), (7) et (8) subsisteraient sauf que les fonctions M_n de la 1ère sorte devraient être remplacées par des fonctions de la 2e, de la 3e et de la 4e sorte.

On voit le rôle que jouent les deux séries

$$\sum \frac{M_n(\psi)M_n(\omega)}{H_n}, \tag{9}$$

$$\sum \frac{e^{i\theta_n} M_n(\psi)M_n(\omega)}{H_n}. \tag{10}$$

Malheureusement ces deux séries sont divergentes et c'est de là que vient toute la difficulté. Pour nous en rendre compte, examinons le cas de $c = 0$ et considérons d'abord le cas des solutions de la 1ère sorte.

On a alors:

$$M_n(\omega) = \frac{\sin n\beta\omega}{n\beta}; \qquad H_n = \frac{\omega_0^3}{n^2\pi^2}; \qquad \theta_n = \pi\left(n\beta + \frac{1}{2}\right),$$

où n est la moitié d'un nombre impair et où

$$\beta = \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Les deux séries que nous avons à examiner sont donc au facteur constant près: $\frac{1}{\omega_0}$:

$$\Sigma \sin(n\beta\psi)\sin(n\beta\omega); \qquad \Sigma e^{in\beta\pi}\sin(n\beta\psi)\sin(n\beta\omega).$$

La somme des premiers termes de ces séries se calcule aisément; la somme:

$$\Sigma \cos p\eta$$

où $2p$ prend toutes les valeurs impaires depuis 1 jusqu'à $2n$ est évidemment:

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta}{\sin\frac{1}{2}\eta}$$

et plus généralement la somme

$$\Sigma e^{ip\xi}\cos p\eta$$

est égale à

$$\frac{e^{i(n+1)(\xi+\eta)} - e^{\frac{i}{2}(\xi+\eta)}}{e^{i(\xi+\eta)} - 1} + \frac{e^{i(n+1)(\xi-\eta)} - e^{\frac{i}{2}(\xi-\eta)}}{e^{i(\xi-\eta)} - 1}$$

ou

$$h(\xi + \eta) + h(\xi - \eta)$$

en désignant par $h(\xi + \eta)$ le premier terme de l'expression précédente.

On aura alors:

$$(11) \quad 2\Sigma \sin(p\beta\psi)\sin(p\beta\omega) = h(\beta\psi - \beta\omega) + h(\beta\omega - \beta\psi) - h(\beta\omega + \beta\psi) - h(-\beta\omega - \beta\psi)$$

et

$$(12)\qquad 2\Sigma\sin(p\beta\psi)\sin(p\beta\omega)e^{ip\beta\pi}=h(\beta\pi+\beta\psi-\beta\omega)+h(\beta\pi-\beta\psi+\beta\omega)$$
$$-h(\beta\pi+\beta\psi+\beta\omega)-h(\beta\pi-\beta\psi-\beta\omega).$$

Or la fonction h peut se mettre sous la forme suivante:

$$(13)\qquad h(\xi)=\frac{-1}{2i\sin\frac{1}{2}\xi}+\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Le premier terme ne depend pas de n; mais les deux autres termes dépendent de n et ne tendent pas vers une limite déterminée quand n augmente indéfiniment. C'est de ces termes que provient la divergence de nos séries.

D'autre part $h(\xi)$ est fini, mais les deux premiers termes du second membre deviennent infinis pour $\xi=0$.

Soit alors $f(\xi)$ une fonction quelconque qui reste finie; on aura:

$$\int f(\xi)h(\xi)d\xi=\int\frac{-f(\xi)d\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi}+\int\frac{f\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\,d\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi}+\int\frac{f\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\,d\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Les deux premières intégrales du second membre n'ont par elles-mêmes aucun sens, si 0 est compris dans le champ d'intégration, puisque la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\xi=0$. Pour leur en donner un, nous conviendrons de prendre pour chacune d'elles la *valeur principale* de l'intégrale.

Alors la seconde intégrale tend vers 0 et la troisième vers $\pi f(0)$ quand n croît indéfiniment.

Reprenons la relation (12), divisons-la par $2\omega_0$ et écrivons-la sous la forme suivante:

$$S_1=S_1'+S_1''+S_1'''.$$

S_1 sera le premier membre de (12) divisé pcr $2\omega_0$, c'est à dire la série (10) dans le cas de $c=0$ et des solutions de la première sorte.

Quant à S_1', S_1'', S_1''' on les formera de la façon suivante. Après avoir divisé le second membre de (12) par $2\omega_0$, on y remplacera chaque fonction h par sa valeur (13); alors S_1' sera ce que devient ce second membre quand on y remplace chaque fonction h par le 1er terme de sa valeur (13); S_1'' et S_1''' seront ce qu'il devient quand on y remplace chaque h par le 2d ou par le 3e terme de sa valeur (13).

Nous désignerons d'ailleurs par S_2, S_2', S_2'', S_2'''; $S_3, S_3', \ldots$; $S_4, S_4', \ldots$; les quantités analogues obtenues en supposant toujours $c = 0$, mais en considérant respectivement le cas des solutions de la 2e, de la 3e ou de la 4e sorte.

La formule (7) devient alors:

$$(7') \qquad F_1(\omega) = \int F(\psi) S_1' d\psi + \int F(\psi) S_1'' d\psi + \int F(\psi) S_1''' d\psi.$$

La première de ces intégrales est indépendante de n, la seconde tend vers 0 quand n croît indéfiniment et la troisième tend vers:

$$\frac{1}{4}[F(\omega - \pi) + F(\omega + \pi) - F(-\omega - \pi) - F(-\omega + \pi)].$$

Supposons maintenant $c > 0$ et appelons Σ_1 la somme des premiers termes de la série (10) de telle façon que la formule (7) devienne:

$$(7'') \qquad F_1(\omega) = \lim \int F(\psi) \Sigma_1 d\psi.$$

Pour aller plus loin, étudions comment se comportent les termes d'ordre élevé de la série Σ_1; ces termes dépendront d'une fonction M_n définie par l'équation:

$$M_n'' = M_n(\alpha^2 c^2 \cos^2 \omega - \alpha^2 k_n)$$

où k_n est une constante *très grande*.

Nous aurons alors une valeur approchée de M_n en remplaçant l'équation proposée par la suivante:

$$M_n'' = -\alpha^2 k_n M_n;$$

car le terme $\alpha^2 c^2 \cos^2 \omega$ est négligeable devant le terme $\alpha^2 k_n$.

On aura donc approximativement:

$$M_n = \frac{\sin \alpha \sqrt{k_n}\, \omega}{\alpha \sqrt{k_n}}.$$

Rendons-nous compte du degré de l'approximation. On voit que l'intégrale M_n dépend de c et peut être développée suivant les puissances croissantes de c^2. Le développement est d'ailleurs convergent quel que soit c^2 et quel que soit ω. En étudiant ensuite les divers termes de ce développement, on reconnaîtrait que la différence de M_n et de sa valeur approchée est de même ordre de grandeur que

$$\left(\frac{1}{a\sqrt{k_n}}\right)^2.$$

Maintenant k_n est défini par l'égalité

$$M_n(\omega_0) = 0.$$

Si M_n se réduisait à sa valeur approchée, cette équation donnerait

$$k_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2\omega_0^2}$$

et on verrait que l'erreur commise est encore de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. En résumé on a:

$$M_n = \frac{\sin\frac{n\pi\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right)}$$

avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Si on supposait $c = 0$, on aurait, comme nous l'avons vu

$$\theta_n = \pi\left(n\beta + \frac{1}{2}\right).$$

Ce sera encore là une valeur approchée de θ_n pour une grande valeur de k_n; je crois, sans l'avoir rigoureusement démontré, que l'erreur commise est encore de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou de $\frac{\log n}{n}$.

Donc le n^e terme de la série Σ_1 (c'est à dire de la série (10) où $c \gtrless 0$) diffère du terme correspondant de la série S_1 (c'est à dire de la série (10) où $c = 0$) d'une quantité qui est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

Je dis qu'on peut en conclure que la série

$$\Sigma_1 - S_1$$

est convergente.

Et en effet le terme général peut se mettre sous la forme suivante:

$$H_n + H'_n$$

où H_n est une somme de termes de la forme suivante; chacun d'eux est le produit de trois facteurs: 1° $\frac{1}{n}$ ou $\frac{\log n}{n}$; 2° un coëfficient constant indépendant de n; 3° le sinus ou le cosinus de n fois un angle constant.

Quant à H'_n il est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Il résulte de là que ΣH_n est semi-convergente et $\Sigma H'_n$ absolument convergente.

Par conséquent $\Sigma_1 - S_1$ converge,

Reprenons la formule

$$(7'') \qquad F_1(\omega) = \lim \int F(\psi)\Sigma_1 d\psi;$$

elle peut s'écrire:

$$F_1(\omega) = \int F(\psi)(\Sigma_1 - S_1)d\psi + \lim \int F(\psi)S_1 d\psi$$

ou

$$F_1 = \int F(\Sigma_1 - S_1)d\psi + \int FS'_1 d\psi + \lim \int F(S''_1 + S'''_1)d\psi$$

ou

$$(14) \qquad F_1 = \int F(\psi)(\Sigma_1 - S_1 + S'_1)d\psi$$
$$+ \frac{1}{4}[F(\omega - \pi) + F(\omega + \pi) - F(-\omega - \pi) - F(-\omega + \pi)].$$

Dans le second membre de (14), le premier terme représente la lumière diffractée et le second représente la lumière réfléchie ou directement transmise.

Nous poserons:

$$A_1(\omega, \psi) \doteq \Sigma_1 - S_1 + S'_1.$$

A_1 sera une fonction parfaitement définie de ω et de ψ, puisque S'_1 ne dépend pas de n et que la série $\Sigma_1 - S_1$ est convergente; la lumière diffractée sera alors représentée par l'intégrale

$$(15) \qquad \int F(\psi) A_1(\omega, \psi) d\psi.$$

Nous représenterons par A_2, A_3, A_4 les fonctions formées avec les solutions de la 2^e, 3^e ou 4^e sortes comme A_1 l'est avec celles de la 1ère sorte.

Si $F(\psi)$ était une fonction paire de ψ, au lieu d'être une fonction impaire comme nous l'avons supposé jusqu'ici, la lumière diffractée serait représentée par l'intégrale:

$$(16) \qquad \int F(\psi) A_2(\omega, \psi) d\psi.$$

Si enfin $F(\psi)$ était quelconque, elle serait représentée par l'intégrale

$$(17) \qquad \int \frac{F(\psi) - F(-\psi)}{2} A_1 d\psi + \int \frac{F(\psi) + F(-\psi)}{2} A_2 d\psi.$$

Les formules (16) et (17) supposent comme la formule (15) que le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence.

Supposons que la lumière incidente se réduise à un faisceau extrêmement délié, compris entre les directions $\psi_0 - \varepsilon$ et $\psi_0 + \varepsilon$, et de telle façon que

$$\int_{\psi_0-\varepsilon}^{\psi_0+\varepsilon} F(\psi) d\psi = 1,$$

la lumière diffractée dans la direction ω sera représentée par la formule:

$$\frac{1}{2}[A_1(\omega, \psi_0) - A_1(\omega, -\psi_0) + A_2(\omega, \psi_0) + A_2(\omega, -\psi_0)]$$

ou puisque A_1 est une fonction impaire et A_2 une fonction paire de ψ_0:

$$(18) \qquad A_1(\omega, \psi_0) + A_2(\omega, \psi_0).$$

Si le plan de polarisation était perpendiculaire au plan d'incidence, la lumière diffractée serait représentée par la formule

$$(19) \qquad A_3(\omega, \psi_0) + A_4(\omega, \psi_0).$$

Je m'arrête, bien que ces résultats soient bien incomplets; je chercherai, dans la suite de ce travail, à combler les lacunes qui y subsistent; mais je voudrais, avant de passer outre, examiner plus en détail ce qui arrive quand $\alpha^2 c^2$ est un très grand nombre; et en effet si c est seulement d'un centième de millimètre; $\alpha^2 c^2$ peut être égal à 16000.

Reprenons l'équation:

$$M'' = M(\alpha^2 c^2 \cos^2 \omega - \alpha^2 k) \tag{1}$$

et posons:

$$z = \frac{M'}{M},$$

il viendra:

$$z' + z^2 = \alpha^2 c^2 \cos^2 \omega - \alpha^2 k.$$

Le second membre étant très grand, z est très grand et par conséquent on aura une intégrale approchée de l'équation en négligeant z' devant z^2, ce qui donne:

$$z = \alpha \sqrt{c^2 \cos^2 \omega - k}.$$

Posons alors:

$$y = \alpha \int_0^\omega \sqrt{c^2 \cos^2 \omega - k}\, d\omega;$$

nous aurons alors deux intégrales approchées de l'équation (1)

$$M = e^y, \qquad M = e^{-y}$$

et par conséquent nous pourrons écrire l'intégrale générale approchée de cette équation

$$M = Ae^y + Be^{-y},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Nous avons à distinguer la solution paire et la solution impaire; pour cela observons que y est une fonction impaire de ω; alors nous prendrons pour la solution paire:

$$M = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

et pour la solution impaire:

$$M = \frac{e^y - e^{-y}}{2a\sqrt{c^2 - k}}.$$

Dans le cas des solutions de la $1^{\text{ère}}$ et de la 2^{de} sorte, le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence et on doit avoir:

$$M(\omega_0) = 0,$$

de sorte que l'équation (A_1) prend la forme

$$e^{2y} = 1$$

ou:

$$(A_1) \qquad \alpha \int_0^{\omega_0} \sqrt{c^2 \cos^2 \omega - k}\, d\omega = m i \pi \qquad (m \text{ entier}).$$

De même l'équation (A_2) prend la forme:

$$e^{2y} = -1$$

ou:

$$(A_2) \qquad \alpha \int_0^{\omega_0} \sqrt{c^2 \cos^2 \omega - k}\, d\omega = \frac{2m+1}{2} i\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

Dans l'un et l'autre cas la valeur de l'intégrale doit être purement imaginaire, ce qui montre que $c^2 \cos^2 \omega - k$ ne peut jamais être positif, d'où:

$$k > c^2.$$

Il serait aisé de former les équations (A_3) et (A_4); je me bornerai à rappeler que leurs racines sont séparées par celles de (A_1) et (A_2); toutes les valeurs de k, sauf peut-être deux d'entre elles, doivent donc être plus grandes que c^2.

L'approximation ne sera convenable que si la partie imaginaire de ω n'est pas très grande, ce qui empêche de déterminer facilement θ_n.

XI.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'on avait affaire à des ondes cylindriques; voyons comment les résultats seront modifiées si nous supposons que la lumière est concentrée par une lentille *sphérique* en un *point* du tranchant du biseau.

Nous adopterons d'ailleurs les hypothèses les plus simples, c'est à dire que nous supposerons l'écran réduit à un demi plan mathématique et parfaitement conducteur et la lentille bien mise au point sur le bord de cet écran.

Reprenons l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+\alpha^2V=0 \tag{1}$$

à laquelle doivent satisfaire la composante Z de la force électrique, et la composante γ de la force magnétique. (Rapprocher de l'équation (2), page 306 de la 1ère partie de ce travail.)

Passons aux coordonnées polaires en posant:

$$x=\rho\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2},$$
$$y=\rho\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2},$$
$$z=\rho\mu.$$

Nous prenons, bien entendu, pour axe des z le bord de l'écran, et pour origine le point où la lumière est concentrée par la lentille.

Notre équation devient alors:

$$\frac{d^2V}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dV}{d\rho}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{\rho^2d\varphi^2}+\frac{1-\mu^2}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\mu^2}-\frac{2\mu}{\rho^2}\frac{dV}{d\mu}+\alpha^2V=0. \tag{2}$$

L'écran a pour équation $\varphi=0$ ou $\varphi=2\pi$.

La fonction V, quelle qu'elle soit, sera développable en série trigonométrique procédant suivant les sinus ou les cosinus de

$$\frac{m\varphi}{2},$$

m étant entier.

S'il n'y avait pas d'écran, le développement ne devrait contenir que des termes où m est pair.

S'il y a un écran et si le plan de polarisation est dans le plan d'incidence, on doit prendre $V = Z$ et Z doit s'annuler pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Le développement ne contiendra donc que des sinus, m pouvant être pair ou impair (*c'est l'hypothèse à laquelle nous nous restreindrons, pour plus de brièveté*).

Si le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, on doit prendre $V = \gamma$ et $\frac{dV}{dn}$ doit s'annuler pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Le développement ne contiendra donc que des cosinus, m pouvant être pair ou impair.

Revenons à l'hypothèse, $V = Z$, $Z = 0$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$. Soit

$$A \sin \frac{m\varphi}{2}$$

l'un des termes du développement. Nous serons conduits à supposer que A est de la forme suivante

$$RM,$$

R étant fonction de ρ seulement et M de μ seulement.

Cherchons donc la condition pour que

$$V = RM \sin \frac{m\varphi}{2}$$

satisfasse à l'équation (2).

Cette équation se décomposera en deux autres

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \alpha^2 R + \frac{bR}{\rho^2} = 0, \tag{3}$$

$$(1 - \mu^2)^2 \frac{d^2M}{d\mu^2} - 2\mu(1 - \mu^2)\frac{dM}{d\mu} - bM(1 - \mu^2) - \frac{m^2}{4} M = 0; \tag{4}$$

b est une constante arbitraire.

Etudions d'abord l'équation (4).

Elle admet deux intégrales procédant suivant les puissances croissantes de $\mu - 1$, les exposants augmentant d'une unité à chaque terme; l'un des développements commence par un terme en $(\mu - 1)^{\frac{m}{4}}$, l'autre par un terme en $(\mu - 1)^{-\frac{m}{4}}$; cette dernière si m est pair peut être remplacée par une intégrale dont le développement contient des logarithmes. De même nous aurons deux intégrales procédant suivant les puissances de $\mu + 1$; l'un des développements commencera par un terme en $(\mu + 1)^{\frac{m}{4}}$, l'autre par un terme en $(\mu + 1)^{-\frac{m}{4}}$. Cette dernière si m est pair peut être remplacée par une intégrale dont le développement contient des logarithmes. Pour qu'une intégrale convienne, il faut qu'elle ne devienne infinie, ni pour $\mu = 1$, ni pour $\mu = -1$.

Il faut donc que ce soit la *même* intégrale dont le développement suivant les puissances de $\mu + 1$ commence par $(\mu + 1)^{\frac{m}{4}}$ et dont le développement suivant celles de $\mu - 1$ commence par $(\mu - 1)^{\frac{m}{4}}$.

Dans ce cas la fonction

$$M(\mu^2 - 1)^{-\frac{m}{4}} = P \tag{5}$$

devra être holomorphe dans tout le plan. Comme d'autre part toute intégrale de l'équation (4) doit être développable pour μ assez grand suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires de $\frac{1}{\mu}$, P doit admettre ce mode de développement; or les seules fonctions holomorphes qui jouissent de cette propriété sont les polynômes entiers.

Donc P est un polynôme entier; soit n son degré; alors le développement de P suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\mu}$ commencera par un terme en μ^n, d'où

$$b = -\left(\frac{m}{2} + n\right)\left(\frac{m}{2} + n + 1\right).$$

Si m est pair, l'expression

$$M \sin \frac{m\varphi}{2}$$

n'est autre chose qu'une fonction sphérique ordinaire. L'équation (3) s'intègre très aisément; si nous posons

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - b} = \frac{m + 1}{2} + n,$$

on trouve:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\rho}} J_\lambda(\alpha\rho).$$

Les autres intégrales de (3) deviennent infinies pour $\rho = 0$.

L'expression approchée de R pour ρ très grand est donc:

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Nous aurons donc pour ρ très grand:

$$Z = \sum A_{m.n} \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$P_{m.n}$ étant le polynôme P défini par l'équation (5) et les $A_{m.n}$ étant des coëfficients indépendants de ρ, de φ et de μ et linéaires en $\cos pt$ et $\sin pt$.

Nous pourrons d'ailleurs, comme à la page 309 de la 1[ère] partie, séparer les différents faisceaux et écrire:

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum B_{m.n} \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

pour le faisceau incident et

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum C_{m.n} \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum D_{m.n} \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} P_{m.n} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$

pour les faisceaux divergents.

Si nous égalons les coëfficients, il viendra:

$$A_{m.n} \cos\frac{\lambda\pi}{2} = \quad B_{m.n} \cos pt + C_{m.n} \cos pt - D_{m.n} \sin pt,$$
$$A_{m.n} \sin\frac{\lambda\pi}{2} = - B_{m.n} \sin pt + C_{m.n} \sin pt + D_{m.n} \cos pt$$

d'où:

$$(6)\qquad \left.\begin{array}{l} \text{si } m + 1 + 2n \equiv 0 \\ \text{si } m + 1 + 2n \equiv 1 \\ \text{si } m + 1 + 2n \equiv 2 \\ \text{si } m + 1 + 2n \equiv 3 \end{array}\right\} \text{mod } 4, \qquad \begin{array}{ll} B_{m.n} = \quad C_{m.n}, & D_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = \quad D_{m.n}, & C_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = - C_{m.n}, & D_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = - D_{m.n}, & C_{m.n} = 0. \end{array}$$

Nous distinguerons d'abord le cas où tout est symétrique par rapport au plan des xy; c'est à dire où on ne change rien en changeant μ en $-\mu$. C'est le cas des expériences de M. GOUY où l'axe du microscope se meut dans un plan perpendiculaire au bord de l'écran.

Le polynôme $P_{m,n}$ est une fonction paire de μ si n est pair et une fonction impaire de μ si n est impair.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, nous n'aurons donc que des termes où n est pair.

Nous aurons donc si:

$$\begin{aligned} m&\equiv 0, & B&=D, & C&=0,\\ m&\equiv 1, & B&=-C, & D&=0,\\ m&\equiv 2, & B&=-D, & C&=0,\\ m&\equiv 3, & B&=C, & D&=0. \end{aligned}$$

Dans le § III nous avions trouvé

$$\begin{aligned} m&\equiv 0, & B&=C, & D&=0,\\ m&\equiv 1, & B&=D, & C&=0,\\ m&\equiv 2, & B&=-C, & D&=0,\\ m&\equiv 3, & B&=-D, & C&=0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc le même résultat que dans ce § III, mais en changeant C en D et D en $-C$. La lumière diffractée se comportera donc comme dans le cas du § III, mais avec une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que le champ possède une symétrie telle que Z se change en $-Z$ quand on change μ en $-\mu$; alors nous n'aurons que des termes où n sera impair; il vient alors si

$$\begin{aligned} m&\equiv 0, & B&=-D, & C&=0,\\ m&\equiv 1, & B&=C, & D&=0,\\ m&\equiv 2, & B&=D, & C&=0,\\ m&\equiv 3, & B&=-C, & D&=0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons encore les résultats du § III, en y changeant C en $-D$ et D en C. La lumière diffractée se comporte donc encore comme dans le cas du § III, mais avec une différence de phase égale à $-\frac{\pi}{2}$.

Si nous passons maintenant au cas général, nous pourrons toujours considérer le faisceau incident comme la superposition de deux autres, dont le premier admettra le premier genre de symétrie, (c'est à dire sera tel que Z ne change pas quand μ se change en $-\mu$) et dont le second admettra le second genre de symétrie (c'est à dire sera tel que Z se change en $-Z$ quand μ se change en $-\mu$). On étudiera donc séparément les effets de ces deux faisceaux, ainsi que je l'ai dit plus haut, et on n'aura plus ensuite qu'à les combiner.

Supposons que les rayons incidents forment un faisceau extrêmement délié, de telle façon que l'intensité de la lumière incidente soit nulle toutes les fois que μ et φ ne satisfont pas aux inégalités

$$\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon; \qquad \varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon,$$

μ_0 et φ_0 étant deux constantes données et ε une constante très petite.

Posons pour abréger:

$$B_m = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_{m.n} P_{m.n}, \qquad C_m = \Sigma C_{m.n} P_{m.n}, \qquad D_m = \Sigma D_{m.n} P_{m.n}$$

d'où pour le faisceau incident:

$$Z = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum B_m \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

et pour les autres faisceaux

$$Z = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum C_m \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum D_m \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right).$$

On devra alors avoir $B_m = 0$, pour toutes les valeurs de m, à moins que

$$\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon.$$

B_m est une fonction de μ. On a

$$B_m(\mu) + B_m(-\mu) = 2\Sigma' B_{m.n} P_{m.n},$$

la sommation du second membre, indiquée par le signe Σ', ne s'étendant qu'aux valeurs paires de n. Les deux membres de l'égalité (7) doivent s'annuler à moins que l'on n'ait

$$(8) \qquad \mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon; \quad \text{ou} \quad -\mu_0 - \varepsilon < \mu < -\mu_0 + \varepsilon.$$

On en conclut à l'aide des égalités (6) que l'on doit avoir:

$$2\Sigma' C_{m.n} P_{m.n} = 2\Sigma' D_{m.n} P_{m.n} = 0,$$

à moins que l'une des deux inégalités (8) ne soit satisfaite.

De même on aura:

$$(7') \qquad B_m(\mu) - B_m(-\mu) = 2\Sigma'' B_{m.n} P_{m.n},$$

la sommation indiquée par le signe Σ'' s'étendant aux valeurs impaires de n. Les deux membres de (7') s'annulent, si l'une des deux inégalités (8) n'est pas satisfaite. On en conclut

$$2\Sigma'' C_{m.n} P_{m.n} = 2\Sigma'' D_{m.n} P_{m.n} = 0.$$

On aura donc:

$$C_m = D_m = 0,$$

à moins que l'une des inégalités (8) ne soit satisfaite. Cela veut dire que la lumière diffractée sera répartie sur un cône de révolution ayant pour axe l'axe des z et sur le prolongement de ce cône. C'est d'ailleurs sur ce même cône que se trouve le faisceau incident.

Je ne crois pas que l'on ait fait d'expérience avec le faisceau incident oblique au bord de l'écran. Il serait curieux de vérifier dans quelle mesure la conclusion simple qui précède est confirmée par l'expérience, malgré les irrégularités du tranchant du biseau et bien que les conditions théoriques où nous nous sommes supposés placés dans ce paragraphe soient beaucoup plus simples que les conditions réelles.