

SUR LA RÉGULARISATION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

PAR

T. LEVI-CIVITA

à PADOUE.

Les équations différentielles du problème des trois corps, dans une quelconque de leurs formes classiques, se comportent régulièrement tant que les positions des trois corps sont distinctes, mais présentent des singularités s'il arrive que la limite inférieure des distances mutuelles soit zéro (chocs). L'analyse de ce qui se passe au voisinage d'un choc a été dans ces dernières années l'objet de maintes recherches visant d'abord (PAINLEVÉ,¹ LEVI-CIVITA,² BISCONCINI,³ SUNDMAN⁴) à caractériser les conditions qui doivent être remplies par les données initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

Ces premiers succès ont conduit à penser que les singularités analytiques correspondant au phénomène d'un choc ne soient pas si redoutables qu'on aurait pu le craindre. C'est ainsi qu'en 1906, en remaniant, d'après une aimable invitation de M. MITTAG-LEFFLER, mon étude citée tout à l'heure sur le cas particulier du problème restreint, je suis parvenu à faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire de paramètres, et cela sans altérer la forme canonique des équations.⁵

¹ »Leçons etc., professées à Stockholm» (Paris: Hermann, 1897), pp. 582—586.

² »Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi», *Annali di Matematica*, Ser. III, T. IX, 1903, pp. 1—32.

³ »Sur le problème des trois corps», *ces Acta*, T. 30, 1906, pp. 49—92.

⁴ »Recherches sur le problème des trois corps», *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, T. XXXIV, n° 6 (Helsingfors, 1907).

⁵ Dans ce journal, T. 30, pp. 305—327. Il convient d'avertir que, dès 1895, N. THIELE, dans ses »Recherches numériques concernant les solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps» [*Astronomische Nachrichten*, B. CXXXVIII, pp. 1—10] avait indiqué une transformation régularisante du problème restreint, moins simple que la mienne, mais embrassant à la fois les deux masses finies. Il s'en est servi heureusement dans ses calculs, sans en faire toutefois ressortir, même en passant, l'intérêt spéculatif.

M. SUNDMAN¹ a découvert ensuite une régularisation du problème général, d'où la conclusion, mémorable au point de vue de l'analyse, que toute solution (quelles que soient les circonstances initiales) peut être représentée par des développements toujours convergents. Cependant la dite régularisation est atteinte d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre assez grand d'auxiliaires et en sortant du cadre des équations de la dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'il n'est plus permis (du moins sans discussion préalable) d'appliquer au système régularisé ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la mécanique analytique.

Pour le problème plan il m'a été aisé de réaliser² une véritable régularisation dynamique, en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation (ponctuelle)

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \quad (i = \sqrt{-1}),$$

employée pour le problème restreint.

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de l'aborder par des semblables changements de coordonnées. Les transformations canoniques usuelles se rattachant au mouvement elliptique ne régularisent pas non plus. Mais on peut en trouver d'analogues, une notamment bien simple, suggérée par le mouvement parabolique,³ rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire.⁴

L'éminent Directeur des Acta a bien voulu me demander un exposé détaillé de ce dernier résultat. Voilà l'origine et le but du présent article. Pour en faciliter la lecture, j'y ai repris tout ce qu'il faut connaître des travaux antérieurs.

On trouvera, dans un premier chapitre, soit des prémisses formelles, pour la plus part classiques, un petit peu rajeunies par un usage (d'ailleurs très discret) des notations vectorielles; soit quelques lemmes, dus à M. M. PAINLEVÉ et SUNDMAN, qui précisent au sens de l'analyse les circonstances essentielles des chocs, et permettent d'exclure l'éventualité d'une collision générale dès que le moment résultant des quantités de mouvement ne s'annule pas.⁵

Le second chapitre débute par l'intégration, moyennant la méthode de JACOBI, des équations du mouvement parabolique (d'un point soumis à l'attrac-

¹ »Mémoire sur le problème des trois corps», ces Acta, T. 36, 1912, pp. 105—179.

² Rendiconti dei Lincei, vol. XXIV (2^e semestre 1915), pp. 61—75, 235—248, 421—433, 485—501, 553—569.

³ Ibidem, vol. XXV (premier semestre 1916), pp. 445—458.

⁴ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 162, 1916, pp. 625—629.

⁵ Cette exclusion fut connue par WEIERSTRASS, ainsi qu'il résulte d'une lettre adressée à M. MITTAG-LEFFLER et publiée dans ce même recueil (voir »Zur Biographie von Weierstrass», T. 35, 1911, p. 30).

tion d'un centre fixe, dans le cas particulier où s'annule la constante des forces vives). On en tire une transformation canonique (apte à régulariser le voisinage d'un choc dans le problème des deux corps), et on fait l'étude de ses élégantes propriétés géométriques et cinématiques. La considération du mouvement parabolique fournit en outre l'occasion pour construire une seconde transformation canonique, qui à la vérité n'a rien à faire avec notre régularisation; mais ne doit pas être négligée, puisqu'elle introduit un *système canonique d'éléments paraboliques*, pouvant rendre de très bons services pour la détermination des perturbations d'une comète.

Après avoir préparé de la sorte tous les éléments nécessaires, j'explicite, dans le troisième (et dernier) chapitre, la régularisation canonique du problème des trois corps au voisinage d'un choc binaire, dont sont des corollaires immédiats: la continuation analytique du mouvement au delà des chocs éventuels, à laquelle se rattache l'heureuse explication mécanique de M. ARMELLINI¹; la représentabilité, sans aucune restriction, des coordonnées cartésiennes des trois corps par des séries convergentes pour toutes les valeurs réelles d'un paramètre convenable τ ; enfin la *possibilité* d'introduire, dans le système différentiel canonique qui définit le mouvement, à côté de la variable indépendante τ , des fonctions inconnues telles que le système, tout en restant canonique, se comporte régulièrement (non seulement au voisinage d'un choc préfix, mais) toujours, c'est-à-dire pour tout état de mouvement qui puisse être effectivement rejoint à partir d'un état initial quelconque. Il resterait à indiquer un choix approprié de ces paramètres: question inessentielle, je voudrais presque dire de vernissage formel, mais que je me permets quand même de signaler au lecteur. Pour ceux qui aiment les calculs élégants et les analogies mécaniques, la matière ne paraît pas sans attrait; du moins à en juger d'après le cas particulier du problème plan, où la dite spécification donne lieu [citation 2 de la page 100] à des rapprochements inattendus avec d'autres systèmes dynamiques exemptes de singularités dans le champ réel (tel notamment un solide pesant fixé par un de ses points).

En revenant à la simple régularisation locale du voisinage d'un choc qui va être développée ici, il y'a lieu d'ajouter qu'elle prêterait à reprendre, par des calculs peut-être plus commodes et plus symétriques, la détermination effective des deux relations invariantes caractéristiques d'un choc, déjà traitée par M. BISCONCINI [citation 3 de la page 99]. On pourrait s'en attendre un avantage analogue à celui que j'ai mis en évidence pour le problème restreint [citation 2 de la même page].

¹ »Estensione della soluzione del SUNDMAN dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee», Rendiconti dei Lincei, vol. XXIV (premier semestre 1915), pp. 185—190.

En terminant, je voudrais souligner l'importance de la régularisation aussi à un point de vue plus général. Il me suffit pour cela de faire remarquer que la régularisation préalable d'un système différentiel est indispensable pour pénétrer intimement dans l'allure générale des solutions et dans la distribution des solutions périodiques. Justement dans cette voie, ouverte par POINCARÉ, semblent devoir maintenant s'engager de préférence les efforts des géomètres.¹

CHAPITRE I.

Relations formelles — Quelques résultats dus à M. M. Painlevé et Sundman.

I. Préliminaires.

Soient P_ν ($\nu = 0, 1, 2$) trois points matériels; m_ν leurs masses; G leur centre de gravité.

Introduisons les trois vecteurs²

$$(1) \quad R_\nu = P_\nu - G \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

et leurs différences

$$r_0 = P_2 - P_1 = R_2 - R_1, \quad r_1 = P_0 - P_2 = R_0 - R_2, \quad r_2 = P_1 - P_0 = R_1 - R_0$$

correspondant aux trois côtés du triangle $P_0 P_1 P_2$.

En regardant équivalents les indices ν (tels que 0 et 3, 1 et 4), qui diffèrent entre eux d'un multiple de 3, on peut évidemment condenser la définition des r_ν dans la formule cyclique

$$(2) \quad r_\nu = P_{\nu+2} - P_{\nu+1} = R_{\nu+2} - R_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

En additionnant a l'identité (géométriquement évidente)

$$(3) \quad \sum_0^2 r_\nu = 0.$$

¹ Tout récemment des résultats extrêmement remarquables ont été obtenus par M. BIRKHOFF dans ses beaux mémoires:

»The restricted problem of the three bodies», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXIX, 1915, pp. 265—334;

»Dynamical systems with two degrees of freedom», Transactions of the American Mathematical Society, vol. XVIII, 1917, pp. 199—300.

² Pour abrégier l'écriture, je vais avoir recours aux tout premiers éléments du calcul vectoriel en suivant les notations de M. M. BURALI-FORTI et MARCOLONGO. Voir leurs »Eléments de calcul vectoriel» (édition française par S. Lattès, Paris: Hermann, 1910)

Il convient d'ajouter qu'aussi les vecteurs R_ν sont liés par une relation linéaire. C'est

$$(4) \quad \sum_0^2 m_\nu R_\nu = 0,$$

exprimant que G est le centre de gravité des trois point matériels P_ν .

En faisant système des (2) et (4), on peut inversement exprimer les R_ν à l'aide des r_ν . Partons pour cela de (4), en l'écrivant

$$m_\nu R_\nu + m_{\nu+1} R_{\nu+1} + m_{\nu+2} R_{\nu+2} = 0,$$

et lui attribuant ensuite la forme équivalente:

$$M R_\nu + m_{\nu+1} (R_{\nu+1} - R_\nu) + m_{\nu+2} (R_{\nu+2} - R_\nu) = 0,$$

où

$$(5) \quad M = m_0 + m_1 + m_2$$

désigne la masse totale du système. D'après les formules (2) elles-mêmes, on en tire la résolution annoncée

$$(6) \quad M R_\nu = m_{\nu+2} r_{\nu+1} - m_{\nu+1} r_{\nu+2} \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Il nous sera commode de poser

$$|R_\nu| = R_\nu, \quad |r_\nu| = r_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

c'est-à-dire d'indiquer par R_ν la distance $\overline{GP_\nu}$, par r_ν la distance $\overline{P_{\nu+1}P_{\nu+2}}$.

2. Formules de Lagrange.

Soit P un point quelconque de l'espace,

$$G - P = d$$

le vecteur allant de P au barycentre G .

On a évidemment

$$P_\nu - P = (P_\nu - G) + (G - P) = R_\nu + d.$$

Formons le moment d'inertie (polaire) du système des trois points P_ν , par rapport à P . C'est par définition

$$(7) \quad J_P = \sum_0^2 m_\nu \overline{PP_\nu}^2 = \sum_0^2 m_\nu (P_\nu - P) \times (P_\nu - P) = \sum_0^2 m_\nu (R_\nu + d) \times (R_\nu + d)$$

(où \times est le symbole de produit scalaire), se réduisant à

$$J = \sum_0^2 m_\nu R_\nu^2$$

lorsqu'on fait coïncider P avec le centre de gravité G .

Développons le produit scalaire dans la dernière expression de J_P , en tenant compte de (4), (5), et en désignant par d la distance \overline{PG} . Il vient immédiatement

$$J_P = J + M d^2,$$

formule bien connue de LAGRANGE, valable en général pour un nombre quelconque de points matériels. En faisant coïncider P avec P_ν , elle donne en particulier

$$m_{\nu+1} r_{\nu+2}^2 + m_{\nu+2} r_{\nu+1}^2 = J + M R_\nu^2.$$

Multiplions par $\frac{m_\nu}{M}$ et additionnons par rapport à ν (c'est-à-dire à trois valeurs consécutives de ν) en écrivant

$$(8) \quad m_\nu^* = \frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{M} \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

On obtient la relation remarquable

$$(9) \quad J = \sum_0^2 m_\nu R_\nu^2 = \sum_0^2 m_\nu^* r_\nu^2,$$

due également à LAGRANGE.

3. Expression de la force vive signalée par R. Ball.¹

Considérons un mouvement quelconque des trois points P_ν , rapporté au centre de gravité G , c'est-à-dire à trois axes rectangulaires de direction invariable ayant l'origine en G . Les vecteurs R_ν sont fonctions du temps t , et la vitesse de P_ν par rapport à G n'est autre que

$$(10) \quad V_\nu = \dot{R}_\nu,$$

en désignant avec un point superposé la dérivation par rapport à t .

La force vive du système (le repère étant toujours en G) est par définition

¹ Voyez par ex. E. J. ROWEN, »Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies (elementary part)» [sixième édition, London: Macmillan, 1897], § 424.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_0^2 m_\nu V_\nu^2,$$

V_ν représentant la longueur du vecteur V_ν (vitesse en valeur absolue).

Introduisons d'autre part les mouvements relatifs de nos points, et précisons (pour $\nu = 0, 1, 2$) de $P_{\nu+2}$ par rapport à $P_{\nu+1}$.

La vitesse relative correspondante, c'est-à-dire

$$(11) \quad v_\nu = V_{\nu+2} - V_{\nu+1}$$

ne diffère pas de \dot{r}_ν , d'après (2): sa longueur sera désignée par v_ν .

Ceci posé, on remarque:

1° que les vecteurs $V_\nu = \dot{R}_\nu$, $v_\nu = \dot{r}_\nu$ sont liés par les mêmes relations linéaires — (2) et (4) notamment — existant entre les vecteurs R_ν , r_ν ;

2° que, si dans la formule (7) du n° préc. définissant J_P , on remplace R_ν et d par leurs dérivées $\dot{R}_\nu = V_\nu$ et \dot{d} , en désignant le premier membre par ${}^2\mathfrak{T}_P$, on obtient

$${}^2\mathfrak{T}_P = \sum_0^2 m_\nu (V_\nu + d) \times (V_\nu + d),$$

d'où en particulier, pour P coïncidant avec G (ce qui entraîne $d = 0$),

$${}^2\mathfrak{T}_G = \sum_0^2 m_\nu V_\nu^2 = 2\mathfrak{T}.$$

Il s'en suit que, moyennant les mêmes passages formels conduisant de (7) à (9), on a

$$(12) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_0^2 m_\nu V_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_0^2 m_\nu^* v_\nu^2.$$

4. Autre expression de la force vive (remontant à Jacobi).

Il nous sera parfois avantageux dans la suite d'avoir recours à une forme mixte de \mathfrak{T} , où interviennent une seule des vitesses relatives, soit la vitesse v_ν du corps $P_{\nu+2}$ par rapport à $P_{\nu+1}$, et la vitesse absolue V_ν du troisième corps P_ν .

Pour y parvenir, il suffit de remplacer, dans la définition directe de \mathfrak{T} (valable quel que soit ν),

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \{m_\nu V_\nu^2 + m_{\nu+1} V_{\nu+1}^2 + m_{\nu+2} V_{\nu+2}^2\},$$

V_{v+1} et V_{v+2} en fonction de v_v et V_v . C'est bien aisé, puisque ces quatre vecteurs sont liés par deux relations. L'une d'elles n'est que (11), c'est-à-dire

$$v_v = V_{v+2} - V_{v+1};$$

l'autre, se déduisant de (4) par dérivation, exprime la circonstance évidente que la vitesse du barycentre (par rapport à des axes ayant l'origine dans le barycentre lui-même) s'annule; et s'écrit

$$m_v V_v + m_{v+1} V_{v+1} + m_{v+2} V_{v+2} = 0.$$

Il s'en suit

$$(13) \quad \begin{cases} (m_{v+1} + m_{v+2}) V_{v+1} = -m_{v+2} v_v - m_v V_v, \\ (m_{v+1} + m_{v+2}) V_{v+2} = m_{v+1} v_v - m_v V_v, \end{cases}$$

d'où, par substitution matérielle dans $V_{v+1}^2 = V_{v+1} \times V_{v+1}$ et $V_{v+2}^2 = V_{v+2} \times V_{v+2}$,

$$m_{v+1} V_{v+1}^2 + m_{v+2} V_{v+2}^2 = \frac{1}{m_{v+1} + m_{v+2}} (m_{v+1} m_{v+2} v_v^2 + m_v^2 V_v^2),$$

et par conséquent (en introduisant ceci dans l'expression de \mathfrak{X} et en associant les deux termes semblables en V_v^2)

$$(14) \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2(m_{v+1} + m_{v+2})} (m_{v+1} m_{v+2} v_v^2 + M m_v V_v^2).$$

C'est substantiellement la forme attribuée à la force vive par JACOBI (dans sa réduction du problème des trois corps) et devenue ensuite classique.¹ Il y a seulement une différence inessentielle consistant dans ceci: au lieu que la dérivée V_v de $R_v = P_v - G$ (G barycentre des trois points), on fait apparaître ordinairement la dérivée du vecteur proportionnel $\frac{M}{m_{v+1} + m_{v+2}} R_v$ admettant également une interprétation géométrique très simple. En effet, si l'on indique par G_v le centre de gravité du couple P_{v+1}, P_{v+2} , on a évidemment

$$\frac{M}{m_{v+1} + m_{v+2}} R_v = P_v - G_v.$$

¹ Voir par exemple CHARLIER, »Die Mechanik des Himmels», B. I. [Leipzig: Veit, 1902], pp. 237-241; ou bien POINCARÉ, »Leçons de mécanique céleste», T. I. [Paris: Gauthier-Villars, 1905], pp. 34-41.

5. **Moment résultant des quantités de mouvement.**

Comme la résultante des quantités de mouvement (rapportées au barycentre)

$$\sum_0^2 m_\nu V_\nu = \sum_0^2 m_\nu \dot{R}_\nu$$

est nulle d'après (4), le moment résultant K est indépendant du centre de réduction. En le prenant en G , on a par définition

$$(15) \quad K = \sum_0^2 r_\nu \wedge m_\nu V_\nu$$

(\wedge symbole de produit vectoriel).

Remplaçons R_ν par sa valeur (6), et développons le produit vectoriel en affectant le facteur V_ν de tous les coefficients numériques. Le second membre, eu égard à (8), devient

$$\sum_0^2 r_{\nu+1} \wedge m_{\nu+1}^* V_\nu - \sum_0^2 r_{\nu+2} \wedge m_{\nu+2}^* V_\nu,$$

ou bien, pourvu qu'on change, dans la première somme, ν en $\nu+2$, dans la seconde, ν en $\nu+1$,

$$\sum_0^2 r_\nu \wedge m_\nu^* (V_{\nu+2} - V_{\nu+1}).$$

Il en résulte, d'après (11),

$$(16) \quad K = \sum_0^2 r_\nu \wedge m_\nu^* v_\nu,$$

qui exprime le moment K sous forme relative symétrique, tout à fait analogue à la forme usuelle (15).

Nous allons en tirer une limitation remarquable pour le produit $J\mathfrak{E}$.

Observons d'abord:

1^o que la longueur du produit vectoriel $r_\nu \wedge m_\nu^* v_\nu$ ne dépasse pas le produit (arithmétique) $m_\nu^* r_\nu v_\nu$ des longueurs des facteurs;

2^o que la longueur K du vecteur K ne dépasse pas la somme des longueurs de ses termes, d'où

$$\sum_0^2 m_\nu^* r_\nu v_\nu \geq K.$$

D'ailleurs l'identité bien connue, consistant à égaler le carré de la matrice

$$\begin{vmatrix} \sqrt{m_0^*} r_0 & \sqrt{m_1^*} r_1 & \sqrt{m_2^*} r_2 \\ \sqrt{m_0^*} v_0 & \sqrt{m_1^*} v_1 & \sqrt{m_2^*} v_2 \end{vmatrix}$$

au déterminant

$$\begin{vmatrix} J & \sum_0^2 m_\nu^* r_\nu v_\nu \\ \sum_0^2 m_\nu^* r_\nu v_\nu & 2 \mathfrak{E} \end{vmatrix},$$

qui s'obtient [en tenant compte de (9) et (12)] par la multiplication des horizontales, nous assure que ce déterminant est ≥ 0 . On en tire

$$2 J \mathfrak{E} \geq \left(\sum_0^2 m_\nu^* r_\nu v_\nu \right)^2,$$

d'où l'inégalité

$$(17) \quad 2 J \mathfrak{E} \geq K^2,$$

qui va nous servir essentiellement au n° II.

6. Fonction des forces dans le problème des trois corps. — Équations vectorielles du mouvement. — Intégrales classiques.

Supposons que nos trois points matériels — on dira *corps* suivant l'usage — s'attirent mutuellement suivant la loi de NEWTON. Soit f la constante de gravitation universelle. Avec les notations précédentes la fonction des forces s'écrit

$$(18) \quad \mathfrak{U} = f \left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2} \right),$$

ou, si l'on veut,

$$(18') \quad \mathfrak{U} = f \left(\frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{r_\nu} + \frac{m_{\nu+2} m_\nu}{r_{\nu+1}} + \frac{m_\nu m_{\nu+1}}{r_{\nu+2}} \right),$$

valable quelle que soit la valeur de l'indice ν ; ou encore, d'après (8),

$$(18'') \quad \mathfrak{U} = f M \sum_0^2 \frac{m_\nu^*}{r_\nu}.$$

On représente par

$$\text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$$

le vecteur qui a pour composantes les dérivées partielles de \mathfrak{U} par rapport aux coordonnées de P_ν ; ou si l'on veut (sous forme indépendante du système de référence) le vecteur tel que, pour tout déplacement infiniment petit dP_ν , on ait $\text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times dP_\nu =$ différentielle partielle de \mathfrak{U} (se rapportant à la variation du point P_ν).

Quelle que soit la définition préférée, $\text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$ représente la force sollicitant P_ν , et l'on a

$$\sum_0^2 \text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times dP_\nu = d\mathfrak{U},$$

$d\mathfrak{U}$ étant la différentielle totale.

L'expression explicite de $\text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$ se déduit immédiatement des (18') et (2). Elle est

$$(19) \quad \text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} = f m_\nu \left(\frac{m_{\nu+1}}{r_{\nu+2}^3} r_{\nu+2} - \frac{m_{\nu+2}}{r_{\nu+1}^3} r_{\nu+1} \right).$$

Comme le système des trois corps n'est soumis à aucune force extérieure, le mouvement (absolu, au sens mécanique du mot) du barycentre G est rectiligne et uniforme, et les choses se passent au point de vue dynamique comme si G était fixe.

On a en conformité les équations vectorielles du mouvement

$$(20) \quad m_\nu \dot{V}_\nu = m_\nu \ddot{R}_\nu = \text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Les intégrales des quantités de mouvement reviennent au principe (déjà utilisé) de la conservation du mouvement du centre de gravité. Quant aux autres intégrales classiques, celles des aires se résument dans la constance du vecteur K défini par (15) [ou (16)], et l'intégrale des forces vives s'écrit

$$(21) \quad \mathfrak{T} - \mathfrak{U} = E,$$

\mathfrak{T} et \mathfrak{U} ayant été explicitées sous plusieurs formes différentes, et E , constante pendant le mouvement, s'interprétant comme énergie totale du système.

7. Viriel.

Si l'on dérive par rapport à t la première expression (9) de J , en remplaçant \dot{R}_ν par V_ν , on a

$$\frac{1}{2}\dot{J} = \sum_0^2 m_\nu V_\nu \times R_\nu,$$

d'où, en dérivant une seconde fois,

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = \sum_0^2 m_\nu V_\nu \times V_\nu + \sum_0^2 m_\nu \dot{V}_\nu \times R_\nu.$$

Le premier terme du second membre, à cause de (12) n'est que $2\mathfrak{E}$. Le second, en ayant égard à (20), s'écrit

$$\sum_0^2 \text{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times R_\nu:$$

c'est ce qu'on appelle le *viriel* de notre système matériel.

Dès qu'on pense \mathfrak{U} comme fonction homogène de degré -1 des coordonnées des points P_ν , rapportées au centre de gravité G , on reconnaît, en appliquant le théorème d'EULER, que le viriel ne diffère pas de $-\mathfrak{U}$. On a par conséquent la relation

$$(22) \quad \frac{1}{2}\ddot{J} = 2\mathfrak{E} - \mathfrak{U},$$

qui remonte, elle aussi, à LAGRANGE et joue, comme nous le verrons, un rôle fondamental dans les considérations des nos 10 et 11.

8. Premier corollaire du théorème général d'existence.

Supposons que la constante E ait une valeur fixée d'avance (et d'ailleurs quelconque). Si à un instant donné t les positions des trois corps sont distinctes de sorte que la fonction des forces \mathfrak{U} a une valeur finie, le mouvement se poursuit régulièrement pour une durée T non nulle.¹ Si l'on sait auparavant que \mathfrak{U} ne dépasse pas une certaine limite $\bar{\mathfrak{U}}$, on peut affirmer que

$$T > \bar{T},$$

¹ Je me borne, pour fixer les idées, aux valeurs croissantes de la variable indépendante t (futur). Il n'y aurait rien à changer dans les raisonnements et dans la conclusion, si l'on envisageait des valeurs décroissantes (passé); ou bien, croissantes et décroissantes à la fois.

en désignant par \bar{T} une quantité positive, dépendant exclusivement de \bar{u} (des masses et de E). Pour la démonstration il convient de s'appuyer sur les équations de mouvement (20), en les envisageant comme un système

$$(20') \quad \dot{R}_v = V_v, \quad m_v \dot{V}_v = \text{grad}_{P_v} \mathfrak{U}$$

du premier ordre par rapport aux vecteurs R_v, V_v , c'est-à-dire par rapport à leurs 18 composantes.

Dès que \mathfrak{U} ne dépasse \bar{u} , on peut assigner une limite supérieure aux seconds membres. C'est ce qui résulte, pour le premier groupe, de l'intégrale des forces vives, qui donne pour \mathfrak{X} la limite supérieure $\bar{u} + E$, d'où l'on tire, à cause de l'expression (12) de \mathfrak{X} , qu'aucune des composantes de V_v ne peut dépasser

$\left| \sqrt{\frac{\bar{u} + E}{m_v}} \right|$. Quant au second groupe des (20'), la limite supérieure d'une composante quelconque de $\text{grad}_{P_v} \mathfrak{U}$ apparaît des (19), en remarquant que, d'après la forme de \mathfrak{U} , $\frac{\mathfrak{X}}{r_v}$ ne peut pas dépasser $\frac{\bar{u}}{f m_{v+1} m_{v+2}}$. Ces seconds membres sont

d'ailleurs des fonctions régulières (des composantes des V_v et des R_v), tant que les distances mutuelles ne s'annulent pas: en particulier donc tant que $\mathfrak{U} < \bar{u}$.

Dans ces conditions le théorème classique d'existence nous assure que les intégrales de (20'), à partir d'un instant t et d'une position pour laquelle $\mathfrak{U} < \bar{u}$, restent régulières pendant un intervalle de temps non nul. Le même théorème assigne en surplus à cet intervalle une durée minimum T ,¹ qui dépend en général des positions et des vitesses se rapportant à l'instant t . Toutefois — c'est le corollaire qui nous intéresse — T admet nécessairement une limite inférieure non nulle \bar{T} , dépendant exclusivement de \bar{u} (et des autres constantes qui interviennent dans la question, comme E et les masses).

On s'en rend compte d'après un raisonnement bien connu, en essayant d'admettre le contraire, c'est-à-dire que la limite inférieure \bar{T} soit nulle. Il existerait alors, dans l'ensemble des conditions initiales satisfaisant à la restriction $\mathfrak{U} \leq \bar{u}$, un système régulier de positions et de vitesses au voisinage desquelles la limite inférieure de T serait encore nulle. Mais à ce système lui-même, et à tout son voisinage, on peut coordonner, d'après le théorème d'existence rappelé tout à l'heure, un intervalle de régularité *non nul*: la limite inférieure \bar{T} de T ne peut donc pas être nulle.

C. Q. F. D.

¹ Je veux dire une durée \leq à l'intervalle.

9. Deuxième corollaire.

Considérons le mouvement des trois corps à partir d'un instant initial t_0 , pour lequel nous supposons tout régulier. Ou bien le mouvement se poursuit régulièrement pour toute valeur de $t > t_0$, ou bien il y a un premier instant t_1 tel que le mouvement, étant régulier à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1) , cesse de l'être pour $t = t_1$. Nous désignerons par t' un instant de l'intervalle (t_0, t_1) , si proche que l'on veut à t_1 , mais antérieur à t_1 .

D'après ce qui précède, la limite *supérieure* de U , finie dans tout intervalle (t_0, t') , doit être infinie pour l'intervalle (t_0, t_1) : autrement le mouvement serait régulier même au delà de t_1 .

On peut en déduire — c'est ce que j'appelle le deuxième corollaire — qu'on a plus précisément

$$(23) \quad \lim_{t=t_1} U = +\infty.$$

En effet, si U n'admettait pas la limite $+\infty$ pour $t = t_1$, il existerait des instants t' , si proches que l'on veut à t_1 , pour lesquels U serait plus petite qu'une valeur \bar{U} assignée d'avance. Alors le mouvement se poursuivrait régulièrement jusqu'à $t' + \bar{T}$ (\bar{T} dépendant exclusivement de \bar{U} , ainsi qu'il a été dit au n° préc.), et par suite (puisqu'on peut supposer t' infiniment peu différent de t_1) même au delà de t_1 , ce qui contredit à l'hypothèse. On a donc bien la propriété exprimée par (23).

10. Existence d'une limite pour J . — Les deux seules formes de singularités possibles: choc binaire et collision générale.

La formule (22), en y remplaçant \mathfrak{X} par sa valeur déduite de l'intégrale des forces vives, s'écrit

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} = U + 2E.$$

Dès que t est assez proche à t_1 , le second membre devient et demeure positif à cause de (23). $J(t)$ va donc en croissant avec t , et tend par conséquent à une limite finie ou bien à $+\infty$ pour $t = t_1$. En tout cas J garde le même signe, pour t assez proche à t_1 : cela est évident si la limite de J n'est pas zéro; et si elle est zéro, il suffit d'observer que J y converge en croissant, et prend en conformité des valeurs toujours négatives à gauche de t_1 .

Il s'en suit que la quantité positive J tend elle-même vers une limite positive ou nulle. On doit justement distinguer ces deux eventualités:

1°. $\lim_{t=t_1} J = J_1 > 0$. On a alors un *choc binaire*; des trois distances, une et une seulement tend vers zéro. Pour le constater, on remarque d'abord que, ll croissant indéfiniment, la plus petite des distances mutuelles tend nécessairement à zéro. Il reste à s'assurer que cette distance minimum est toujours la même, ce qui réussit par réduction à l'absurde. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait, si près de t_1 que l'on veut, quelque instant t' tel que, avant et après t' , la plus petite distance serait représentée par deux différents côtés du triangle des trois corps: par ex., par r_1 avant et par r_2 après. Alors, pour $t=t'$, ces deux distances seraient égales, et infiniment petites avec $t_1 - t'$; il en serait de même de la troisième (qui ne peut pas dépasser leur somme), et aussi par conséquent de $J = \sum_0^2 m_v^* r_v^2$, ce qui ne peut pas arriver dès que $\lim_{t=t_1} J > 0$.

Soit précisément r_v la distance tendant à zéro, ce qui correspond à un choc entre P_{v+1} et P_{v+2} . Il convient de retenir que r_{v+1} et r_{v+2} tendent l'une et l'autre vers une même limite non nulle. En effet, puisque la différence $|r_{v+1} - r_{v+2}|$ ne peut pas dépasser r_v , on a en premier lieu

$$\lim_{t=t_1} (r_{v+1} - r_{v+2}) = 0.$$

D'autre part, vu que r_v tend vers zéro, on a, de la seconde expression (9) de J ,

$$\lim_{t=t_1} (m_{v+1}^* r_{v+1}^2 + m_{v+2}^* r_{v+2}^2) = \lim_{t=t_1} J = J_1 > 0,$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{t=t_1} r_{v+1}^2 = \lim_{t=t_1} r_{v+2}^2 = \frac{J_1}{m_{v+1}^* + m_{v+2}^*}.$$

C. Q. F. D.

2°. $\lim_{t=t_1} J = 0$.

L'expression de J invoquée tout à l'heure montre que, avec J , toutes les distances mutuelles convergent vers zéro.

Il s'agit dans ce cas d'une *collision générale*, les trois corps tendant à se choquer en G (d'après la première des expressions (9) de J).

Il convient d'ajouter que, J tendant à zéro, la limite de \dot{J} est nécessairement une quantité finie ≤ 0 . En effet \dot{J} converge à sa limite en

croissant. Donc, en premier lieu, cette limite ne saurait être $-\infty$; mais elle ne peut être non plus > 0 , car alors il en serait de même de \dot{J} , pour t assez proche à t_1 ; et J irait en croissant, tandis qu'il tend justement vers sa valeur minimum zéro.

II. Exclusion des collisions générales d'après M. Sundman.

On a reconnu au n° précédent que, pour t assez proche à t_1 , $\frac{dJ}{dt}$ garde toujours le même signe. Il est partant loisible d'introduire J à la place de t comme variable indépendante.

Puisque on a

$$\frac{d}{dt}j = j \frac{d\dot{J}}{dJ} = \frac{1}{2} \frac{d}{dJ}j^2,$$

on tire de (22), en éliminant cette fois \dot{J} moyennant l'intégrale des forces vives,

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dJ}j^2 = \mathfrak{X} + E.$$

Ceci posé, tirons quelques conséquences de l'hypothèse que la singularité de l'instant t_1 soit une collision générale: J tend alors à zéro lorsqu'on fait tendre t à t_1 .

Multiplions par dJ la formule écrite tout à l'heure, et intégrons depuis l'instant initial t_0 jusqu'à un $t < t_1$, mais très voisin à t_1 , c'est-à-dire depuis la valeur initiale J_0 de J jusqu'à une valeur J très petite, mais encore > 0 .

Il vient (avec une signification évidente de J_0)

$$\frac{1}{4}(j^2 - j_0^2) + E(J_0 - J) = \int_{J_0}^J \mathfrak{X} dJ.$$

Lorsqu'on fait tendre t à t_1 , et par suite J à zéro, j a une limite finie, bien déterminée (voir la remarque finale du n° précédent). Il en est donc ainsi

du premier membre, et par conséquent aussi de l'intégrale $\int_{J_0}^J \mathfrak{X} dJ$. C'est comme

dire que la fonction \mathfrak{X} est intégrable jusqu'à $J = 0$.

Or on a, d'après (17),

$$\mathfrak{X} \geq \frac{1}{2} K^2 \frac{1}{J},$$

ce qui revient à dire que, si K était une constante *non* nulle, \mathfrak{T} deviendrait infinie, pour $J=0$, d'ordre non inférieur à l'unité, et alors elle ne serait point intégrable jusqu'à $J=0$.

La contradiction disparaît seulement en supposant que K soit nulle. La condition $K=0$ est donc nécessaire pour que les trois corps puissent se choquer tous les trois dans un même point géométrique. C'est le beau lemme de M. SUNDMAN, établissant, si l'on veut, que, *lorsque le moment résultant des quantités de mouvement ne s'annule pas, la seule singularité qui puisse se présenter dans le problème des trois corps est un choc binaire.*

12. Voisinage d'un choc binaire P_{v+1}, P_{v+2} . — Spécifications se rapportant à P_v .

On a vu au n° 10 que, dans le cas d'un choc binaire entre P_{v+1} et P_{v+2} , le troisième corps P_v reste à une distance finie — je veux dire ayant une limite inférieure >0 — soit de P_{v+1} que de P_{v+2} . Il s'en suit que la force d'attraction newtonienne

$$\text{grad}_{P_v} \mathfrak{U} = f m_v \left(\frac{m_{v+1}}{r_{v+2}^2} r_{v+2} - \frac{m_{v+2}}{r_{v+1}^2} r_{v+1} \right)$$

subie par P_v demeure bornée.

Comme le mouvement du système est régulier, depuis l'instant initial, pour tout $t < t_1$, la force qu'on vient d'expliciter peut être envisagée comme une fonction (vectorielle) de t , holomorphe pour $t < t_1$, et en outre certainement bornée, lorsque t s'approche indéfiniment de t_1 . Une telle fonction est bien intégrable (depuis l'instant initial t_0) jusqu'à $t = t_1$. Dès lors l'équation du mouvement de P_v

$$m_v \ddot{R}_v = \text{grad}_{P_v} \mathfrak{U}$$

nous assure que \dot{R}_v , vitesse absolue — on doit entendre rapportée à G — de P_v , tend à une limite bien déterminée pour $t = t_1$. Elle est à son tour intégrable jusqu'à t_1 , et il en résulte l'existence d'une limite bien déterminée pour le vecteur

$$R_v = P_v - G.$$

On peut dire aussi: *Le corps qui ne participe pas au choc tend, pour t convergent à t_1 , vers une position limite à distance finie, avec une vitesse (absolue) également finie et bien déterminée.*

13. Ordre d'infinitude de la vitesse.

L'expression (18') de U (en s'appuyant uniquement sur la circonstance que

$\frac{1}{r_{\nu+1}}$ et $\frac{1}{r_{\nu+2}}$ restent finis) donne

$$(24) \quad \lim_{t=t_1} r_\nu U = f m_{\nu+1} m_{\nu+2}.$$

D'ailleurs [n° précédent] $R_\nu = V_\nu$ reste fini, et par suite

$$\lim_{t=t_1} r_\nu V_\nu^2 = 0.$$

Multiplions l'intégrale des forces vives par r_ν , en y prenant l'expression de \mathfrak{X} sous la forme (14). On en tire après coup

$$(25) \quad \lim_{t=t_1} r_\nu v_\nu^2 = 2 f (m_{\nu+1} + m_{\nu+2}),$$

ce qui montre que la vitesse devient infinie d'ordre $\frac{1}{2}$ (par rapport à l'inverse de la distance). La vitesse v_ν dont il s'agit devrait être spécifiée comme vitesse relative des deux corps qui se choquent; mais il convient de remarquer que aussi leurs vitesses absolues $V_{\nu+1}$ et $V_{\nu+2}$ se comportent d'une manière identique. C'est ce qui résulte sans peine des formules (13), en tenant compte encore une fois de la circonstance que la vitesse V_ν reste finie.

14. Relations asymptotiques. — Variable auxiliaire de M. Sundman. — Constatation qu'elle reste finie pour t tendant à t_1 .

Le produit scalaire $r_\nu \times v_\nu$ de deux vecteurs quelconques r_ν, v_ν ne dépasse jamais en valeur absolue le produit $r_\nu v_\nu$ de leurs longueurs. Lorsque celui-ci tend à zéro, il en est de même *a fortiori* pour $r_\nu \times v_\nu$. En attribuant à r_ν, v_ν la signification des n°s précédents, $r_\nu v_\nu$, à cause de (25), tend effectivement à zéro, pour t convergent à t_1 . D'ailleurs la dérivation de l'identité $r_\nu^2 = r_\nu \times r_\nu$ donne

$$\frac{d r_\nu^2}{d t} = 2 r_\nu \times v_\nu.$$

Il s'en suit

$$(26) \quad \lim_{t=t_1} \frac{d r_\nu^2}{d t} = 0.$$

La dérivation ultérieure de la même identité donne

$$(27) \quad \frac{d^2 r_v^2}{dt^2} = 2 v_v^2 + 2 r_v \times \dot{v}_v.$$

Il convient de transformer le second membre, en profitant, pour le premier terme, de l'intégrale des forces vives, et pour \dot{v}_v , c'est-à-dire, d'après (11), pour la différence

$$\dot{V}_{v+2} - \dot{V}_{v+1},$$

des équations du mouvement (20).

En se rappelant que $\frac{1}{r_{v+1}}$, $\frac{1}{r_{v+2}}$, V_v restent finis, et en remplaçant, dans

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{U} + E,$$

\mathfrak{F} et \mathfrak{U} par leurs valeurs (14) et (18'), on tire d'abord

$$2 v_v^2 = \frac{4f(m_{v+1} + m_{v+2})}{r_v} + \dots,$$

les termes non écrits restant finis lorsque t s'approche indéfiniment de t_1 .

Avec cette même entente, on a de (19)

$$\begin{cases} \frac{1}{m_{v+1}} \text{grad}_{P_{v+1}} \mathfrak{U} = f \frac{m_{v+2}}{r_v^3} r_v + \dots, \\ \frac{1}{m_{v+2}} \text{grad}_{P_{v+2}} \mathfrak{U} = -f \frac{m_{v+1}}{r_v^3} r_v + \dots, \end{cases}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \dot{v}_v &= \frac{1}{m_{v+2}} \text{grad}_{P_{v+2}} \mathfrak{U} - \frac{1}{m_{v+1}} \text{grad}_{P_{v+1}} \mathfrak{U} = -f \frac{m_{v+1} + m_{v+2}}{r_v^3} r_v + \dots, \\ r_v \times \dot{v}_v &= -f \frac{m_{v+1} + m_{v+2}}{r_v} + \dots. \end{aligned}$$

Cette dernière formule et la précédente expression asymptotique de $2 v_v^2$ donnent à (27) l'aspect

$$(27') \quad \frac{d^2 r_v^2}{dt^2} = 2f \frac{m_{v+1} + m_{v+2}}{r_v} + X,$$

le terme additionnel X pouvant être regardé comme une fonction de t , holomorphe pour t intérieur à l'intervalle (t_0, t_1) , et finie même pour t s'approchant indéfiniment de t_1 . L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} X dt$$

est donc bien déterminée.

D'après (26), il en est de même pour

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 r_v^2}{dt^2} dt = \left[\frac{d r_v^2}{dt} \right]_{t_0}^{t_1},$$

qui se réduit à la valeur initiale de $\frac{d r_v^2}{dt}$.

Dans ces conditions, l'équation (27') montre aussitôt que, *en posant*

$$(28) \quad d u_v = \frac{dt}{r_v},$$

on définit (à une constante près) une fonction u_v croissant avec t et tendant vers une valeur limite finie pour $t = t_1$.

CHAPITRE II.

Transformations canoniques suggérées par le mouvement parabolique.

I. Formules symétriques se rapportant à la méthode de Jacobi.

Soit donné un système canonique

$$(1) \quad \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dont la fonction caractéristique $H(p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$ est supposée indépendante de t . Si l'on regarde, dans H , toute p_i comme la dérivée partielle $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ d'une fonction $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on forme l'équation de HAMILTON-

JACOBI en posant

$$(2) \quad H = \text{const.} = E.$$

La définition classique d'intégrale complète de cette dernière équation introduit explicitement E et $n - 1$ autres constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$.

Sous forme plus symétrique, il convient de nommer, avec POINCARÉ,¹ intégrale complète toute fonction

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

des x_i et de n constantes ξ_i , douée des propriétés suivantes:

- 1° c'est une solution de (2), c'est-à-dire qu'en l'introduisant dans H celle-ci devient une fonction $\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ des seules ξ et par suite une constante;
- 2° elle contient les n constantes ξ essentiellement, c'est-à-dire de telle manière que (dans le domaine des valeurs qu'il y a lieu de considérer) le déterminant hessien

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

ne s'annule pas.

Moyennant une telle W , les $2n$ équations

$$(3) \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\omega_i, \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

définissent l'intégrale générale du système (1), en fournissant les x_i et les p_i comme fonctions des $2n$ argument ξ_i, ω_i : les ξ_i doivent être regardés comme des constantes d'intégration, les ω_i comme des fonctions linéaires de t ; d'une manière précise on a

$$(4) \quad \omega_i = -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \xi_i} t + \eta_i,$$

en désignant par η_i des nouvelles constantes arbitraires.

2. Mouvement central parabolique. — Équation en W qu'il convient d'envisager.

Un point matériel P de masse égale à l'unité est attiré par un centre fixe O suivant la loi de NEWTON. Les équations canoniques du mouvement ont pour fonction caractéristique l'énergie totale. En l'exprimant à l'aide des coordonnées cartésiennes du mobile (rapportées au centre) x_1, x_2, x_3 et des conjuguées p_1, p_2, p_3 (composantes de la vitesse), on a

$$(5) \quad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r},$$

où k est la constante d'attraction et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ la distance \overline{OP} .

¹ Pp. 10-13 des «Leçons de mécanique céleste», déjà citées à la page 106.

La nature de la trajectoire dépend, comme on sait, de la valeur (constante pour chaque solution) prise par la fonction H elle-même.

Les mouvements paraboliques correspondent à la valeur $H = 0$. Fixons-nous sur cette détermination, et considérons le système différentiel que l'on obtient de (1) (pour $n = 3$, avec l'expression (5) de H) en changeant la variable indépendante t d'après la position

$$(6) \quad dt = r du.$$

On a

$$\frac{dp_i}{du} = -r \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = r \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pour les solutions paraboliques, le long desquelles $H = 0$, les seconds membres peuvent s'écrire

$$- \frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial(rH)}{\partial p_i}.$$

Ces solutions vérifient partant également le système canonique

$$(7) \quad \frac{dp_i}{du} = - \frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

qui diffère à double titre du système original, ayant été altérées soit la variable indépendante que la fonction caractéristique. C'est une transformation que j'ai employé ici même¹ il y a déjà quelques années pour la régularisation du problème restreint. On peut bien l'appeler transformation de DARBOUX-SUNDMAN, puisque on y combine une propriété des faisceaux conservatifs de trajectoires signalée par DARBOUX avec le changement de variable indépendante dont s'est servi M. SUNDMAN dans son mémoire couronné.²

Toutes les solutions du système (7) peuvent être représentées — dans la manière rappelée au n° 1 — moyennant une intégrale complète de l'équation

$$(8) \quad \frac{1}{2} r (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \text{const.} = \mathfrak{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Dans les expressions intégrales des x_i, p_i (provenant de la résolution des équations, qui correspondent aux (3) pour le problème qui nous occupe), les constantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 doivent être censées soumises à la liaison

$$(9) \quad \mathfrak{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = k,$$

pour rendre $H = 0$, condition caractéristique des ∞^5 solutions paraboliques.

¹ Loco citato (dans la note (5) de la page 99), p. 313.

² Loco citato (dans la note (1) de la page 100), p. 127.

3. Construction d'une intégrale homogène de degré $\frac{1}{2}$.

En coordonnées polaires r, w (colatitude), φ (longitude), l'équation (8) s'écrit

$$(8') \quad \frac{r}{2} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial w} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 w} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} = \text{const.}$$

On reconnaît aisément qu'elle admet des intégrales indépendantes de φ , de la forme

$$W = \sqrt{r} f(w).$$

En effet, en substituant dans (8') $\sqrt{r} f(w)$ à la place de W , il vient

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} f'^2 + \left(\frac{df}{dw} \right)^2 \right\} = \text{const.}$$

On y satisfait en prenant

$$f = 2 \sqrt{\xi} \sin \frac{1}{2} w,$$

où l'on entend par ξ une constante positive. La valeur constante du second membre de (8') est alors $\frac{1}{2} \xi$.

On a trouvé de la sorte une intégrale

$$(10) \quad W = 2 \sqrt{\xi r} \sin \frac{1}{2} w$$

contenant matériellement la seule constante ξ ; mais on peut sans peine faire apparaître le degré de généralité qu'il nous faut. Il suffit de remarquer que (puisqu'on n'a fait aucune hypothèse à l'égard de l'orientation des axes) il est parfaitement loisible de regarder comme arbitraire la direction de l'axe polaire Ox_3 , c'est-à-dire de la demi-droite à partir de laquelle on compte la colatitude w . En tenant compte de cela, rapportons nos formules à des coordonnées non spécialisées par rapport à la demi-droite en question, désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses cosinus directeurs. On aura en conformité

$$\cos w = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{r},$$

et W renfermera, outre ξ , les cosinus λ , c'est-à-dire essentiellement trois constantes arbitraires. Pour le mettre en évidence, considérons le vecteur ξ ayant

pour longueur ξ et pour cosinus directeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et exprimons W à l'aide des composantes

$$\xi_i = \xi \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

continuant toutefois à écrire ξ au lieu de $|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}|$. On a de la sorte

$$(10') \quad W = \sqrt{2\xi r} \sqrt{1 - \cos w} = \sqrt{2} \sqrt{\xi r - \sum_1^3 \xi_i x_i},$$

ce qui est bien une intégrale de (8') contenant d'une manière essentielle les trois constantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Je ne m'arrête pas à justifier cette dernière affirmation, qui apparaîtra évidente dans la suite d'après les expressions explicites des x_i, p_i . Je me borne à faire remarquer que, comme il résulte de (10'), W demeure régulière et différente de zéro, pourvu seulement que ne s'annulent pas à la fois toutes les $x_i (r=0)$, ni toutes les $\xi_i (\xi=0)$, ni enfin toutes les différences $x_i - \xi_i (\cos w = 1)$.

Puisque la substitution de la valeur (10) de W dans le premier membre de (8') donnait pour résultat $\frac{1}{2}\xi$, il s'en suit que, pour l'intégrale complète (10') explicitée tout à l'heure,

$$(11) \quad \mathfrak{D}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}\xi,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (9),

$$(9') \quad \xi = |\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}| = 2k.$$

Voilà la relation devant exister entre les constantes d'intégration ξ_1, ξ_2, ξ_3 (et le coefficient de l'attraction k) lorsqu'il s'agit des solutions paraboliques.

4. Signification des constantes ξ_i et des paramètres ϖ_i .

Les équations définissant le mouvement, d'après les formules générales (3) et l'expression (10') de W , sont

$$(12) \quad -\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W} \left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right) = \varpi_i,$$

$$(13) \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W} \left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right) = p_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

ces dernières pouvant évidemment être remplacées par

$$(14) \quad r p_i = \xi \varpi_i,$$

qui résultent après coup de la comparaison entre (12) et (13).

Occupons nous à présent de faire ressortir de ces équations les propriétés bien connues du mouvement parabolique, et l'interprétation soit des constantes ξ_i que des paramètres ϖ_i . Pour cette discussion il y a quelque avantage à introduire des vecteurs permettant de remplacer nos six équations (12) et (13) par deux relations vectorielles équivalentes.

On a déjà défini le vecteur ξ (ayant pour composantes les ξ_i) constant en grandeur et direction: la grandeur, d'après (9'), est $2k$, assurément non nulle, et on verra bientôt quelle est l'interprétation géométrique de la direction. En attendant associons à ξ un vecteur ϖ de composantes ϖ_i ; et en outre, suivant l'usage, r de composantes x_1, x_2, x_3 et v de composantes p_1, p_2, p_3 , qui déterminent respectivement la position et la vitesse du point mobile.

Dès lors les équations (12) et (13) se résument vectoriellement comme il suit:

$$(12') \quad \frac{1}{W} \left(r - \frac{r}{\xi} \xi \right) = \varpi,$$

$$(13') \quad \frac{1}{W} \left(\frac{\xi}{r} r - \xi \right) = v,$$

et donnent lieu à

$$(14') \quad r v = \xi \varpi,$$

évidemment équivalente aux (14).

En tenant compte de la forme générale (4) des paramètres ϖ_i (puisque on a actuellement, à cause de (11), $\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\xi$), on reconnaît le vecteur ϖ comme une fonction linéaire de t , ayant $-\frac{1}{2\xi}\xi$ pour coefficient de t . C'est un vecteur parallèle à ξ ; par suite, si l'on forme le produit vectoriel $\xi \wedge \varpi$, t disparaît. Donc

$$(15) \quad \xi \wedge \varpi = c,$$

en désignant par c un vecteur constant.

D'autre part, en multipliant vectoriellement (à gauche), la (12') par ξ et la (13') par r , on a

$$\xi \wedge \varpi = \frac{1}{W} (\xi \wedge r),$$

$$r \wedge v = -\frac{1}{W} (r \wedge \xi),$$

d'où

$$r \wedge v = \xi \wedge \varpi = c.$$

Ceci exprime la constance de la vitesse aréolaire $\frac{1}{2} r \wedge v$, propriété fondamentale de tout mouvement central, qui devait naturellement être implicite dans la représentation intégrale (12), (13) du mouvement parabolique. La constatation que le mouvement est plan découle classiquement de l'intégrale (vectorielle) des aires

$$r \wedge v = c,$$

d'où résulte l'équation du plan

$$c \times r = 0.$$

Les vecteurs ξ et ϖ appartiennent eux aussi au plan d'après (15). Quant à la trajectoire, sa nature géométrique descend aisément de (12'), en tenant compte de (10'). Cette dernière peut s'écrire à l'aide des vecteurs ξ et r :

$$(10'') \quad W^2 = 2(\xi r - \xi \times r),$$

après quoi le carré (scalaire) de (12') donne

$$(16) \quad \varpi^2 = \frac{r}{\xi},$$

en représentant manifestement par ϖ la longueur du vecteur ϖ .

La multiplication scalaire de la même (12') par ξ donne d'ailleurs

$$\xi \times \varpi = \frac{1}{W}(\xi \times r - \xi r),$$

c'est-à-dire, ayant égard à (10''),

$$(17) \quad \xi \times \varpi = -\frac{1}{2} W.$$

Il s'en suit

$$\xi^2 \varpi^2 - (\xi \times \varpi)^2 = \xi^2 \varpi^2 - \frac{1}{4} W^2,$$

ou bien, à cause de (16) et (10''),

$$\xi^2 \varpi^2 - (\xi \times \varpi)^2 = \xi r - \frac{1}{2}(\xi r - \xi \times r) = \frac{1}{2}(\xi r + \xi \times r).$$

En se rappelant que w représente l'angle des deux vecteurs ξ et r et remarquant d'autre part que le premier membre de la dernière équation ne diffère pas du carré du vecteur $\xi \wedge \varpi = c$, on a enfin

$$r(1 + \cos w) = \frac{2}{\xi} c^2 \quad (c \text{ longueur du vecteur } c).$$

C'est évidemment l'équation polaire de la trajectoire, dans son plan, l'axe polaire étant dirigé dans le sens du vecteur ξ .

La comparaison avec l'équation d'une parabole rapportée à son foyer achève notre vérification, et nous permet en outre de retenir:

Le vecteur constant (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de longueur $2k$ a la direction de l'axe de la trajectoire parabolique (son sens étant celui qui va du foyer au sommet). Le paramètre de cette parabole est la constante $\frac{1}{\xi} c^2$, exprimable directement à l'aide des ξ_i, ϖ_i sous la forme

$$(15') \quad \frac{1}{\xi} c^2 = \frac{1}{\xi} (\xi \wedge \varpi)^2 = \frac{1}{\xi} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{vmatrix}^2.$$

5. Forme résolue de la transformation canonique entre les deux sextuples¹ $(x_i, p_i), (\xi_i, \varpi_i)$.

L'identité

$$\sum_1^3 p_i dx_i - \sum_1^3 \varpi_i d\xi_i = dW,$$

découlant immédiatement des (12), (13), fait voir que ces formules établissent une transformation canonique entre les variables primitives x_i, p_i et les arguments ξ_i, ϖ_i , pourvu seulement qu'on puisse les résoudre par rapport aux unes et aux autres.

En substituant, dans les (12), $\frac{r}{\xi}$ par la valeur ϖ^2 tirée de (16), on a en premier lieu

$$(I) \quad x_i = \varpi^2 \xi_i - 2U \varpi_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

où j'ai écrit $-2U$ à la place de W , désignant ainsi par U le trinôme $\sum_1^3 \varpi_i \xi_i$,

comme on le fait habituellement dans la théorie des transformations de contact: on a en effet, d'après (17)

$$(18) \quad U = -\frac{1}{2} W = \xi \times \varpi = \sum_1^3 \varpi_i \xi_i.$$

¹ J'emploie, pour abrégé, *sextuple* au lieu de *système de six éléments*.

Les formules exprimant les p_i moyennant les ξ_i et les ϖ_i , c'est-à-dire les (13) convenablement transformées, sont immédiatement fournies par les (14), dès qu'on y remplace $\frac{\xi_i}{r}$ par $\frac{1}{\varpi_i^2}$. On a donc le second groupe résolu

$$(II) \quad p_i = \frac{\varpi_i}{\varpi^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Signalons encore quelques formules, conséquences des (I), (II) [ou, si l'on veut, des originaires (12), (13)], qui nous serviront dans la suite. L'une d'elles n'est que (16), qu'on retrouve matériellement, en faisant le carré des (I) et les additionnant; un second groupe est constitué par les (14), qui résultent, peut-on dire, des (II) et (16); et il y a lieu enfin de fixer l'expression de $v^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, qui se déduit des (II) sous la forme $\frac{1}{\varpi^2}$ et devient $\frac{\xi}{r}$ d'après (16).

Le système à retenir est donc

$$(19) \quad \begin{cases} r = \xi \varpi^2, \\ r p_i = \xi \varpi_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi. \end{cases}$$

Il va sans dire que, dans toutes ces formules, r , ξ et ϖ gardent leur signification de longueurs des vecteurs (x_1, x_2, x_3) , (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$, c'est-à-dire des valeurs arithmétiques des radicaux $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\sqrt{\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2}$.

6. Inversion. — Comportement analytique.

Notre transformation (I), (II) peut être invertie sans calcul. Il suffit de s'appuyer sur la circonstance que l'expression (10') de W dépend symétriquement des x_i et des ξ_i . Il s'en suit que les formules (12) et (13) sont également symétriques par rapport aux deux sextuples (x_i, p_i) , $(\xi_i, -\varpi_i)$. D'après cela, dès qu'on remplace matériellement dans les (I), (II) les x_i, p_i par $\xi_i, -\varpi_i$ et vice versa, on en tire les expressions résolues par rapport aux $\xi_i, -\varpi_i$. Il est bon d'ajouter que, à cause de la forme spéciale des équations dont il s'agit, le résultat peut également s'obtenir par l'échange des éléments correspondants des deux sextuples (x_i, p_i) , (ξ_i, ϖ_i) .

Associons cette remarque à la circonstance que les seconds membres des (I) sont des polynômes (de troisième degré) et les seconds membres des (II) des fonctions rationnelles ayant ϖ^2 au dénominateur. C'est assez pour pouvoir affirmer

que notre transformation est birationnelle, et régulière pour toutes les valeurs finies des arguments qui n'annulent pas le trinôme $\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2$, ni l'analogue $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Rapportons-nous, pour fixer les idées, à la transformation directe (I), (II). Parmi les déterminations des arguments ξ_i, ϖ_i , il y a lieu de signaler les sextuples Γ , formés par des valeurs nulles des ϖ_i , non toutes nulles à la fois des ξ_i , de façon que $\xi > 0$. Ce sont évidemment des sextuples, non réguliers d'après ce qui précède, qui se trouvent pour ainsi dire plongés dans le domaine d'holomorphisme sans le partager: ils forment en effet une variété à trois dimensions seulement, tandis que l'espace environnant en a six. Supposons de faire varier dans cet espace le sextuple ξ_i, ϖ_i et de le faire tendre à un Γ en suivant une ligne régulière. Les ϖ_i tendent alors à zéro de telle façon que les rapports $\frac{\varpi_i}{\varpi}$ admettent des limites bien déterminées γ_i , nécessairement liées par la relation

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Les formules (I) et (19) montrent que les coordonnées x_i , la distance r , et les produits $r p_i$, $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ demeurent, même en s'approchant indéfiniment d'un Γ , des fonctions régulières des ξ_i, ϖ_i , nulles en Γ .

Il n'en est pas ainsi des p_i , lesquelles, d'après (II), deviennent en général infinies. On peut préciser davantage en constatant que les rapports $\frac{x_i}{r}$ [tirés des (I) et (19)] et les produits $\sqrt{r} p_i$ [tirés des (II) et (19)] ont des limites bien déterminées. Il vient en effet, en tenant compte de ce que $\lim \frac{\varpi_i}{\varpi} = \gamma_i$,

$$(20) \quad \lim \frac{x_i}{r} = \frac{\xi_i}{\xi} - 2\gamma_i \sum_j^3 \frac{1}{\xi} \xi_j \gamma_j,$$

$$(21) \quad \lim \sqrt{r} p_i = \sqrt{\xi} \gamma_i,$$

les radicaux ayant leurs valeurs arithmétiques, et le symbole \lim se rapportant à l'approche d'un Γ en suivant une ligne régulière fixée d'avance.

Dans le cas particulier où s'annule le vecteur $c = \xi \wedge \varpi$, le mouvement parabolique devient rectiligne et les directions $\frac{\xi_i}{\xi}, \frac{\varpi_i}{\varpi}$ coïncident, pouvant au plus différer quant au sens. On a alors

$$\lim \frac{\xi_i}{\xi} = \pm \gamma_i,$$

et la limite (20) de $\frac{x_i}{r}$ devient par conséquent

$$(20') \quad \lim \frac{x_i}{r} = \mp \gamma_i.$$

Remarque.

Par rapport aux coordonnées x_i , notre transformation canonique (I), (II) n'est pas ponctuelle. En effet, dans les seconds membres des (I), apparaissent à la fois les ξ_i et les ϖ_i . Il s'agit par conséquent d'une transformation de contact. Toutefois, si on l'envisage intrinsèquement, la dite transformation est bien ponctuelle prolongée (au sens de LIÉ). En effet les (II) représentent une inversion par rayons réciproques entre les p_i et les ϖ_i ; les (I) en restent subordonnées par la condition que la transformation entre les deux sextuples (p_i, x_i) , (ϖ_i, ξ_i) soit canonique.

7. Mouvement parabolique tangent. — Interprétation des variables ξ_i, ϖ_i .

Il est aisé de reconnaître la signification des variables ξ_i, ϖ_i liées aux x_i, p_i par la transformation (I), (II), lorsqu'on envisage les x_i, p_i comme coordonnées et composantes de vitesse d'un point mobile avec une loi quelconque. Il suffit pour cela d'envisager, à côté du mouvement réel, un mouvement parabolique hypothétique du même point, dû à attraction newtonnienne de l'origine. En se rapportant au n° 4, on supposera :

1° que le coefficient d'attraction ait la valeur numérique

$$k = \frac{1}{2} r (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

correspondant au sextuple x_i, p_i dont il s'agit;

2° que la parabole (trajectoire du point dans ce mouvement fictif) passe au point (x_1, x_2, x_3) en y touchant le vecteur (p_1, p_2, p_3) . On l'appellera *parabole osculatrice* (à la trajectoire du point dans son mouvement effectif).

Le mouvement parabolique tangent reste ainsi caractérisé. Les variables transformées ξ_i, ϖ_i se rattachent à ce mouvement d'une manière bien évidente.

Les ξ_i définissent un vecteur de longueur $2k$ parallèle à l'axe de la parabole osculatrice dans le sens allant du foyer au sommet; $\frac{1}{\xi} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{vmatrix}^2$ représente le paramètre de la parabole, etc.

S'il arrive que, pendant le mouvement, les ξ_i, ϖ_i convergent vers un des sextuples Γ , considérés au n° précédent ($\varpi_i = 0, \xi > 0$), la parabole osculatrice devient de plus en plus mince, son paramètre tendant à zero: l'orientation de l'axe admet toutefois une limite bien déterminée. Le mobile tend à l'origine dans une direction également bien déterminée [formule (20)]. Si en particulier $\lim \frac{\varpi_i}{\varpi} = \pm \lim \frac{\xi_i}{\xi} (i = 1, 2, 3)$, le rapprochement en question a lieu justement dans la direction de l'axe [formule (20')].

8. Généralités sur l'introduction d'éléments osculateurs paraboliques.

La transformation canonique (I), (II) est bien remarquable à cause de ses propriétés régularisantes. Les paramètres ξ_i, ϖ_i qu'elle introduit sont très étroitement liés, comme on vient de voir, au mouvement parabolique tangent. Toutefois ces ξ_i, ϖ_i ne peuvent pas être envisagés individuellement comme éléments osculateurs paraboliques: pour se procurer de tels éléments (faisant pendant aux classiques éléments elliptiques), il faudrait encore en former des combinaisons convenables. On y parvient plus commodément en revenant à la source de la transformation (I), (II), c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles (8') et en utilisant une intégrale complète différente de (9), et précisément à variables séparées comme dans le cas elliptique.

9. Intégrale complète de (8') à variables séparées. — Éléments paraboliques.

Posons

$$(22) \quad W = R + Gw,$$

en supposant R fonction du seul argument r , et G constante. Si l'on introduit dans le premier membre de (8') cette expression de W , on a

$$\frac{r}{2} \left\{ \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} G^2 \right\} = \frac{1}{8} Z^2,$$

en désignant par

$$(23) \quad \frac{1}{8} Z^2 = k$$

la constante du second membre de (8').

On en tire

$$(24) \quad R = \int_q^r dr \sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}},$$

où la limite inférieure q de l'intervalle d'intégration pourrait être arbitraire. Il convient toutefois (comme dans l'intégrale analogue se rapportant au mouvement elliptique) d'attribuer à q la plus petite des valeurs de r annulant la fonction sous le signe. Il y a ici une seule racine finie; on est donc conduit à prendre

$$(25) \quad q = \frac{4G^2}{Z^2}.$$

Puisque on sait d'avance que l'orbite est parabolique (et décrite suivant la loi des aires par rapport au foyer), on constate immédiatement que q représente le demi-paramètre: c'est en effet la plus petite distance du foyer à laquelle puisse se trouver le mobile (qui parcourt la courbe toujours dans le même sens). En suivant POINCARÉ,¹ on supposera que la droite fixe à partir de laquelle on compte l'angle w , soit justement la ligne des noeuds (intersection, dûment précisée quant au sens, du plan de la parabole avec le plan coordonné Ox_1x_2). Si l'on désigne suivant l'usage par θ la longitude du noeud (c'est-à-dire l'angle formé par le noeud avec l'axe Ox_1), on a, d'après la définition de w ,

$$\cos w = \frac{x_1}{r} \cos \theta + \frac{x_2}{r} \sin \theta,$$

$$(26) \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\cos I,$$

en entendant par I l'inclinaison (du plan de la parabole sur le plan Ox_1x_2).

D'après cela, il y a lieu de considérer W comme dépendant des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 du point mobile, et des trois constantes Z, G, θ à interpréter comme il suit:

Z dépend exclusivement du coefficient d'attraction, comme il résulte de (23);

$G = \frac{1}{2} Z |Vq|$ définit ensuite le demi-paramètre q de la parabole;

θ représente la longitude du noeud.

Les équations (3), adaptées à notre W , où Z, G, θ jouent le rôle des ξ_i , en écrivant $-\zeta, -g, \Theta$ à la place de $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$, donnent

¹ Loc. cit. (à la page 106), pp. 65-74.

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Z} = \zeta, & \frac{\partial W}{\partial G} = g, & \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta, \\ \frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i & (i=1, 2, 3). \end{cases}$$

Ayant égard aux équations (22), (24), (25), (26), le premier groupe s'écrit

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial Z} = \int_q^r \frac{Z dr}{4r \sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}}} = \int_q^r \frac{Z dr}{2\sqrt{Z^2 r - 4G^2}} = \sqrt{r-q} = \zeta,$$

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial G} + w = g,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = -G \cos I = -\Theta,$$

et consent de reconnaître la signification des trois autres paramètres ζ, g, Θ .

Tout d'abord, d'après une propriété élémentaire de la parabole: $\zeta^2 = r - q$ représente l'abscisse de la position courante du mobile, comptée sur l'axe à partir du sommet.

La seconde équation, appliquée au sommet, fait voir que g représente l'angle que la direction de l'axe (allant du foyer au sommet) forme avec la ligne des noeuds.

Enfin la troisième équation nous montre que:

$$\Theta = G \cos I \text{ fixe l'inclinaison.}$$

Les équations (27) entraînent:

$$\sum_1^3 p_i dx_i - (Z d\zeta + G dg + \Theta d\theta) = d(W - Z\zeta - Gg)$$

et définissent par conséquent une transformation canonique entre le sextuple (p_i, x_i) et les deux triplets conjugués

$$(P) \quad \begin{pmatrix} Z & G & \Theta \\ \zeta & g & \theta \end{pmatrix}.$$

Les expressions explicites des x_i, p_i en fonction des arguments (P) s'établissent sans peine, soit en effectuant la résolution matérielle des (27); soit, d'une manière indirecte mais plus commode (adoptée ordinairement dans le cas des éléments

elliptiques), en ayant recours aux formules élémentaires de transformation des coordonnées et tirant parti de la signification des six éléments (P).

J'omets ces développements en me bornant à faire remarquer que, à différence de la précédente (I), (II), la transformation entre les (x_i, p_i) et les (P) n'est pas régularisante. Déjà les expressions des x_i présentent des singularités au voisinage d'un choc, auquel correspondent des valeurs nulles des paramètres ζ , G et Θ .

Le sextuple canonique (P) est un cas limite (correspondant à la valeur zéro de l'énergie) des éléments elliptiques que j'ai appelés *isoenergétiques*:¹ il peut rendre des bons services dans l'étude des perturbations des comètes.

CHAPITRE III.

Régularisation explicite du voisinage d'un choc binaire.

I. Forme canonique de Poincaré.

On a rappelé, au n° 8 du Chap. I, les équations du mouvement absolu sous forme vectorielle, où figurent comme inconnues auxiliaires les composantes des quantités de mouvement. Il est bien connu qu'on leur donne immédiatement forme canonique, et qu'on les réduit ensuite à six degrés de liberté en mettant en évidence les coordonnées relatives de deux des trois corps par rapport au troisième.² Pour expliciter le système réduit, il me paraît avantageux d'abandonner la symétrie par rapport aux trois corps, en appelant O celui auquel on rapporte le mouvement et les coordonnées des deux autres; P , P' ceux-ci; et adoptant les notations qui s'y rattachent.

On indiquera par m_0 la masse de O ; par m , m' les masses de P , P' ; par x_i , x'_i ($i = 1, 2, 3$) leurs coordonnées (par rapport à trois axes rectangulaires d'orientation fixe, ayant leur origine en O); par p_i , p'_i les composantes de la quantité de mouvement absolue de P et de P' respectivement; par r , r' , Δ les trois distances \overline{OP} , $\overline{OP'}$, $\overline{PP'}$.

¹ »Sopra un nuovo sistema canonico di elementi ellittici», *Annali di Matematica*, Ser. III, T. XX, 1913. Voir aussi:

W. DE SITTER, »On canonical elements», *Proceedings of the K. Ak. van Wet. te Amsterdam*, vol. XVI, 1913, pp. 279—291.

H. ANDOYER, »Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après M. M. T. LEVI-CIVITA et G.-W. HILL» et »Sur les problèmes fondamentaux de la mécanique céleste», *Bulletin Astronomique*, T. XXX, 1913, pp. 425—429, et T. XXXII, 1915, pp. 5—18.

² Ou bien, en suivant JACOBI, certaines combinaisons linéaires (dépendant des masses) de ces coordonnées relatives. Nous y reviendrons au n° 6.

D'après le théorème des quantités de mouvement (le barycentre étant censé fixe), la somme des quantités de mouvement des trois corps est nulle. Il s'en suit que la quantité de mouvement (absolue) de O a pour composantes

$$-(p_i + p'_i).$$

La force vive \mathfrak{E} du système est partant la somme

$$\frac{1}{2m_0} \{ (p_1 + p'_1)^2 + (p_2 + p'_2)^2 + (p_3 + p'_3)^2 \} + \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m'} (p'_1{}^2 + p'_2{}^2 + p'_3{}^2);$$

d'où

$$(1) \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m} \right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m'} \right) (p'_1{}^2 + p'_2{}^2 + p'_3{}^2) + \frac{1}{m_0} (p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3).$$

La fonction des forces \mathfrak{U} (formule (18) du Chap. I), avec les notations actuelles, s'écrit

$$(2) \quad \mathfrak{U} = f \left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{A} \right).$$

La différence

$$(3) \quad H = \mathfrak{E} - \mathfrak{U},$$

c'est-à-dire l'énergie du système, se présente ainsi comme une fonction des douze variables x_i, x'_i, p_i, p'_i .

Le système canonique

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{d p'_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x'_i}, & \frac{d x'_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p'_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

admettant H comme fonction caractéristique et $(x_i, p_i), (x'_i, p'_i)$ comme variables conjuguées, définit le mouvement. C'est la forme particulièrement simple indiquée par POINCARÉ. L'intégrale des forces vives s'écrit évidemment

$$(5) \quad H = E \quad (E \text{ constante}).$$

2. Transformation de Darboux-Sundman.

Envisageons les mouvements pour lesquels la constante E a une valeur fixée d'avance, et effectuons le premier pas en vue de la régularisation d'un choc

binaire P, O . Tout à fait comme dans le cas du problème restreint [voir le n° 2 du Chap. préc.], il convient de poser

$$(6) \quad dt = r du.$$

Les ∞^{11} solutions du système (4) satisfaisant à la condition $H = E$ vérifient également le système

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, & \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$(8) \quad H^* = r(H - E).$$

Pour chacune d'elles, H^* prend la valeur zéro.

Remarque.

Soit t_1 l'instant du choc P, O dans le sens précisé au Chap. I. Le n° 14 du même Chapitre nous permet d'affirmer que la nouvelle variable u [introduite moyennant la position (6)] tend en croissant vers une valeur finie u_1 , lorsque on fait tendre t à t_1 . Le choc binaire dont il s'agit constitue donc, même à l'égard du système transformé (7), une (éventuelle) singularité des fonctions inconnues $x_i(u), p_i(u), x'_i(u), p'_i(u)$ se présentant pour une valeur finie u_1 , tandis que, pour $u < u_1$ (et assez proche à u_1), tout est régulier.

3. Limite du produit $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ pour r tendant à zéro.

Plaçons-nous au voisinage d'un choc entre P et O , dans l'hypothèse que le moment résultant des quantités de mouvement des trois corps ne s'annule pas. On est assuré [Chap. I, n° 12] que P' reste à l'écart des deux corps tendant à se choquer, sa vitesse restant également finie. On a reconnu aussi [n° 13 du même Chapitre] que la vitesse de P (soit absolue que relative au corps O) multipliée par \sqrt{r} reste finie. On pourrait en déduire aussitôt (en tenant compte de ce que p_1, p_2, p_3 sont composantes de la quantité de mouvement absolue) que le produit $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ admet lui aussi une limite finie. Mais il ne vaut pas le peine de faire des emprunts de l'endroit cité. On va le faire ressortir à nouveau de l'intégrale des forces vives.

Posons pour abrégé

$$q = |\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}|,$$

$$r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi,$$

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{1}{m_0} \sqrt{r} \left(p'_1 \frac{p_1}{q} + p'_2 \frac{p_2}{q} + p'_3 \frac{p_3}{q} \right) = g, \\ r \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{f m_0 m'}{r'} - \frac{f m m'}{J} - E \right\} = \eta. \end{cases}$$

D'après (1), (2), (3), on a

$$H^* = r(H - E) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m} \right) \xi + g \sqrt{\xi} - f m_0 m + \eta.$$

L'équation $H^* = 0$ (du second degré en $\sqrt{\xi}$), avec la spécification $\sqrt{\xi} > 0$, définit univoquement $\sqrt{\xi}$ comme fonction holomorphe des quantités g et η tendant vers la limite (positive)

$$l = \sqrt{\frac{2 f m_0 m}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}}},$$

lorsque g et η convergent à zéro. Or il résulte des (9) (et de la circonstance rappelée ci-dessus que $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{J}$ et les p'_i restent finis, ainsi que les rapports $\frac{p_i}{q}$, qui sont des cosinus directeurs) que g et η s'annulent avec r .

On a partant

$$\lim_{r=0} \sqrt{\xi} = l,$$

ce qui entraîne justement, à cause de la signification de ξ , et de u_1 (voir la remarque finale du n° précédent)

$$(10) \quad \lim_{u=u_1} r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = l^2 = \frac{2 f m_0 m}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}}.$$

C. Q. F. D.

4. Introduction des variables ξ_i, ϖ_i . — Holomorphisme de l'expression transformée de H^* .

Appliquons maintenant la transformation (I), (II) du Chapitre précédent [n° 5], en remplaçant les six arguments x_i, p_i par les combinaisons ξ_i, ϖ_i ; bien entendu sans toucher aux x'_i, p'_i .

Au point de vue formel il y a lieu de noter qu'en transformant ainsi les équations (7), elles restent canoniques avec la même fonction caractéristique, et s'écrivent par conséquent

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{d\varpi_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

où l'on doit, bien entendu, retenir H^* exprimée à l'aide des arguments $\xi_i, \varpi_i, x'_i, p'_i$.

Voyons ce qui se passe au point de vue qualitatif.

Les formules (19) du Chap. préc., qui sont des conséquences nécessaires des (I), (II), fournissent immédiatement des renseignements très importants sur la manière dont se comportent les ξ_i, ϖ_i dans le cas d'un choc P, O . En associant ces renseignements à l'expression analytique qu'acquiert H^* avec les nouvelles variables, on pourra ensuite reconnaître qu'il en résulte sa régularisation.

Utilisons d'abord les formules (19) susdites, et notamment la première

$$r = \xi \varpi^2,$$

et la troisième

$$r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi.$$

Comme on vient de voir [formule (10)], en proximité d'un choc P, O , ξ tend vers une limite l^2 non nulle. L'expression de r montre alors que ϖ^2 , et par conséquent $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ convergent vers zéro.

On n'a pas encore le droit d'affirmer que ξ_1, ξ_2, ξ_3 tendent séparément vers des limites bien déterminées, mais il est désormais bien sûr qu'ils restent finis.

Nous profiterons bientôt de ces remarques. Envisageons en attendant un ensemble de valeurs des ξ_i, ϖ_i constituant le voisinage d'un de ces sextuples Γ qu'on a eu l'occasion de considérer au Chap. préc. [n° 6], et qui résultent des valeurs nulles des ϖ_i , non toutes nulles à la fois de ξ_i . Soit D un domaine se rapportant aux douze variables $\xi_i, \varpi_i, x'_i, p'_i$, caractérisé comme on vient de dire (voisinage d'un Γ) par rapport aux ξ_i, ϖ_i , et comprenant le voisinage d'un système quelconque de valeurs finies des x'_i, p'_i , soumises à la seule restriction que les x'_i ne s'annulent pas toutes les trois (P' distinct de O , et par suite aussi de P , dès qu'on conçoit l'extension de D suffisamment petite).

On va constater que, dans tout domaine D , H^* , considérée comme fonction des variables $\xi_i, \varpi_i, x'_i, p'_i$, se comporte régulièrement.

Pour cela, il convient de s'appuyer encore une fois sur les formules (19)

[du Chapitre précédent] pour en tirer à première vue que $r, r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi$, et $r p_i$ sont, à l'intérieur d'un domaine D , des fonctions holomorphes des ξ_i, ϖ_i .

D'ailleurs, puisque r' et \mathcal{A} ne s'annulent pas dans D , les rapports $\frac{r}{r'}, \frac{r}{\mathcal{A}}$ sont, eux aussi, des fonctions holomorphes (des ξ_i, ϖ_i , et des x'_i). Comme on a de (1)

$$(1') \quad r \mathfrak{X} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m} \right) r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m'} \right) r(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) + \frac{1}{m_0} \sum_1^3 r p_i p_i',$$

et de (2)

$$(2') \quad r \mathfrak{H} = f \left(m_0 m + m_0 m' \frac{r}{r'} + m m' \frac{r}{\mathcal{A}} \right),$$

les expressions des seconds membres montrent après coup qu'il s'agit de fonctions holomorphes dans D , dépendant dans leur ensemble de toutes nos douze variables.

Dès lors

$$H^* = r(H - E) = r \mathfrak{X} - r \mathfrak{H} - r E$$

apparaît elle aussi une fonction holomorphe des variables $\xi_i, \varpi_i, x'_i, p'_i$ dans tout domaine D .

C. Q. F. D.

5. Régularisation d'un choc P, O .

Supposons que, pour u tendant à u_1 (valeur certainement finie d'après la remarque du n° 2), les deux corps P et O tendent à se choquer. Nous pouvons à présent compléter les constatations du n° précédent, en établissant que, pour $u = u_1$, les ξ_i aussi convergent (comme les ϖ_i, x'_i, p'_i) vers des limites bien déterminées. Il suffit pour cela de faire jouer la double circonstance que, pour $u_1 - u$ assez petit, les valeurs prises par $\xi_i, \varpi_i, x'_i, p'_i$ (le long de la trajectoire dont il s'agit) appartiennent certainement à un domaine D , et que par conséquent les seconds membres des équations (7'), et notamment les $-\frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}$, restent holomorphes, par rapport aux arguments $\xi_i, \varpi_i, x'_i, p'_i$. Dès que, pour $u < u_1$ et assez proche à u_1 , ces arguments sont à leur tour des fonctions régulières de u , il en est autant des seconds membres susdits.

D'ailleurs, pour u tendant à u_1 , les x'_i, p'_i, ϖ_i tendent [n° 3 et 4] vers des valeurs limites bien déterminées. Il reste à établir qu'il en est de même pour les ξ_i , en sachant [n° 4] que $\xi = \sqrt{V \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ admet une limite différente de

zéro. Cette circonstance garantit que les seconds membres des (7'), fonctions holomorphes de u (à gauche de u_1), restent finis lorsque u converge à u_1 . On peut alors raisonner comme au n° 10 du Chap. I. Ces seconds membres, et en particulier $-\frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}$, sont intégrables depuis une valeur quelconque u_0 (assez proche à u_1) jusqu' à u_1 . On déduit donc, des équations différentielles

$$\frac{d\xi_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

elles-même, l'existence des limites pour les ξ_i .

D'après cela, *une solution du système (7'), même si elle correspond à un choc P, O , n'a plus rien de singulier au point de vue analytique.* Il s'agit en effet d'une solution pour laquelle les fonctions inconnues $\xi_i, \varpi_i, x_i, p'_i$, en correspondance d'une valeur finie u_1 de la variable indépendante, prennent des valeurs bien déterminées tombant dans un domaine D de régularité (pour les seconds membres des équations différentielles).

C. Q. F. D.

Dès que les ξ_i, ϖ_i se comportent régulièrement même pour $u = u_1$, elles tendent à leurs valeurs limites suivant une ligne régulière (de l'espace ξ_i, ϖ_i). Ceci permet de conclure, en revenant aux anciennes variables x_i, p_i [n° 6, équations (20) et (21) du Chap. préc.] que *les deux corps P, O tendent à se choquer suivant une direction bien déterminée (caractérisée par les limites des cosinus directeurs $\frac{x_i}{r}$); et que la vitesse de chacun d'eux, tout en devenant infinie, admet une direction limite.* A la vérité les équations (21) (du Chap. préc.) établissent ceci pour le vecteur de composantes p_i , c'est-à-dire pour la quantité de mouvement et par suite pour la vitesse absolue de P . Pour justifier à tout égard l'énoncé qui précède, on va constater ultérieurement que la vitesse relative de P par rapport à O admet la même direction limite. Cette direction limite appartient alors à toute sorte de vitesse de P et de O (absolue, ou relative d'un d'eux par rapport à l'autre).

On n'a qu'à tenir compte du groupe des équations (4) définissant les $\frac{dx_i}{dt}$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m} \right) p_i + \frac{1}{m_0} p'_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les p'_i restent finies à l'instant du choc, mais non toutes les p_i [d'après (10)]. Il s'en suit que la vitesse relative de P par rapport à O (vecteur de

composantes $\frac{dx_i}{dt}$ a la même direction limite que la vitesse absolue du même point P (vecteur ayant pour composantes $\frac{1}{m} p_i$).

6. Forme canonique de Jacobi. — Régularisation tout à fait analogue qu'on peut lui faire subir.

Nous avons pris les équations du mouvement sous la forme canonique de POINCARÉ [n° 1]. Il est aisé de se rendre compte qu'il n'y a rien d'essentiel à modifier dans les considérations de ce Chapitre si l'on préfère d'adopter les équations canoniques de JACOBI.

En effet les douze fonctions inconnues figurant dans ces équations sont: les trois coordonnées x_i de P par rapport à O , comme dans l'autre cas; et neuf autres — je continuerai à les appeler p_i, x'_i, p'_i — qui ont une signification différente. Il n'est pas nécessaire de la spécifier, sauf pour les x'_i . Celles-ci [comparez Chap. I, n° 4] sont les coordonnées de P' par rapport au barycentre B des deux autres corps P et O . Les coordonnées de B par rapport à O sont αx_i , où la constante (numérique) α n'est que la fraction $\frac{m}{m_0 + m}$. Il s'en suit que les coordonnées de P' rapportées également à O (c'est-à-dire nos anciennes x'_i) sont données par

$$\alpha x_i + x'_i;$$

et l'on a

$$(11) \quad \begin{cases} r'^2 = \sum_1^3 (\alpha x_i + x'_i)^2, \\ A^2 = \sum_1^3 \{(1 - \alpha) x_i - x'_i\}^2. \end{cases}$$

La force vive \mathfrak{T} s'exprime ici encore moyennant les p_i et les p'_i , mais sans termes rectangles, sous la forme

$$(12) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} \mu (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} \mu' (p'_1{}^2 + p'_2{}^2 + p'_3{}^2),$$

les coefficients μ et μ' dépendant exclusivement des masses:

$$\mu = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}, \quad \mu' = \frac{M}{m'(m_0 + m)} \quad (M = m_0 + m + m').$$

La fonction des forces est toujours

$$(2) \quad \mathfrak{U} = f \left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\mathcal{A}} \right),$$

r' et \mathcal{A} étant toutefois les fonctions (11) des x et des x' . On a bien entendu

$$H = \mathfrak{T} - \mathfrak{U},$$

après quoi le système canonique définissant le mouvement s'écrit encore sous la forme (4), d'où l'on arrive à (7) moyennant la transformation de DARBOUX-SUNDMAN.

Au point de vue qualitatif, tout se passe comme précédemment: lorsque les deux corps P et O tendent à se choquer, r tend à zéro, tandis que r' et \mathcal{A} convergent vers une limite positive. Il s'en suit [comme au n^o 3] que les arguments x'_i , p'_i ont des limites finies, et [encore plus simplement qu'au n^o 3, à cause de (12)] que

$$\lim_{u = u_1} r (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{2 f m_0 m}{\mu} = \frac{2 f m_0 m}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}}.$$

La transformation (I), (II) et les raisonnements des n^{os} 4 et 5 s'appliquent (sans qu'il soit même nécessaire d'invoquer la circonstance que les $r p_i$ sont des fonctions holomorphes des ξ_i , ϖ_i), et le voisinage du choc binaire P , O reste également régularisé.

7. Le paramètre symétrique τ et la régularisation complète du mouvement. — Corollaire.

Considérons le produit

$$r \mathfrak{U} = f \left(m_0 m + m_0 m' \frac{r}{r'} + m m' \frac{r}{\mathcal{A}} \right)$$

comme fonction des variables ξ_i , ϖ_i , x'_i , p'_i (ces dernières n'interviennent pas). Ainsi qu'on l'a fait remarquer au n^o 4, il se comporte régulièrement au voisinage d'un choc P , O , état de choc compris, et ne s'y annule pas: en effet, pour $r=0$, $r \mathfrak{U}$ se réduit à $f m_0 m$.

Il s'en suit, en tenant compte de (6), que le paramètre τ , défini (à une constante inessentielle près) par la relation différentielle

$$(13) \quad d\tau = r \mathfrak{U} du = \mathfrak{U} dt,$$

peut rendre les mêmes services que u dans le domaine susdit, avec l'avantage, évident à cause de sa structure symétrique, de s'appliquer également aux autres chocs binaires éventuels: partout ailleurs, cela va sans dire, la substitution de τ à t comme variable indépendante est parfaitement légitime, puisque u demeure fini et > 0 .

La substitution de τ à u dans le système différentiel (7) (ayant égard à la circonstance que, pour les solutions qu'on a à considérer, $H^* = 0$) laisse subsister la forme canonique, pourvu qu'on remplace H^* par $\frac{1}{r\Omega} H^*$. On a partant le système

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, & \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \frac{dp'_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p'_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$(15) \quad F = \frac{1}{r\Omega} H^* = \frac{1}{\Omega} (H - E),$$

et l'on doit se borner aux solutions pour lesquelles $F = 0$.

La seconde expression de F montre immédiatement que c'est une fonction régulière des variables x_i, p_i, x'_i, p'_i tant que les positions des trois corps sont distinctes; au voisinage d'un choc P, O , la transformation (I), (II) rétablit la régularité, ainsi qu'il résulte de la première expression de F et des nos 4, 5; enfin, au voisinage d'un autre choc binaire (P', O , ou P, P'), on régularise d'une manière analogue, à cause de la symétrie substantielle de $F = \frac{1}{\Omega} (H - E)$ par rapport aux trois corps: il suffit de combiner une convenable transformation linéaire sur les x, x', p, p' (équivalente à un échange de rôle des trois corps) avec la même transformation (I), (II).

On a donc le droit d'affirmer que le système différentiel (14) est ou bien régulier, ou bien régularisable par une simple transformation canonique des fonctions inconnues, quelle que soit la valeur de τ , c'est-à-dire pour toute la durée du mouvement, même au delà des chocs, s'ils en arrivent.

Corollaire.

Les coordonnées des trois corps, lorsqu'elles ne figurent pas directement parmi les fonctions inconnues, sont (d'après (I), (II) et des formules élémentaires de transformation de coordonnées) des fonctions holomorphes des auxiliaires servant

à régulariser. Il en résulte que *les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et [d'après (13)] aussi le temps t sont des fonctions du paramètre τ , régulières pour toutes les valeurs réelles de ce paramètre, qui correspondent biunivoquement à toutes les valeurs réelles du temps.* C'est la conclusion, bien connue aujourd'hui de M. SUNDMAN,¹ laquelle a nettement scellé toute une catégorie de recherches anciennes et modernes.

8. Complément formel qui reste encore à élaborer.

Considérons, pour commodité de langage, un espace S à douze dimensions en correspondance biunivoque avec les systèmes de valeurs des douze variables x_i, p_i, x'_i, p'_i figurant comme inconnues dans les équations différentielles (14).

Dès qu'on suppose le moment résultant K des quantités de mouvement différent de zéro, on peut exclure [Chap. I, n° 11] un domaine de S entourant (pour ainsi dire) les collisions générales. Et il devient loisible de partager par la pensée la partie restante de S (qui peut être atteinte effectivement pendant un mouvement correspondant à des valeurs déterminées de K et de E) en quatre régions: trois voisinages des chocs binaires, S_1, S_2, S_3 , et une quatrième S_0 , dans laquelle les distances mutuelles ne descendent pas au dessous d'une certaine limite.

D'après le n° précédent le système différentiel (14) se comporte régulièrement: dans S_0 déjà par rapport aux variables x_i, p_i, x'_i, p'_i qui y figurent directement; dans chacun des S_ν ($\nu = 1, 2, 3$) par rapport à douze combinaisons (canoniques) convenables des mêmes variables.

On peut évidemment (dans une infinité de manières) choisir 12 paramètres canoniques

$$y_h, q_h \quad (h = 1, 2, \dots, 6)$$

définissant l'état de mouvement des trois corps, doués de la propriété que la fonction caractéristique F se comporte régulièrement, par rapport aux arguments y_h, q_h , dans toutes nos quatre régions S_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$). Il suffit par ex. que y_h, q_h coïncident avec les $x_i, x'_i; p_i, p'_i$ dans S_0 , avec les combinaisons canoniques régularisantes dans S_ν , à l'exception de très petites couches S_ν^* de ces dernières, tout près de leur frontière avec S_0 . Dans S_ν^* , soit les x_i, p_i, x'_i, p'_i , soit les combinaisons qui se rapportent à S_ν assurent la régularité du système (14), et on peut, sans la gêner jamais, imaginer à son gré une transition graduelle et canonique des unes aux autres.

Ceci en concept; mais il y a lieu de désirer un choix plus concret et plus expressif de ces paramètres. Je me borne à signaler la question. Une idée de

¹ Loc. cit.

sa nature et des ressources formelles auxquelles il faudrait vraisemblablement avoir recours est offerte par ce qui arrive dans le cas particulier du problème plan. Pour ce cas [où les substitutions régularisantes appartiennent à un type encore plus élémentaire que (I), (II)], la question dont il s'agit a été effectivement traitée avec tous les développements qu'elle comporte.¹

Padoue, Août 1917.

Table des matières.

	Page.
Introduction	99

CHAPITRE I.

Relations formelles. — Quelques résultats dus à MM. Painlevé et Sundman.

1. Préliminaires	102
2. Formules de LAGRANGE	103
3. Expression de la force vive signalée par R. BALL	104
4. Autre expression de la force vive (remontant à JACOBI)	105
5. Moment résultant des quantités de mouvement	107
6. Fonction des forces dans le problème des trois corps. — Équations vectorielles du mouvement. — Intégrales classiques	108
7. Viriel	110
8. Premier corollaire du théorème général d'existence	110
9. Deuxième corollaire	112
10. Existence d'une limite pour J . — Les deux seules formes de singularité possibles: choc binaire et collision générale	112
11. Exclusion des collisions générales d'après M. SUNDMAN	114
12. Voisinage d'un choc binaire $P_{\nu+1}, P_{\nu+2}$. — Spécifications se rapportant à P_{ν}	115
13. Ordre d'infinitude de la vitesse	116
14. Relations asymptotiques. — Variable auxiliaire de M. SUNDMAN. — Constatation qu'elle reste finie pour t tendant à t_1	116

CHAPITRE II.

Transformations canoniques suggérées par le mouvement parabolique.

1. Formules symétriques se rapportant à la méthode de JACOBI	118
2. Mouvement central parabolique. — Équation en W qu'il convient d'envisager	119

¹ Renvoi à la citation (2) de la page 100.

	Page.
3. Construction d'une intégrale homogène de degré $\frac{1}{2}$	121
4. Signification des constantes ξ_i et des paramètres ϖ_i	122
5. Forme résolue de la transformation canonique entre les deux sextuples $(x_i, p_i), (\xi_i, \varpi_i)$	125
6. Inversion. — Comportement analytique	126
7. Mouvement parabolique tangent. — Interprétation des variables ξ_i, ϖ_i	128
8. Généralités sur l'introduction d'éléments osculateurs paraboliques	129
9. Intégrale complète de (8') à variables séparées. — Éléments canoniques paraboliques	129

CHAPITRE III.

Régularisation explicite du voisinage d'un choc binaire.

1. Forme canonique de POINCARÉ	132
2. Transformation de DARBOUX-SUNDMAN	133
3. Limite du produit $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ pour r tendant à zéro	134
4. Introduction des variables ξ_i, ϖ_i . — Holomorphisme de l'expression transformée de H^*	135
5. Régularisation d'un choc P, O	137
6. Forme canonique de JACOBI. — Régularisation tout à fait analogue qu'on peut lui faire subir	139
7. Le paramètre symétrique τ et la régularisation complète du mouvement. — Corollaire	140
8. Complément formel qui reste encore à élaborer :	142

