SUR LES TRANSFORMATIONS RÉVERSIBLES D'ÉLÉMENTS DE LIGNE.

PAR

ALEXANDRE OSTROWSKI

à BÂLE.

Table des matières.

Introduction. Notations et énoncés des théorèmes.

1. Soient, pour $n > 1$, $x_1, \ldots, x_n$ les n coordonnées d'un point général de l'espace S, $p_1, \ldots, p_n$ leurs dérivées par rapport à un paramètre τ. Alors, les $2n$ grandeurs x_ν, p_ν sont les coordonnées d'un élément de ligne dans S, les p_ν sont en particulier les *coordonnées* (homogènes) *de direction.*

Dans le présent mémoire nous considérons les transformations

$$y_\nu = y_\nu(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

où les y_ν sont homogènes de dimension 0 en $p_1, \ldots, p_n$, jouissant de la propriété suivante:

En dérivant (1) *par rapport à* τ *et en posant*

$$q_\nu = \frac{d y_\nu}{d\tau}, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

on peut, en éliminant les p_ν *et leurs dérivées, exprimer les* x_ν *en fonctions des* y_μ *et* q_μ*:*

$$x_\nu = x_\nu(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

les x_ν *étant homogènes de dimension* 0 *en* $q_1, \ldots, q_n$*; et vice versa, on peut déduire les relations* (1), *en dérivant les relations* (2) *et en éliminant les* q_ν *et leurs dérivées.*

Les fonctions y_ν et x_ν sont supposées douées de dérivées premières continues.

On peut évidemment envisager nos transformations comme transformations entre les éléments de ligne (x_ν, p_ν) dans S et (y_ν, q_ν) dans l'espace T des $y_1, \ldots, y_n$. Mais ici les expressions des q_μ dépendent non seulement des x_ν et des p_ν, mais aussi des dérivées secondes $\frac{d p_\nu}{d\tau}$. De même, les expressions des p_μ, tirées de (2), dépendent des y_ν, des q_ν et des $\frac{d q_\nu}{d\tau}$. Il ne s'agit donc pas ici nécessairement des *transformations de contact* dans le sens de S. Lie. Nous appelons nos transformations les *transformations réversibles de premier ordre* ou bien les *transformations R* tout court.

Toutefois, on peut démontrer que pour $n = 2$ les transformations R coïncident avec les transformations de contact.[1] Pour $n > 2$ il en est autrement:

Théorème I. *Pour* $n > 2$ *une transformation* R *qui est une transformation de contact, est une transformation ponctuelle.* (§ 1.)

Cela veut dire évidemment que, si les expressions des q_μ, tirées de (1), ne contiennent que les x_ν et les p_ν, et si celles des p_μ, tirées de (2) ne contiennent que les y_ν et les q_ν, les fonctions y_μ sont indépendantes des p_ν et les x_μ ne dépendent pas des q_ν.

Pour $n = 3$ le théorème I est équivalent à un résultat donné dans le traité de Lie-Scheffers sous une forme différente[2].

---

[1] A. Ostrowski: On the definition of contact transformations. Bul. Am. M. Soc. 47 (1941), pp. 760—763.

[2] Cf. Lie-Scheffers: Geometrie der Berührungstransformationen, T. I. (1896), pp. 478—480

2. Pour arriver à une première classification des transformations R, considérons les deux Jacobiens

(3) $$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)}, \quad \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)}.$$

On démontre facilement le

Théorème II. *Les rangs des deux jacobiens* (3) *sont égaux entre eux et* $\leqq \frac{n}{2}$. (§ 1.)

La valeur commune k des rangs des jacobiens (3) sera appelée le *rang* de la transformation R considérée. $k = 0$ caractérise évidemment les transformations ponctuelles. Dans ce qui suit, nous supposerons toujours, sans le dire explicitement, que $k > 0$.

Du théorème II il résulte évidemment qu'il existe $2k$ fonctions

(4) $$r_\varkappa = r_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n); \quad s_\varkappa = s_\varkappa(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n), \quad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

homogènes de dimension 0, les $r_\varkappa$ par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$ et les $s_\varkappa$ par rapport aux $q_1, \ldots, q_n$, telles que les x_ν et les y_ν s'expriment respectivement par $y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k$ et par $x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k$:

(5) $$y_\nu = Y_\nu(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

(6) $$x_\nu = X_\nu(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

et que $r_\varkappa$ et $s_\varkappa$ s'expriment par les x_ν et les y_ν:

(7) $$r_\varkappa = R^*_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \quad s_\varkappa = S^*_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \quad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

En introduisant les expressions (5) dans les $S^*_\varkappa$ et les expressions (6) dans les $R^*_\varkappa$, on obtient:

(8) $$s_\varkappa = S_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k), \qquad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

(9) $$r_\varkappa = R_\varkappa(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k), \qquad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

On peut naturellement choisir les fonctions (4) de manières très différentes. Mais, les fonctions (4) une fois choisies, on obtient dans les formules (5), (8) de l'un côté, et (6), (9) de l'autre, une transformation ponctuelle R^* entre les deux espaces à $n + k$ dimensions

(10) $$(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k); \quad (y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k).$$

Nous appelons R^* la *transformation caractéristique* de la transformation R donnée.

Les résultats que nous allons exposer se groupent autour du problème suivant: *Une transformation arbitraire (non-singulière)* $R^*\{(5), (6), (8), (9)\}$ *entre les deux espaces* (10) *étant donnée, on demande de trouver les* $2k$ *expressions* (4) *les plus générales satisfaisant à* (8) *et* (9), *et telles que les transformations* (5), (6) *formées avec ces expressions, représentent une transformation* R, *dont* R^* *est la transformation caractéristique.*

3. Voici deux exemples de transformations réversibles:

Exemple I: Soit pour $n = 2$, $k = 1$,

$$y_1 = x_2 + r x_1, \quad y_2 = r, \tag{A}$$

où

$$r = -\frac{p_2}{p_1}. \tag{A_1}$$

En différentiant (A) par rapport à une variable paramétrique on a

$$q_1 = p_2 + r p_1 + x_1 r', \quad q_2 = r',$$

donc, en éliminant r',

$$q_1 - x_1 q_2 = p_2 + r p_1. \tag{A_2}$$

Or, pour notre choix de r, l'expression de droite disparaît. Donc on a $x_1 = \frac{q_1}{q_2}$, et l'on obtient maintenant de (A)

$$x_1 = s, \quad x_2 = y_1 - s y_2, \tag{A_3}$$

où

$$s = \frac{q_1}{q_2}. \tag{A_4}$$

La transformation est donc réversible sous l'hypothèse (A_1).

La transformation caractéristique de cette transformation réversible est

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + r x_1, \quad y_2 = r, \quad s = x_1; \\ x_1 = s, \quad x_2 = y_1 - s y_2, \quad r = y_2. \end{cases} \tag{A_5}$$

En partant de (A_5) on obtient par le même calcul qui nous a conduits à (A_2),

$$q_1 - s q_2 = p_2 + r p_1. \tag{A_6}$$

Il est évident que chaque fois qu'on parvient à définir une fonction $r(x_1, x_2, p_1, p_2)$ et une fonction $s(y_1, y_2, q_1, q_2)$, telles que (A_6) soit satisfaite en vertu des relations (A_5), on aurait défini une transformation réversible correspondant à la transformation caractéristique (A_5). *Or, ceci n'est possible que pour les expressions* (A_1) *et* (A_4) *des* r *et* s. Ce fait résulte de notre théorème IV du texte. En général, on verra que pour $k = \frac{n}{2}$ la transformation réversible est complètement définie par sa transformation caractéristique sans qu'on puisse introduire dans son expression des constantes ou des fonctions arbitraires.

4. *Exemple II:* Soit pour $n = 3$, $k = 1$,

$$y_1 = x_2 + r x_1, \quad y_2 = r, \quad y_3 = x_3, \tag{B}$$

où

$$r = -\frac{p_2 + p_3}{p_1}. \tag{B_1}$$

En différentiant (B) par rapport à une variable paramétrique et en éliminant r', on a

$$\begin{aligned} q_1 &= p_2 + r p_1 + x_1 r', \quad q_2 = r', \quad q_3 = p_3; \\ q_1 - x_1 q_2 &= p_2 + r p_1, \quad q_2 = r', \quad q_3 = p_3. \end{aligned} \tag{B_2}$$

Des relations (B_2) il résulte en introduisant la valeur (B_1) de r,

$$q_1 - x_1 q_2 = -p_3 = -q_3, \quad x_1 = \frac{q_1 + q_3}{q_2};$$

donc, en résolvant avec cette valeur de x_1 les équations (B) par rapport aux x_ν,

$$x_1 = s, \quad x_2 = y_1 - s y_2, \quad x_3 = y_3, \tag{B_3}$$

où

$$s = \frac{q_1 + q_3}{q_2}, \tag{B_4}$$

et notre transformation est réversible. Elle correspond à la transformation caractéristique

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + r x_1, \quad y_2 = r, \quad y_3 = x_3, \quad s = x_1; \\ x_1 = s, \quad x_2 = y_1 - s y_2, \quad x_3 = y_3, \quad r = y_2. \end{cases} \tag{B_5}$$

Or, dans ce cas on trouve facilement encore d'autres transformations réversibles correspondant à la transformation caractéristique (B_5). Par exemple, en posant au lieu de (B_1),

$$r = -\frac{p_2 + \alpha p_3}{p_1},$$

on obtient, par un calcul analogue à celui qui nous a conduits à la relation (B_4), pour s la valeur

$$s = \frac{q_1 + \alpha q_3}{q_2}.$$

Plus généralement il suffit, par exemple, que r satisfasse comme fonction des x_ν et p_ν à une relation de la forme:

$$p_2 + r p_1 = \varphi(p_3, x_2 + r x_1, r, x_3),$$

où φ est une fonction »arbitraire» de ses quatre variables. En effet, il en résulte par le même calcul que plus haut:

$$q_1 - s q_2 = \varphi(p_3, x_2 + r x_1, r, x_3) = \varphi(q_3, y_1, y_2, y_3),$$

$$s = \frac{q_1 - \varphi(q_3, y_1, y_2, y_3)}{q_2}.$$

Toutefois ces formules n'embrassent pas encore le cas général. Nous indiquons au No. 19 un procédé permettant d'obtenir les transformations réversibles les plus générales correspondant à la transformation caractéristique (B_5).

5. Avant d'aborder la résolution de notre problème, nous considérons dans le § 2 les formes linéaires homogènes en $p_1, \ldots, p_n$:

$$t = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_\nu, \tag{11}$$

où f_ν sont des fonctions de toutes les $2n + 2k$ grandeurs $x_\mu, y_\mu, r_\varkappa, s_\varkappa$ liées par la transformation caractéristique R^*. Nous dirons que t jouit de la *propriété* C, si t peut être mise, en vertu des relations (6) et (9) et de celles obtenues en les dérivant, sous la forme

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu q_\nu, \tag{12}$$

où les coefficients g_ν sont aussi des fonctions des $2n+2k$ grandeurs $x_\mu, y_\mu, r_\varkappa, s_\varkappa$.

De même, la forme (12) de $q_1, \ldots, q_n$ jouit de la *propriété* D, si elle peut être mise, en vertu des relations (5) et (8) et de celles obtenues par dérivation, sous la forme (11).[1]

Dans l'exemple I du No. 3 les formes $p_2 + rp_1$, $q_1 - sq_2$ jouissent en vertu de (A_6) des propriétés C, D.

Dans l'exemple II du No. 4 les formes $p_2 + rp_1, p_3$ jouissent de la propriété C, et les formes $q_1 - sq_2, q_3$ de la propriété D.

6. Pour trouver toutes les formes (11) jouissant de la propriété C, il suffit évidemment de trouver une *base* de l'ensemble de ces formes, c'est-à-dire un nombre minimum de ces formes, par lequel toutes les formes t jouissant de la propriété C s'expriment linéairement, en admettant comme coefficients des fonctions des $x_\mu, y_\mu, r_\varkappa, s_\varkappa$.

7. Or, nous montrons (§ 2) qu'une base pour ces formes consiste en $n-k$ éléments et nous donnons une expression explicite des formes d'une telle base. Supposons que le jacobien

$$J = \frac{\partial (X_1, \ldots, X_k)}{\partial (s_1, \ldots, s_k)} \tag{13}$$

est $\neq 0$. Ceci est évidemment permis après un changement de numérotage des X_ν, puisque, R^* étant non-singulière, le rang de la matrice fonctionnelle des X_ν par rapport aux $s_\varkappa$ est $= k$. Alors, une base pour les formes t jouissant de la propriété C est donnée par les $n-k$ formes

$$t_\lambda = \begin{vmatrix} p_\lambda & p_1 & \ldots\ldots & p_k \\ X'_{\lambda s_1} & X'_{1 s_1} & \ldots\ldots & X'_{k s_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X'_{\lambda s_k} & X'_{1 s_k} & \ldots\ldots & X'_{k s_k} \end{vmatrix}, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n. \tag{14}$$

---

[1] Donc, dans la définition des propriétés C et D les quantités $r_\varkappa, s_\varkappa$ sont à considérer comme coordonnées des espaces (10), liées seulement par la transformation R^*, et non comme les expressions (4).

8. De même, une base pour les formes u, jouissant de la propriété D, consiste en les $n-k$ formes suivantes

$$(15) \qquad u_\lambda = \begin{vmatrix} q_\lambda & q_1 & \dots\dots & q_k \\ Y'_{\lambda r_1} & Y'_{1 r_1} & \dots\dots & Y'_{k r_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y'_{\lambda r_k} & Y'_{1 r_k} & \dots\dots & Y'_{k r_k} \end{vmatrix}, \qquad \lambda = k+1, \dots, n,$$

si l'on suppose que le jacobien

$$(16) \qquad K = \frac{\partial (Y_1, \dots, Y_k)}{\partial (r_1, \dots, r_k)}$$

est $\neq 0$, ce qui est permis après un changement de numérotage des Y_ν.

9. Les t_λ s'expriment linéairement par les u_λ et réciproquement. On obtient (§ 2):

$$(17) \qquad t_\lambda = \sum_{\mu=k+1}^{n} \frac{A_{\lambda\mu}}{K} u_\mu,$$

$$(18) \qquad u_\lambda = \sum_{\mu=k+1}^{n} \frac{B_{\lambda\mu}}{J} t_\mu,$$

si l'on pose

$$(19) \qquad A_{\lambda\mu} = \frac{\partial (X_\lambda, X_1, \dots, X_k)}{\partial (y_\mu, s_1, \dots, s_k)}, \qquad \lambda = k+1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

$$(20) \qquad B_{\lambda\mu} = \frac{\partial (Y_\lambda, Y_1, \dots, Y_k)}{\partial (x_\mu, r_1, \dots, r_k)}, \qquad \lambda = k+1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

En appliquant les formules (14), (15) à nos exemples I, II on obtient comme bases pour les formes t_λ et u_λ jouissant des propriétés C, D les formes $p_2 + r p_1$ et $s q_2 - q_1$ pour I, les formes $p_2 + r p_1$, p_3 et $s q_2 - q_1$, q_3 pour II.

10. A côté des formes linéaires en p_ν resp. en q_ν jouissant des propriétés C, D, *dont la définition dépend seulement de la transformation* R^* *et pas des expressions* (4) *de* $r_\varkappa$ *et* $s_\varkappa$, nous considérons des fonctions

$$U(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \qquad V(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n),$$

homogènes de dimension 0 par rapport aux p_ν, q_ν et jouissant de la propriété qu'en vertu de notre transformation R, c'est-à-dire en vertu des formules (1), (2) et des relations qu'on en dérive par différentiation, on ait

$$(21) \qquad U(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = V(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n).$$

11. On peut facilement caractériser les fonctions U, V par les équations différentielles suivantes qui sont fondamentales pour les démonstrations de nos résultats. Il résulte de (6), en dérivant:

$$p_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} X'_{\nu y_\mu} q_\mu + \sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{\nu s_\varkappa} s'_\varkappa, \tag{22}$$

où les k dérivées $s'_\varkappa$ des $s_\varkappa$ par rapport à τ représentent k formes linéaires homogènes en $q'_1, \ldots, q'_n$, *linéairement indépendantes.* Il suffit donc, pour caractériser les fonctions U, d'écrire les conditions pour que $\frac{\partial U}{\partial s'_\varkappa} = 0$. On obtient les k équations

$$\sum_{\nu=1}^{n} X'_{\nu s_\varkappa} \frac{\partial U}{\partial p_\nu} = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \tag{23}$$

auxquelles doit être adjointe l'équation

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{\partial U}{\partial p_\nu} = 0, \tag{24}$$

exprimant l'homogénéité de dimension 0.

12. Les équations (23) sont linéairement indépendantes d'après nos hypothèses sur les $s_\varkappa$, tandis que l'équation (24) peut très bien être une conséquence des équations (23). Désignons par k^* le nombre maximum des intégrales du système (23), (24), indépendantes par rapport à $p_1, \ldots, p_n$. On a évidemment

$$k^* \geqq k, \tag{25}$$

les k fonctions $r_\varkappa$ jouissant de la propriété caractéristique des fonctions U, d'après (4) et (9).

Pour l'exemple I du No. 3 l'équation (23):

$$\frac{\partial U}{\partial p_1} - r \frac{\partial U}{\partial p_2} = 0$$

devient pour (A_1):

$$p_1 \frac{\partial U}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial U}{\partial p_2} = 0,$$

c'est-à-dire, identique à (24).

Dans l'exemple II du No. 4 l'équation (23) devient en vertu de (B_1):

$$p_1\frac{\partial U}{\partial p_1}+(p_2+p_3)\frac{\partial U}{\partial p_2}=0.$$

Elle est donc indépendante de l'équation (24), et l'on vérifie immédiatement qu'elle est même en involution avec (24).

13. La valeur exacte de k^* est donnée par le

Théorème III. *Pour* $k=\frac{n}{2}$, *n pair, on a* $k^*=k=\frac{n}{2}$, *et l'équation* (24) *est une conséquence des équations* (23) *qui forment un système complet.* (§ 3.)

Pour $k<\frac{n}{2}$ *on a* $k^*=n-k-1$, *et les équations* (23), (24) *sont linéairement indépendantes et forment un système complet.* (§ 4.)

Il résulte en particulier du théorème III que pour $k<\frac{n-1}{2}$ il existe des fonctions U qui ne s'expriment pas par les x_ν et $r_\varkappa$ seuls.

14. Pour pouvoir énoncer les théorèmes contenant une solution du problème du No. 2, représentons les expressions (14), (15) des t_λ, u_λ sous la forme

$$(26)\qquad t_\lambda=T_\lambda\equiv J(x_1,\ldots,x_n,r_1,\ldots,r_k)p_\lambda+ \\ +\sum_{\varkappa=1}^{k}f_{\lambda\varkappa}(x_1,\ldots,x_n,r_1,\ldots,r_k)p_\varkappa,\qquad \lambda=k+1,\ldots,n,$$

$$(27)\qquad u_\lambda=U_\lambda\equiv K(y_1,\ldots,y_n,s_1,\ldots,s_k)q_\lambda+ \\ +\sum_{\varkappa=1}^{k}g_{\lambda\varkappa}(y_1,\ldots,y_n,s_1,\ldots,s_k)q_\varkappa,\qquad \lambda=k+1,\ldots,n,$$

où les coefficients sont exprimés, moyennant les formules (5), (6), (8), (9) par les x_ν, $r_\varkappa$, respectivement par les y_ν, $s_\varkappa$.

Dans ce qui suit, T_λ resp. U_λ désigneront les fonctions, univoquement déterminées, des $2n+k$ variables x_ν, p_ν, $r_\varkappa$ resp. y_ν, q_ν, $s_\varkappa$, données par les expressions de droite en (26), (27).

15. Au moyen des expressions (26), (27) la solution complète de notre problème s'énonce très simplement pour $k = \frac{n}{2}$:

Théorème IV. *Pour* $k = \frac{n}{2}$, $n = 2k$, *la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation* $R^*\{(5), (6), (8), (9)\}$ *soit la transformation caractéristique d'une transformation* R, *est que les* $2k$ *expressions*

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{f_{\lambda\varkappa}(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k)}{J(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k)} p_\varkappa, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n, \tag{28}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{g_{\lambda\varkappa}(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k)}{K(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k)} q_\varkappa, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n, \tag{29}$$

soient indépendantes, les k *premières par rapport aux* $r_1, \ldots, r_k$, *les* k *dernières par rapport aux* $s_1, \ldots, s_k$. *Si cette condition est remplie, les expressions* (4) *des* $r_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, $s_\varkappa(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n)$ *s'obtiennent des* $2k$ *équations obtenues de* (26), (27), *en posant*

$$T_\lambda = 0, \quad U_\lambda = 0, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n. \tag{30}$$

Dans l'exemple I on obtient par ce procédé immédiatement

$$p_2 + r p_1 = 0, \qquad q_1 - s q_2 = 0;$$

$$r = -\frac{p_2}{p_1}, \qquad s = \frac{q_1}{q_2}.$$

Le théorème IV est démontré au § 3.

16. Si, pour $k < \frac{n}{2}$ et une transformation R donnée, les fonctions (4) ont été choisies, la transformation caractéristique R^* est univoquement déterminée, donc les expressions (14) et (15) des t_λ et des u_λ le sont aussi, dès que, après un changement de numérotage, J et K ne s'annulent pas. En substituant dans ces expressions des t_λ, pour les y_ν et les $s_\varkappa$ les expressions (5) et (8) et en remplaçant les $r_\varkappa$ par leurs expressions (4), on obtient pour chaque t_λ une expression, univoquement déterminée, en x_ν et p_ν que nous désignons par t_λ^*:

$$t_\lambda = t_\lambda^*(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \qquad \lambda = k+1, \ldots, n. \tag{31}$$

De même, on obtient pour les u_λ les expressions

$$u_\lambda = u_\lambda^*(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n), \qquad \lambda = k+1, \ldots, n. \tag{32}$$

17. Dans l'énoncé du résultat analogue au théorème IV pour $k < \frac{n}{2}$, nous faisons usage de quelques notions que nous allons introduire d'abord: Soit

$$F(r_1, \ldots, r_k, t_{k+1}, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n)$$

une fonction des $2n$ variables indiquées, homogène par rapport aux $t_{k+1}, \ldots, t_n$. Remplaçons y les $r_\varkappa$ et les x_ν par les expressions (9) et (6), et les t_λ par les expressions (17), en y exprimant les coefficients $\frac{A_{\lambda\mu}}{K}$ par les y_ν et les $s_\varkappa$. Alors, on obtient de F une fonction univoquement déterminée

$$G(s_1, \ldots, s_k, u_{k+1}, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_n)$$

de ses $2n$ arguments que nous appelons *la transformée de F par la transformation R^*.*

En remplaçant dans F et G les t_λ, u_λ par T_λ, U_λ, on obtient les fonctions

$$F^*(r_1, \ldots, r_k, p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{resp.} \quad G^*(s_1, \ldots, s_k, q_1, \ldots, q_n, y_1, \ldots, y_n)$$

que nous appellerons les *expressions développées* de F resp. G. Un système de k équations de la forme

$$F_\varkappa^*(r_1, \ldots, r_k, \ p_1, \ldots, p_n, \ x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

sera dit *»de rang k en $r_1, \ldots, r_k$ par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$«*, si ces équations, considérées comme équations en $r_1, \ldots, r_k$, ne possèdent pas de solutions dans lesquelles une de ces variables $r_1, \ldots, r_k$ reste indéterminée; mais possèdent au contraire une solution composée de k fonctions $r_1, \ldots, r_k$ en $p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$ qui sont indépendantes par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$. Une notation analogue sera utilisée pour les équations en $s_1, \ldots, s_k, q_1, \ldots, q_n, y_1, \ldots, y_n$.

18. Pour l'exemple II du No. 4 l'expression développée de la fonction

$$F(r, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3)$$

est donnée par

$$F^*(r, p_1, p_2, p_3, x_1, x_2, x_3) \equiv F(r, p_2 + r p_1, p_3, x_1, x_2, x_3).$$

L'équation $F^* = 0$ est alors de rang 1 en r par rapport aux p_1, p_2, p_3, si elle possède une solution en r, qui dépend effectivement de l'une au moins des trois variables p_1, p_2, p_3.

Il est facile d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce fait se présente, si l'on fait l'hypothèse que *F soit un polynôme en $r, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3$.* Si alors F contient effectivement t_2, on peut supposer que les coefficients des différentes puissances de t_2 en F soient des polynômes en r avec le plus grand commun diviseur 1. Mais alors, si l'équation $F = 0$ était satisfaite pour une fonction $r(x_1, x_2, x_3)$ indépendante des p_ν, on aurait évidemment une relation entre $p_1, p_2, p_3, x_1, x_2, x_3$.

De l'autre côté, si F ne dépend pas de t_2, il est, évidemment, nécessaire et suffisant que le polynôme F ne se décompose pas en un produit d'un polynôme en r indépendant de t_3, et d'un polynôme en t_3 indépendant de r. Nous avons donc le résultat:

$F(r, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3)$ étant supposé un polynôme en ses six variables, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $F^* = 0$ soit de rang 1 en r par rapport aux p_1, p_2, p_3 est que, ou bien $F'_{t_2} \not\equiv 0$, ou bien $\dfrac{\partial^2 \lg F}{\partial r\, \partial p_3} \not\equiv 0$.

19. Théorème V. *Soit une transformation R donnée par les relations* (4), (5), (6), (8), (9), *et soit R^* sa transformation caractéristique. Alors, l'une au moins des expressions t_λ^* ne s'annule pas identiquement en $p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$. En plus, il existe un système de k équations*

$$F_\varkappa(r_1, \ldots, r_k, t_{k+1}, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \tag{33}$$

où 1) *les $F_\varkappa$ sont homogènes par rapport aux $t_{k+1}, \ldots, t_n$;* 2) *les k équations*

$$F_\varkappa^*(r_1, \ldots, r_k, p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \tag{34}$$

où les $F_\varkappa^*$ sont les expressions développées des $F_\varkappa$, sont de rang k en $r_1, \ldots, r_k$ par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$ et 3) *les k équations*

$$G_\varkappa^*(s_1, \ldots, s_k, q_1, \ldots, q_n, y_1, \ldots, y_n) = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \tag{35}$$

où les $G_\varkappa^*$ sont les expressions développées des transformées

$$G_\varkappa(s_1, \ldots, s_k, u_{k+1}, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_n)$$

des $F_\varkappa$ par R^*, sont de rang k en $s_1, \ldots, s_k$ par rapport aux $q_1, \ldots, q_n$.

Réciproquement, si pour une transformation R^* donnée on part d'un système de k équations (33) *jouissant des trois propriétés indiquées, on obtient, en résolvant le système* (34), (35), *les $2n$ fonctions* (4), *telles qu'en les substituant dans les relations de la transformation R^*, on obtient une transformation R dont R^* est la transformation caractéristique.*

En appliquant le théorème V à la transformation caractéristique (B_5) de l'exemple II du No. 4, on est amené à considérer une fonction $F(r, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3)$ homogène par rapport aux t_2, t_3, et telle que l'équation

$$F(r, p_2 + r p_1, p_3, x_1, x_2, x_3) = 0$$

soit de rang 1 en r par rapport aux p_1, p_2, p_3 et l'équation

$$F(y_2, q_1 - s q_2, q_3, s, y_1 - s y_2, y_3) = 0$$

soit de rang 1 en s par rapport aux q_1, q_2, q_3.

En résolvant ces deux équations par rapport aux r, s on obtient les expressions de r et s donnant la transformation réversible la plus générale correspondant à la transformation caractéristique (B_5).

De l'autre côté, si, par exemple, F se réduit à une fonction $f(r, t_3, x_3)$ ne dépendant que de r, t_3, x_3, les deux dernières équations se réduisent à

$$f(r, p_3, x_3) = 0, \qquad f(y_2, q_3, y_3) = 0,$$

dont la seconde n'est assurément pas de rang 1 en s par rapport aux q_1, q_2, q_3, tandisque la première est en général de rang 1 en r par rapport aux p_1, p_2, p_3. On voit donc que des deux conditions 2), 3) du théorème V chacune peut être satisfaite sans que l'autre reste valable.

Dans la démonstration du théorème V il s'agit surtout de montrer que certains systèmes d'équations sont d'un rang déterminé. Or, on ne connaît qu'*un* cas suffisamment général dans lequel on peut affirmer qu'un système d'équations soit résoluble pour les valeurs *générales* des paramètres — c'est le cas d'un système d'équations de la forme $F_\nu(x_1, \ldots, x_n) = y_\nu$, $(\nu = 1, \ldots, n)$, si le jacobien des F_ν est $\neq 0$ *(système d'inversion)*. Et la principale difficulté qu'on a à surmonter dans les démonstrations de ce genre consiste dans la réduction aux systèmes d'inversion. C'est pourquoi les raisonnements des Nos. 38—47 sont nécessairement plus détournées qu'il ne convienne à leur idée générale.

20. Dans le cas $k = \frac{n}{2}$ ou $k = \frac{n-1}{2}$ il résulte évidemment du théorème III, qu'on puisse exprimer toutes les intégrales du système (23), (24) par les x_ν et $r_\varkappa$.

Pour $k < \frac{n-1}{2}$ ce n'est plus possible, mais il est très facile de montrer que dans ce cas toutes les intégrales du système (23), (24) s'expriment au moyen des expressions t_λ^*, $r_\varkappa$ et x_ν. C'est le

Théorème VI. *Pour* $k < \frac{n-1}{2}$ *les expressions* (4) *des* $r_\varkappa$ *par les* x_ν *et* p_ν *et les quotients des* t_λ^* *satisfont aux équations* (23), (24), *et chaque intégrale du système* (23), (24) *peut être exprimée par les* $r_\varkappa$, *les quotients des* t_λ^* *et les* $x_1, \ldots, x_n$.

Nous démontrons les théorèmes V et VI au § 4.

21. Au § 5 nous montrons sur quelques exemples, que les conditions du théorème IV sont généralement satisfaites, et, en plus, que les conditions 2) et 3) de ce théorème sont indépendantes l'une de l'autre.

Quant au théorème V, nous montrons qu'il est applicable pour chaque transformation R^*, si l'on suppose que les dérivées secondes des fonctions (5), (6), (8), (9) sont continues. On est forcé, naturellement, à se borner aux voisinages de certaines valeurs convenablement choisies. Au No. 55 nous appliquons le théorème V à un cas particulièrement simple, mais assez général.

Enfin, aux Nos. 56—58, nous considérons les différentes transformations caractéristiques correspondant à la même transformation R — donc, dans un certain sens, *équivalentes* entre elles — et nous montrons que »*l'invariant caractéristique*» de cette équivalence est donné par la correspondance de rang $n-k$ entre les espaces S et T, obtenue en éliminant les $r_\varkappa$ et les $s_\varkappa$ des équations (5), (6), (8) et (9).

22. Nous avons déjà consacré au cas spécial $n = 3$, donc $k = 1$, c'est-à-dire aux transformations d'éléments de ligne dans l'espace à trois dimensions une étude étendue[1], dans laquelle nous développons la théorie de ces transformations, en partant d'un point de vue différent de celui auquel nous nous sommes placés ici.

La différence consiste surtout en ce que nous avons alors choisi, pour $n = 3$, les expressions $r_\varkappa$, $s_\varkappa$ de manière univoque. Dans ces circonstances, la transformation caractéristique R^* ne pouvait plus être choisie arbitrairement, mais était assujettie à la condition de transformer une certaine forme de Pfaff dans une autre.

Quant à la fonction correspondant à l'expression de gauche en (33), elle se simplifie considérablement pour $n = 3$, puisque $F_\varkappa$ est alors une forme *binaire* en t_2, t_3 et peut donc être remplacée par une forme *linéaire* en t_2, t_3, donc aussi en p_1, p_2, p_3.

---

[1] A. Ostrowski: Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. Comm. Math. Helv. 13 (1940/41), pp. 156—194; 14 (1941/42), pp. 23—60.

C'est grace à ce fait que nous sommes parvenus à établir, pour $n = 3$, un lien entre la théorie des transformations R et celle des transformations de contact, auquel est consacrée la deuxième partie du mémoire cité.[1] — Enfin, dans le mémoire cité, la variable indépendante τ a été identifiée avec x_1. Les formules perdaient par cette raison en symétrie, mais devenaient plus concrètes et plus conformes aux notations habituelles dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre.

Toutefois, dans l'espace à n dimensions, la symétrie des formules joue un rôle beaucoup plus considérable. C'est pourquoi nous avons préféré d'employer dans le présent mémoire les coordonnées *homogènes* de direction.

§ 1. Les théorèmes I et II.

23. Pour démontrer le théorème I, supposons qu'il soit possible d'exprimer les quotients des p_ν par les y_μ et les q_μ seuls. En désignant les dérivées $\frac{dq_\mu}{d\tau}$ par q'_μ, on obtient de (2):

$$p_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} x'_{\nu y_\mu} q_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} x'_{\nu q_\mu} q'_\mu .$$

Donc, si les quotients $\frac{p_\nu}{p_\lambda}$, $\nu \neq \lambda$, étaient indépendants des q'_μ, on obtiendrait pour chaque couple ν, λ, $\nu \neq \lambda$, les relations

$$\frac{x'_{\nu q_\mu}}{x'_{\lambda q_\mu}} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{n} x'_{\nu y_\varkappa} q_\varkappa}{\sum_{\varkappa=1}^{n} x'_{\lambda y_\varkappa} q_\varkappa} = T_{\nu\lambda}, \quad \lambda = 1, \ldots, n, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Mais alors le rang de la matrice fonctionnelle des x_ν par rapport aux n variables q_μ serait $\leqq 1$, et $x_1, \ldots, x_n$ seraient exprimables, comme fonctions de $q_1, \ldots, q_n$, par une seule fonction $Q(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n)$, homogène de dimension 0 par rapport aux $q_1, \ldots, q_n$:

$$x_\nu = \bar{x}_\nu (y_1, \ldots, y_n, Q).$$

[1] Il existent aussi dans le cas général considéré dans ce mémoire des relations entre les transformations réversibles et les transformations de contact, mais ces relations sont beaucoup moins simple que pour $n = 3$.

On aurait donc en dérivant

$$p_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n} \bar{x}'_{\nu\, y_\varkappa} q_\varkappa + \bar{x}'_{\nu\, Q} \frac{dQ}{d\tau},$$

donc, puisque les dérivées secondes des y_μ ne sont contenues qu'en $\dfrac{dQ}{d\tau}$:

$$\frac{p_\nu}{p_1} = \frac{x'_{\nu\, Q}}{x'_{1\, Q}} = P_\nu(y_1, \ldots, y_n, Q),$$

et les $2n - 1$ quantités indépendantes $x_1, \ldots, x_n, \dfrac{p_2}{p_1}, \ldots, \dfrac{p_n}{p_1}$ seraient représentées en fonctions des $n + 1$ grandeurs $y_1, \ldots, y_n, Q$. Il en résulte

$$2n - 1 \leqq n + 1, \qquad n \leqq 2,$$

et le théorème I est démontré.

24. Pour démontrer la première partie du théorème II, désignons les rangs des Jacobiens (3) resp. par k, l, et supposons qu'on ait, contrairement à l'assertion du théorème, $k > l$. Alors, il existerait k fonctions $r_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ et l fonctions $s_\lambda(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n)$, indépendantes, les $r_\varkappa$ par rapport aux p_μ, et s_λ par rapport aux q_μ, telles qu'on aurait

$$x_\nu = \bar{X}_\nu(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_l), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{36}$$

$$s_\lambda = S_\lambda(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \qquad \lambda = 1, \ldots, l, \tag{37}$$

$$y_\nu = \bar{Y}_\nu(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{38}$$

$$r_\varkappa = R_\varkappa(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \qquad \varkappa = 1, \ldots, k. \tag{39}$$

25. Mais, en substituant les expressions (36) dans les relations (39), on obtient des expressions des $r_\varkappa$ par les y_μ et les s_λ:

$$r_\varkappa = \bar{R}_\varkappa(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_l), \qquad \varkappa = 1, \ldots, k. \tag{40}$$

Maintenant les $n + k$ expressions (36) et (40) sont exprimées en fonctions des $n + l < n + k$ variables $y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_l$. Il en résulte une relation non-identique entre les $r_1, \ldots, r_k, x_1, \ldots, x_n$, tandis que les $r_\varkappa$ sont indépendants par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$. Donc on a $k \leqq l$, et puisqu'on obtient par un raisonnement symétrique au précédent $k \geqq l$, il résulte $k = l$, et les rangs des deux Jacobiens (3) sont égaux.

26. Pour démontrer l'inégalité $k \leqq \frac{n}{2}$, remarquons que le système (23), (24) contient en tous cas au moins k équations linéairement indépendantes. On a donc pour k^*, nombre de ses intégrales indépendantes par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$: $k^* \leqq n - k$, donc par (25)

$$k \leqq n - k, \qquad k \leqq \frac{n}{2},$$

et le théorème II est démontré.

§ 2. Les t_λ et u_λ.

27. Dérivons les relations (6) de la transformation R^*, considérée comme transformation ponctuelle entre les espaces (10), par rapport à un paramètre τ. Désignons les dérivées des x_μ, y_μ, $r_\varkappa$, $s_\varkappa$ par rapport à τ resp. par p_μ, q_μ, $r'_\varkappa$, $s'_\varkappa$. On a

$$p_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} X'_{\nu y_\mu} q_\mu + \sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{\nu s_\varkappa} s'_\varkappa. \tag{41}$$

28. Alors, en substituant pour un $\lambda > k$ les expressions (41) dans le déterminant de (14), on obtient pour t_λ la somme des deux déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} \sum_{\mu=1}^{n} X'_{\lambda y_\mu} q_\mu, & \sum_{\mu=1}^{n} X'_{1 y_\mu} q_\mu, & \ldots\ldots, & \sum_{\mu=1}^{n} X'_{k y_\mu} q_\mu \\ X'_{\lambda s_1}, & X'_{1 s_1}, & \ldots\ldots, & X'_{k s_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X'_{\lambda s_k}, & X'_{1 s_k}, & \ldots\ldots, & X'_{k s_k} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{\lambda s_\varkappa} s'_\varkappa, & \sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{1 s_\varkappa} s'_\varkappa, & \ldots\ldots, & \sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{k s_\varkappa} s'_\varkappa \\ X'_{\lambda s_1}, & X'_{1 s_1}, & \ldots\ldots, & X'_{k s_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X'_{\lambda s_k}, & X'_{1 s_k}, & \ldots\ldots, & X'_{k s_k} \end{vmatrix}.$$

Or, ici le second déterminant s'annule, et l'on obtient, en développant le premier déterminant suivant les q_μ et en utilisant les expressions (19) des $A_{\lambda\mu}$:

$$(42) \qquad t_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu}\, q_\mu, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n.$$

Donc, les t_λ jouissent de la propriété C. En plus, elles sont linéairement indépendantes, puisque chaque t_λ contient effectivement un p_λ manquant dans les autres t_μ.

29. Supposons maintenant que la forme (11) jouisse de la propriété C, et substituons dans le produit Jt pour Jp_λ, $\lambda = k+1, \ldots, n$, les expressions

$$t_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{k} f_{\lambda\varkappa}\, p_\varkappa$$

obtenues de (26). On obtient alors

$$(43) \qquad Jt = \sum_{\lambda=k+1}^{n} f_\lambda t_\lambda + \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu\, p_\nu,$$

les A_ν étant des fonctions des x_μ, y_μ, $r_\varkappa$, $s_\varkappa$. L'expression

$$\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu\, p_\nu$$

jouit donc de la propriété C. Mais alors on obtient, en substituant pour les p_ν les expressions (41) et en écrivant que les coefficients des $s'_\varkappa$ s'annulent:

$$\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu\, X'_{\nu s_\varkappa} = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Donc, puisque $J \neq 0$, tous les A_ν s'annulent, et l'on obtient de (43) la représentation

$$(44) \qquad t = \sum_{\lambda=k+1}^{n} \frac{f_\lambda}{J}\, t_\lambda.$$

On voit que les t_λ forment en effet une base pour toutes les formes t jouissant de la propriété C, et *l'on obtient la représentation* (44) *de t par les t_λ en remplaçant dans* (11) *les p_ν avec $\nu \leqq k$ par* 0 *et les p_ν avec $\nu > k$ par* $\frac{t_\lambda}{J}$.

30. Les résultats analogues sont valables par symétrie pour les u_λ et la propriété D. Or, la forme $\sum_{\mu=1}^{n} A_{\lambda\mu} q_\mu$ dans la relation (42) est une forme u jouissant de la propriété D. Donc, en la représentant d'après la règle analogue à celle du No. 29 par la base $u_{k+1}, \ldots, u_n$, on remplace dans (42) les q_μ avec $\mu \leqq k$ par 0 et chaque q_μ avec $\mu > k$ par $\frac{u_\lambda}{K}$, et la relation (17) est démontrée.

La relation (18) s'obtient par symétrie.

§ 3. Le cas $k = \frac{n}{2}$.

31. Pour $n = 2k$ les expressions $r_1, \ldots, r_k$ forment k intégrales indépendantes des équations (23), (24). Or, si l'équation (24) était linéairement indépendante des équations (23), ce système ne pourrait posséder plus de $n - k - 1 = k - 1$ intégrales indépendantes, donc, dans notre cas, l'équation (24) est une combinaison linéaire des équations (23), et le système (23), possédant $k = n - k$ intégrales indépendantes, est *complet*. La partie du théorème III se rapportant au cas $k = \frac{n}{2}$ est démontrée.

32. D'après ce que nous venons de montrer sur l'équation (24), le système d'équations linéaires

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \mu_\varkappa X'_{\nu s_\varkappa} + \mu_0 p_\nu = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n \tag{45}$$

possède une solution en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ avec $\mu_0 \neq 0$.

Or, en prenant les équations (45) avec $\nu = 1, \ldots, k, \lambda > k$, et en éliminant $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$, on voit que le déterminant de droite en (14) s'annule. Donc, dans notre cas, les expressions (26) s'annulent quand on y remplace $r_1, \ldots, r_k$ par leurs valeurs (4).

33. De l'autre côté, on obtient de (26) pour $t_\lambda = 0$:

$$-p_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{f_{\lambda\varkappa}(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k)}{J(x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_k)} p_\varkappa, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n. \tag{46}$$

Si les expressions de droite n'étaient pas indépendantes par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$, il en résulterait une relation non-identique entre $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, c'est-à-dire une équation différentielle de premier ordre entre les n fonctions arbitraires $x_1, \ldots, x_n$ de τ. Donc, les expressions (28) sont indépendantes par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$, et, le raisonnement analogue étant valable pour les expressions (29), la *nécessité* de la condition du théorème IV est démontrée.

34. Supposons de l'autre côté, que la condition du théorème IV soit remplie. Alors, en résolvant les équations (46) par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$, on obtient k expressions (4) pour $r_1, \ldots, r_k$. Ces k expressions seront évidemment indépendantes par rapport aux $p_{k+1}, \ldots, p_n$, donc aussi par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$. En effet, désignons par $\varDelta$ le jacobien des expressions de droite en (46) par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$, et par $\varDelta_1$ le jacobien des $r_1, \ldots, r_k$ par rapport aux $p_{k+1}, \ldots, p_n$. Alors il résulte de (46): $\varDelta \varDelta_1 = (-1)^k$, $\varDelta_1 \neq 0$.

Formons à partir des expressions des $r_1, \ldots, r_k$ tirées des équations (46) les fonctions $s_\varkappa$ moyennant les relations (8). Il résulte des formules (18) qu'avec toutes les formes t_λ les formes u_λ s'annulent elles aussi. En écrivant les u_λ sous la forme

$$(47) \qquad u_\lambda = K q_\lambda + \sum_{\varkappa=1}^{k} g_{\lambda\varkappa}(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k) q_\varkappa, \quad \lambda = k+1, \ldots, n,$$

on voit que les expressions des $s_1, \ldots, s_k$, tirées de (8), satisfont aux relations

$$(48) \qquad -q_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{g_{\lambda\varkappa}(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k)}{K(y_1, \ldots, y_n, s_1, \ldots, s_k)} q_\varkappa, \quad \lambda = k+1, \ldots, n.$$

35. Or, d'après l'hypothèse du théorème IV, les expressions de droite en (48) sont indépendantes par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$, les k fonctions $s_1, \ldots, s_k$ peuvent donc être représentées, moyennant les équations (48), en fonctions des $y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n$. Alors on a obtenu les $2k$ fonctions (4) satisfaisant aux équations (5), (6), (8), (9), donc une transformation R, dont R^* est la transformation caractéristique. Et la transformation R de rang k, obtenue de cette façon, est évidemment la plus générale possédant R^* comme transformation caractéristique. La démonstration du théorème IV est terminée.

§ 4. Le cas $k < \frac{n}{2}$.

36. Si $k < \frac{n}{2}$, il est impossible que pour une transformation R les $n-k$ relations

$$t_\lambda^* = 0, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n, \tag{49}$$

soient valables toutes ensemble. En effet, de (49) on aurait les représentations (46) pour $n-k$ grandeurs $p_{k+1}, \ldots, p_n$ par les $k < n-k$ grandeurs $r_1, \ldots, r_k$ et par les $p_1, \ldots, p_k$. En éliminant $r_1, \ldots, r_k$, on obtiendrait donc une équation différentielle pour les $x_1, \ldots, x_n$ comme fonctions de τ.

37. Il en résulte que, pour $k < \frac{n}{2}$, l'équation (24) est linéairement indépendante des équations (23). En effet, dans le cas contraire, les n équations (45) posséderaient une solution en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ avec $\mu_0 \neq 0$, et il en résulterait comme au No. 32 que tous les t_λ s'annulent. On a donc pour k^*, le nombre des intégrales indépendantes du système (23), (24):

$$k^* \leqq n - k - 1. \tag{50}$$

38. En changeant, s'il est nécessaire, le numérotage des $x_{k+1}, \ldots, x_n$, on peut donc admettre que $t_n^* \neq 0$ pour notre transformation R. Mais alors, les expressions

$$\frac{t_{k+1}^*}{t_n^*}, \ldots, \frac{t_{n-1}^*}{t_n^*} \tag{51}$$

sont homogènes de dimension 0 en $p_1, \ldots, p_n$, et puisque ces expressions, d'après la définition des t_λ, sont exprimables par les x_ν, p_ν aussi bien que par les y_ν, q_ν, elles représentent $n-k-1 > 0$ intégrales du système (23), (24).

Or, les k fonctions

$$r_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \ldots, r_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \tag{52}$$

représentent, elles aussi, k intégrales des équations (23), (24).

39. Soit l le nombre maximum des expressions (51), (52) qui sont indépendantes par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$. On a évidemment, les k expressions (52) étant indépendantes,

$$k \leqq l \lesseqqgtr k^*. \tag{53}$$

En changeant le numérotage des $x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$, on peut supposer qu'en particulier les l expressions

$$r_1, \ldots, r_k, \frac{t^*_{k+1}}{t^*_n}, \ldots, \frac{t^*_l}{t^*_n} \tag{54}$$

soient indépendantes par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$. On a alors, en exprimant les $m = n - 1 - l$ autres expressions (51) par les (54), les relations

$$\tag{55} \left\{ \begin{array}{l} t^*_{l+1} - t^*_n f_1\left(r_1, \ldots, r_k, \dfrac{t^*_{k+1}}{t^*_n}, \ldots, \dfrac{t^*_l}{t^*_n}, x_1, \ldots, x_n\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^*_{n-1} - t^*_n f_m\left(r_1, \ldots, r_k, \dfrac{t^*_{k+1}}{t^*_n}, \ldots, \dfrac{t^*_l}{t^*_n}, x_1, \ldots, x_n\right) = 0. \end{array} \right.$$

Donc, le système de m équations

$$\tag{56} \begin{array}{l} t_{l+1} - t_n f_1\left(r_1, \ldots, r_k, \dfrac{t_{k+1}}{t_n}, \ldots, \dfrac{t_l}{t_n}, x_1, \ldots, x_n\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{n-1} - t_n f_m\left(r_1, \ldots, r_k, \dfrac{t_{k+1}}{t_n}, \ldots, \dfrac{t_l}{t_n}, x_1, \ldots, x_n\right) = 0 \end{array}$$

est satisfait si l'on y remplace les t_ν par les t^*_ν et les $r_\varkappa$ par leurs expressions (4).

40. Or, l'expression J reste $\neq 0$ si l'on y remplace les $r_\varkappa$ par leurs expressions (4), les $r_\varkappa$ étant indépendants. Donc, on obtient des relations (56), en y substituant les expressions T_ν pour les t_ν et en résolvant par rapport aux $p_{l+1}, \ldots, p_{n-1}$, les m équations

$$\tag{57} \begin{array}{l} p_{l+1} - \varphi_1(r_1, \ldots, r_k, p_1, \ldots, p_l, p_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-1} - \varphi_m(r_1, \ldots, r_k, p_1, \ldots, p_l, p_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}$$

homogènes de dimension 1 par rapport aux p_ν, qui sont satisfaites si l'on y remplace les $r_\varkappa$ par leurs expressions (4).

41. Ici les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sont indépendantes par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$, puisque dans le cas contraire, en éliminant de (57) $r_1, \ldots, r_k$, on obtiendrait une relation entre les p_ν et x_ν. Donc, on a $m = n - l - 1 \leqq k$, $n - k - 1 \leqq l$, donc par (53) et (50):

$$n - k - 1 \leqq l \leqq k^* \leqq n - k - 1.$$

Il en résulte premièrement

$$l = k^* = n - k - 1, \tag{58}$$

ce qui démontre les théorèmes III et VI.

42. De l'autre côté, pour $l = n - k - 1$ on a $m = k$. Nous avons donc en (57) k équations résolubles par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$.

Donc, pour les relations (56) la condition nécessaire 2) du théorème V est satisfaite.

43. Nous avons maintenant à démontrer que le fait analogue a lieu pour les transformées des expressions de gauche en (56) par R^*.

Or, tout d'abord, il est clair par symétrie qu'après un changement du numérotage des $y_{k+1}, \ldots, y_n$, il existe un système de k équations

$$\begin{cases} u^*_{n-k} - u^*_n g_1\left(s_1, \ldots, s_k, \dfrac{u^*_{k+1}}{u^*_n}, \ldots, \dfrac{u^*_{n-k-1}}{u^*_n}, y_1, \ldots, y_r\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^*_{n-1} - u^*_n g_k\left(s_1, \ldots, s_k, \dfrac{u^*_{k+1}}{u^*_n}, \ldots, \dfrac{u^*_{n-k-1}}{u^*_n}, y_1, \ldots, y_n\right) = 0. \end{cases} \tag{59}$$

44. Désignons les k transformées des expressions de gauche en (56) par la transformation R^*, par $G_1, \ldots, G_k$, et leurs expressions développées par $G^*_1, \ldots, G^*_k$. Le système

$$G^*_1 = 0, \ \ldots, \ G^*_k = 0 \tag{60}$$

est évidemment *équivalent* au système consistant en équations (56) et en équations des transformations employées pour le passage de (56) à (60), c'est-à-dire en équations (5), (6), (8), (9), (17), (18). Donc, il suffit de montrer que l'ensemble des équations

$$\{(56), (5), (6), (8), (9), (17), (18)\} \tag{61}$$

peut être résolu par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$ comme fonctions des y_ν, q_ν, sans qu'il soit possible de laisser indéterminée une des s.

45. Or, en exprimant en (18) les coefficients $\frac{B_{\lambda\mu}}{J}$ par les x_ν et $r_\varkappa$, on peut représenter les quotients

$$\frac{u^*_{k+1}}{u^*_n}, \ldots, \frac{u^*_{n-1}}{u^*_n} \tag{62}$$

en fonctions des

$$r_1, \ldots, r_k, \frac{t^*_{k+1}}{t^*_n}, \ldots, \frac{t^*_{n-1}}{t^*_n}, x_1, \ldots, x_n,$$

donc, en utilisant les équations (56), c'est-à-dire (55), en fonctions des $2n-k-1$ grandeurs

$$r_1, \ldots, r_k, \frac{t^*_{k+1}}{t^*_n}, \ldots, \frac{t^*_{n-k-1}}{t^*_n}, x_1, \ldots, x_n. \tag{63}$$

Et les équations (8) et (5) donnent les représentations des

$$s_1, \ldots, s_k, y_1, \ldots, y_n$$

par les mêmes $2n-k-1$ grandeurs (63).

46. De l'autre côté, d'après le théorème VI et les formules (59), les $2n-k-1$ quantités

$$s_1, \ldots, s_k, y_1, \ldots, y_n, \frac{u^*_{k+1}}{u^*_n}, \ldots, \frac{u^*_{n-k-1}}{u^*_n} \tag{64}$$

sont indépendantes comme fonctions des $y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n$. Donc, leurs expressions en fonctions des $2n-k-1$ paramètres (63) sont aussi indépendantes, puisque dans le cas contraire on aurait une relation identique entre les $2n-k-1$ grandeurs (64).

47. Donc, les $2n-k-1$ paramètres (63) peuvent être représentés en fonctions des $2n-k-1$ grandeurs (64). En introduisant ces expressions dans les expressions des

$$\frac{u^*_{n-k}}{u^*_n}, \ldots, \frac{u^*_{n-1}}{u^*_n} \tag{65}$$

par les (63), on obtient les expressions des (65) par les (64), c'est-à-dire k relations (59) qu'on a tirées des équations (60). Les «transformées» des équations (56) par R^* sont donc équivalentes aux équations (59). Mais maintenant on arrive, à partir des équations (59), aux expressions des $s_1, \ldots, s_k$ par les y_ν, q_ν par le raisonnement symétrique à celui appliqué aux équations (55) dans les Nos. 39—42.

La nécessité des conditions du théorème V est donc démontrée.

48. Supposons de l'autre côté que les conditions 1), 2), 3) du théorème V soient satisfaites. Alors on tire des équations (34) les expressions des $r_1, \ldots, r_k$ en fonctions des x_ν et des p_ν. En introduisant ces valeurs dans les équations (8), on obtient k fonctions $s_1, \ldots, s_k$ qui peuvent être représentées, en résolvant les équations (35), en fonctions des y_ν, q_ν. On a donc obtenu les $2k$ fonctions (4), indépendantes respectivement par rapport aux $p_1, \ldots, p_n$ et aux $q_1, \ldots, q_n$ et satisfaisant aux relations (5), (6), (8), (9), cest-à-dire une transformation R possédant R^* comme sa transformation caractéristique, et la démonstration du théorème V est terminée.

§ 5. Exemples et remarques additionnelles.

49. Nous allons d'abord analyser les conditions du théorème IV relatives aux expressions (28), (29). Notre but est de montrer que 1) ces conditions sont «en général» satisfaites et que 2) les conditions portant sur les expressions (28) peuvent être satisfaites sans que les conditions portant sur les expressions (29) restent valables, et vice versa.

Nous pouvons, dans cette analyse, supposer que l'on a:

$$x_\varkappa = s_\varkappa, \quad y_\varkappa = r_\varkappa, \qquad\qquad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

ce qui se réduit à une transformation, évidemment permise, de R^*. Alors on a évidemment $K = J = 1$, et l'on tire immédiatement des formules (14), (15) les expressions suivantes de t_λ, u_λ:

$$t_\lambda = p_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{\lambda s_\varkappa} p_\varkappa, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n,$$

$$u_\lambda = q_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{k} Y'_{\lambda r_\varkappa} q_\varkappa, \qquad \lambda = k+1, \ldots, n.$$

Les conditions du théorème IV se réduisent alors à ce que les k expressions

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} X'_{\lambda s_\varkappa} p_\varkappa, \tag{66}$$

exprimées en fonctions des x_ν, $r_\varkappa$, $p_\varkappa$ sont indépendantes par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$, et que les k expressions

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} Y'_{\lambda r_\varkappa} q_\varkappa, \tag{67}$$

exprimées en fonctions des y_ν, $s_\varkappa$, $q_\varkappa$ sont indépendantes par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$.

50. Pour montrer que ces conditions sont généralement satisfaites, spécialisons la transformation R^* comme suit:

$$x_{k+\varkappa} = y_\varkappa + s_\varkappa y_{k+\varkappa}, \quad x_\varkappa = s_\varkappa, \quad r_\varkappa = y_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

On a évidemment, en résolvant ces formules par rapport aux y_ν et $s_\varkappa$:

$$y_{k+\varkappa} = \frac{x_{k+\varkappa} - r_\varkappa}{x_\varkappa}, \quad y_\varkappa = r_\varkappa, \quad s_\varkappa = x_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Les k expressions (66) deviennent maintenant pour $\lambda = k + \varkappa$:

$$y_{k+\varkappa} p_\varkappa = \frac{x_{k+\varkappa} - r_\varkappa}{x_\varkappa} p_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

et sont évidemment indépendantes par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$.

Quant aux expressions (67), elles deviennent pour $\lambda = k + \varkappa$:

$$-\frac{q_\varkappa}{x_\varkappa} = -\frac{q_\varkappa}{s_\varkappa}, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

et sont en effet indépendantes par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$.

Les conditions du théorème IV ne font donc défaut que dans certains cas exceptionnels.

51. Considérons de l'autre côté la transformation R^* suivante:

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad x_3 = y_1 + y_2 + s_1 y_3,$$
$$x_4 = y_1 + y_2 + s_2 y_4, \quad r_1 = y_1, \quad r_2 = y_2$$

et son inverse

$$y_1 = r_1, \quad y_2 = r_2, \quad y_3 = \frac{x_3 - r_1 - r_2}{x_1},$$

$$y_4 = \frac{x_4 - r_1 - r_2}{x_2}, \quad s_1 = x_1, \quad s_2 = x_2.$$

Ici les expressions (66) deviennent pour $\lambda = 3, 4$:

$$y_3 p_1 = \frac{x_3 - r_1 - r_2}{x_1} p_1, \qquad y_4 p_2 = \frac{x_4 - r_1 - r_2}{x_2} p_2$$

et ne sont évidemment pas indépendantes par rapport aux r_1, r_2, tandis que les expressions (67) deviennent pour $\lambda = 3, 4$:

$$-\frac{p_1 + p_2}{x_1} = -\frac{p_1 + p_2}{s_1}, \qquad -\frac{p_1 + p_2}{x_2} = -\frac{p_1 + p_2}{s_2}$$

et sont donc en effet indépendantes par rapport aux s_1, s_2.

Donc, dans notre cas, les conditions du théorème IV sont satisfaites pour les expressions (29) et ne le sont pas pour les expressions (28).

52. Comme nous venons de le montrer, le théorème IV n'est pas applicable pour certaines transformations R^* exceptionnelles. Il en est autrement pour $k < \frac{n}{2}$. Dans ce cas, dès que les dérivées secondes des fonctions (5), (6), (8), (9) restent continues, il est toujours possible de trouver un système d'équations (33) jouissant des trois propriétés indiquées dans le théorème V, aux voisinages de certaines valeurs convenablement choisies des x_ν, y_ν, $r_\varkappa$, $s_\varkappa$.

Tout d'abord, on peut évidemment trouver $2k$ constantes $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$ telles que les k expressions

$$a_\varkappa r_\varkappa + b_\varkappa s_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \tag{68}$$

soient d'un côté indépendantes par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$ si l'on y exprime les $s_\varkappa$ au moyen des équations (8), et de l'autre côté indépendantes par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$ si l'on y exprime les $r_\varkappa$ au moyen des équations (9).

53. Soient maintenant

$$x_\nu^0, \; y_\nu^0, \; r_\varkappa^0, \; s_\varkappa^0 \tag{69}$$

les «valeurs initiales» des x_ν, y_ν, $r_\varkappa$, $s_\varkappa$, satisfaisant aux équations de R^* et telles que pour ces valeurs 1) le jacobien «total» des k fonctions (68) par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$ soit $\neq 0$ en (69); 2) le jacobien «total» des k fonctions (68) par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$ soit $\neq 0$ en (69); 3) les k formes $t_{n-1}, \ldots, t_{n-k}$ restent linéairement indépendantes.

Soient $\varrho_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, resp. les valeurs des expressions (68) en (69). Considérons les k équations

$$a_\varkappa r_\varkappa + b_\varkappa s_\varkappa - \varrho_\varkappa - \frac{T_{n-\varkappa}}{T_n} = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \tag{70}$$

c'est-à-dire, d'après (26):

$$a_\varkappa r_\varkappa + b_\varkappa s_\varkappa - \varrho_\varkappa - \frac{J p_{n-\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{k} f_{n-\varkappa,\lambda}\, p_\lambda}{J p_n + \sum_{\lambda=1}^{k} f_{n,\lambda}\, p_\lambda} = 0, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

D'après nos hypothèses, ces équations sont résolubles par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$ pour $p_n = 1$, $p_\nu = 0$, $\nu \neq n$, au voisinage de (69), et le Jacobien des expressions de gauche en (70) reste $\neq 0$ pour nos valeurs des p_ν. Donc les équations (70) sont résolubles par rapport aux $r_1, \ldots, r_k$ pour les valeurs des x_ν au voisinage des x_ν^0 et celles des p_ν au voisinage des valeurs spéciales indiquées.

54. Pour montrer que les fonctions obtenues en résolvant (70) par rapport aux $r_\varkappa$ sont indépendantes par rapport aux p_ν, choisissons un ensemble de k variables $p_\nu : (p_{\nu_1}, \ldots, p_{\nu_k})$, $p_\nu \neq p_n$, tel que le déterminant des formes $t_{n-k}, \ldots, t_{n-1}$ par rapport aux $p_{\nu_1}, \ldots, p_{\nu_k}$ reste $\neq 0$ en (69), et désignons les expressions de gauche en (70) par $F_\varkappa$. On a alors la relation entre les jacobiens

$$(-1)^k \frac{\partial (F_1, \ldots, F_k)}{\partial \left(\dfrac{p_{\nu_1}}{p_n}, \ldots, \dfrac{p_{\nu_k}}{p_n}\right)} = \frac{\partial (F_1, \ldots, F_k)}{\partial (r_1, \ldots, r_k)} \cdot \frac{\partial (r_1, \ldots, r_k)}{\partial \left(\dfrac{p_{\nu_1}}{p_n}, \ldots, \dfrac{p_{\nu_k}}{p_n}\right)}$$

dont il résulte que le jacobien des $r_\varkappa$ par rapport aux $\dfrac{p_{\nu_1}}{p_n}, \ldots, \dfrac{p_{\nu_k}}{p_n}$ reste $\neq 0$.

De l'autre côté, si l'on forme les équations transformées des équations (70) par R^*, on voit de la même façon que ces équations sont résolubles par rapport aux $s_1, \ldots, s_k$ au voisinage de (69) et des valeurs des q_ν correspondant aux $p_1 = \cdots = p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$, et que les expressions des $s_1, \ldots, s_k$ ainsi obtenues en fonctions des $q_1, \ldots, q_n$ sont indépendantes par rapport aux $q_1, \ldots, q_{n-1}$, puisque les formes $t_{n-1}, \ldots, t_{n-k}$ restent linéairement indépendantes, si l'on les exprime par $q_1, \ldots, q_n$.

55. Nous donnons enfin un dernier exemple, particulièrement simple, pour l'application du théorème V. Soit, pour $n=4$, $k=1$, la transformation R^*

$$s_1=x_1,\quad y_1=r_1,\quad y_\nu=x_\nu \qquad (\nu=2,3,4),$$
$$r_1=y_1,\quad x_1=s_1,\quad x_\nu=y_\nu \qquad (\nu=2,3,4).$$

Alors on obtient

$$t_\lambda=p_\lambda,\quad u_\lambda=q_\lambda,\quad p_\lambda=q_\lambda, \qquad \lambda=2,3,4,$$

et le système (33) se réduit à une équation

$$F(r_1,p_2,p_3,p_4,x_1,\ldots,x_4)=0,$$

résoluble par rapport à r_1 et telle que sa transformée

$$F(y_1,q_2,q_3,q_4,s_1,x_2,x_3,x_4)=0$$

soit résoluble par rapport à s_1. On choisira donc F tel que les deux dérivées F'_{r_1}, F'_{x_1} ne s'annulent pas. En spécialisant F on obtient p. ex. l'équation

$$r_1+x_1=\varphi(p_2,p_3,p_4,x_2,x_3,x_4)$$

à laquelle correspondent les valeurs de r_1, s_1:

$$r_1=\varphi(p_2,p_3,p_4,x_2,x_3,x_4)-x_1,$$
$$s_1=\varphi(q_2,q_3,q_4,y_2,y_3,y_4)-y_1.$$

La transformation R correspondante est

$$(71)\qquad \begin{cases} y_1=\varphi(p_2,p_3,p_4,x_2,x_3,x_4)-x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3,\ y_4=x_4,\\ x_1=\varphi(q_2,q_3,q_4,y_2,y_3,y_4)-y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3,\ x_4=y_4,\end{cases}$$

transformation qui est évidemment *involutive.*

φ est ici une fonction arbitraire de ses 6 variables, homogène par rapport aux trois premières et douée de dérivées premières continues.

56. Les transformations caractéristiques correspondant aux transformations R, ne sont pas univoquement déterminées par ces dernières. En effet, on peut remplacer les $2k$ fonctions (4) par $2k$ autres expressions $\bar r_\varkappa$ en x_ν, p_ν et $\bar s_\varkappa$ en y_ν, q_ν exprimables resp. par x_ν, $r_\varkappa$ et par y_ν, $s_\varkappa$:

$$(72)\quad \bar r_\varkappa=\overline{R}_\varkappa(x_1,\ldots,x_n,r_1,\ldots,r_k),\quad \bar s_\varkappa=\overline{S}_\varkappa(y_1,\ldots,y_n,s_1,\ldots,s_k),\quad \varkappa=1,\ldots,k,$$

si les équations (72) sont résolubles par rapport aux $r_\varkappa$, $s_\varkappa$. En éliminant $r_\varkappa$, $s_\varkappa$ des relations (5), (6), (8), (9) et (72), on obtient une nouvelle transformation caractéristique appartenant à la même transformation R. C'est une «deformation permise» de R^*.

57. Quels sont les éléments invariants, communs à toutes les transformations caractéristiques d'une transformation R donnée? Il est facile de voir qu'en éliminant les $r_\varkappa$ et $s_\varkappa$ des relations (5), (6), (8), (9), on obtient $n-k$ équations entre les x_ν et les y_ν, qui sont indépendantes et déterminent une correspondance C entre les espaces S et T. Par cette correspondance, aux *points* de l'espace S correspondent des *variétés de dimension* $n-k$ de l'espace T et vice versa. Une telle correspondance sera appelée une correspondance de *rang* $n-k$.

Or, il est clair que C ne dépend pas de la transformation caractéristique R^* individuelle, mais seulement de la transformation R elle même, puisqu'on obtient évidemment la même correspondance, en éliminant les p_ν des équations (1), ou bien les q_ν des équations (2). Donc, on ne change pas la correspondance C, en exerçant une déformation permise sur la transformation R^*. Or, l'inverse est aussi exact: *Deux transformations caractéristiques R^*, $\bar{R}^*$ conduisant à la même correspondance C, s'obtiennent l'une de l'autre par une déformation permise.*

58. On démontre ce fait en observant que, par une déformation permise, la transformation caractéristique peut être toujours réduite à la forme où chaque $r_\varkappa$ est égal à un des y_ν et chaque $s_\varkappa$ est égal à un des x_ν. On peut donc réduire, par des déformations permises, nos deux transformations caractéristiques R^*, $\bar{R}^*$ aux formes suivantes:

$$(73)\qquad \begin{cases} \{C\}, \quad r_\varkappa = y_{\nu_\varkappa}, \quad s_\varkappa = x_{\mu_\varkappa}, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \ (R^*), \\ \{C\}, \quad \bar{r}_\varkappa = y_{\bar{\nu}_\varkappa}, \quad \bar{s}_\varkappa = x_{\bar{\mu}_\varkappa}, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k, \ (\bar{R}^*). \end{cases}$$

Ici $\{C\}$ désigne l'ensemble des $n-k$ équations déterminantes de la correspondance C, et ces $n-k$ équations sont résolubles par rapport à chacun des 4 systèmes suivants de $n-k$ variables: 1) tous les y_ν autres que $y_{\nu_\varkappa}$; 2) tous les y_ν autres que les $y_{\bar{\nu}_\varkappa}$; 3) tous les x_ν autres que les $x_{\mu_\varkappa}$ et 4) tous les x_ν autres que les $x_{\bar{\mu}_\varkappa}$.

Mais alors, en éliminant des équations (73) les k variables $y_{\nu_\varkappa}$ et en résolvant les équations $\{C\}$ par rapport aux y_ν restants, on obtient évidemment les expressions des $\bar{r}_\varkappa$ par les $r_\varkappa$ et les $x_1, \ldots, x_n$; et de la même façon on exprime les $\bar{s}_\varkappa$ par les $s_\varkappa$ et les $y_1, \ldots, y_n$. $\bar{R}^*$ s'obtient donc en effet de R^* par une déformation permise.

59. On pourrait d'ailleurs développer la théorie des transformations R, en partant de la correspondance C obtenue directement de la transformation (1), sans utiliser les transformations caractéristiques. Les formules qu'on obtient ainsi sont moins explicites que dans la théorie donnée dans le présent mémoire, mais de l'autre côté ce point de départ permet de former toutes les transformations réversibles non seulement dans le cas d'éléments de ligne, mais aussi dans le cas où l'on considère des éléments différentiels de dimension supérieure à 1. Nous exposerons ces résultats dans un autre mémoire.