

# ABBILDUNGSKLASSEN ENDLICHER ORDNUNG.

VON

JAKOB NIELSEN

in KOPENHAGEN.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	24
1. Fundamentalgruppe und Überlagerungsfläche . . . . .	29
2. Selbstabbildungen der Fläche . . . . .	32
3. Abbildung der Grenzpunktmenge . . . . .	33
4. Stetiger Anschluss der Grenzpunktabbildung . . . . .	35
5. Die Gruppe $T$ . . . . .	36
6. Elemente endlicher Ordnung . . . . .	39
7. Elemente unendlicher Ordnung . . . . .	41
8. Verschiebungslängen für die Gruppe $T$ . . . . .	43
9. Struktur der Untergruppen $T_A^*$ . . . . .	44
10. Multiplizität . . . . .	46
11. Konjugierte und kongruente Elemente und Untergruppen von $T$ . . . . .	46
12. Einteilung von $K_F$ durch mod $T$ einfache Achsen . . . . .	51
13. Erweiterung von $T$ auf die Äquivalenzklasse einer mod $T$ einfachen, nicht-amphidromen Achse . . . . .	54
14. Erweiterung von $T$ auf die Äquivalenzklasse einer mod $T$ einfachen, amphidromen Achse . . . . .	57
15. Querschnitte . . . . .	59
16. Mod $T$ einfache Querschnitte . . . . .	61
17. Der allgemeine Fall des Hauptproblems . . . . .	63
18. Erweiterung von $T$ auf $K_F$ bei Nicht-Existenz von mod $T$ einfachen inneren Achsen und $q > 0$ . . . . .	65
19. Erweiterung von $T$ auf $K_F$ bei Existenz von mod $T$ einfachen Achsen . . . . .	75
20. Mittlere Verschiebungslänge . . . . .	78
21. Ein Hilfssatz . . . . .	80

	Seite
22. Verkleinerung der mittleren Verschiebungslänge . . . . .	82
23. Der Spezialfall . . . . .	93
24. Eine Ungleichung zwischen den Ordnungen . . . . .	94
25. Regularisierung der Untergruppe $T'$ . . . . .	96
26. Index von $T'$ in $T$ . . . . .	103
27. Anwendung der Verzweigungsformel von Hurwitz . . . . .	104
28. Anwendung einer Ungleichung von Wiman . . . . .	108
29. Der Fall des Index 2 . . . . .	110
30. Nicht-Existenz von mod $T$ einfachen Achsen im Spezialfall . . . . .	115

### Einleitung.

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist eine orientierbare, geschlossene oder berandete Fläche  $\varphi$  endlichen Zusammenhangs. Sei  $p \geq 0$  das Geschlecht und  $q \geq 0$  die Ränderzahl von  $\varphi$ . Stetige Abbildungen von  $\varphi$  in sich, die sich stetig ineinander überführen lassen, fasst man zu einer *Abbildungsklasse* zusammen. Diejenige Abbildungsklasse von  $\varphi$  in sich, die die identische Abbildung enthält, heisst *Klasse der Identität*. Wir betrachten nur solche Abbildungsklassen, welche topologische, die Orientierung von  $\varphi$  erhaltende Abbildungen enthalten; der Abbildungsgrad der Abbildungen hat also den Wert  $+1$ . Diese Abbildungsklassen bilden eine Gruppe, wenn unter dem Produkt  $KL$  zweier Klassen  $K$  und  $L$  diejenige (eindeutig bestimmte) Klasse verstanden wird, die das Produkt  $kl$  einer Abbildung  $k$  aus  $K$  und einer Abbildung  $l$  aus  $L$  enthält. (Das Produkt  $kl$  wird hier so verstanden, dass erst  $l$  und dann  $k$  ausgeführt wird.) Eine Abbildungsklasse  $K$  von  $\varphi$  heisst von der endlichen Ordnung  $n > 0$ , wenn  $K^n$ , aber keine niedrigere Potenz von  $K$ , die Klasse der Identität ist. In dieser Abhandlung werden die Eigenschaften von Abbildungsklassen endlicher Ordnung systematisch untersucht. Als Hauptergebnis wird dabei der folgende Satz bewiesen:

*Jede Abbildungsklasse der endlichen Ordnung  $n$  enthält eine periodische Abbildung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, d. h. eine solche topologische Abbildung von  $\varphi$  auf sich, deren  $n^{\text{te}}$  Potenz die identische Abbildung ist.*

In drei früheren Abhandlungen in dieser Zeitschrift<sup>1</sup> habe ich die Grundlagen einer Theorie der Selbstabbildungen von Flächen entwickelt und auf die

---

<sup>1</sup> Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. Acta mathematica I Bd 50, 189—358, II 53, 1—76, III 58, 87—167. Diese Abhandlungen werden im folgenden mit I, II und III zitiert.

Bedeutung der hier behandelten Fragestellung für den ganzen Fragenkreis der Flächentopologie hingewiesen. Insbesondere befasst sich die Abhandlung III fast ausschliesslich mit ihr und bringt eine Reihe von Teillösungen, die jedoch im folgenden nicht benötigt werden abgesehen von einigen Einzelheiten in § 27 und 28.

Die in der vorliegenden Abhandlung verwendeten Hilfsmittel werden am Anfang kurz zusammengestellt.

Da die Fälle niedrigsten Zusammenhanges von  $\varphi$ , nämlich diejenigen, wo  $2p + q \leq 2$  ist, eine Sonderstellung einnehmen, andererseits aber ohne Schwierigkeiten zu erledigen sind, werden sie in dieser Einleitung besprochen, um später die Darstellung einheitlich halten zu können.

Für  $p = 0, q = 0$  (Kugel) und  $p = 0, q = 1$  (Kreisscheibe) ist der obige Satz trivialerweise richtig. Denn jede topologische, die Orientierung erhaltende Abbildung gehört selbst schon zur Klasse der Identität. Man hat also nur  $n = 1$ , und die Ausgangsklasse enthält selbst schon die identische Abbildung. Einen wirklichen Inhalt erhält der Satz eben erst für  $n > 1$ .

Für  $p = 0, q = 2$  (Kreisring) gibt es eine und nur eine Abbildungsklasse endlicher Ordnung  $n > 1$ , und für diese ist  $n = 2$ . Abbildungen der Klasse erhält man, indem man den Ring topologisch so auf sich abbildet, dass die beiden Randkreise vertauscht und mit umgekehrtem Durchlaufungssinn abgebildet werden. Sind  $r$  und  $R$  die Radien der beiden (konzentrisch gedachten) Randkreise, so ist die Inversion an dem mit ihnen konzentrischen Kreis vom Radius  $\sqrt{rR}$ , kombiniert mit der Spiegelung an einem Durchmesser, eine zur Klasse gehörige Abbildung, deren zweite Potenz die Identität ist. — Zum Vergleich mit dem folgenden sei erwähnt, dass die Fundamentalgruppe des Kreisringes die freie Gruppe mit einer Erzeugenden ist. Die Ersetzung dieser Erzeugenden durch ihre Reziproke ist der einzige nicht identische Automorphismus der Fundamentalgruppe; und dieser wird durch die obige, die Orientierung erhaltende Abbildung induziert.

Für  $p = 1, q = 0$  liegt der Fall des Torus vor. Seien  $a$  und  $b$  Erzeugende seiner (abelschen) Fundamentalgruppe  $F$ . Eine topologische Selbstabbildung induziert einen Automorphismus von  $F$ , bei dem  $a$  und  $b$  in Elemente

$$a' = a^\alpha b^\beta$$

$$b' = a^\gamma b^\delta$$

übergehen, wobei  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  ganze Zahlen mit  $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$  sind, und zwar muss  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  sein, da die Orientierung der Fläche erhalten bleiben soll.

Die Matrix  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  hängt nur von der Klasse der Abbildung ab, und umgekehrt bestimmt jede Matrix dieser Art eine Abbildungsklasse. Die Matrizen bilden eine Gruppe, die isomorphes Bild der Gruppe der betrachteten Abbildungsklassen ist. Ist nun eine Abbildungsklasse von endlicher Ordnung  $n$ , so muss für die entsprechende Matrix

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gelten. Erzeugt man den Torus durch Reduktion der euklidischen  $xy$ -Ebene modulo 1, so ist die Transformation

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \gamma y \\ y' &= \beta x + \delta y \end{aligned}$$

eine Abbildung der betreffenden Abbildungsklasse, und da nach (1) auch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, ist die  $n^{\text{te}}$  Potenz der Abbildung die Identität. Auch hier ist also die Aussage des Satzes fast evident, da sich eine besonders einfache periodische, in der Klasse enthaltene Abbildung unmittelbar angeben lässt.

Identifiziert man solche Punkte einer Fläche  $\varphi$ , die sich bei einer periodischen Abbildung und ihren Potenzen entsprechen, so erhält man, wie Brouwer<sup>1</sup> gezeigt hat, eine neue Fläche  $M$ , die »Modulfläche« der periodischen Abbildung heisst. Die ursprüngliche Fläche  $\varphi$  ist eine reguläre  $n$ -blättrige Überlagerungsfläche von  $M^2$ .

<sup>1</sup> L. E. J. BROUWER: Über topologische Involutionen. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proc. Vol. XXI, 1143—1145 (1919).

<sup>2</sup> Im Fall des Torus erhält man die endlich vielen Typen von Abbildungen endlicher Ordnung am einfachsten mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + 1 = \lambda^2 - s\lambda + 1,$$

dessen Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  wegen (1)  $n^{\text{te}}$  Einheitswurzeln sind (vgl. III, S. 98). Da die Koeffizienten von  $P(\lambda)$  ganz rational sind, muss das Zahlenpaar  $\lambda_1, \lambda_2$  aus vollständigen Systemen primitiver Einheitswurzeln bestehen. Danach ergeben sich nur folgende Möglichkeiten:

Der Gang des Beweises für den obigen Hauptsatz im allgemeinen Fall  $2p + q > 2$  kann zur Erleichterung der Übersicht folgendermassen anschaulich beschrieben werden.

Bei einer stetigen Abbildung der Fläche  $\varphi$  auf sich gehen homotope geschlossene Kurven wieder in homotope geschlossene Kurven über. Einer Klasse homotoper Kurven entspricht also wieder eine solche Klasse, und diese Zuordnung ist offenbar dieselbe für alle Abbildungen derselben Abbildungsklasse. Ist auf  $\varphi$  in bekannter Weise eine Metrik konstanter negativer Krümmung eingeführt, wobei die eventuellen Randkurven als geodätische Linien gewählt seien, so enthält jede Klasse homotoper geschlossener Kurven genau eine geschlossene geodätische Linie. Die Vorgabe einer Abbildungsklasse impliziert also eine symbolische Zuordnung der geschlossenen geodätischen Linien, und diese Zuordnung und die Abbildungsklasse sind gleichzeitig von endlicher, und zwar derselben Ordnung.

Es liege nun eine Abbildungsklasse  $K$  der Ordnung  $n$  vor, und es werde angenommen, dass es doppelpunktfreie geschlossene geodätische Linien  $G_1, G_2, \dots, G_r$  derart gibt, dass sie selbst und die ihnen bei den Potenzen der Zuordnung entsprechenden  $K G_\rho, K^2 G_\rho, \dots, K^{n-1} G_\rho, \rho = 1, \dots, r$ , zu je zweien punktfremd sind. Dieses System von geodätischen Linien sei so umfassend wie möglich gewählt,

---

I.	$n = 6,$	$\lambda_{1,2} = e^{\pm \frac{\pi i}{3}},$	$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1,$	$s = 1.$
II.	$n = 4,$	$\lambda_{1,2} = \pm i,$	$P(\lambda) = \lambda^2 + 1,$	$s = 0.$
III.	$n = 3,$	$\lambda_{1,2} = e^{\pm \frac{2\pi i}{3}},$	$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1,$	$s = -1.$
IV.	$n = 2,$	$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,$	$P(\lambda) = (\lambda + 1)^2,$	$s = -2.$
V.	$n = 1,$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$	$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2,$	$s = 2.$

Beispiel einer Matrix 6<sup>ter</sup> Ordnung (Typ I) ist  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; ihr Quadrat gehört zum Typ III und ihre dritte Potenz zum Typ IV. Beispiel einer Matrix 4<sup>ter</sup> Ordnung (Typ II) ist  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; ihr Quadrat gehört zum Typ IV. Aus den Spuren  $s$  der Matrix und ihrer Potenzen liest man (z. B. mittels der Alexanderschen Formel) die Anzahl der Verzweigungspunkte ab. In allen Fällen mit Ausnahme des trivialen Typ V, wo sie ebenfalls der Torus ist, ist die Modulfläche die Kugel; die Anzahl der Verzweigungspunkte ist bei den Typen I, II und III gleich 3 und beim Typ IV gleich 4.

Dass dies die einzigen regulären Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 über der Kugel sind, ist natürlich längst bekannt. Man pflegt sich bei ihrer Aufstellung der Verzweigungsformel von RIEMANN-HURWITZ zu bedienen. Vgl. z. B. APPEL et GOURSAT: *Théorie des fonctions algébriques*. Paris 1895. S. 241. L. E. J. BROUWER: *Énumération des surfaces de Riemann régulières de genre un*. C. R. Ac. Scie. Paris. 168, 677 (1919).

d. h. es sei unmöglich, eine Linie derart hinzuzufügen, dass die genannten Eigenschaften gewahrt bleiben. Die Gesamtheit dieser Linien reproduziert sich offenbar bei der Zuordnung  $K$ . Denkt man sich nun die Fläche  $\varphi$  längs aller dieser Linien aufgeschnitten, so zerfällt sie in Teilflächen, derart dass den Randkurven einer Teilfläche bei  $K$  wieder die Randkurven einer Teilfläche entsprechen. Durch  $K$  ist also in abstracto eine Permutation der Teilflächen gegeben. Ist  $\varphi'$  eine der Teilflächen, so bilden diejenigen Potenzen von  $K$ , bei denen sie sich selbst entspricht, eine zyklische Untergruppe der Gruppe aller Potenzen von  $K$ . Es bezeichne  $K'$  eine Erzeugende dieser Untergruppe. Dann liegt zunächst für  $\varphi'$  und  $K'$  statt  $\varphi$  und  $K$  wieder die ursprüngliche Aufgabe vor, wobei aber  $\varphi'$  von einfacherer Struktur als  $\varphi$  ist, indem es im Innern von  $\varphi'$  keine einfach geschlossene geodätische Linie gibt, die mit allen ihren zugeordneten paarweise punktfremd ist.

Eine solche Teilfläche  $\varphi'$  wird nun weiter unterteilt durch Verwendung von »Querschnitten«, d. h. geodätischen Verbindungen kürzester Länge eines Punktes einer ausgewählten Randseite von  $\varphi'$  mit einem anderen Punkte derselben Randseite. Ein solcher Querschnitt  $S$  bestimmt zusammen mit einem der beiden Teilbögen der Randseite, welche seine Endpunkte verbinden, eine Klasse homotoper Kurven. Dieser und der Randseite entspricht bei  $K'$  eine bestimmte Kurvenklasse und eine bestimmte Randseite, und damit wieder ein bestimmter Querschnitt, der mit  $K'S$  bezeichnet werden kann. Es wird dann gezeigt, dass man  $S$  so wählen kann, dass die Querschnitte  $K'S$  paarweise punktfremd sind, sodass sie eine gut zu überblickende Unterteilung von  $\varphi'$  in kleinere Teilflächen ergeben.

Die dabei entstehenden Teilflächen zerfallen in zwei Typen: erstens einfach zusammenhängende polygonale Bereiche, zweitens ringförmige Bereiche, die von einer Randkurve von  $\varphi'$  und einem einfach geschlossenen Polygon begrenzt werden. Ein Bereich der ersten Art geht nun bei den Potenzen von  $K'$  entweder in einen anderen über oder er wird in sich »gedreht«, genauer die Zuordnung seiner Seiten ist dieselbe wie bei einer Drehung des Bereichs in sich. Ein Bereich der zweiten Art geht entweder in einen anderen über oder er wird im gleichen symbolischen Sinne in sich gedreht, wobei jede der beiden Randkurven mit sich zur Deckung kommt. In beiden Fällen ist es leicht, eine weitere Unterteilung in endlich viele Teilbereiche derart vorzunehmen, dass jeder einzelne Teilbereich nur noch bei der  $0^{\text{ten}}$  Potenz von  $K'$ , d. h. bei der Identität sich selbst entspricht.

Mit Hilfe der Potenzen von  $K$  kann man nun diese Einteilung auf die Bilder von  $\varphi'$  bei diesen Potenzen von  $K$  übertragen. Erschöpfen diese nicht ganz  $\varphi$ , so setzt man das Verfahren mit einer neuen Teilfläche  $\varphi''$  fort. Man gewinnt so eine Zerschneidung der Fläche in Teilbereiche, die bei  $K$  und seinen Potenzen derart permutiert werden, dass kein Teilbereich mehr sich selbst entspricht. Nun ist es relativ leicht, eine topologische Abbildung von  $\varphi$  auf sich zu konstruieren, bei der diese Permutation der Teilbereiche realisiert ist, und zwar wird sie zuerst auf den bei der Zerschneidung benutzten Linien definiert und dann in das Innere der Teilbereiche fortgesetzt.

Dieses Verfahren beruht auf der anfangs genannten Voraussetzung der Existenz von einfach geschlossenen geodätischen Linien, die mit ihren zugeordneten paarweise punktfremd sind. Es wird gezeigt, dass diese Voraussetzung im allgemeinen, d. h. abgesehen von einem sehr speziellen Fall, der nur bei geschlossenen Flächen eintreten kann, erfüllt ist. In diesem Ausnahmefall muss die Zerschneidung auf andere Weise unter Ausnutzung der dabei vorliegenden besonderen Verhältnisse vorgenommen werden.

Die ganze geschilderte Konstruktion wird im folgenden nicht wie hier einleitend der Anschaulichkeit halber auf der Fläche, sondern auf deren universeller Überlagerungsfläche durchgeführt. Wird diese isometrisch auf das Innere des Einheitskreises abgebildet, so lässt sich die genannte Zuordnung der geodätischen Linien als topologische Abbildung der Peripherie des Einheitskreises oder einer ihrer Teilmengen auf sich interpretieren. Diese Abbildung bildet den Ausgangspunkt der Konstruktion.

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Dr. W. Fenchel, der mir bei dem Zustandekommen und der Ausarbeitung dieser Abhandlung in vielfacher Weise behilflich gewesen ist, meinen herzlichen Dank aussprechen.

### 1. Fundamentalgruppe und Überlagerungsfläche.

Sei  $\varphi$  eine orientierbare, geschlossene oder berandete Fläche endlichen Zusammenhangs,  $p \geq 0$  das Geschlecht und  $q \geq 0$  die Ränderzahl von  $\varphi$ . Nach dem in der Einleitung ausgeführten wird

$$(1, 1) \quad 2p + q > 2$$

vorausgesetzt. Für  $p=0$  hat man also  $q \geq 3$  (Kugel mit mindestens 3 Löchern), für  $p=1$  hat man  $q \geq 1$  (Torus mit mindestens einem Loch), und für  $p \geq 2$  hat man  $q \geq 0$ .

Die Fundamentalgruppe  $F$  von  $\varphi$  lässt sich bekanntlich durch  $p$  Paare von Elementen  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$  und (falls  $q > 0$  ist)  $q$  den Umläufen um die einzelnen Randkurven entsprechende Elemente  $c_1, c_2, \dots, c_q$  in solcher Weise erzeugen, dass als einzige definierende Relation

$$(1, 2) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} c_1 c_2 \dots c_q = 1$$

auftritt. Für  $q > 0$  lässt sich eine Erzeugende mit Hilfe der Relation eliminieren, und die übrigen werden dadurch frei,  $F$  ist also die freie Gruppe mit  $2p + q - 1$  Erzeugenden. Für  $q = 0$  ist  $F$  keine freie Gruppe.

Für jede der Bedingung (1, 1) genügende Fläche  $\varphi$  lässt sich die universelle Überlagerungsfläche bekanntlich in der Weise metrisch regulär in der hyperbolischen Ebene darstellen, dass die zu  $F$  isomorphe Gruppe der Decktransformationen in eine diskontinuierliche hyperbolische Bewegungsgruppe übergeht. Die hyperbolische Ebene werde konform auf das Innere  $D$  des Einheitskreises  $E$  der Ebene einer komplexen Variablen  $x$  abgebildet. Ihren Geraden entsprechen dabei die zu  $E$  orthogonalen Kreisbögen, und die Elemente von  $F$  werden linear gebrochene, hyperbolische Substitutionen in  $x$ , die  $E$  in sich und  $D$  in sich überführen und dabei zwei getrennte Punkte von  $E$  festlassen. Diese heißen die *Grundpunkte* und der sie in  $D$  verbindende, zu  $E$  orthogonale Kreisbogen die *Achse* des betreffenden Elements. Zwei verschiedene Achsen haben niemals einen Grundpunkt gemeinsam. Unter der *Verschiebungslänge* des Elements wird die nichteuklidische Länge verstanden, um die es die Punkte der Achse verschiebt. Die zu ein und derselben Achse gehörigen Elemente von  $F$  bilden eine diskontinuierliche abelsche Untergruppe von  $F$ . Unter ihnen gibt es zwei (zueinander reziproke) mit kleinster Verschiebungslänge; jedes dieser Elemente erzeugt die Untergruppe und heisst ein zur Achse gehöriges *primäres Element*. — Zwei Elemente mit verschiedenen Achsen sind nicht vertauschbar.

Die Menge der Grundpunkte der Elemente von  $F$  wird mit  $G_F$  bezeichnet; sie ist eine abzählbare Punktmenge auf  $E$ . Ihre abgeschlossene Hülle heisst Menge der *Grenzpunkte* von  $F$  und wird mit  $\bar{G}_F$  bezeichnet. Die Menge  $Fx$  der Punkte, die aus einem beliebigen Punkt  $x$  durch die Elemente von  $F$  hervorgehen, hat genau  $\bar{G}_F$  als Häufungsmenge<sup>1</sup>. Für eine endlich zusammenhängende

<sup>1</sup> Siehe z. B. § 8 meiner Abhandlung: Über Gruppen linearer Transformationen. [Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 8, 82—104 (1940)].

In dieser Arbeit sind die grundlegenden Eigenschaften von Gruppen, die ganz aus hyperbolischen Substitutionen bestehen, hergeleitet.

Fläche  $\varphi$ , wie sie hier betrachtet wird, gilt ferner Folgendes: Ist  $\varphi$  geschlossen (also  $q = 0$ ,  $p \geq 2$ ), so ist  $\bar{G}_F$  mit ganz  $E$  identisch. Ist  $\varphi$  berandet (also  $q > 0$ ), so ist  $\bar{G}_F$  eine perfekte, nirgends dichte Teilmenge von  $E$ . Die Menge  $E - \bar{G}_F$  besteht also aus abzählbar vielen Intervallen, die *Regularitätsintervalle* von  $F$  genannt werden. Jedes Regularitätsintervall  $i$  wird von einem zusammengehörigen Grundpunktepaar, also den Endpunkten einer Achse von  $F$  begrenzt (l. c.<sup>1</sup>, § 13). Lässt man von  $D$  die von dieser Achse und  $i$  begrenzte nicht-euklidische Halbebene fort und entsprechend für alle übrigen Regularitätsintervalle, so bleibt eine nicht-euklidisch konvexe Restfigur  $K_F$ ,

die als *Konvexfigur* von  $F$  bezeichnet wird. Siehe Fig. 1, wo man sich unendlich viele Regularitätsintervalle vorzustellen hat. Im Falle  $q = 0$  wird unter der Konvexfigur von  $F$  ganz  $D$  verstanden. Jedes Element von  $F$  führt  $G_F$ ,  $\bar{G}_F$ , also  $K_F$  in sich über. Die Konvexfigur ist in beiden Fällen das Abbild der universellen Überlagerungsfläche von  $\varphi$ . Mit anderen Worten:  $\varphi$  entsteht in abstracto aus  $K_F$ , wenn man bezüglich  $F$  äquivalente Punkte von  $K_F$  identifiziert. Statt  $\varphi$  kann daher auch  $K_F \bmod F$  geschrieben werden. Der Achse eines

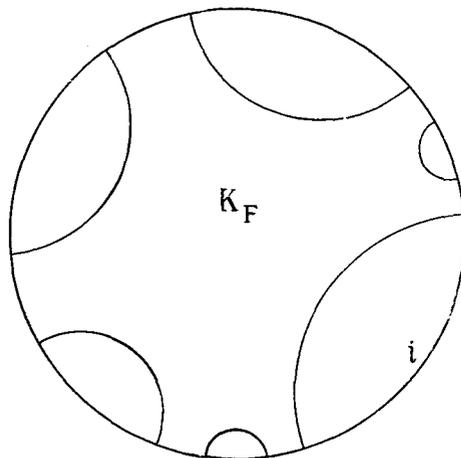


Fig. 1.

Elements von  $F$  entspricht hierbei auf  $\varphi$  eine geschlossene geodätische Linie im Sinne der von der hyperbolischen Ebene übertragenen Metrik. Die Verschiebungslänge der beiden zur Achse gehörigen primären Elemente ist gleich der Länge der geodätischen Linie. Umgekehrt entspricht einer geschlossenen geodätischen Linie von  $\varphi$  eine Klasse bezüglich  $F$  äquivalenter Achsen. Für  $q > 0$  sind die Achsen, deren Endpunkte Regularitätsintervalle begrenzen, Randseiten von  $K_F$  und heissen daher kurz *Randachsen*. Sie verteilen sich auf  $q$  Äquivalenzklassen bezüglich  $F$ , und jeder dieser Klassen entspricht eine der  $q$  Randkurven von  $\varphi$ . Diese Randkurven sind somit geschlossene geodätische Linien im Sinne der  $\varphi$  aufgeprägten nicht-euklidischen Metrik. Die Elemente  $c_1, c_2, \dots, c_q$  von (1, 2) sind primäre Elemente auf gewissen  $q$  der Randachsen von  $K_F$ .

Aus der endlichen Erzeugbarkeit von  $F$  oder, was auf dasselbe hinausläuft,

<sup>1</sup> Siehe die Note S. 30.

aus der Endlichkeit des Zusammenhangs von  $\varphi$  lässt sich folgern, dass es einen im nicht-euklidischen Sinne beschränkten Teilbereich von  $K_F$  gibt, der zu jedem Punkt von  $K_F$  einen bezüglich  $F$  äquivalenten enthält<sup>1</sup>. Insbesondere hat  $F$  in  $K_F$  einen beschränkten Fundamentalbereich. Bei geeigneter Normierung der nicht-euklidischen Flächenmessung ist der Inhalt desselben  $2(2p + q - 2)$ .

## 2. Selbstabbildungen der Fläche.

Eine topologische, die Orientierung erhaltende Abbildung der Fläche  $K_F$  modulo  $F$  auf sich wird durch eine solche topologische, die Orientierung erhaltende Abbildung  $\alpha$  von  $K_F$  auf sich gegeben, die bezüglich  $F$  äquivalente Punkte von  $K_F$  wieder in bezüglich  $F$  äquivalente Punkte überführt. Ist  $x$  ein beliebiger Punkt von  $K_F$  und  $f$  ein beliebiges Element von  $F$ , so gibt es also ein solches Element  $f_I$  von  $F$ , dass

$$(2, 1) \quad \alpha(f(x)) = f_I(\alpha(x))$$

ist. Hierbei kann  $f_I$  aus Stetigkeitsgründen nicht von  $x$  sondern nur von  $f$  und  $\alpha$  abhängen. Die Abbildung  $\alpha$  genügt also in ganz  $K_F$  der Funktionalgleichung (2, 1), die im folgenden kurz

$$(2, 2) \quad \alpha f = f_I \alpha$$

geschrieben wird. Die nur von  $\alpha$  abhängige Zuordnung  $I$  von  $f_I$  zu  $f$  ist dabei, wenn  $f$  die ganze Gruppe  $F$  durchläuft, ein Automorphismus von  $F$ .

Zwei Abbildungen  $\alpha$  und  $\alpha_1$  von  $K_F$  auf sich, die äquivalente Punkte in äquivalente Punkte überführen, ergeben dann und nur dann dieselbe Abbildung von  $K_F$  modulo  $F$ , wenn sie sich nur um eine Decktransformation unterscheiden, d. h. wenn

$$\alpha_1 = g \alpha$$

ist, wo  $g$  ein Element von  $F$  ist. Aus

$$(2, 3) \quad \alpha f \alpha^{-1} = f_I$$

folgt

$$(2, 4) \quad g \alpha f \alpha^{-1} g^{-1} = g f_I g^{-1} = f_I.$$

---

<sup>1</sup> Vgl. I. c. S. 30, § 12.

Zur Abbildung  $g\alpha$  gehört also der Automorphismus  $I_1$ , der  $f$  das Element  $gf_1g^{-1}$  zuordnet. Die Automorphismen  $I$  und  $I_1$  heissen *verwandt* und die Gesamtheit der mit einem Automorphismus verwandten Automorphismen eine *Automorphismenfamilie* von  $F$ . Jeder Abbildung der Fläche  $K_F$  modulo  $F$  auf sich ist somit eine Automorphismenfamilie eindeutig zugeordnet. Bei stetiger Abänderung der Abbildung ändert sich die Automorphismenfamilie nicht; sie ist also ein *Kennzeichen der Abbildungsklasse*. Zur Klasse der Identität gehört die Familie der inneren Automorphismen von  $F$ .<sup>1</sup>

### 3. Abbildung der Grenzpunktmenge.

Ist  $P$  ein beliebiger Grundpunkt von  $F$ , so gibt es, wie schon in 1. erwähnt, genau eine Achse von  $F$ , deren einer Endpunkt  $P$  ist. Ist  $f$  ein zu dieser Achse gehöriges primäres Element, so heisst  $P$  *positiver* oder *negativer* Grundpunkt von  $f$ , je nachdem  $f$  die Punkte von  $E$  auf  $P$  zu oder von  $P$  fort verschiebt. Ist  $P$  positiver Grundpunkt von  $f$ , in welchem Fall wir die Achse von  $f$  als durch  $f$  in der Richtung auf  $P$  zu orientiert denken, so ist  $P$  auch positiver Grundpunkt für alle Elemente  $f^n$ ,  $n > 0$ , und für kein anderes Element von  $F$ . Daraus folgt: Ist  $I$  ein Automorphismus von  $F$ , so ergibt die Festsetzung, dass dem positiven Grundpunkt eines beliebigen Elements  $f$  von  $F$  der positive Grundpunkt von  $f_I$  entsprechen soll, eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Grundpunktmenge  $G_F$  auf sich. Diese Abbildung sei vorläufig ebenfalls mit  $I$  bezeichnet.

Der positive Grundpunkt eines Elements  $f$  werde mit  $V_f$ , der negative mit  $U_f$  bezeichnet.

Ist  $c$  ein stetiger Kurvenbogen, der einen Punkt  $x_0$  von  $K_F$  innerhalb  $K_F$  mit dem Punkt  $fx_0$  verbindet, so verbindet sein Bild  $\alpha c$  bei  $\alpha$  den Punkt  $\alpha x_0$  mit  $\alpha fx_0 = f_I \alpha x_0$ . Fügt man zum Bogen  $c$  seine Bilder bei allen Elementen  $f^n$ ,  $-\infty < n < \infty$ , so erhält man eine stetige Kurve  $C$ , die zwischen dem negativen und dem positiven Grundpunkt von  $f$  verläuft und bei  $f$  mit sich zur Deckung gebracht wird. Eine solche Kurve soll kurz periodisch genannt werden. Das Bild  $\alpha C$  von  $C$  ist offenbar auch periodisch, und zwar verläuft es zwischen den Grundpunkten von  $f_I$  und geht bei  $f_I$  in sich über. Hieraus folgt: Konvergiert ein variabler Punkt  $\alpha$  längs einer periodischen Kurve gegen einen Grundpunkt

<sup>1</sup> Vgl. hierzu § 21—22 der Abhandlung I, i. c. S. 24. Dort ist zwar nur an geschlossene Flächen gedacht, aber die Betrachtung bleibt auch für  $q > 0$  richtig, wenn man nur die Konvexfigur  $K_F$  statt der ganzen Kreisscheibe  $D$  betrachtet.

$P$ , so konvergiert sein Bild  $zx$  gegen den bei der obigen Grundpunktabbildung  $I$  entsprechenden Grundpunkt  $IP$ .

Hieraus ergibt sich weiter, dass die Abbildung  $I$  die zyklische Anordnung der Grundpunkte auf  $E$  ungeändert lässt. Es seien nämlich (Fig. 2)  $P_1, P_2, P_3, P_4$  vier beliebige Grundpunkte in dieser zyklischen Reihenfolge auf  $E$ . Die Strecken  $Q_i P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , seien paarweise punktfremde Stücke der Achsen, die in den Punkten  $P_i$  enden, also Stücke periodischer Kurven. Man verbinde  $Q_1$  mit  $Q_2$  und  $Q_3$  mit  $Q_4$  so in  $K_F$ , dass  $P_1 Q_1 Q_2 P_2$  und  $P_3 Q_3 Q_4 P_4$  zwei zueinander fremde

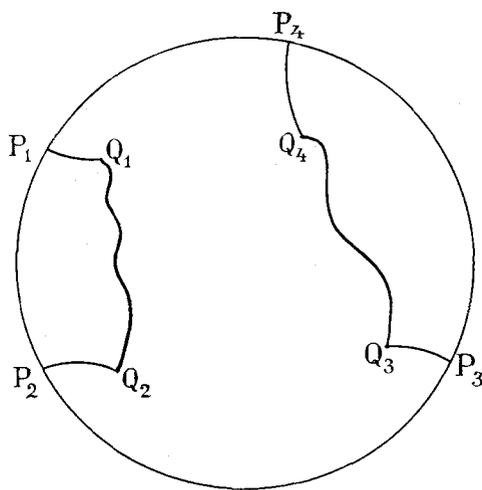


Fig. 2.

Jordanbögen in  $K_F$  sind. Das gleiche gilt dann für ihre Bilder bei  $z$ . Also werden auch die Bildpunkte  $IP_1$  und  $IP_2$  durch  $IP_3$  und  $IP_4$  nicht getrennt. Ebenso folgt, dass  $IP_2$  und  $IP_3$  durch  $IP_1$  und  $IP_4$  nicht getrennt werden. Folglich ist die zyklische Reihenfolge der Bildpunkte  $IP_1, IP_2, IP_3, IP_4$ , was zu beweisen war.

Im Falle  $q > 0$  müssen zwei Grundpunkte, die ein Regularitätsintervall begrenzen, wieder in zwei Grundpunkte übergehen, die ein Regularitätsintervall begrenzen; denn der eine der beiden sie verbindenden Teilbögen von  $E$  ist ja von Grundpunkten frei, und diese Eigenschaft

muss bei  $I$  erhalten bleiben. Die Abbildung  $I$  der Grundpunkte ist ferner stetig. Ist nämlich  $P_1, P_2, \dots$  eine Folge von Grundpunkten, die monoton gegen den Grundpunkt  $P$  konvergiert, so enthält der Bogen  $P_1 P_2 P$  von  $E$  keinen Grundpunkt, der zwischen allen  $P_i$  einerseits und  $P$  andererseits liegt. Diese Eigenschaft muss bei der Abbildung  $I$  erhalten bleiben. Der Bogen  $IP_1, IP_2, IP$  enthält also keinen Grundpunkt, der zwischen  $IP$  und allen  $IP_i$  liegt. Wäre nun  $IP$  nicht Grenzpunkt der monotonen Folge  $IP_i$ , so müsste  $IP$  Endpunkt eines zu diesem Bogen gehörigen Regularitätsintervalls sein, was jedoch unmöglich ist, da der andere Endpunkt des Intervalls ein Grundpunkt wäre, der zwischen  $IP$  und allen  $IP_i$  liegt.

Ein Grenzpunkt von  $F$ , der nicht Grundpunkt ist, ist von beiden Seiten her Häufungspunkt von Grundpunkten. Er kann daher durch einen Schnitt in der zyklisch geordneten Menge der Grundpunkte gekennzeichnet werden, bei dem

die Untermenge kein letztes und die Obermenge kein erstes Element besitzt, und umgekehrt. Nun muss nach dem Gesagten ein Schnitt dieser Art bei  $I$  in einen eben solchen Schnitt übergehen. Die Abbildung  $I$  lässt sich daher zu einer eindeutigen und stetigen Abbildung der Grenzmenge  $\bar{G}_F$  auf sich erweitern.

#### 4. Stetiger Anschluss der Grenzpunktabbildung.

Nun soll gezeigt werden, dass diese Abbildung  $I$  von  $\bar{G}_F$  auf sich stetig an die Abbildung  $\alpha$  von  $K_F$  anschliesst. Für geschlossene Flächen ist dies schon in I (l. c.<sup>1</sup>) bewiesen worden. Wir wollen diesen Beweis so abändern, dass er auch den Fall  $q > 0$  umfasst.

Die auf  $E$  gelegenen Randpunkte der Konvexfigur  $K_F$  sind genau die Punkte von  $\bar{G}_F$ . Sei  $P$  ein beliebiger Punkt von  $\bar{G}_F$  und  $x_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , eine gegen  $P$  konvergierende Folge von Punkten aus  $K_F$ . Ferner sei  $C$  ein nicht-euklidisch beschränkter Teilbereich von  $K_F$ , der zu jedem Punkt von  $K_F$  mindestens einen äquivalenten enthält. (Ein solcher Bereich existiert nach dem in I. Gesagten.) Man kann dann

$$x_\nu = f_\nu x'_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

setzen, wo die Punkte  $x'_\nu$  in  $C$  liegen und  $f_\nu$  Elemente von  $F$  sind. Die Folge  $f_\nu$  kann kein Element von  $F$  unendlich oft enthalten; denn für ein festes  $f$  kann die Folge  $x_\nu$  mit dem beschränkten Bereich  $fC$  nur endlich viele Punkte gemein haben. Nun gilt folgender Satz<sup>2</sup>: Ist  $g_\nu$  eine Folge von Elementen aus  $F$ , die kein Element unendlich oft enthält, und  $M$  eine im nicht-euklidischen Sinne beschränkte Punktmenge in  $D$ , so hat die Mengenfølge  $g_\nu M$  genau dieselbe Häufungsmenge wie die Folge  $V_{g_\nu}$  der positiven Grundpunkte von  $g_\nu$ . In unserem Fall liegt  $x_\nu$  in  $f_\nu C$  und konvergiert gegen  $P$ , und da  $C$  eine endliche nicht-euklidische Ausdehnung hat, kann die Mengenfølge  $f_\nu C$  auch nur  $P$  als einzigen Häufungspunkt haben. Nach dem genannten Satz konvergiert also der positive Grundpunkt  $V_{f_\nu}$  von  $f_\nu$  gegen  $P$ . Nach 3. konvergiert dann der positive Grundpunkt  $V_{(f_\nu)I} = IV_{f_\nu}$  gegen  $IP$ . Nun ist nach (2, 2)

$$\alpha x_\nu = \alpha f_\nu x'_\nu = (f_\nu)_I \alpha x'_\nu,$$

<sup>1</sup> Siehe die Note S. 24.

<sup>2</sup> l. c. S. 30, § 7.

und die Punkte  $\alpha x'_v$  liegen in dem nicht-euklidisch beschränkten Teilbereich  $\alpha C$  von  $K_F$ . Ferner enthält die Folge  $(f_v)_I$  kein Element unendlich oft, da dies für die Folge  $f_v$  gilt, und aus dem obigen Satz folgt daher, dass die Folge  $(f_v)_I \alpha x'_v$ , also  $\alpha x_v$ , gegen  $IP$  konvergiert. Damit ist der stetige Anschluss nachgewiesen. — Die Randabbildung  $I$  erhält dann auch die Orientierung auf  $E$ , da  $\alpha$  sie in  $K_F$  erhält.

Die Abbildung  $I$  von  $\bar{G}_F$  soll daher im folgenden auch mit demselben Symbol  $\alpha$  bezeichnet werden. Wird die gegebene Abbildung der Fläche  $K_F$  modulo  $F$  stetig abgeändert, so ändert sich auch  $\alpha$  stetig, aber so dass die Funktionalgleichung (2, 2) erfüllt bleibt. Hierbei muss aber  $\alpha$  auf  $\bar{G}_F$  ungeändert bleiben, da die Abbildung auf  $\bar{G}_F$  nur von  $I$  abhängt. Die Abbildung  $\alpha$  von  $\bar{G}_F$  hängt also nur von der Abbildungsklasse ab. Die Gesamtheit der Abbildungen  $g\alpha$  von  $\bar{G}_F$ , wo  $g$  die Elemente von  $F$  durchläuft, ist der Abbildungsklasse eindeutig zugeordnet.

### 5. Die Gruppe $T$ .

Den Potenzen der topologischen Abbildung  $\alpha$  von  $K_F$  entsprechen die Potenzen der durch  $\alpha$  dargestellten Selbstabbildung der Fläche  $K_F$  mod  $F$ . Den Abbildungen  $\alpha^r$  und  $f\alpha^r$ ,  $f \in F$ , entspricht dabei wieder dieselbe Flächenabbildung<sup>1</sup>. Speziell ist  $\alpha^0$  die identische Abbildung. Die topologischen Abbildungen  $f\alpha^r$ , wobei  $f$  ganz  $F$  und  $r$  alle ganzen Zahlen durchläuft, bilden nun eine Gruppe. Denn nach (2, 2) ist

$$(f\alpha^r)^{-1} = \alpha^{-r} f^{-1} = f_{I^{-r}}^{-1} \alpha^{-r}$$

und

$$f\alpha^r \cdot g\alpha^s = fg_{I^r} \alpha^{r+s},$$

und diese Multiplikation erfüllt das associative Gesetz, da

$$(f\alpha^r \cdot g\alpha^s) \cdot h\alpha^t = fg_{I^r} \alpha^{r+s} \cdot h\alpha^t = fg_{I^r} h_{I^{r+s}} \alpha^{r+s+t}$$

und

$$f\alpha^r \cdot (g\alpha^s \cdot h\alpha^t) = f\alpha^r \cdot gh_{I^s} \alpha^{s+t} = f(gh_{I^s})_{I^r} \cdot \alpha^{r+s+t}$$

übereinstimmen. Diese Gruppe enthält  $F$  als Normalteiler, was man aus (2, 3) und (2, 4) entnimmt. Eine Restklasse nach  $F$  wird für festes  $r$  durch die Elemente  $F\alpha^r$ , also, wenn

$$f_0 = 1, f_1, f_2, \dots,$$

eine Aufzählung der Elemente von  $F$  ist, durch

$$\alpha^r, f_1 \alpha^r, f_2 \alpha^r, \dots$$

---

<sup>1</sup> Das Inklusionszeichen  $\subset$  bedeutet „ist enthalten in“.

dargestellt. Die Faktorgruppe nach  $F$  wird also durch die Restklasse von  $\alpha$  erzeugt und ist also entweder von unendlicher Ordnung, und dann frei, oder von endlicher Ordnung, und dann zyklisch. Das letztere tritt dann und nur dann ein, wenn es einen Exponenten  $n \neq 0$  gibt, für den  $\alpha^n$  ein Element von  $F$ , also die zugehörige Flächenabbildung die identische ist. Ist  $n$  der kleinste positive Exponent, für den dies zutrifft, so ist die durch  $\alpha$  dargestellte Flächenabbildung periodisch von  $n^{\text{ter}}$  Ordnung.

Nach dem in § 4. ausgeführten ist die Gruppe der Abbildungen  $f\alpha$  nicht nur in  $K_F$  sondern auch in der Grenzmenge  $\bar{G}_F$  definiert und hängt, als Abbildungsgruppe von  $\bar{G}_F$  allein betrachtet, nur von der durch  $\alpha$  induzierten Automorphismenfamilie, also nur von der Klasse der durch  $\alpha$  bestimmten Flächenabbildung ab. Diese der Abbildungsklasse eindeutig zugeordnete Gruppe von Abbildungen der Grenzpunktmenge  $\bar{G}_F$  wird im folgenden mit  $T$  bezeichnet. Sie enthält  $F$  (auf  $\bar{G}_F$  betrachtet) als invariante Untergruppe.

Dass die durch  $\alpha$  bestimmte Flächenabbildung einer Klasse der endlichen Ordnung  $n$  angehört, bedeutet, dass die durch  $\alpha^n$  bestimmte Abbildung zur Klasse der Identität gehört. Dies ist also dann und nur dann der Fall, wenn der durch  $\alpha^n$  induzierte Automorphismus  $I^n$  ein innerer ist. Es gibt dann also ein Element  $\tilde{f}$  von  $F$ , derart dass

$$f_{I^n} = \tilde{f}f\tilde{f}^{-1}$$

für jedes  $f$  aus  $F$  gilt. Die durch  $I^n$  bestimmte Abbildung der Grundpunkte stimmt dann mit der durch das Element  $\tilde{f}$  vermittelten überein, und aus Stetigkeitsgründen folgt, dass die Abbildung  $\alpha^n$  der Grenzpunktmenge mit der durch  $\tilde{f}$  vermittelten Abbildung von  $\bar{G}_F$  übereinstimmt. Wir haben also:

*Die Abbildungsklasse von  $\alpha$  ist dann und nur dann von der endlichen Ordnung  $n$ , wenn die Faktorgruppe  $T/F$  zyklisch von der Ordnung  $n$  ist.*

Wir sind nunmehr im Stande, unserem Problem die folgende präzise Fassung zu geben:

Gegeben ist ein Automorphismus  $I$  von  $F$  mit folgenden Eigenschaften: 1) Die zugehörige Abbildung der Grundpunkte erhält die zyklische Ordnung und die Orientierung von  $E$ , so dass sie zu einer topologischen Abbildung  $\alpha$  der Grenzpunktmenge  $\bar{G}_F$  erweitert werden kann. 2)  $I^n$  ist ein innerer Automorphismus von  $F$ , also  $\alpha^n$  die Abbildung von  $\bar{G}_F$  auf sich durch ein Element  $\tilde{f}$  von  $F$ ; dabei sei  $n$  der kleinste positive Exponent dieser Art. Durch Adjunktion von  $\alpha$  zu  $F$  entsteht dann die Abbildungsgruppe  $T$  von  $\bar{G}_F$  auf sich, die  $F$  als

Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe  $n^{\text{ter}}$  Ordnung enthält. Die Aufgabe besteht nun darin, diese zunächst nur in der Teilmenge  $\bar{G}_F$  des Randkreises gegebene Abbildungsgruppe  $T$  auf die Konvexfigur  $K_F$  auszudehnen, anders ausgedrückt, die Abbildung  $\alpha$  derart zu einer topologischen Abbildung von  $K_F$  zu erweitern, dass auch in  $K_F$

$$\alpha^n = \tilde{f}$$

und die Funktionalgleichung

$$\alpha f = f_1 \alpha$$

für alle  $f$  aus  $F$  erfüllt ist. Diese Abbildung  $\alpha$  bestimmt dann eine zur Automorphismenfamilie von  $I$  gehörige periodische Flächenabbildung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung.

Für die Elemente der als gegeben zu betrachtenden Gruppe  $T$  hat man die Aufzählung

$$\begin{array}{cccccc} 1 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots & \\ \alpha & f_1 \alpha & f_2 \alpha & f_3 \alpha & \dots & \\ \alpha^2 & f_1 \alpha^2 & f_2 \alpha^2 & f_3 \alpha^2 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \alpha^{n-1} & f_1 \alpha^{n-1} & f_2 \alpha^{n-1} & f_3 \alpha^{n-1} & \dots & \end{array}$$

wobei die einzelnen Zeilen die Restklassen nach  $F'$  sind. Für die das Element  $f_\varrho \alpha^r$  enthaltende Restklasse wird im folgenden  $[f_\varrho \alpha^r]$  geschrieben. Es ist also

$$[f_\varrho \alpha^r] = [\alpha^r],$$

und man kann mit den Symbolen  $[\alpha^r]$  rechnen, als ob  $\alpha$  eine primitive  $n^{\text{te}}$  Einheitswurzel wäre.

Ist

$$(5, 1) \quad (r, n) = m$$

der grösste gemeinsame Teiler von  $r$  und  $n$  und

$$(5, 2) \quad n = ml,$$

so ist  $l$  die Ordnung der Restklasse  $[\alpha^r]$  in der Faktorgruppe  $T/F$ . Für ein beliebiges Element  $t = f \alpha^r$  dieser Restklasse ist daher  $l$  der kleinste Exponent, für den  $t^l$  zu  $F$  gehört. In dieser Weise ist jedem Element  $t$  von  $T$  ein Exponent  $l$  zugeordnet, den wir seine *Relativordnung* nennen. Die Elemente von  $F$  und nur diese haben die Relativordnung 1. Konjugierte Elemente von  $T$  haben die gleiche Relativordnung; denn sie gehören zur selben Restklasse, da die

Faktorgruppe abelsch ist. Ist  $t^l = 1$ , so ist  $t$  ein *Element endlicher Ordnung* von  $T$ , und die Relativordnung stimmt mit der gewöhnlichen Ordnung des Elements überein. Ist  $t^l = f \neq 1$ , so ist  $t$  ein *Element unendlicher Ordnung*.

Wir werden zunächst diese beiden Arten von Elementen von  $T$  näher zu untersuchen haben.

### 6. Elemente endlicher Ordnung.

Wenn ein Element  $\tau \neq 1$  von  $T$  Punkte von  $\bar{G}_F$  fest lässt, so bilden diese Fixpunkte eine echte, abgeschlossene Teilmenge von  $\bar{G}_F$ . Ist  $j$  eines der durch die Fixpunktmenge auf  $E$  bestimmten Restintervalle, das Punkte von  $\bar{G}_F$  enthält, so werden diese Punkte bei den Abbildungen  $\tau, \tau^2, \dots$  immer mehr in der gleichen Richtung verschoben, können also bei keiner positiven Potenz von  $\tau$  Fixpunkte werden. Also hat jede positive Potenz von  $\tau$  dieselben Fixpunkte wie  $\tau$  selbst. Folglich kann keine dieser Potenzen die Identität werden. Wir haben daher:

Ist  $t$  ein Element endlicher Ordnung von  $T$  und  $l$  seine Ordnung, so sind  $t, t^2, \dots, t^{l-1}$  fixpunktfreie Abbildungen von  $\bar{G}_F$ , während  $t^l$  die identische Abbildung von  $\bar{G}_F$  ist.

Nun seien  $t$  und  $t'$  zwei mit einander vertauschbare Elemente der endlichen Ordnungen  $l$  und  $l'$ . Dann ist

$$(tt')^n = t^n t'^n = 1,$$

also auch ihr Produkt von endlicher Ordnung. Ferner ist jede Potenz von  $t$  mit jeder Potenz von  $t'$  vertauschbar.

Setzen wir wie in (5, 2)

$$n = ml = m'l',$$

so gehören die Potenzen von  $t$  zu den Restklassen

$$(6, 1) \quad [x^m], [x^{2m}], \dots, [x^{(l-1)m}], [x^0]$$

und die Potenzen von  $t'$  zu den Restklassen

$$[x^{m'}], [x^{2m'}], \dots, [x^{(l'-1)m'}], [x^0].$$

Ist  $d = (m, m')$  der grösste gemeinsame Teiler von  $m$  und  $m'$ , so kann man, da die Restklassen eine abelsche Gruppe bilden, zwei ganze Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  so bestimmen, dass das Element

$$\sigma = t^\alpha t'^\beta$$

zur Restklasse  $[x^d]$  gehört. Dabei ist  $\sigma$  ebenfalls von endlicher Ordnung, und zwar  $\frac{n}{d}$ , und ist sowohl mit  $t$  als auch mit  $t'$  vertauschbar. Es sei  $[x^e]$  diejenige Restklasse, der  $t$  angehört. Dann gehört  $\sigma^{\frac{e}{d}}$  zur selben Restklasse, und man hat daher (indem das Zeichen  $\subset$ , »ist enthalten in«, als Inklusionszeichen verwendet wird)

$$\sigma^{\frac{e}{d}} = ft, \quad f \subset F.$$

Folglich ist

$$f = \sigma^{\frac{e}{d}} t^{-1}$$

als Produkt zweier vertauschbarer Elemente endlicher Ordnung selbst von endlicher Ordnung und daher, als Element von  $F$ , gleich der Identität. Also ist  $t$  eine Potenz von  $\sigma$ . Da dasselbe für  $t'$  gilt, hat man:

Zwei vertauschbare Elemente endlicher Ordnung sind Potenzen eines und desselben Elements endlicher Ordnung. Es gibt daher keine anderen, aus Elementen endlicher Ordnung bestehenden abelschen Untergruppen als zyklische.

Da die Ordnung einer solchen zyklischen Untergruppe immer ein Teiler von  $n$  sein muss, lassen sich die Elemente endlicher Ordnung von  $T$  zu maximalen zyklischen Untergruppen zusammenfassen. Je zwei solche haben nur die Identität gemeinsam.

Ein Element endlicher Ordnung, welches die maximale zyklische Gruppe, in der es enthalten ist, erzeugt, das mit anderen Worten nicht Potenz eines Elementes höherer Ordnung ist, heisse ein *primäres Element* (endlicher Ordnung) von  $T$ .

Ein Element  $t (\neq 1)$  endlicher Ordnung kann nicht mit einem Element  $\tau$  unendlicher Ordnung vertauschbar sein. Es sei nämlich  $\tau^n = f$ , wo  $f \subset F$  und  $f \neq 1$  ist. Dann würde aus der Vertauschbarkeit von  $t$  und  $\tau$  die von  $t$  und  $f$  folgen, und man hätte

$$f = tft^{-1} = fJ,$$

wo  $J$  den durch  $t$  induzierten Automorphismus bezeichnet.  $J$  kann aber kein von 1 verschiedenes Element von  $F$  ungeändert lassen, da  $t$  keinen Punkt von  $\bar{G}_F$  fest lässt.

Hieraus folgt, dass eine maximale zyklische Untergruppe von  $T$  in keiner umfassenderen abelschen Untergruppe enthalten ist.

### 7. Elemente unendlicher Ordnung.

Sei  $t$  ein Element unendlicher Ordnung von  $T$  mit der Relativordnung  $l \geq 1$  und  $t^l = f \neq 1$ , wo  $f \in F$ . Dann sind  $t$  und  $f$  vertauschbar, also ist  $f$  Fixelement bei dem durch  $t$  induzierten Automorphismus von  $F$ . Folglich lässt  $t$  die Grundpunkte von  $f$  fest, hat also mindestens zwei Fixpunkte in  $\bar{G}_F$ . Wie am Anfang von § 6 bemerkt, haben die positiven Potenzen von  $t$  dann genau die gleichen Fixpunkte wie  $t$ . Andererseits lässt  $t^l = f$  nur die Grundpunkte von  $f$  fest; also kann  $t$  auch nur diese fest lassen. Ferner hat  $f$  in den beiden durch diese Grundpunkte bestimmten Intervallen, falls beide Grenzpunkte enthalten, entgegengesetzte Verschiebungsrichtung. Das gleiche gilt daher von  $t$ . Wir haben somit:

Ein Element  $t$  unendlicher Ordnung lässt genau zwei Punkte von  $\bar{G}_F$  fest, nämlich die Grundpunkte von  $t^l = f$ . Wir nennen diese auch die *Grundpunkte von  $t$*  und bezeichnen den anziehenden (positiven) mit  $V_t = V_f$ , den abstossenden (negativen) mit  $U_t = U_f$ . Die sie verbindende Achse  $A_f$  des Elements  $f$  werde symbolisch auch *Achse  $A_t$  von  $t$*  genannt.

Die beiden Gruppen  $F$  und  $T$  haben also die gleiche Grundpunktmenge und die gleiche Achsenmenge.

Nun fassen wir eine bestimmte Achse  $A$  ins Auge.  $U$  und  $V$  seien die Grundpunkte, die  $A$  begrenzen.  $f$  sei das bezüglich  $F$  primäre Element auf  $A$ , für welches  $V$  positiver Grundpunkt ist. ( $f^{-1}$  ist ebenfalls bezüglich  $F$  primär auf  $A$  und hat den positiven Grundpunkt  $U$ ; die Wahl eines der beiden Elemente bedeutet also eine Orientierung von  $A$ .) Die Gesamtheit der Elemente von  $T$ , die  $U$  und  $V$  einzeln fest lassen, bilden offenbar eine Untergruppe von  $T$ , die mit  $T_A^*$  bezeichnet sei. Alle Elemente von  $T_A^*$ , abgesehen von der Identität, haben unendliche Ordnung, und ihnen ist  $A$  als Achse zugeordnet. Die in  $T_A^*$  enthaltene Untergruppe von  $F$  besteht genau aus den Potenzen von  $f$ . Für jedes  $t \in T_A^*$  ist  $f$  Fixelement bei dem durch  $t$  induzierten Automorphismus von  $F$ , also sind  $t$  und  $f$  vertauschbar.

Es soll nun gezeigt werden, dass  $T_A^*$  abelsch ist. Seien  $t$  und  $t_1$  zwei beliebige von 1 verschiedene Elemente von  $T_A^*$ . Dann ist auch

$$t' = t_1 t t_1^{-1} \in T_A^*$$

und  $\neq 1$ . Zu beweisen ist, dass  $t$  und  $t_1$  vertauschbar sind, also dass  $t' = t$  ist. Angenommen es sei  $t' \neq t$ . Dann ist  $t' t^{-1}$  von unendlicher Ordnung und lässt

von  $\bar{G}_F$  genau  $U$  und  $V$  fest. Sei  $j$  (Fig. 3) eines der beiden durch  $U$  und  $V$  auf  $E$  bestimmten Intervalle, welches Punkte von  $\bar{G}_F$  enthält. (Eines der beiden Intervalle kann ein Regularitätsintervall, also von Grenzpunkten frei sein.) Die in  $j$  enthaltenen Grenzpunkte werden dann bei  $t' t^{-1}$  alle in der gleichen Richtung verschoben, die durch einen in  $j$  angebrachten Pfeil gekennzeichnet sei. Es soll durch Induktion gezeigt werden, dass dann auch für  $r > 1$  das Element  $t'^r t^{-r}$ , das ja zu  $T_A^*$  gehört, die in  $j$  enthaltenen Grenzpunkte in der Pfeilrichtung verschiebt, und daher ebenfalls  $\neq 1$  ist. Man hat

$$t'^r t^{-r} = t' \cdot t'^{(r-1)} t^{-(r-1)} \cdot t^{-1} = t' t^{-1} \cdot t(t'^{(r-1)} t^{-(r-1)}) t^{-1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung verschiebt  $t'^{(r-1)} t^{-(r-1)}$  die in  $j$  liegenden Grenzpunkte in der Pfeilrichtung. Da  $t$  den zu  $j$  gehörenden Teil der Grenzpunktmenge topologisch auf sich mit Erhaltung der Ordnung abbildet, wobei  $U$  und  $V$  fest bleiben, so werden diese Grenzpunkte auch bei  $t(t'^{(r-1)} t^{-(r-1)}) t^{-1}$  in der

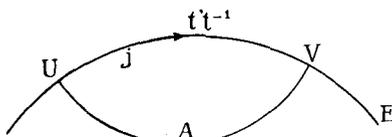


Fig. 3.

Pfeilrichtung verschoben. Da das gleiche auch für den ersten Faktor  $t' t^{-1}$  gilt, gilt es auch für das Produkt, also für  $t'^r t^{-r}$ , und dieses Element ist daher von  $1$  verschieden. Andererseits hat man

$$t^n = f^h$$

für ein gewisses  $h \neq 0$ , da  $t^n \in F$  und  $t^n \neq 1$  ist. Da  $t_1$  mit  $f$  vertauschbar ist, hat man aber auch

$$t'^n = (t_1 t t_1^{-1})^n = t_1 f^n t_1^{-1} = f^n,$$

also

$$t'^n t^{-n} = 1.$$

Für  $r = n$  steht dies im Widerspruch zum vorigen Resultat, und die Annahme  $t \neq t'$  ist daher falsch.

$T_A^*$  ist eine maximale abelsche Untergruppe von  $T$ , d. h. nicht in einer umfassenderen abelschen Untergruppe von  $T$  enthalten. Ist nämlich  $\tau$  ein beliebiges Element von  $T$ , das nicht zu  $T_A^*$  gehört, so ist  $\tau V \neq V$ . Das Element  $\tau f \tau^{-1}$  hat dann  $\tau V$  als positiven Grundpunkt, ist also von  $f$  verschieden. Folglich ist  $\tau$  nicht mit jedem Element von  $T_A^*$  vertauschbar.

$T_A^*$  war die umfassendste Untergruppe von  $T$ , welche die beiden Grundpunkte  $U$  und  $V$  einzeln fest lässt. Mit  $T_A$  bezeichnen wir die umfassendste Untergruppe von  $T$ , welche das Grundpunktepaar  $(U, V)$  als Ganzes in sich überführt. Soll  $T_A$  umfassender als  $T_A^*$  sein, so muss es ein Element  $\sigma$  von  $T$  geben, das  $U$  und  $V$  vertauscht, so dass

$$\begin{aligned}\sigma U &= V, & \sigma V &= U \\ \sigma^2 U &= U, & \sigma^2 V &= V\end{aligned}$$

gilt. Folglich lässt  $\sigma^2$  mehr Grenzpunkte fest als  $\sigma$ , und man hat daher  $\sigma^2 = 1$ . Dieser Fall kann nur bei geradem  $n$  auftreten, und  $\sigma$  gehört zur Restklasse  $\left[ \frac{n}{2} \right]$ . Da jedes nicht zu  $T_A^*$  gehörige Element von  $T_A$  die Ordnung 2 hat, ist  $T_A^*$  Normalteiler von  $T_A$  vom Index 2. Jedes Element der Restklasse  $T_A^* \sigma$  von  $T_A^*$  in  $T_A$  gehört zur Restklasse  $\left[ \frac{n}{2} \right]$  von  $F$  in  $T$ . Hieraus folgt, dass die ganze Gruppe  $T_A^*$  zu  $[x^0]$ , also zu  $F$  gehört; sie besteht daher aus den Potenzen von  $f$ . Durch Transformation mit  $\sigma$  wird in  $T_A^*$  ein äusserer Automorphismus induziert. Es gibt nur einen solchen, nämlich den durch die Zuordnung von  $f^{-1}$  zu  $f$  bestimmten. Jede Potenz von  $f$  wird also durch  $\sigma$  in ihre reziproke transformiert.

Falls  $T$  Elemente enthält, die die Grundpunkte der Achse  $A$  vertauschen, werde  $A$  als *amphidrome Achse* bezeichnet. Wir können dann das Ergebnis so zusammenfassen:

Ist die Achse  $A$  nicht amphidrom, so ist  $T_A^* = T_A$ . Ist  $A$  amphidrom, so ist  $T_A^*$  in  $F$  enthalten und Normalteiler vom Index 2 in  $T_A$ ; alle nicht zu  $T_A^*$  gehörigen Elemente von  $T_A$  sind von der Ordnung 2 und transformieren jedes Element von  $T_A$  in sein reziprokes.

## 8. Verschiebungslängen der Elemente von $T$ .

Wie einem Element  $t$  unendlicher Ordnung von  $T$  symbolisch eine Achse  $A_t$  zugeordnet wurde, so soll ihm nun — ebenfalls symbolisch — eine positive Verschiebungslänge  $L_t$  zugeordnet werden. Ist  $l$  die Relativordnung von  $t$ , so wird diese durch

$$(8, 1) \quad L_t = \frac{1}{l} L_{t^l}$$

definiert, wo  $L_t$  die Verschiebungslänge des zu  $F$  gehörigen Elements  $t$  ist. Für  $t \in F$  ist  $l = 1$ , die Verschiebungslänge also die gewöhnliche Verschiebungslänge der hyperbolischen Substitution. Gehört  $t$  nicht zu  $F$ , so ist  $t$  ja einstweilen nur in  $\overline{G}_F$  definiert, und  $L_t$  ist dann lediglich eine durch (8, 1) formal definierte Grösse.

Ist  $p$  eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so ist

$$L_{t^{pl}} = |p| L_t,$$

und man kann (8, 1) durch

$$(8, 2) \quad L_t = \frac{1}{|pl|} L_{t^{pl}}$$

ersetzen. Hierbei ist also  $pl$  ein beliebiger von Null verschiedener Exponent von  $t$ , für den  $t^{pl} \in F$  ist. Speziell hat man stets

$$(8, 3) \quad L_t = \frac{1}{n} L_{t^n},$$

da  $l$  in  $n$  aufgeht.

Für beliebiges ganzes  $r \neq 0$  ist

$$(8, 4) \quad L_{t^r} = \frac{1}{n} L_{t^{nr}} = \frac{|r|}{n} L_{t^n} = |r| L_t.$$

Speziell ist

$$L_{t^{-1}} = L_t.$$

### 9. Struktur der Untergruppen $T_A^*$ .

Die Menge der als Verschiebungslängen für die Gruppe  $F$  auftretenden Zahlen hat keine Häufungswerte<sup>1</sup>. Die Verschiebungslängen der Elemente von  $T$  sind rationale Vielfache derselben mit einem in der festen Zahl  $n$  aufgehenden Nenner. Man erkennt daher:

Die Menge der als Verschiebungslängen für die Gruppe  $T$  auftretenden Zahlen hat keine Häufungswerte.

Nun seien  $t_1$  und  $t_2$  zwei vertauschbare Elemente unendlicher Ordnung von  $T$ . Ihre Relativordnungen seien  $l_1$  und  $l_2$  und ihre Achse  $A$ . Sie seien überdies *gleichgerichtet*, d. h. der gleiche Grundpunkt sei für sie der positive. Endlich sei  $f$  das mit ihnen gleichgerichtete, bezüglich  $F$  primäre Element von  $T_A^*$ , also

$$V_f = V_{t_1} = V_{t_2}.$$

<sup>1</sup> L. c. S. 30, § 13.

Dann ist

$$t_1^{r_1} = f^{r_1}, \quad t_2^{r_2} = f^{r_2}$$

mit gewissen positiven ganzen  $r_1$  und  $r_2$  und nach (8, 1)

$$L_{t_1} = \frac{r_1}{l_1} L_f, \quad L_{t_2} = \frac{r_2}{l_2} L_f.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von  $t_1$  und  $t_2$  ist nun

$$(t_1 t_2)^{l_1 l_2} = (t_1^{l_2})^{l_1} (t_2^{l_1})^{l_2} = f^{r_1 l_2 + r_2 l_1},$$

also  $t_1 t_2$  von unendlicher Ordnung. Nach (8, 2) gilt daher

$$L_{t_1 t_2} = \frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l_1 l_2} L_f = L_{t_1} + L_{t_2}.$$

Bei Multiplikation gleichgerichteter Elemente von  $T_A^*$  addieren sich also ihre Verschiebungslängen. Ebenso folgt:

$$(t_1 t_2^{-1})^{l_1 l_2} = f^{r_1 l_2 - r_2 l_1},$$

also, falls  $t_1 t_2^{-1}$  ein Element unendlicher Ordnung ist,

$$(9, 1) \quad L_{t_1 t_2^{-1}} = \frac{|r_1 l_2 - r_2 l_1|}{l_1 l_2} L_f = |L_{t_1} - L_{t_2}|.$$

Hieraus schliesst man:

Zwei vertauschbare, gleichgerichtete Elemente unendlicher Ordnung von  $T$ , die die gleiche Verschiebungslänge haben, sind identisch.

Seien nämlich  $t_1$  und  $t_2$  die beiden Elemente,  $A$  ihre Achse und  $L_{t_1} = L_{t_2}$ . Das Element  $t_1 t_2^{-1}$  kann, da es zu  $T_A^*$  gehört, nur 1 oder von unendlicher Ordnung sein. Das letztere ist aber unmöglich, da es dann eine positive Verschiebungslänge haben müsste, was (9, 1) widerspricht.

Nach (9, 1) tritt mit zwei verschiedenen Verschiebungslängen in  $T_A^*$  auch stets der absolute Betrag ihrer Differenz als Verschiebungslänge in  $T_A^*$  auf. Da sie überdies keine Häufungswerte haben, sind die in  $T_A^*$  vorkommenden Verschiebungslängen daher die Vielfachen einer kleinsten. Diese kleinste Verschiebungslänge tritt nach dem obigen bei genau zwei zueinander reziproken Elementen auf. Diese heissen *primäre Elemente* (unendlicher Ordnung) von  $T$ . Die Elemente von  $T_A^*$  sind dann nach dem obigen Potenzen eines dieser primären Elemente. Man hat also:

*Die Gruppe  $T_A^*$  ist die freie Gruppe mit einer Erzeugenden.*

## 10. Multiplizität.

Zusammenfassend können wir das Ergebnis der Paragraphen 6—9 folgendermassen formulieren:

Jedes Element  $t \neq 1$  von  $T$  bestimmt eindeutig eine maximale abelsche Untergruppe  $T^* = T^*(t)$  von  $T$ , zu der es gehört. Zwei verschiedene Gruppen  $T^*$  haben nur die Identität gemeinsam.  $T^*$  hat endliche oder unendliche Ordnung, je nachdem  $t$  endliche oder unendliche Ordnung hat. Im ersten Fall ist  $T^*$  zyklisch, im zweiten die freie Gruppe mit einer Erzeugenden.

Ein Element  $\tau$  von  $T^*$ , das  $T^*$  erzeugt, ist primäres Element von  $T$ . Die Relativordnung  $\lambda$  von  $\tau$  werde nun auch als *Relativordnung der Gruppe  $T^*$*  bezeichnet. Da  $t$  Potenz von  $\tau$  ist, geht die Relativordnung  $l$  von  $t$  in  $\lambda$  auf; in Zeichen  $l/\lambda$ . Analog (5, 2) setzen wir

$$(10, 1) \quad n = ml = \mu\lambda, \quad l/\lambda, \quad \mu/m.$$

Die Relativordnung von  $T^*$  ist der kleinste positive Exponent, für welchen *alle* Elemente von  $T^*$  zu  $F$  gehören; für zyklisches  $T^*$  ist sie die Ordnung von  $T^*$ .

Die Relativordnung  $\lambda$  von  $T^*$  wird auch die *Multiplizität der* von 1 verschiedenen *Elemente* von  $T^*$  genannt. Ist  $T^*$  von unendlicher Ordnung, so gehört zu  $T^*$  eine Achse  $A$ , und es ist  $T^* = T_A^*$ ; dann heisst  $\lambda$  auch die *Multiplizität der Achse  $A$* . Ein von 1 verschiedenes Element von  $T$  oder eine Achse wird als *multipl* oder als *nicht-multipl* bezeichnet, je nachdem ihre Multiplizität  $\lambda > 1$  oder  $= 1$  ist. Ist die Achse  $A$  nicht-multipl, so ist  $T_A^* \subset F$ . Nach § 7 sind amphidrome Achsen stets nicht-multipl. Von 1 verschiedene Elemente endlicher Ordnung sind stets multipl.

11. Konjugierte und kongruente Elemente und Untergruppen von  $T$ .

Ist  $H$  eine Menge von Elementen von  $T$ , so bezeichnet man als Normalisator  $N = N(H)$  von  $H$  die Gesamtheit derjenigen Elemente  $q$  von  $T$ , welche mit  $H$ , aber nicht notwendig mit den einzelnen Elementen von  $H$ , vertauschbar sind, d. h. für welche

$$qHq^{-1} = H$$

ist.  $N$  ist eine Untergruppe von  $T$ .

Ist  $H$  eine Untergruppe von  $T$  oder besteht  $H$  aus einem einzigen Element — nur diese beiden Fälle kommen im folgenden vor —, so ist  $H$  in  $N(H)$  enthalten. In diesen Fällen erhält man sämtliche mit  $H$  konjugierten Untergruppen bzw. sämtliche mit  $H$  konjugierten Elemente, indem man  $H$  mit je einem Element aus jeder Nebengruppe von  $N$  in  $T$  transformiert. Die Gesamtheit der zu  $H$  konjugierten Untergruppen bzw. Elemente heiße die *Äquivalenzklasse* von  $H$ .

Ist  $f \in F$ , so bezeichnen wir die Untergruppe bzw. das Element  $fHf^{-1}$  als mit  $H$  *kongruent*<sup>1</sup> und fassen die Gesamtheit dieser Untergruppen bzw. Elemente, die entsteht, wenn  $f$  ganz  $F$  durchläuft, zu einer *Kongruenzklasse* zusammen. Jede solche ist Teil einer Äquivalenzklasse.

Ist nun  $\tau$  ein beliebiges Element von  $T$  und

$$\tau H \tau^{-1} = H_1,$$

so ist

$$f \tau H \tau^{-1} f^{-1} = f H_1 f^{-1}.$$

Lässt man hierin  $f$  ganz  $F$  durchlaufen, so erhält man die vollständige Kongruenzklasse von  $H_1$ . Gehört hierbei  $\tau$  zu  $N(H)$ , so ist  $H_1 = H$ , und die ganze Restklasse  $[\tau]$  transformiert  $H$  in eine kongruente Gruppe bzw. ein kongruentes Element. Umgekehrt folgt aus

$$\tau H \tau^{-1} = f H f^{-1}, \quad f \in F,$$

dass

$$f^{-1} \tau H \tau^{-1} f = H$$

ist, also dass  $f^{-1} \tau$  zu  $N$  gehört. Man hat daher:

Diejenigen Elemente von  $T$ , welche  $H$  in eine kongruente Untergruppe bzw. ein kongruentes Element transformieren, machen genau diejenigen vollständigen Restklassen von  $F$  in  $T$  aus, in denen  $N$  vertreten ist. Die Gesamtheit dieser Elemente bezeichnen wir mit  $[N] = [N(H)]$ .

Nun bildet auch  $[N]$  eine Untergruppe von  $T$ . Denn sind  $\bar{n}_1$  und  $\bar{n}_2$  zwei beliebige Elemente von  $[N]$ , so wähle man in ihren Restklassen zwei zu  $N$  gehörige Elemente  $n_1$  und  $n_2$ . Dann gehört  $\bar{n}_1 \bar{n}_2$  zu derselben Restklasse wie  $n_1 n_2$ , und da  $n_1 n_2 \in N$ , so gehört  $\bar{n}_1 \bar{n}_2$  zu einer Restklasse, in der  $N$  vertreten ist.

---

<sup>1</sup> In den l. c. S. 24 genannten Arbeiten wurde »isogredient« statt »kongruent« gesagt. Das Wort »kongruent« rechtfertigt sich im folgenden durch die Beziehung des Begriffs zu den in  $T$  enthaltenen Decktransformationen.

Da sich die Restklasse eines Elements bei Transformation nicht ändert, ist  $[N]$  Normalteiler von  $T$  und  $T/[N]$  zyklisch von einer Ordnung  $\mu_0$  (dem Index von  $[N]$  in  $T$ ), die in  $n$  aufgeht. Wir setzen

$$(11, 1) \quad n = \mu_0 \lambda_0.$$

$[N]$  besteht aus den Restklassen  $[1] = F, [x^{\mu_0}], [x^{2\mu_0}], \dots, [x^{(\lambda_0-1)\mu_0}]$  und hat  $F$  als Normalteiler. Die Faktorgruppe  $[N]/F$  ist zyklisch von der Ordnung  $\lambda_0$ . Da  $N$  Elemente in  $[x^{\mu_0}]$  hat, kann man  $\lambda_0$  als die grösste Zahl bestimmen, die als Relativordnung der Elemente von  $N$  vorkommt.

Die vollständige Kongruenzklasse

$$fHf^{-1},$$

wo  $f$  ganz  $F$  durchläuft, wird durch ein beliebiges Element  $\tau \in T$  in

$$\tau f H f^{-1} \tau^{-1} = \tau f \tau^{-1} \cdot \tau H \tau^{-1} \cdot \tau f^{-1} \tau^{-1},$$

also, da mit  $f$  auch  $\tau f \tau^{-1}$  ganz  $F$  durchläuft (vgl. (2, 3)), in die vollständige Kongruenzklasse von  $\tau H \tau^{-1}$  transformiert. Alle Elemente der Nebengruppe  $\tau[N]$  ergeben dabei dieselbe Kongruenzklasse. Man hat daher:

*Die Äquivalenzklasse von  $H$  zerfällt in  $\mu_0$  Kongruenzklassen, wo  $\mu_0$  der Index von  $[N]$  in  $T$  ist.*

Diese mögen *konjugierte Kongruenzklassen* heissen.

Man erhält Repräsentanten der  $\mu_0$  Kongruenzklassen, indem man  $H$  der Reihe nach mit den Elementen

$$(11, 2) \quad 1, x, x^2, \dots, x^{\mu_0-1}$$

transformiert.

Wir spezialisieren nun  $H$ :

I.  $H$  sei ein Element  $t \neq 1$  von  $T$ . Dann wird  $N$  die Gesamtheit der mit  $t$  vertauschbaren Elemente, also die maximale abelsche Untergruppe  $T^* = T^*(t)$  von  $T$ , der  $t$  angehört. Dementsprechend schreiben wir auch  $[T^*]$  statt  $[N]$  für den Normalteiler von  $T$ , der aus denjenigen Restklassen von  $T$  nach  $F$  besteht, in denen  $T^*$  vertreten ist. Dann wird  $\lambda_0$  gleich der in § 10 als Relativordnung von  $T^*$  bezeichneten Zahl  $\lambda$ . Entsprechend wird  $\mu_0 = \mu$ . Wir haben daher mit den Bezeichnungen von § 10:

*Ist  $t$  ein von  $1$  verschiedenes Element von  $T$  mit der Multiplizität  $\lambda$ , so zerfällt die Äquivalenzklasse von  $t$  in  $\mu = \frac{n}{\lambda}$  konjugierte Kongruenzklassen.*

Speziell zerfällt also die Äquivalenzklasse eines nicht-multiplen Elements ( $\lambda=1$ ) in  $n$  konjugierte Kongruenzklassen, während die eines Elements der maximalen Multiplizität  $n$ , z. B. die von  $x$ , nur aus einer Kongruenzklasse besteht.

II.  $H$  sei eine maximale abelsche Untergruppe  $T^*$  von  $T$ . Die Relativordnung von  $T^*$  sei  $\lambda$ , und  $t$  sei ein primäres Element von  $T^*$ . Ist  $\varrho$  ein Element von  $N(T^*)$ , also

$$\varrho T^* \varrho^{-1} = T^*,$$

so wird  $T^*$  auch von

$$t' = \varrho t \varrho^{-1}$$

erzeugt. Dabei gehört  $t'$  zur selben Restklasse  $[t]$  wie  $t$ .

$T^*$  ist Untergruppe von  $N(T^*)$ . Gehört  $\varrho$  zu  $T^*$ , so ist es mit  $t$  vertauschbar, also  $t' = t$ . Wir verfolgen die Annahme, dass  $\varrho$  nicht zu  $T^*$  gehört. Dann ist  $t' \neq t$ . Also hat  $T^*$  in derselben Restklasse zwei verschiedene primäre Elemente. Da eine maximale abelsche Untergruppe endlicher Ordnung in jeder Restklasse, in der sie überhaupt vertreten ist, genau ein Element hat, folgt, dass  $T^*$  von unendlicher Ordnung sein muss. Dann hat  $T^*$  genau zwei primäre Elemente,  $t$  und  $t^{-1}$ , und es muss also  $t' = t^{-1}$  sein. Also vertauscht  $\varrho$  die Grundpunkte von  $t$ , es ist  $\varrho^2 = 1$ , die Achse  $A$  von  $t$  ist amphidrom, und es ist  $T^*$  in  $H$  enthalten, also  $\lambda = 1$ . Ist umgekehrt  $A$  amphidrom, so gibt es ein nicht zu  $T^*$  gehöriges Element  $\varrho$ , das  $t$  in  $t^{-1}$  transformiert. In diesem Fall ist also  $N(T^*) = T_A$  in der Schreibweise von § 7; für jedes andere  $T^*$  ist  $N(T^*) = T^*$ . Wir haben also in den beiden Fällen  $[N(T^*)] = [T_A]$  bzw.  $[N(T^*)] = [T^*]$ . So mit folgt:

Die Äquivalenzklasse einer maximalen abelschen Untergruppe  $T^*$  von der Relativordnung  $\lambda$  zerfällt im Allgemeinen in  $\mu = \frac{n}{\lambda}$  konjugierte Kongruenzklassen. Nur wenn  $T^*$  eine Gruppe unendlicher Ordnung mit amphidromer Achse ist (wobei speziell  $\lambda = 1$  ist), reduziert sich diese Anzahl auf  $\frac{n}{2}$ .

III.  $H$  sei die zu einer Achse  $A$  gehörige Gruppe  $T_A$ . Soll

$$\varrho T_A \varrho^{-1} = T_A$$

sein, so muss  $\varrho$  das Grundpunktpaar von  $A$  fest lassen. Nun war  $T_A$  gerade als die Gruppe derjenigen Elemente definiert, welche dieses Grundpunktpaar in sich überführen. Also ist  $N(T_A) = T_A$  und  $[N(T_A)] = [T_A]$ .

Ist  $A$  nicht amphidrom, so ist  $T_A = T_A^*$ , es liegt also der in II behandelte Fall vor. Ist  $A$  amphidrom, so besteht  $[T_A]$  aus den Restklassen  $[1]$  und  $\left[x^{\frac{n}{2}}\right]$ . Die Äquivalenzklasse von  $T_A$  zerfällt also in diesem Fall in  $\frac{n}{2}$  Kongruenzklassen.

— Ist  $A$  eine beliebige Achse und  $\tau$  ein beliebiges Element von  $T$ , so bezeichnen wir mit  $\tau A$  die Achse, welche die beiden Grundpunkte verbindet, in die die Grundpunkte von  $A$  bei  $\tau$  übergehen. Zwei solche Achsen werden äquivalent bezüglich  $T$  genannt. Durchläuft  $\tau$  hierbei die ganze Gruppe  $T$ , so wird die entstehende Klasse äquivalenter Achsen mit  $TA$  bezeichnet. Für  $f \in F$  bezeichnen wir  $A$  und  $fA$  als äquivalent bezüglich  $F$  oder kurz als kongruent.

Bemerkt man, dass bezüglich  $T$  äquivalente Achsen gleiche Multiplizität haben, so kann man die die maximalen abelschen Untergruppen unendlicher Ordnung betreffende Aussage auch in der folgenden Weise als Aussage über Achsen formulieren:

Eine Äquivalenzklasse  $TA$  von Achsen mit der Multiplizität  $\lambda$  zerfällt im Allgemeinen in  $\mu = \frac{n}{\lambda}$  konjugierte Kongruenzklassen, wobei eine beliebige Achse aus  $TA$  mit genau einer der  $\mu$  Achsen

$$(II, 3) \quad A, xA, x^2A, \dots, x^{\mu-1}A$$

bezüglich  $F$  äquivalent ist. Nur wenn  $A$  amphidrom ist, in welchem Fall  $\lambda = 1$  ist, reduziert sich diese Anzahl auf  $\frac{n}{2}$ .

Es sei noch bemerkt, dass kongruente Elemente unendlicher Ordnung die gleiche Verschiebungslänge haben. Denn sind  $t$  und  $t' = ft'f^{-1}$ ,  $f \in F$ , zwei solche Elemente, so haben sie zunächst die gleiche Relativordnung  $l$ , und es ist (vgl. (8, 1))

$$L_{t'} = L_{ft'f^{-1}} = \frac{1}{l} L_{(ft'f^{-1})^l} = \frac{1}{l} L_{f^l t' f^{-l}} = \frac{1}{l} L_{t'} = L_t,$$

da  $t'$  zu  $F$  gehört und daher die gleiche Verschiebungslänge wie  $f^l t' f^{-l}$  besitzt.

Die zu der Äquivalenzklasse  $TA$  gehörigen Verschiebungslängen werden daher durch die zu den  $\mu$  Achsen (II, 3) gehörigen Verschiebungslängen reprä-

sentiert, falls  $A$  nicht amphidrom ist. Ist  $A$  amphidrom, so werden sie durch die Verschiebungslängen von

$$(11, 4) \quad A, \tau A, \dots, \tau^{\frac{n}{2}-1} A$$

repräsentiert.

## 12. Einteilung von $K_F$ durch modulo $T$ einfache Achsen.

Eine Achse  $A$  heisse *einfach mod  $T$* , wenn je zwei verschiedene Achsen aus der Menge  $TA$  keinen Punkt gemeinsam haben. Als Aussage über die nur in  $\bar{G}_F$  definierte Abbildungsgruppe  $T$  bedeutet dies folgendes: Ist  $\tau$  ein beliebiges Element von  $T$ , und sind  $U$  und  $V$  die Grundpunkte von  $A$ , so ist das Grundpunktpaar  $\tau U, \tau V$  entweder mit dem Paar  $U, V$  identisch, oder die beiden Paare trennen sich nicht auf dem Randkreis  $E$ . Das erstere tritt ein, wenn  $\tau$  zu  $T_A$  gehört, wobei  $\tau$  die Punkte  $U$  und  $V$  vertauschen kann, wenn  $A$  amphidrom ist. Das zweite tritt ein, wenn  $\tau$  nicht zu  $T_A$  gehört; die vier Punkte sind dann voneinander verschieden, und die beiden Achsen  $A$  und  $\tau A$  haben eine gemeinsame Senkrechte.

Im Falle  $q > 0$  (§ 1) ist jede Randachse von  $K_F$  einfach mod  $T$ .

Die Achsen von  $TA$  gehen (mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen) aus den  $\mu$  Achsen (11, 3) bzw.  $\frac{n}{2}$  Achsen (11, 4) durch  $F$  hervor, da diese die sämtlichen konjugierten Kongruenzklassen vertreten. Da die Achsen einer Kongruenzklasse sich nicht in  $K_F$  häufen<sup>1</sup>, so gilt das gleiche für die ganze Äquivalenzklasse  $TA$ .

Zwei bezüglich  $T$  inäquivalente Achsen  $A_1$  und  $A_2$  mögen *mod  $T$  zu einander fremd* genannt werden, wenn keine Achse aus  $TA_1$  mit einer Achse aus  $TA_2$  einen Punkt gemein hat.

Nun seien  $A_1, A_2, \dots, A_r$  bezüglich  $T$  inäquivalente Achsen, von denen jede im Inneren von  $K_F$  gelegen und einfach mod  $T$  ist, und die im Falle  $r > 1$  zu je zweien mod  $T$  zu einander fremd sind.

Wir betrachten die Achsenmenge

$$M = TA_1 + TA_2 + \dots + TA_r,$$

die sich nach einer obigen Bemerkung nirgends in  $K_F$  häuft.

<sup>1</sup> Vgl. l. c. S. 30, § 5.

$K_F$  wird durch die Achsenmenge  $M$  in Bereiche zerschnitten, die im Sinne der hyperbolischen Metrik konvex sind; jeder solche Bereich ist ja der Durchschnitt einer gewissen Menge von nicht-euklidischen Halbebenen. Sei  $B$  ein solcher Einteilungsbereich. Siehe Fig. 4, wo einige Achsen aus  $M$  gestrichelt eingetragen sind, während Randachsen von  $K_F$  ausgezogen sind. Die Berandung von  $B$  besteht innerhalb  $E$  aus gewissen Achsen aus  $M$  und möglicherweise noch aus gewissen Randseiten von  $K_F$ , ferner auf  $E$  aus einer gewissen Teilmenge von  $\bar{G}_F$ . Nun seien  $R$  und  $R_1$  zwei beliebige Randseiten von  $B$ . Sie lassen sich

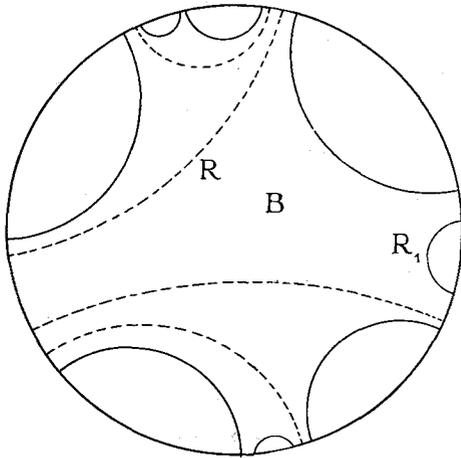


Fig. 4.

in  $B$  verbinden, werden also durch keine zu  $M$  gehörige Achse von einander getrennt. Die Menge der übrigen Randseiten von  $B$  lässt sich nun dadurch charakterisieren, dass sie von  $R$  und  $R_1$  durch keine zu  $M$  gehörige Achse getrennt werden. Übt man ein beliebiges Element  $\varrho$  von  $T$  aus, so wird ja  $\bar{G}_F$  dabei topologisch auf sich mit Erhaltung der zyklischen Ordnung und der Orientierung abgebildet; die genannten Trennungseigenschaften bleiben hiernach erhalten. Den Rändern von  $B$  entsprechen daher bei  $\varrho$  umkehrbar eindeutig die Ränder eines Einteilungsbereiches, der mit  $B$

identisch oder von  $B$  verschieden sein kann. Dieser sei mit  $\varrho B$  bezeichnet. Diese symbolische Zuordnung geben wir durch den Satz wieder: *Die Einteilung von  $K_F$  durch  $M$  reproduziert sich bei der Gruppe  $T$ .*

Diejenigen Elemente  $\varrho$  von  $T$ , für welche  $\varrho B = B$  ist, bilden eine Untergruppe von  $T$ , die mit  $T_B$  bezeichnet sei.

Ist  $\varrho \in T_B$  von endlicher Ordnung, so lässt  $\varrho$  ausser  $B$  keinen weiteren Bereich fest. Denn ist  $R$  eine Randseite von  $B$ , so lässt  $\varrho$  nicht die Grundpunkte von  $R$  fest, da es als Element endlicher Ordnung keinen Grenzpunkt festlässt, und es vertauscht sie nicht, da es sonst die übrigen Randseiten von  $B$  auf die andere Seite von  $R$  bringen würde. Also ist  $\varrho R$  eine von  $R$  verschiedene Randseite von  $B$ . Ein Bereich, der der durch  $R$  abgetrennten Halbebene angehört, muss dann in einen Bereich übergehen, der der durch  $\varrho R$  abgetrennten Halbebene angehört, und diese beiden Halbebenen sind punktfremd.

Ist  $\varrho$  von unendlicher Ordnung, so gehört die Achse  $A_\varrho$  von  $\varrho$  zu  $B$ ; denn sie ist auch Achse von  $\varrho^n \subset F$ , und da diese Transformation den konvexen Bereich  $B$  in sich überführen soll, muss ihre Achse offenbar  $B$  angehören. Gehört umgekehrt eine Achse  $A$  zu  $B$ , so muss jedes zu  $A$  gehörige Element  $B$  in sich überführen, also gilt  $T_A^* \subset T_B$ . Die zu  $B$  gehörigen Achsen sind also identisch mit der Achsenmenge von  $T_B$ . Ist  $A$  nicht amphidrom, so ist  $T_A^* = T_A$ , und man kann auch  $T_A \subset T_B$  schreiben. Ist  $A$  amphidrom, so gilt  $T_A \subset T_B$ , falls  $A$  innere Achse (d. h. nicht Randseite) von  $B$  ist, dagegen nur  $T_A^* \subset T_B$ , falls  $A$  Randachse von  $B$  ist. Ein Element von  $T_A$ , das nicht zu  $T_A^*$  gehört, führt dann  $B$  in den längs  $A$  angrenzenden Nachbarbereich über.

Die zu zwei längs einer Achse  $A$  von  $M$  an einandergrenzenden Bereichen gehörigen Untergruppen von  $T$  haben genau die Gruppe  $T_A^*$  gemeinsam. Die Gruppen zweier nicht benachbarten Bereiche haben nur die Identität gemein.

Ist  $\tau$  ein beliebiges Element von  $T$ , so gehört zu dem Bereich  $\tau B$  die mit  $T_B$  konjugierte Gruppe  $\tau T_B \tau^{-1}$ . Diese ist, wie oben gezeigt, nur dann mit  $T_B$  identisch, wenn  $\tau B = B$  ist, also wenn  $\tau$  zu  $T_B$  gehört. Die Gruppe  $T_B$  ist also ihr eigener Normalisator, ebenso wie dies vorher für  $T_A$  bewiesen wurde. Daher ist auch  $[N(T_B)] = [T_B]$ . Die Anzahl  $\lambda$  der Restklassen von  $T$  nach  $F$  in  $[T_B]$ , also die Ordnung der Faktorgruppe  $[T_B]/F$  nennen wir die *Relativordnung von  $T_B$* . Sie ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Relativordnungen der Elemente von  $T_B$  und kommt selbst als Relativordnung eines Elements von  $T_B$  vor; denn  $T_B$  hat Elemente in  $[\kappa^\mu]$ , wo  $\mu\lambda = n$  ist.  $\mu$  ist die Ordnung der Faktorgruppe  $T/[T_B]$ . Man hat wieder:

Hat  $T_B$  die Relativordnung  $\lambda$ , so zerfällt die Äquivalenzklasse von  $T_B$  in

$$\mu = \frac{n}{\lambda}$$

konjugierte Kongruenzklassen. Jeder aus  $B$  durch ein Element von  $T$  hervorgehende Bereich geht also aus einem der  $\mu$  Bereiche

$$(12, 1) \quad B, \kappa B, \dots, \kappa^{\mu-1} B$$

durch ein Element von  $F$  hervor. (Vgl. (11, 2) und (11, 3)).

13. Erweiterung von  $T$  auf die Äquivalenzklasse einer mod  $T$  einfachen, nicht-amphidromen Achse.

Sei  $A$  eine mod  $T$  einfache, nicht amphidrome Achse mit der Multiplizität  $\lambda$  und  $t$  bezgl.  $T$  primär auf  $A$ . Dann ist

$$(13, 1) \quad t^\lambda = h \in F'$$

bezgl.  $F'$  primär auf  $A$  und  $V_t = V_h$ . Ist  $\lambda\mu = n$ , so sind

$$A, \kappa A, \kappa^2 A, \dots, \kappa^{\mu-1} A$$

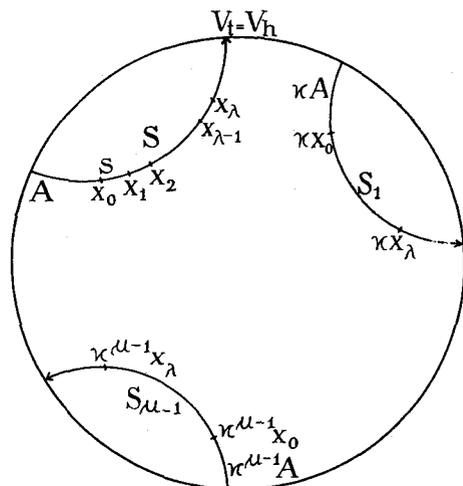


Fig. 5.

ein vollständiges System inkongruenter Achsen in der Äquivalenzklasse von  $A$ ; siehe (11, 3).

Man wähle auf  $A$  einen Punkt  $x_0$  willkürlich und bestimme den Punkt  $x_\lambda = h x_0$  auf  $A$ . Mit  $S = (x_0, x_\lambda)$  sei die halboffene Strecke  $x_0 x_\lambda$  bezeichnet, wobei der Anfangspunkt  $x_0$ , aber nicht der Endpunkt  $x_\lambda$  mitgerechnet ist.  $x_1, x_2, \dots, x_{\lambda-1}$  seien beliebige, in dieser Reihenfolge zwischen  $x_0$  und  $x_\lambda$  eingeschaltete Punkte von  $A$ . Mit  $t$  sei eine Abbildung bezeichnet, welche  $x_0 x_1$  auf  $x_1 x_2$ ,  $x_1 x_2$  auf  $x_2 x_3$ ,  $\dots$ ,  $x_{\lambda-2} x_{\lambda-1}$  auf  $x_{\lambda-1} x_\lambda$  topologisch abbildet. Jeder Punkt von  $S$

geht dann durch eine eindeutig bestimmte Potenz  $t^p$ ,  $0 \leq p \leq \lambda - 1$ , aus einem Punkte der halboffenen Strecke  $s = (x_0, x_1)$  hervor. Siehe Fig. 5.

Für jeden Wert  $1 \leq q \leq \mu - 1$  ist  $h_{T^q}$  bezgl.  $F'$  primär auf der Achse  $\kappa^q A$  mit der der Orientierung von  $A$  entsprechenden, durch  $\kappa^q$  übertragenen Orientierung. Man wählt auf  $\kappa^q A$  beliebig einen Punkt, der mit  $\kappa^q x_0$  bezeichnet wird, und bestimmt den aus ihm durch  $h_{T^q}$  hervorgehenden Punkt, der mit  $\kappa^q x_\lambda$  bezeichnet wird. Mit  $\kappa$  sei eine Abbildung bezeichnet, welche  $S$  auf die halboffene Strecke  $S_1 = (\kappa x_0, \kappa x_\lambda)$ ,  $S_1$  auf die halboffene Strecke  $S_2 = (\kappa^2 x_0, \kappa^2 x_\lambda)$ ,  $\dots$ ,  $S_{\mu-2}$  auf  $S_{\mu-1} = (\kappa^{\mu-1} x_0, \kappa^{\mu-1} x_\lambda)$  topologisch abbildet. Jeder Punkt der Streckenmenge

$$(13, 2) \quad S + S_1 + S_2 + \dots + S_{\mu-1}$$

geht dann durch eine eindeutig bestimmte Potenz  $x^q$ ,  $0 \leq q \leq \mu - 1$ , aus einem Punkt von  $S$  hervor.

Um nun  $T$  als Abbildungsgruppe in ganz  $TA$  zu definieren, bemerkt man zunächst, dass der Normalteiler  $F$  von  $T$  dort bereits bekannt ist. Man hat also die zu  $F$  adjungierte Erzeugende  $x$  als topologische Abbildung in ganz  $TA$  zu definieren, und zwar so, dass die Gleichung

$$(13,3) \quad x^n = \tilde{f}$$

von § 5 und die Funktionalgleichung (2, 1) erfüllt ist.

Ist  $x$  irgend ein auf  $TA$  gelegener Punkt, so gibt es ein eindeutig bestimmtes  $k \in F$ , durch welches  $x$  aus einem Punkt der Streckenmenge (13, 2) hervorgeht, da diese in  $TA$  ein Fundamentalbereich für  $F$  ist. Der Punkt  $k^{-1}x$  gehört also zu (13, 2) und daher weiter mit der obigen Bezeichnung der Punkt  $x^{-q}k^{-1}x$  zu  $S$  und endlich der Punkt  $x' = t^{-p}x^{-q}k^{-1}x$  zu  $s$ . Zu definieren ist der Bildpunkt

$$xx = x k x^q t^p x',$$

und hierzu treffen wir mit der Funktionalgleichung als Anleitung die Festsetzung

$$(13,4) \quad xx = k_I x^{q+1} t^p x'.$$

Falls  $q < \mu - 1$  ist, also  $x$  nicht auf einer mit  $x^{\mu-1}A$  kongruenten Achse liegt, definiert (13, 4) schon den Bildpunkt. Denn  $t^p x'$  gehört zu  $S$ , und da  $1 \leq q + 1 \leq \mu - 1$  ist, ist das Bild dieses Punktes bei  $x^{q+1}$  schon oben als ein Punkt von (13, 2) festgelegt, wonach man noch  $k_I$  auszuüben hat. Ist dagegen  $q = \mu - 1$ , so bleibt der Punkt  $k_I x^\mu t^p x'$  noch zu definieren. Hierzu bemerken wir, dass  $x^\mu$  in der in  $\bar{G}_F$  definierten Gruppe  $T$  zu der gleichen Restklasse wie eine gewisse Potenz von  $t$  gehört. Ist

$$(13,5) \quad x^\mu = g t^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \lambda - 1, \quad g \in F,$$

so setzen wir

$$k_I x^\mu t^p x' = k_I g t^{p+\sigma} x'.$$

Falls hierin  $p + \sigma \geq \lambda$  ist, ersetzen wir noch  $t^i$  durch  $h$  nach Anleitung durch (13, 1) und erhalten so schliesslich eindeutig eine Festsetzung

$$(13,6) \quad xx = k_I g h^\alpha t^{p'} x', \quad 0 \leq p' \leq \lambda - 1, \quad \alpha = 0 \text{ oder } 1,$$

wodurch der Bildpunkt auch im Falle  $q = \mu - 1$  festgelegt ist.

Um die Stetigkeit der durch (13, 4) und (13, 6) definierten Abbildung  $\alpha(x)$  zu erkennen, hat man nur  $x$  auf einer festen Achse aus  $TA$  variieren zu lassen, also hat  $q$  einen festen Wert. Solange der entsprechende Punkt  $x'$  im Inneren von  $s$  variiert, ist die Stetigkeit evident, da die drei Funktionszeichen  $t^p$ ,  $x^{q+1}$  und  $k_I$  in (13, 4) stetige Funktionen bezeichnen, und analog in (13, 6). Erreicht  $x'$  den Endpunkt  $x_1$  von  $s$ , so tritt ein Sprung in dem Werte von  $p$  (bzw.  $p'$ ) ein, wodurch die Stetigkeit offenbar gewahrt bleibt. Erreicht  $t^p x'$  einen Endpunkt von  $S$ , so tritt ein Sprung in  $k_I$  ein, wodurch wieder die Stetigkeit gewahrt bleibt.

Die Eindeutigkeit der umgekehrten Abbildung erhellt unmittelbar aus (13, 4). Denn aus der Kenntnis von  $\alpha x$  ergeben sich eindeutig die Werte von  $k_I$ ,  $q+1$ ,  $p$  und  $x'$ , und damit auch von  $k$ ,  $q$ ,  $p$  und  $x'$ , also von  $x$ . Analog in (13, 6).

Dass die Bildmenge ganz  $TA$  ausmacht, sieht man so: Durchläuft in (13, 4)  $x'$  die halboffene Strecke  $s$ ,  $p$  die Werte  $0 \leq p \leq \lambda - 1$ ,  $q$  die Werte  $0 \leq q \leq \mu - 2$  und  $k_I$  ganz  $F$ , so durchläuft  $\alpha x$  alle Achsen der Kongruenzklassen von

$$\alpha A, \alpha^2 A, \dots, \alpha^{\mu-1} A.$$

Analog durchläuft  $\alpha x$  in (13, 6) die Kongruenzklasse von  $A$ .

Dass die Funktionalgleichung (2, 1) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Definition von  $\alpha$  durch (13, 4) bzw. (13, 6): Ersetzt man  $x$  durch  $f x$ ,  $f \in F$ , so wird  $k^{-1}$  durch  $k^{-1} f^{-1}$ , also  $k$  durch  $f k$ , also  $k_I$  durch  $f_I k_I$  ersetzt. Aus (13, 4) und (13, 6) folgt dann direkt

$$\alpha f x = f_I \alpha x.$$

In der abstrakt dargestellten Gruppe  $T$  ist (13, 3) eine Folgerelation aus (13, 1) und (13, 5). Denn erhebt man beide Seiten von (13, 5) zur  $\lambda^{\text{ten}}$  Potenz, so erhält man links  $x^\lambda$  und rechts  $(g t^\nu)^\lambda$ , welches ein Element von  $F$  ist, da  $t$  die Relativordnung  $\lambda$  hat. Durch Umformung mittels der Funktionalgleichung und Benutzung der gegebenen Struktur von  $F$  erhält man dann rechts ein bestimmtes Element  $\tilde{f}$  von  $F$ . Da nun oben dieselben beiden Beziehungen (13, 1) und (13, 5) bei der Definition der Abbildung  $\alpha$  von  $TA$  zu Grunde gelegt wurden, gilt auch für diese die Folgerelation (13, 3).

Die in  $TA$  definierte Gruppe topologischer Abbildungen ist somit isomorph mit der gegebenen Gruppe  $T$ . — Man bemerkt, dass die halboffene Strecke  $s$  ein Fundamentalbereich von  $T$  in der Achsenmenge  $TA$  ist.

Es sei noch auf den Grad der Freiheit hingewiesen, den man bei der Konstruktion von  $T$  in  $TA$  hat: Nach Wahl des Punktes  $x_0$ , die natürlich ohne

Bedeutung ist, hat man die Punkte  $\kappa x_0, \kappa^2 x_0, \dots, \kappa^{n-1} x_0$ , ferner die Zwischenpunkte  $x_1, \dots, x_{\lambda-1}$  und endlich die topologischen Abbildungen  $t$  innerhalb  $S$  und  $\kappa$  von  $S$  auf  $S_1$  u. s. w. frei verfügbar. Durch spezielle Wahlen kann man dabei die Abbildungen von  $T$  besonders einfach gestalten, z. B. indem man die topologischen Abbildungen  $t$  und  $\kappa$  *linear* wählt.  $t$  wird dann einfach diejenige Verschiebung mit der Achse  $A$ , deren  $\lambda$ -faches die Verschiebung  $h$  ist, und damit hat man sofort die Untergruppe  $T_A^* = T_A$ . Diese wird dann wieder durch geeignete lineare Abbildung von  $A$  auf  $\kappa A$  u. s. w. übertragen.

14. **Erweiterung von  $T$  auf die Äquivalenzklasse einer mod  $T$  einfachen, amphidromen Achse.**

Sei  $A$  eine mod  $T$  einfache, amphidrome Achse und  $h \in F$  primär auf  $A$  (sowohl bezgl.  $F$  wie bezgl.  $T$ , indem  $\lambda = 1$  ist; siehe § 10). Dann stellen

$$A, \kappa A, \kappa^2 A, \dots, \kappa^{\frac{n}{2}-1} A$$

ein vollständiges System inkongruenter Achsen in der Äquivalenzklasse von  $A$  dar; siehe (11,4). Es gibt in  $T$  ein Element  $t$ , welches  $h$  in  $h^{-1}$  transformiert, und für dieses Element gilt

(14, 1)  $t^2 = 1.$

Man wählt auf  $A$  willkürlich einen Punkt  $x_0$ , bestimmt  $hx_0$  und wählt zwischen diesen beiden Punkten willkürlich einen Punkt  $x_1$ . Mit  $t$  sei eine topologische Abbildung der Strecke  $x_0 x_1$  auf die Strecke  $(hx_0)x_1$  bezeichnet. Mit  $S = (x_0, hx_0)$  sei die halboffene Strecke von  $x_0$  nach  $hx_0$  und mit

$$s = (x_0, x_1)$$

die abgeschlossene Strecke von  $x_0$  nach  $x_1$  bezeichnet. Jeder Punkt von  $S$  geht dann aus einem Punkt von  $s$  durch ein  $t^p$ ,  $p = 0$  oder  $1$ , hervor. Siehe Fig. 6.

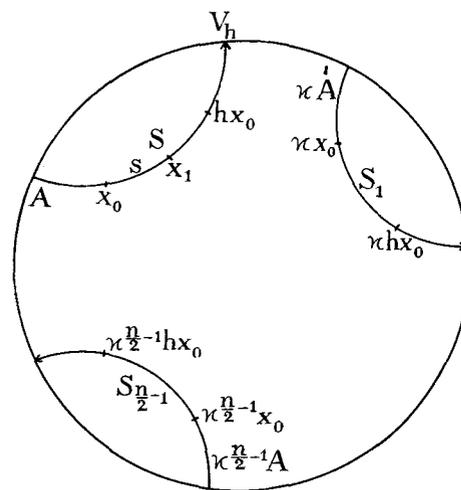


Fig. 6.

Für jeden Wert  $1 \leq q \leq \frac{n}{2} - 1$  wählt man auf der Achse  $x^q A$  einen mit  $x^q x_0$  bezeichneten Punkt willkürlich und bestimmt den Punkt  $h_{I^q} x^q x_0$ , der auch mit  $x^q h x_0$  bezeichnet wird. Dann bezeichne  $S_q$  die halboffene Strecke  $(x^q x_0, x^q h x_0)$ . Nun sei wieder  $\kappa$  eine Abbildung, welche

$$S \text{ auf } S_1, S_1 \text{ auf } S_2, \dots, S_{\frac{n}{2}-2} \text{ auf } S_{\frac{n}{2}-1}$$

topologisch abbildet. Jeder Punkt von

$$(14, 2) \quad S + S_1 + S_2 + \dots + S_{\frac{n}{2}-1}$$

geht also durch ein  $x^q$ ,

$$0 \leq q \leq \frac{n}{2} - 1$$

aus einem Punkt von  $S$  hervor.

Analog wie in § 13 kommt man nun folgendermassen zu einer Abbildung  $\kappa$  in  $TA$ : Ist  $x$  ein Punkt von  $TA$ , so bestimmt man  $k \in F$  so, dass  $k^{-1} x$  zu (14, 2) gehört, dann ein  $q$  im Intervall

$$0 \leq q \leq \frac{n}{2} - 1$$

so, dass  $x^{-q} k^{-1} x$  zu  $S$  gehört, und endlich  $p$  (gleich 0 oder 1) so, dass

$$x' = t^{-p} x^{-q} k^{-1} x$$

zu  $s$  gehört.

$$\kappa x = \kappa k x^q t^p x'$$

wird wieder durch

$$(14, 3) \quad \kappa x = k_I \kappa^{q+1} t^p x'$$

ersetzt, und dadurch ist der Bildpunkt  $\kappa x$  in allen Fällen  $q < \frac{n}{2} - 1$  definiert.

Für  $q = \frac{n}{2} - 1$  benutzt man, dass

$$(14, 4) \quad x^{\frac{n}{2}} = g t, \quad g \in F,$$

indem das Element zweiter Ordnung  $t$  zu  $\left[ x^{\frac{n}{2}} \right]$  gehört. Man setzt daher für

$$q = \frac{n}{2} - 1$$

$$\kappa x = k_I g t^{p+1} x'.$$

Falls hier  $p + 1 = 2$  ist, lässt man  $t^{p+1}$  nach Anleitung von (14, 1) fort. Man erhält also in

$$(14, 5) \quad \kappa x = k_I g t^{p'} x', \quad p' = 0 \text{ oder } 1,$$

die Definition des Bildpunktes  $\kappa x$ , falls  $x$  auf einer mit  $\kappa^{\frac{n}{2}-1} A$  kongruenten Achse liegt.

Dass hiermit in  $TA$  eine mit  $T$  isomorphe Gruppe topologischer Abbildungen hergestellt ist, ergibt sich ganz analog wie in § 13. Die Bezeichnungen sind analog gewählt, um den Vergleich zu erleichtern. Insbesondere entspricht (14, 1) der Gleichung (13, 1), und (14, 4) entspricht (13, 5). Die Definitionsgleichung (14, 3) hat genau dieselbe Form wie (13, 4), und die dem Höchstwert von  $q$  entsprechende Definitionsgleichung (14, 5) ist das genaue Analogon von (13, 6). Der Deutlichkeit halber wurde es aber vorgezogen, die beiden Fälle eines nicht-amphidromen und eines amphidromen  $A$  getrennt darzustellen. — Auch der Grad der Freiheit in der Konstruktion ist analog wie in § 13, und wie dort kann man diese durch Wahl linearer Abbildungen einfach gestalten. Zu bemerken ist, dass ein Fundamentalbereich von  $T$  in  $TA$  hier durch die abgeschlossene Strecke  $s$ , nicht wie in § 13 durch die halboffene Strecke  $s$ , dargestellt wird.

Sowohl für amphidromes wie für nicht-amphidromes  $A$  wird die in  $TA$  erklärte Abbildungsgruppe  $T$  durch die ursprünglich in der Grenzpunktmenge  $\bar{G}_F$  gegebene Abbildungsgruppe  $T$  stetig abgeschlossen.

### 15. Querschnitte.

Wir betrachten den Fall  $q > 0$ , in welchem die Konvexfigur  $K_F$  Randseiten hat. Unter einem *Querschnitt* von  $K_F$  wird die (nichteuclidisch) geradlinige Verbindung eines Punktes einer Randseite von  $K_F$  mit einem Punkt einer anderen Randseite verstanden. Vorläufig betrachten wir lediglich *normale Querschnitte*, d. h. solche, die auf der gemeinsamen Senkrechten der beiden Randseiten liegen, und deren Länge daher der kürzeste Abstand der beiden Randseiten ist.

Sind  $S$  und  $S'$  zwei verschiedene Randseiten von  $K_F$ , so bezeichne  $\delta(S, S')$  die nichteuclidische Länge ihres kürzesten Abstandes. Bei Ausübung eines beliebigen  $f \subset F$  geht dieses Randseitenpaar in  $fS, fS'$  über, und es ist

$$(15, 1) \quad \delta(fS, fS') = \delta(S, S'),$$

da  $f$  eine Bewegung der hyperbolischen Ebene in sich ist. Die Projektionen der Punkte von  $S'$  auf  $S$  bilden dort ein Intervall, dessen Länge mit  $\pi(S', S)$  bezeichnet sei.  $\pi$  hängt monoton von  $\delta$  ab, indem  $\pi$  von  $\infty$  bis 0 abnimmt, wenn  $\delta$  von 0 bis  $\infty$  wächst. Dies Intervall ist zugleich die Projektion des zu  $S'$  gehörigen Regularitätsintervalles des Randkreises  $E$  auf  $S$ ; vgl. Fig. 1. Durchläuft  $S'$  alle von  $S$  verschiedenen Randseiten von  $K_F$ , so sind die entsprechenden Projektionsintervalle zu einander fremd und erfüllen  $S$  überall dicht; sie bilden die Restmenge der Projektion der Grenzpunktmenge  $\bar{G}_F$  auf  $S$ . Ist  $g$  bezgl.  $F$  primär auf  $S$ , so kommt  $\bar{G}_F$ , und ebenso  $K_F$ , bei Ausübung von  $g$  mit sich zur Deckung, also gilt dasselbe für die Menge der Projektionsintervalle auf  $S$ . Diese bilden also die periodische Wiederholung der innerhalb einer Verschiebungslänge von  $g$  gelegenen Teilmenge. Also gibt es nur endlich viele  $\pi$  oberhalb einer gegebenen Schranke und folglich nur endlich viele  $\delta$  unterhalb einer gegebenen Schranke. Die Zahlen  $\delta$  haben also keine Häufungswerte<sup>1</sup>.

Nun bezeichne  $\sigma$  den durch das geordnete Seitenpaar  $S, S'$  bestimmten, orientierten, nämlich von  $S$  nach  $S'$  gerichteten, normalen Querschnitt. Ist  $t$  ein beliebiges Element von  $T$ , so soll der durch das geordnete Seitenpaar  $tS, tS'$  bestimmte, orientierte, normale Querschnitt mit  $t\sigma$  bezeichnet werden. Umgekehrt ist  $t$  durch  $\sigma$  und  $t\sigma$  bestimmt. Denn ist  $t\sigma = t'\sigma$ , so ist  $t^{-1}t'\sigma = \sigma$ . Also muss das Element  $t^{-1}t'$  sowohl die Grundpunkte von  $S$  wie von  $S'$  festlassen und muss daher das identische Element von  $T$  sein. Sieht man dagegen von der Orientierung ab, so kann  $\sigma$  eventuell bei einem von 1 verschiedenen Element  $\varrho$  von  $T$  sich selbst entsprechen:  $\varrho$  kann das Grundpunktpaar von  $S$  in das von  $S'$  überführen, und umgekehrt, also  $\sigma$  »umkehren«. Ein solches Element  $\varrho$  von  $T$  ist, falls es existiert, eindeutig bestimmt und von der Ordnung 2. In diesem Fall sei  $\sigma$  als *amphidromer* normaler Querschnitt bezeichnet.

Die Gesamtheit  $T\sigma$  wird als die Äquivalenzklasse, die Gesamtheit  $F\sigma$  als die Kongruenzklasse von  $\sigma$  bezeichnet. Da der orientierte Querschnitt  $\sigma$  nur bei der Identität sich selbst entspricht, zerfällt die Äquivalenzklasse von  $\sigma$  in genau  $n$  Kongruenzklassen, die durch

$$(15, 2) \quad \sigma, \alpha\sigma, \alpha^2\sigma, \dots, \alpha^{n-1}\sigma$$

<sup>1</sup> Dies Ergebnis ist dadurch bedingt, dass die betrachtete Fläche als von endlichem Zusammenhang vorausgesetzt war. Für unendlichen Zusammenhang ist eine Randseite von  $K_F$  nicht notwendig Achse von  $F$  und die Menge der Projektionsintervalle auf ihr daher nicht notwendig periodisch.

repräsentiert werden. Sieht man von der Orientierung ab, so tritt für amphidrome normale Querschnitte, und nur für diese, eine Reduktion auf die halbe Anzahl Kongruenzklassen ein, indem die einen amphidromen Querschnitt ohne Rücksicht auf die Orientierung in sich überführende Untergruppe von  $T$  die Ordnung 2 hat, wobei ihre beiden Elemente zu verschiedenen Restklassen  $[x^0]$  und  $\left[ x^{\frac{n}{2}} \right]$  von  $T$  nach  $F$  gehören.

Die Querschnittlänge  $\delta$  ist nach (15, 1) eine Invariante der Kongruenzklasse, aber im Allgemeinen nicht der Äquivalenzklasse. Definiert man jedoch durch Mittelbildung über alle Kongruenzklassen, die ja durch (15, 2) repräsentiert werden, die *mittlere Querschnittlänge*

$$(15, 3) \quad \delta^*(S, S') = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \delta(x^r S, x^r S'),$$

so erhält man offenbar eine Invariante der Äquivalenzklasse. (15, 3) gilt auch für amphidrome Querschnitte, doch kommt man für diese natürlich auch durch Mittelbildung über die halbe Anzahl zum gleichen Ergebnis. Man hat also für beliebiges  $t \in T$

$$(15, 4) \quad \delta^*(tS, tS') = \delta^*(S, S').$$

Wegen des festen Nenners  $n$  haben auch die Zahlen  $\delta^*$  keine Häufungswerte. Es gibt daher ein kleinstes  $\delta^*$  sowohl absolut, d. h. bei freigelassenen Äquivalenzklassen  $TS$  und  $TS'$ , als auch relativ zu vorgeschriebenen Äquivalenzklassen  $TS$  und  $TS'$ . Ist  $TS = TS'$ , so ist die Paarbildung natürlich so zu verstehen, dass  $S'$  alle von  $S$  verschiedenen Randseiten in  $TS$  durchläuft.

## 16. Mod $T$ einfache Querschnitte.

Nun seien  $S$  und  $S'$  ein festes Randseitenpaar mit dem normalen Querschnitt  $\sigma$ . Wie ist für ein Element  $t \neq 1$  von  $T$  die relative Lage von  $\sigma$  und  $t\sigma$ ? Falls  $S$  oder  $S'$  bei  $t$  festbleibt, oder falls  $tS = S'$ , oder falls  $tS' = S$  ist, schneiden  $\sigma$  und  $t\sigma$  einander nicht, da sie auf derselben Geraden senkrecht stehen. Falls  $tS = S'$  und gleichzeitig  $tS' = S$  ist, fallen  $\sigma$  und  $t\sigma$  mit entgegengesetzter Orientierung zusammen, und  $\sigma$  ist amphidrom. In allen anderen Fällen sind  $S, S'$  und  $tS, tS'$  vier verschiedene Randseiten von  $K_F$ , und  $\sigma$  und  $t\sigma$  schneiden einander oder haben keinen Punkt gemeinsam, je nachdem diese beiden Rand-

seitenpaare einander trennen oder nicht trennen. Trennen sich diese Paare für kein Element  $t$  von  $T$ , wird  $\sigma$  als ein *mod  $T$  einfacher* normaler Querschnitt bezeichnet.

Es soll nun gezeigt werden, dass zu gegebenen (gleichen oder verschiedenen) Äquivalenzklassen  $TS$  und  $TS'$  immer *mod  $T$  einfache, normale* Querschnitte

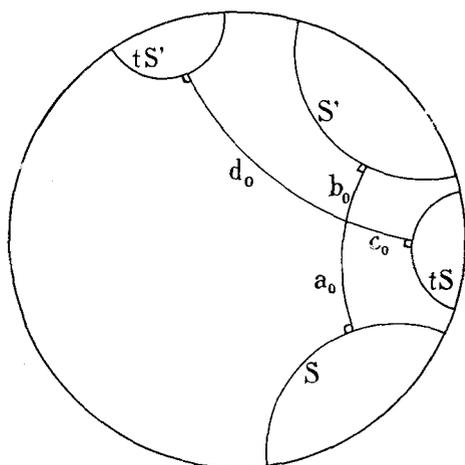


Fig. 7.

existieren, indem der folgende Satz bewiesen wird: Ist der zu  $S$  und  $S'$  gehörige normale Querschnitt  $\sigma$  nicht einfach *mod  $T$* , so lässt sich  $S'$  durch eine bezgl.  $T$  äquivalente Randseite so ersetzen, dass der normale Querschnitt, den diese mit  $S$  bestimmt, eine kleinere mittlere Querschnittlänge als  $\sigma$  hat. — Ein zu den gegebenen Äquivalenzklassen gehöriger Querschnitt mit kleinster mittlerer Querschnittlänge muss nach diesem Satz *mod  $T$  einfach* sein.

Das Paar  $S, S'$  werde also durch das Paar  $tS, tS'$  getrennt (Fig. 7).  $\sigma$  wird

durch  $t\sigma$  in zwei Stücke der Länge  $a_0$  und  $b_0$  und  $t\sigma$  durch  $\sigma$  in zwei Stücke der Länge  $c_0$  und  $d_0$  zerschnitten. Es ist also

$$\delta(S, S') = a_0 + b_0, \quad \delta(tS, tS') = c_0 + d_0.$$

Nun übe man  $x^r$ ,  $0 \leq r \leq n-1$  aus. Dann wird das Paar  $x^r S, x^r S'$  durch das Paar  $x^r tS, x^r tS'$  getrennt, da die zyklische Ordnung der Grundpunkte auf  $E$  bei  $x^r$  erhalten bleibt. Also schneiden sich auch  $x^r \sigma$  und  $x^r t\sigma$ . Mit analogen Bezeichnungen  $a_r, b_r, c_r, d_r$  für die Querschnittstücke hat man dann entsprechend den obigen Gleichungen

$$\delta(x^r S, x^r S') = a_r + b_r, \quad \delta(x^r tS, x^r tS') = c_r + d_r,$$

also nach (15, 3)

$$\delta^*(S, S') = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (a_r + b_r), \quad \delta^*(tS, tS') = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (c_r + d_r),$$

und wegen (15, 4) kann man auch schreiben

$$(16, 1) \quad \delta^*(S, S') = \delta^*(tS, tS') = \frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{n-1} (a_r + b_r + c_r + d_r).$$

Andererseits sieht man aus der Figur, dass der kürzeste Abstand von  $S$  und  $tS'$  kleiner ist, als die aus den Strecken  $a_0$  und  $d_0$  bestehende gebrochene Linie. Denkt man sich noch  $x^r$  ausgeübt, so erhält man

$$\delta(x^r S, x^r tS') < a_r + d_r$$

$$\delta(x^r tS, x^r S') < c_r + b_r.$$

Durch Summation über  $r$ , Addition und Vergleich mit (16, 1) erhält man daher

$$(16, 2) \quad \delta^*(S, tS') + \delta^*(tS, S') < 2 \delta^*(S, S').$$

Da man nach (15, 4)  $\delta^*(tS, S')$  durch  $\delta^*(S, t^{-1}S')$  ersetzen kann, kann man aus (16, 2) schliessen: Behält man  $S$  bei, ersetzt aber  $S'$  durch  $tS'$  oder durch  $t^{-1}S'$ , so erhält man in mindestens einem der beiden Fälle eine Verkleinerung der mittleren Querschnittlänge; w. z. b. w.

## 17. Der allgemeine Fall des Hauptproblems.

Wir greifen nun unser Hauptproblem, die Konstruktion von  $T$  als Gruppe topologischer Abbildungen von  $K_F$  auf sich, unter der Voraussetzung an, dass es mindestens eine mod  $T$  einfache Achse gibt. Diese Voraussetzung ist jedenfalls für  $q > 0$  stets erfüllt, indem Randseiten von  $K_F$  ja mod  $T$  einfach sind. Auch für geschlossene Flächen, also für  $q = 0$ , ist sie, wie später gezeigt werden soll, im Allgemeinen erfüllt; es gibt zwar für solche einen Fall, in dem sie nicht erfüllt ist, aber dieser stellt, wie sich später ergeben wird, etwas sehr spezielles dar und erfordert gesonderte Behandlung (§ 23—30).

In § 12 wurde die Einteilung von  $K_F$  durch  $r$  Äquivalenzklassen von mod  $T$  einfachen und zu je zweien mod  $T$  fremden Achsen untersucht. Diese Anzahl  $r$  ist durch die gegebene Gruppe  $F$  beschränkt. Denn zunächst zerfällt jede Äquivalenzklasse in eine Anzahl  $\geq 1$  von Kongruenzklassen. Sei  $R$  die Gesamtanzahl von Kongruenzklassen, wobei somit  $R \geq r$  ist. Jeder Kongruenzklasse entspricht auf der Fläche  $K_F$  mod  $T$  eine geschlossene geodätische Linie, die einfach, d. h. ohne Doppelpunkte ist, da eine mod  $T$  einfache Achse a fortiori mod  $F$  einfach ist. Zwei verschiedene Kongruenzklassen ergeben dabei zwei verschiedene, nicht homotope geschlossene geodätische Linien ohne gemeinsame Punkte. Man erhält also insgesamt  $R$  solche. Auf einer Fläche endlichen Zu-

sammenhangs gibt es aber nur eine beschränkte Anzahl unter einander nicht-homotoper, einfacher und zu einander fremder Rückkehrsnitte.

Nun sei

$$(17, 1) \quad A_1, A_2, \dots, A_r$$

ein System von bezgl.  $T$  inäquivalenten Achsen, die einzeln mod  $T$  einfach und zu je zweien mod  $T$  fremd sind, und die in dem Sinne ein maximales System bilden, dass man nicht eine Achse  $A_{r+1}$  so hinzufügen kann, dass das erweiterte System noch dieselben Eigenschaften hat. Für  $q > 0$  kommt unter (17, 1) je ein Repräsentant jeder Äquivalenzklasse von Randseiten von  $K_F$  vor. Betrachtet man die Einteilung von  $K_F$  durch die Achsenmenge

$$(17, 2) \quad TA_1 + TA_2 + \dots + TA_r,$$

so kann man die Maximaleigenschaft des Systems auch folgendermassen ausdrücken: Ist  $B$  ein beliebiger der in  $K_F$  durch die Achsenmenge (17, 2) entstehenden Einteilungsbereiche und  $T_B$  die zu  $B$  gehörige Untergruppe von  $T$  (§ 12), so gibt es in  $B$  keine *innere*, mod  $T_B$  einfache Achse. Denn wäre  $A_{r+1}$  eine solche, so würde  $A_{r+1}$  durch ein beliebiges Element  $t$  von  $T$  entweder auf eine  $A_{r+1}$  nicht schneidende Achse von  $B$  abgebildet, nämlich wenn  $t$  zu  $T_B$  gehört, oder auf eine Achse des von  $B$  verschiedenen Bereiches  $tB$  abgebildet, nämlich wenn  $t$  nicht zu  $T_B$  gehört; also könnte man  $A_{r+1}$  dem System (17, 1) hinzufügen, was der Maximaleigenschaft widersprechen würde. — Jede mod  $T_B$  einfache Achse von  $B$  ist also Randseite von  $B$ .

Nun erweitert man zunächst nach § 13 und 14 die Gruppe  $T$  auf die Äquivalenzklasse jedes der  $r$  Elemente (17, 1). Da diese Äquivalenzklassen keine gemeinsamen Punkte haben, gehen diese  $r$  Erweiterungen unabhängig von einander und mit dem in § 13 und 14 angegebenen Grad der Freiheit vor sich. Danach ist  $T$  nun eine in der gesamten durch  $\bar{G}_F$  abgeschlossenen Achsenmenge (17, 2) definierte Gruppe topologischer Abbildungen.

Damit liegt auch in der gesamten Randpunktmenge eines Einteilungsbereiches  $B$  die Untergruppe  $T_B$  als Gruppe topologischer Abbildungen vor. Das nächstliegende Ziel ist, diese ins Innere von  $B$  zu erweitern, also  $T_B$  als Gruppe topologischer Abbildungen des abgeschlossenen Bereiches  $B$  auf sich so darzustellen, dass sie auf dem Rande von  $B$  die bereits konstruierte Abbildungsgruppe  $T_B$  ist. Nachdem dies für einen einzelnen Bereich  $B$  geleistet ist, ist noch die Erweiterung

zu einer Gruppe  $T$  in der ganzen durch  $B$  bestimmten Klasse äquivalenter Bereiche klarzulegen.

$T_B$  enthält eine Untergruppe  $F_B$  von  $F$ , und diese ist zufolge der Funktionalgleichung Normalteiler von  $T_B$ . Sei  $n_B$  die Ordnung der Faktorgruppe  $T_B/F_B$ . Das ist die höchste in  $T_B$  vorkommende Relativordnung eines Elements, also die in § 12 als Relativordnung von  $T_B$  bezeichnete Zahl, die dort mit  $\lambda$  bezeichnet wurde.

$T_B$ ,  $F_B$  und  $n_B$  spielen somit für den Bereich  $B$  dieselbe Rolle wie  $T$ ,  $F$  und  $n$  für den Bereich  $K_F$ . Die Erweiterung von  $T_B$  zu einer Abbildungsgruppe in  $B$  lässt sich daher auffassen als ein Sonderfall der allgemeinen Aufgabe der Erweiterung von  $T$  zu einer Abbildungsgruppe in  $K_F$ , nämlich der Sonderfall, in welchem  $K_F$  Randseiten ( $q > 0$ ) aber keine mod  $T$  einfache innere Achse besitzt. Daher wird dieser Sonderfall der allgemeinen Aufgabe zunächst im folgenden Paragraphen behandelt.

#### 18. Erweiterung von $T$ auf $K_F$ bei Nicht-Existenz von mod $T$ einfachen inneren Achsen und $q > 0$ .

$S$  sei eine beliebig ausgewählte Randseite von  $K_F$ ,  $S'$  eine von  $S$  verschiedene, aber mit  $S$  bezgl.  $T$  äquivalente Randseite derart, dass der von  $S$  nach  $S'$  gerichtete normale Querschnitt  $\sigma$  mod  $T$  einfach ist. Eine solche Wahl von  $S'$  ist nach § 16 möglich.

Zunächst wird angenommen, dass  $\sigma$  nicht amphidrom ist, dass es also kein Element von  $T$  gibt, welches  $S$  und  $S'$  vertauscht.

$t$  sei bezgl.  $T$  primär auf  $S$ . Der positive Grundpunkt  $V_t$  und der negative Grundpunkt  $U_t$  von  $t$  sind die Endpunkte von  $S$ , und  $S$  kann als durch  $t$  orientiert betrachtet werden. In Fig. 8 hat man  $K_F$  bei Durchlaufung von  $S$  zur rechten Hand. Sei  $q$  eines der Elemente von  $T$ , welche  $S$  in die mit  $S$  äquivalente Randseite  $S'$  überführen. Dann ist  $t' = qtq^{-1}$  primär auf  $S'$  und orientiert  $S'$  so, dass  $K_F$  zur Rechten liegt. Die Gesamtheit der Elemente von  $T$ , welche  $S$  in  $S'$  überführen, kann in der Form

$$qt^v = t'^v q$$

geschrieben werden, wo  $v$  alle ganzen Zahlen durchläuft. Keines dieser Elemente führt  $S'$  in  $S$  über, da  $\sigma$  nicht-amphidrom vorausgesetzt wurde. Die Endpunkte

von  $t^{\nu} \varrho S'$  gehören daher beide dem Bogen  $V_t U_t$  von  $E$  oder beide dem Bogen  $V_t' U_t'$  von  $E$  an<sup>1</sup>, und zwar tritt für genügend kleines  $\nu$  das erstere, und für genügend grosses  $\nu$  das letztere ein. Man kann daher denjenigen Wert  $\nu_1$  von  $\nu$  bestimmen, für den  $t^{\nu_1} \varrho S'$  auf  $V_t U_t$  und  $t^{\nu_1+1} \varrho S'$  auf  $V_t' U_t'$  aufsitzt. Bezeichnet man dann

$$\tau = t^{\nu_1} \varrho,$$

so hat man die in Fig. 8 dargestellte Lage der Randseiten  $\tau S'$  und  $t' \tau S'$  und damit auch der orientierten Querschnitte  $\tau \sigma$  und  $t' \tau \sigma$ . Also mündet  $\sigma$  auf  $S'$  zwischen den beiden Punkten ein, von denen  $\tau \sigma$  und  $t' \tau \sigma$  ausgehen.  $\tau \sigma$  geht

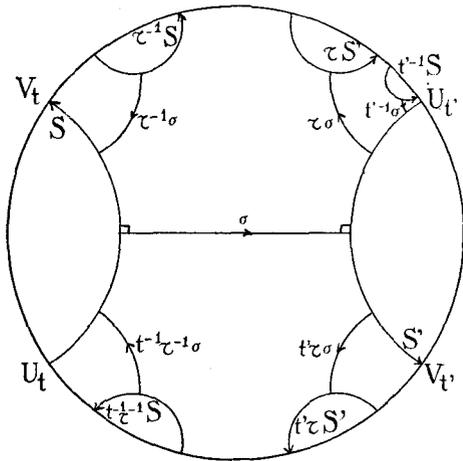


Fig. 8.

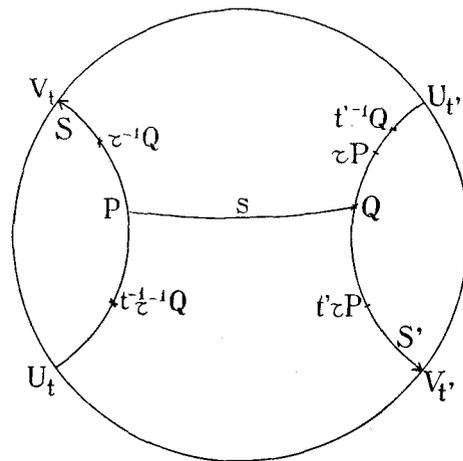


Fig. 9.

von einem Punkt zwischen den Einmündungspunkten von  $\sigma$  und  $t'^{-1} \sigma$  aus. Übt man  $\tau^{-1}$  aus, so findet man, dass  $\sigma$  auf  $S$  zwischen den Einmündungspunkten von  $\tau^{-1} \sigma$  und  $\tau^{-1} t'^{-1} \sigma = t^{-1} \tau^{-1} \sigma$  ausgeht; es ist ja  $t' = \varrho t \varrho^{-1} = \tau t \tau^{-1}$ .

Nun wähle man (Fig. 9) auf  $S$  willkürlich einen Punkt  $P$ . Da  $T$  schon als Abbildungsgruppe auf dem Rand von  $K_F$  konstruiert ist, ist die ganze Äquivalenzklasse  $TP$  schon definiert. Speziell sind  $\tau P$  und  $t' \tau P$  zwei verschiedene Punkte von  $S'$ . Zwischen diesen wähle man beliebig einen Punkt  $Q$  und zeichne den gerichteten Querschnitt  $s = PQ$ , der nun im Allgemeinen nicht mehr auf  $S$  und  $S'$  senkrecht steht. Bezeichnet  $\varrho$  jetzt ein beliebiges Element von  $T$ , so sei  $\varrho s$  der Querschnitt, der von  $\varrho P$  nach  $\varrho Q$  führt. Es wird nun behauptet, dass  $s$

<sup>1</sup> Bögen des Randkreises  $E$  werden durch Anfangs- und Endpunkt bezeichnet, wobei *rechtsläufiger* Umlauf um  $E$  vorausgesetzt sei.

einfach mod  $T$  ist, d. h. für kein  $q \subset T$  von  $qs$  geschnitten wird. Das sieht man durch Betrachtung folgender Einzelfälle:

1) Ist  $qS = S$ , so ist  $q = t^v$ , also  $qS' = t^v S'$ . Für  $v > 0$  liegt  $qP$  auf  $PV_t$  und  $qQ$  auf der Randseite  $t^v S'$ , die zum Bogen  $V_t U_t$  gehört; also schneidet  $qs$  nicht  $s$ . Analog für  $v < 0$ .

2) Ist  $qS' = S'$ , so ist  $q = t'^v$ , und eine analoge Betrachtung ergibt wieder, dass  $qs$  nicht  $s$  schneidet.

3) Ist  $qS = S'$ , so ist  $q = t'^v \tau$ , führt also von  $t'^v \tau P$  nach einem Punkt der Randseite  $t'^v \tau S'$ . Für  $v > 0$  liegt  $t'^v \tau P$  auf  $QV_t$ , und die Randseite  $t'^v \tau S'$  gehört zum Bogen  $V_t U_t$ . Also schneidet  $qs$  nicht  $s$ . Analog für  $v \leq 0$ .

4) Ist  $qS' = S$ , so bemerkt man durch Ausübung von  $\tau^{-1}$ , dass  $P$  zwischen  $\tau^{-1}Q$  und  $\tau^{-1}t'^{-1}Q = t^{-1}\tau^{-1}Q$  liegt, und nach dem in Fig. 8 über die Randseitenlage gefundenen ergibt sich auch hier kein Schnittpunkt.

5) Liegt keiner der Fälle 1)–4) vor, so sind  $S, S'$  und  $qS, qS'$  vier verschiedene Randseiten von  $K_F$ , und die beiden Paare trennen einander nicht, da der normale Querschnitt  $\sigma$  nicht von  $q\sigma$  geschnitten wird. Dann wird aber auch  $s$  nicht von  $qs$  geschnitten.

Damit ist gezeigt, dass der Querschnitt  $s$  in der Tat mod  $T$  einfach ist.

Wie für den normalen Querschnitt  $\sigma$  gilt auch für den Querschnitt  $s$ , dass seine Äquivalenzklasse  $Ts$  in  $n$  Kongruenzklassen zerfällt, die entsprechend (15, 2) durch

$$s, \alpha s, \alpha^2 s, \dots, \alpha^{n-1} s$$

repräsentiert werden. Dementsprechend ergibt sich die Erweiterung von  $T$  auf  $Ts$ , die wir nun vornehmen wollen, — in den Endpunkten liegt sie ja schon vor — hier in sehr einfacher Weise:  $\alpha$  bezeichne eine beliebig gewählte topologische Abbildung des gerichteten Querschnitts  $s$  auf den gerichteten Querschnitt  $\alpha s$ , von  $\alpha s$  auf  $\alpha^2 s, \dots$ , von  $\alpha^{n-2} s$  auf  $\alpha^{n-1} s$ . Um  $\alpha$  auch auf  $\alpha^{n-1} s$  zu definieren, setzt man dort

$$\alpha x = \tilde{f} \alpha^{-(n-1)} x,$$

da ja  $\alpha^n = \tilde{f}$  in  $T$  sein sollte. Damit ist  $\alpha$  in einem Fundamentalbereich für  $F$  in  $Ts$  erklärt. Durch die Funktionalgleichung  $\alpha f x = f_1 \alpha x$  wird  $\alpha$  danach in ganz  $Ts$  erklärt. Ein beliebiger Querschnitt aus  $Ts$  ist nun durch ein beliebiges Element von  $T$  auf denjenigen Querschnitt topologisch abgebildet, auf den seine Endpunkte bereits abgebildet waren, und die Funktionalgleichung ist dabei erfüllt.

Noch einfacher spricht sich diese Erweiterung aus, wenn man auf die Freiheit in der Wahl der topologischen Abbildung verzichtet, indem man sie, wie früher schon angedeutet, speziell wählt: Bildet man einen beliebigen Querschnitt aus  $Ts$  durch ein beliebiges Element  $\varrho \in T$  linear auf den Querschnitt ab, auf den seine Endpunkte bei  $\varrho$  abgebildet sind, so ist das eine richtige Erweiterung von  $T$  auf  $Ts$ , denn die Funktionalgleichung wird dabei von selbst erfüllt.

Durch die Querschnittmenge  $Ts$  wird  $K_F$  in nichteuklidisch-konvexe Bereiche zerschnitten, deren Rand aus geradlinigen Stücken gebildet wird. Diese sind

nämlich 1) Querschnitte, 2) Stücke von Randseiten aus der Äquivalenzklasse  $TS$ , die zwischen einem Ausgangspunkt und einem Einmündungspunkt von Querschnitten liegen, 3) eventuell überdies noch Randseiten von  $K_F$ , die nicht zur Äquivalenzklasse  $TS$  gehören.

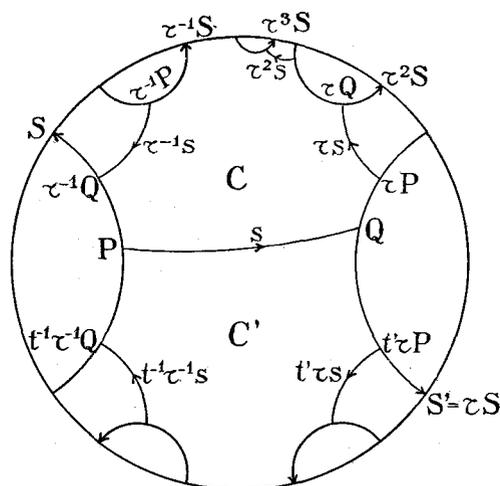


Fig. 10.

Nun betrachte man (Fig. 10) denjenigen Einteilungsbereich  $C$ , der an  $s$  grenzt und bei Durchlaufung von  $s$  zur Linken liegt. Aus der Figur sieht man, dass dasjenige polygonale Randstück  $R$  von  $C$ , zu dem  $s$  gehört und das abwechselnd aus Randstrecken erster und zweiter Art gebildet wird, durch  $\tau$  so auf

sich abgebildet wird, dass es dabei um zwei Strecken vorwärts rückt. Ist also  $\tau$  von endlicher Ordnung  $\lambda$ , so ist  $R$  ein konvexes Polygon mit  $2\lambda$  Seiten und bildet den vollständigen Rand von  $C$ . Angenommen,  $\tau$  sei von unendlicher Ordnung. Dann hat  $R$  unendlich viele Seiten, diese häufen sich gegen die Grundpunkte von  $\tau$ , und die Achse  $A_\tau$  von  $\tau$  gehört zu  $C$ . Das Randstück  $R$  verläuft in einem Abstandstreifen von  $A_\tau$ . Dann ist  $A_\tau$  einfach mod  $T$ . Denn man nehme an,  $A_\tau$  würde von  $\varrho A_\tau = A_{\varrho\tau\varrho^{-1}}$  geschnitten. Dann betrachte man denjenigen Einteilungsbereich  $C^*$ , der links von  $s^* = \varrho s$  liegt. Für diesen spielt  $\tau^* = \varrho\tau\varrho^{-1}$  dieselbe Rolle, wie  $\tau$  für  $C$ . Es ergibt sich also ein polygonales Randstück  $R^*$  von  $C^*$  in einem Abstandstreifen von  $A_{\tau^*} = \varrho A_\tau$ . Da sich  $A_\tau$  und  $A_{\tau^*}$  schneiden, müssen sich die beiden Abstandstreifen, also auch  $R$  und  $R^*$  schneiden, und das ist unmöglich, da das von  $R$  und  $A_\tau$  umschlossene Gebiet ganz zu  $C$  gehört. Also ist  $A_\tau$  mod  $T$  einfach und darum nach der Voraussetzung

dieses Paragraphen Randseite von  $K_F$  und damit auch von  $C$ . Der vollständige Rand von  $C$  wird also im Falle eines  $\tau$  von unendlicher Ordnung durch  $R$ ,  $A_\tau$  und die Grundpunkte von  $\tau$  gebildet.

Sowohl bei endlicher wie bei unendlicher Ordnung von  $\tau$  gilt, dass  $C$  links von allen zu seinem Rand gehörigen gerichteten Querschnitten aus der Menge  $Ts$  liegt, und ferner, dass  $\tau$  primär in  $T$  ist. Wäre nämlich  $\tau$  nicht primär, so könnte man ein Element  $\varrho \in T$ , von dem  $\tau$  eine Potenz ist, so wählen, dass das Randseitenpaar  $\varrho S$ ,  $\varrho\tau S$  das Paar  $S$ ,  $\tau S$  trennte, und dann würden  $s$  und  $\varrho s$  einander schneiden.

Für den anderen an  $s$  grenzenden Einteilungsbereich  $C'$  spielt  $\tau' = \tau t = t'\tau$  dieselbe Rolle, wie  $\tau$  für  $C$ . Hierbei liegt  $C'$  rechts von allen zu seinem Rand gehörigen Querschnitten.

Aus der obigen Betrachtung geht zugleich hervor, dass durch ein beliebiges Element  $\varrho$  von  $T$  der vollständige Rand von  $C$  auf den vollständigen Rand des links von  $\varrho s$  liegenden Einteilungsbereiches abgebildet wird. Man kann diesen Bereich daher in eindeutiger Weise durch  $\varrho C$  bezeichnen. Somit reproduziert sich die durch  $Ts$  bewirkte Einteilung von  $K_F$  bei ganz  $T$ . Insbesondere bilden diejenigen Elemente  $\varrho$  von  $T$ , für welche  $\varrho C = C$  ist, eine Untergruppe  $T_C$  von  $T$ . Für ein solches  $\varrho$  muss  $s$  auf einen zum Rand von  $C$  gehörigen Querschnitt abgebildet werden, und diese werden durch die Menge  $\tau's$  erschöpft. Also wird  $T_C$  von  $\tau$  erzeugt; ebenso wird  $T_{C'}$  von  $\tau'$  erzeugt. Wählt man in einem beliebigen Bereich der Einteilung eine zu  $Ts$  gehörige Randstrecke, so lässt sich diese durch ein Element von  $T$  auf  $s$  abbilden, und der Bereich muss dabei  $C$  oder  $C'$  entsprechen, je nachdem er links oder rechts von der gewählten Randstrecke liegt. Man sieht daher:

Die durch  $Ts$  hervorgebrachten Einteilungsbereiche zerfallen in genau zwei Äquivalenzklassen. Die zu einem Einteilungsbereich gehörige Untergruppe von  $T$  ist entweder zyklisch oder frei mit einer Erzeugenden.

Es ist nun leicht, durch einen letzten Schritt zu einer Einteilung zu gelangen, bei der die zu den einzelnen Bereichen gehörigen Untergruppen von  $T$  nur aus der Identität bestehen:

Wir wollen den Bereich  $C$  unterteilen und nehmen zunächst an, dass  $\tau$  von unendlicher Ordnung ist. Man verbindet (Fig. 11) einen auf  $S$  zwischen  $P$  und  $\tau^{-1}Q$  gewählten Punkt  $X$  mit einem beliebigen Punkt  $Y$  von  $A_\tau$  durch einen Querschnitt  $r$ . Das Bild  $\varrho r$  von  $r$  bei  $\varrho \in T$  soll der die Punkte  $\varrho X$  und  $\varrho Y$  verbindende Querschnitt sein. Dann ist  $r$  einfach mod  $T$ . Denn in  $C$  hat  $r$

nur die Bilder  $\tau^v r$ ,  $-\infty < v < \infty$ , und diese treffen  $r$  nicht; siehe die Figur.  $C$  wird durch  $T_C r$  und entsprechend die ganze Äquivalenzklasse  $TC$  durch  $Tr$  in Sechsecke eingeteilt. Sei  $D$  das an  $s$  stossende. Man erweitert nun unmittelbar  $T$  auf  $Tr$ , wie dies oben bei  $s$  geschah, etwa linear. Die Einteilung reproduziert sich dann bei  $T$ . Dass die zu  $D$  gehörige Untergruppe von  $T$  nur aus der Identität besteht, sieht man z. B. daran, dass  $D$  nur eine zu  $Ts$  gehörige Randseite hat.

Sodann nehmen wir an, dass  $\tau$  die endliche Ordnung  $\lambda$  hat (Fig. 12). Dann muss  $\lambda > 2$  sein, da  $\tau$  sonst  $S$  und  $S'$  vertauschen würde, was der Anfangs-

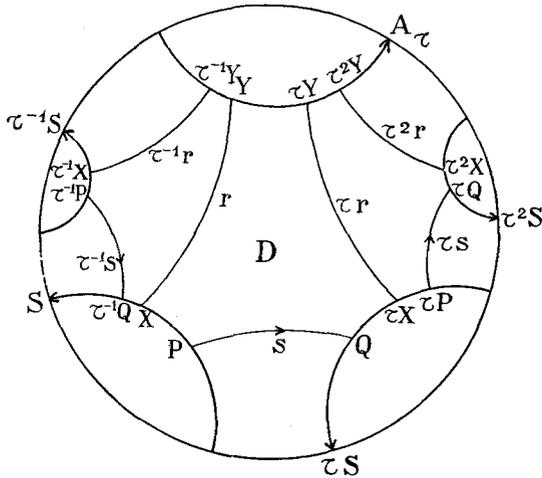


Fig. 11.

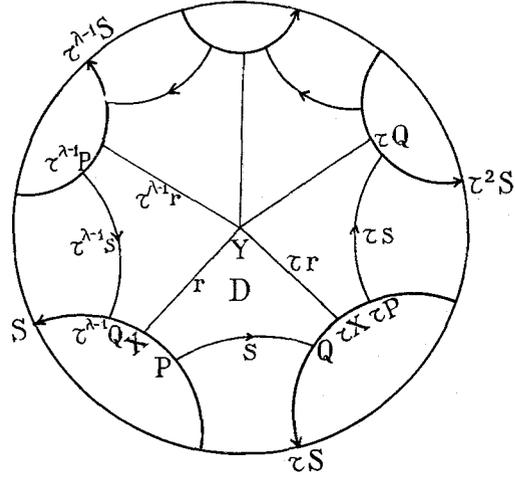


Fig. 12.

voraussetzung eines nicht amphidromen Querschnittes widerspräche.  $C$  ist ein  $2\lambda$ -Eck. Man wähle in  $C$  beliebig einen Punkt  $Y$  und setze fest, dass

$$Y = \tau Y = \tau^2 Y = \dots = \tau^{\lambda-1} Y$$

sein soll. Ist nun  $\frac{n}{\lambda} = \mu$ , so wähle man in  $\tau C, \tau^2 C, \dots, \tau^{\mu-1} C$  willkürlich

Punkte, die mit  $\tau Y, \tau^2 Y, \dots, \tau^{\mu-1} Y$  bezeichnet werden. Nun ist jeder mit  $C$  bezgl.  $T$  äquivalente Bereich  $C^*$  mit einem der  $\mu$  Bereiche

$$C, \tau C, \dots, \tau^{\mu-1} C$$

bezgl.  $F$  äquivalent, d. h. kongruent. Ist

$$C^* = k \tau^q C, \quad 0 \leq q \leq \mu - 1, \quad k \subset F,$$

so bestimme man in  $C^*$  den Punkt  $kx^q Y$ . In der so bestimmten Punktmenge, die wir  $TY$  nennen, wird nun die Abbildung  $x$  durch

$$x kx^q Y = k_I x^{q+1} Y$$

definiert, falls  $q < \mu - 1$  ist. Wie in (13, 5) gibt es eine Darstellung

$$x^\sigma = g \tau^\sigma, \quad 0 < \sigma \leq \lambda - 1, \quad g \in F,$$

(der Wert  $\sigma = 0$  kommt hier nicht in Frage), und man setzt

$$x kx^{\mu-1} Y = k_I g \tau^\sigma Y = k_I g Y.$$

Damit ist die Abbildungsgruppe  $T$  in ganz  $TY$  erklärt.

Nun wählt man wieder einen Punkt  $X$  auf  $S$  zwischen  $P$  und  $\tau^{-1}Q$  und bezeichnet mit  $r$  die Verbindungsstrecke  $XY$ . Für beliebiges  $\varrho \in T$  sei  $\varrho r$  die Verbindungsstrecke von  $\varrho X$  und  $\varrho Y$ . Dann ist  $r$  einfach mod  $T$ , abgesehen vom Endpunkt  $Y$ , denn von  $Tr$  liegen nur  $\tau^\nu r$ ,  $0 \leq \nu \leq \lambda - 1$ , in  $C$ , und diese haben nur  $Y$  gemeinsam. Man kann daher sofort  $T$  auf  $Tr$  erweitern, etwa linear.

Unter den durch  $Tr$  in  $TC$  entstehenden Einteilungsbereichen, die alle Fünfecke sind, sei  $D$  der an  $s$  grenzende. Wieder gehört zu dem Bereich  $D$  nur die Untergruppe 1 von  $T$ . Der vollständige Rand von  $D$  wird durch ein von der Identität verschiedenes Element von  $T$  auf den vollständigen Rand eines von  $D$  verschiedenen Bereiches abgebildet; dieser kann durch das Bild der allein zu  $Ts$  gehörigen Randstrecke  $s$  des Fünfecks  $D$  bestimmt werden.

Die Erweiterung von  $T$  auf  $TC$  wird nun für  $\tau$  von endlicher oder unendlicher Ordnung gemeinsam besprochen.  $\tau$  sei von der Relativordnung  $\lambda$ ,

$$\lambda \mu = n, \quad x^\sigma = g \tau^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \mu - 1.$$

Sei  $\tau$  eine topologische Abbildung von  $D$  auf  $\tau D$ , von  $\tau D$  auf  $\tau^2 D, \dots$ , von  $\tau^{\lambda-2} D$  auf  $\tau^{\lambda-1} D$ , die sich an die auf dem vollständigen Rand dieser Bereiche gegebene stetig anschliesst. Wir betrachten nun die Bereichsmenge

$$(18, 1) \quad M = D + \tau D + \tau^2 D + \dots + \tau^{\lambda-1} D,$$

die für ein  $\tau$  von endlicher Ordnung den vollständigen Bereich  $C$  und für unendliche Ordnung von  $\tau$  einen Teilbereich von  $C$  ausmacht. Der Bereichsmenge  $M$  entspricht in  $x^q C$ ,  $0 < q \leq \mu - 1$ , eine ebensolche Bereichsmenge, die durch die Abbildung der Ränder der Teilbereiche, die ja bereits vorliegt, vollständig

bestimmt ist; wir bezeichnen diese mit  $M_q$ . Nun sei  $\alpha$  eine topologische Abbildung von  $M$  auf  $M_1$ , von  $M_1$  auf  $M_2, \dots$ , von  $M_{\mu-2}$  auf  $M_{\mu-1}$ , die sich an die auf den Rändern der Teilbereiche gegebene stetig anschliesst.

$$(18, 2) \quad M + M_1 + \dots + M_{\mu-1}$$

ist ein Fundamentalbereich für  $F$  in  $TC$ , und die Erweiterung von  $T$  auf  $TC$  ergibt sich nun fast wörtlich wie in § 13. Es wird genügen anzugeben, dass hier  $\tau$  statt  $t$ ,  $D$  statt  $s$  und  $M$  statt  $S$  steht. Es ist  $\tau^2 = h \subset F$ , wobei  $h$  für ein  $\tau$  von endlicher Ordnung die 1 ist. Nach Auslassung der abgeschlossenen bzw. halboffenen Randstrecke  $\tau r$  (für ein  $\tau$  von unendlicher bzw. endlicher Ordnung) ist  $D$  ein Fundamentalbereich für  $T$  in  $TC$ .

Ganz entsprechend, und unabhängig von der Konstruktion in  $TC$ , wird  $T$  auf die Äquivalenzklasse  $TC'$  des rechts von  $s$  gelegenen Einteilungsbereiches  $C'$  erweitert. Die beiden Erweiterungen schliessen sich stetig an einander, da  $TC$  und  $TC'$  nur längs  $Ts$  aneinander grenzen und beide Erweiterungen auf  $Ts$  ja mit der dort bereits vorliegenden Gruppe  $T$  übereinstimmen.

Damit ist dann  $T$  von  $\bar{G}_F$  zu einer in ganz  $K_F + \bar{G}_F$  bestehenden Gruppe topologischer Abbildungen erweitert, wie es verlangt war. Zur Verdeutlichung des Ergebnisses sei noch das folgende hinzugefügt:

Der Teilbereich  $D$  von  $C$  bildet mit dem entsprechenden Teilbereich  $D'$  von  $C'$  zusammen einen Fundamentalbereich für  $T$  in  $K_F$ , wenn man, wie oben angegeben, eine geeignete Menge von Randpunkten fortlässt. Identifiziert man bezgl.  $T$  äquivalente Randpunkte von  $D + D'$ , so entsteht die *Modulfläche*  $K_F \text{ mod } T$  der konstruierten periodischen Abbildung, und  $K_F \text{ mod } F$  ist eine reguläre Überlagerungsfläche mit  $n$  Blättern über  $K_F \text{ mod } T$ . Je nach den Ordnungen oder Relativordnungen von  $\tau$  und  $\tau'$ , die von einander unabhängig sind, ergeben sich für gegebenes  $n$  eine endliche Anzahl von Typen dieser Überlagerung. Identifiziert man in den Figuren 11 bzw. 12 die Punkte von  $r$  mit den entsprechenden von  $\tau r$ , so hat die aus  $D$  entstehende Fläche das Geschlecht Null und zwei bzw. eine Randkurve. Analoges gilt für die aus  $D'$  entstehende Fläche. Fügt man diese beiden Flächen längs des Randstückes  $s$  zusammen, so hat die entstehende Modulfläche das Geschlecht Null. Die zu den Randseiten  $S$  und  $S'$  von  $K_F$  gehörigen Randstücke von  $D$  und  $D'$  schliessen sich dabei zu einer Randkurve der Modulfläche zusammen (Fig. 13). Sind  $\tau$  und  $\tau'$  beide von unendlicher Ordnung, so ergibt das auf  $A_\tau$  gelegene Randstück von  $D$  und ebenso das auf  $A_{\tau'}$  gelegene Randstück von  $D'$  je eine weitere Randkurve der Modul-

fläche, und diese ist also homöomorph einer Kugelfläche, aus der drei Elementarflächenstücke entfernt sind (Kugel mit drei Löchern). Dabei ist  $K_F \bmod F$  unverzweigt über  $K_F \bmod T$ . Ist dagegen  $\tau$  von endlicher Ordnung, so entsteht, wie man aus Figur 12 sieht, aus dem Eckpunkt  $Y$  von  $D$  ein Punkt der Modulfläche, über welchem  $K_F \bmod F$  verzweigt ist, indem je  $\lambda$  Blätter um den Verzweigungspunkt zusammenhängen. Wenn also  $\tau$  oder  $\tau'$  bzw. beide von endlicher Ordnung sind, so werden eine bzw. zwei Randkurven der oben gefundenen Modulfläche durch Verzweigungspunkte ersetzt.

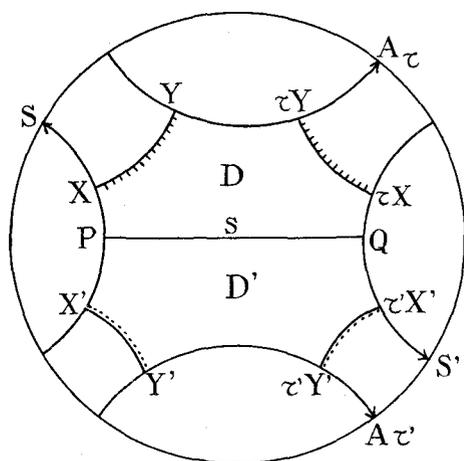


Fig. 13.

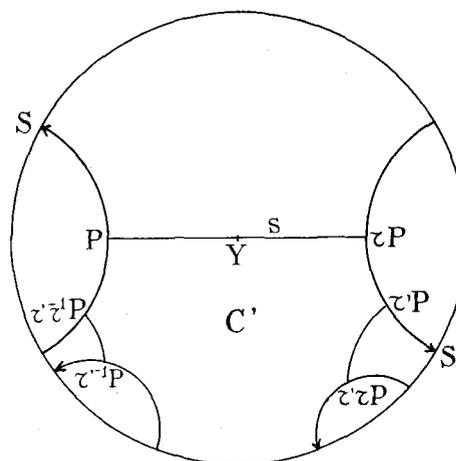


Fig. 14.

Zu Anfang dieses Paragraphen wurde angenommen, dass der von  $S$  nach  $S'$  führende normale und mod  $T$  einfache Querschnitt  $\sigma$  nicht amphidrom sei. Es bleibt die Änderung der Konstruktion kurz zu besprechen, die erforderlich ist, wenn  $\sigma$  amphidrom ist.

Sei  $\tau$  das eindeutig bestimmte Element von  $T$ , welches  $S$  und  $S'$  vertauscht. Dann ist  $\tau^2 = 1$ . Ist wieder  $t$  bezgl.  $T$  primär auf  $S$ , so ist  $t' = \tau t \tau^{-1} = \tau t$  primär auf  $S' = \tau S$ . Man wählt wieder (Fig. 14) einen Punkt  $P$  willkürlich auf  $S$ . Dann ist  $\tau P$  zufolge der schon auf den Rand von  $K_F$  erweiterten Abbildungsgruppe  $T$  ein bestimmter Punkt von  $S'$ . Sei  $s$  der  $P$  und  $\tau P$  verbindende, im Allgemeinen nicht normale Querschnitt. Wir sehen hier von einer Orientierung von  $s$  ab. Für beliebiges  $q \in T$  sei  $q s$  der  $q P$  und  $q \tau P$  verbindende Querschnitt. Dann ist  $s$  wieder einfach mod  $T$ : Für  $q = t^r$  bzw.  $q = t'^v$ ,  $v \neq 0$ , also  $S$  bzw.  $S'$  fest bei  $q$ , sieht man wie früher, dass  $s$  nicht von  $q s$  geschnitten wird. Für  $q = \tau$  kommt  $s$  mit Vertauschung der Endpunkte mit sich zur Deckung.

Für  $qS' = S$ ,  $q \neq \tau$ , hat man  $q = t'\tau$ ,  $\nu \neq 0$ , und dabei liegen  $q\tau P = t'P$  und  $qS = t'S'$  auf der gleichen Seite von  $s$ , sodass  $qs$  nicht  $s$  schneidet; analog für  $qS = S'$ ,  $q \neq \tau$ . In allen anderen Fällen erhält man wieder zwei einander nicht trennende Paare von Randseiten von  $K_F$ , da  $\sigma \bmod T$  einfach war. Also ist  $s$  einfach mod  $T$ .

Die Äquivalenzklasse von  $s$  zerfällt hier in  $\frac{n}{2}$  Kongruenzklassen. Man erkennt daraus leicht den Grad der Freiheit, den man bei der Erweiterung von  $T$  auf  $Ts$  hat. Der einfachen Darstellung halber benutzen wir die spezielle Festsetzung: Ein beliebiger Querschnitt aus  $Ts$  wird bei  $q \in T$  auf denjenigen Bildquerschnitt *linear* abgebildet, auf dessen Endpunkte seine Endpunkte bereits abgebildet sind. Z. B. wird dann  $s$  bei  $\tau$  mit umgekehrter Durchlaufung auf sich abgebildet, wobei der Mittelpunkt  $Y$  festbleibt.

Nun betrachtet man wieder die durch  $Ts$  bewirkte Einteilung von  $K_F$  in konvexe Bereiche. Alle Eckpunkte der Einteilung gehören zu  $TP$  und bilden ganz  $TP$ . Sei  $C'$  einer der beiden an  $s$  grenzenden Bereiche. In der Figur ist ein Teil seiner Berandung angedeutet. Setzt man wieder  $\tau' = \tau t = t'\tau$ , so wird das Randstück  $R$  von  $C'$ , zu dem  $s$  gehört, wieder so auf sich abgebildet, dass es um zwei Randstrecken vorwärts rückt. Es kommt also wieder darauf an, ob  $\tau'$  von endlicher Ordnung  $\lambda'$  oder von unendlicher Ordnung ist. Im ersten Fall ist  $C'$  ein  $2\lambda'$ -Eck, im zweiten Fall wird  $C'$  von dem Randstück  $R$ , das unendlich viele Seiten hat, der Achse von  $A_{\tau'}$ , die mod  $T$  einfach, also Randseite von  $K_F$  ist, und den Grundpunkten von  $\tau'$  berandet.

Ein Unterschied gegen den vorigen Fall besteht darin, dass hier die Äquivalenzklasse  $TC'$  bereits ganz  $K_F$  ausmacht; denn jeder Einteilungsbereich enthält ja eine mit  $s$  bezgl.  $T$  äquivalente Randseite, ist also mit einem der beiden an  $s$  grenzenden Bereiche äquivalent, und diese sind unter sich äquivalent, da sie sich bei  $\tau$  vertauschen.

Die Konstruktion von  $T$  in  $TC' = K_F$  geschieht nun im übrigen genau wie früher, indem man in  $C'$  einen Teilbereich  $D'$  konstruiert, dessen zugehörige Untergruppe von  $T$  nur aus der Identität besteht.

Im Grunde ist dieser Fall eines amphidromen Querschnitts nur eine Ausartung des erst betrachteten Falls eines nicht-amphidromen Querschnitts und lässt sich unter diesen durch folgende Betrachtung subsumieren: Bei nicht amphidromem Querschnitt musste  $\tau$ , wenn es von endlicher Ordnung war, eine Ordnung  $\lambda \geq 3$  haben, wobei  $C$  ein  $2\lambda$ -Eck bildete. Lässt man hier auch den

Wert  $\lambda = 2$  zu, so muss  $C$  ein Viereck werden, von dessen Seiten zwei gegenüberliegende auf  $S$  und  $S'$  liegen, während die beiden anderen von Querschnitten gebildet werden, von denen der eine von  $S$  nach  $S'$ , der andere von  $S'$  nach  $S$  gerichtet ist. Bei unserer Konstruktion gibt es aber immer nur einen Querschnitt zwischen  $S$  und  $S'$ . Man wird also zu einer Ausartung des Vierecks durch Zusammenfall von zwei Gegenseiten geführt, sodass das Viereck zu einer doppelt durchlaufenen Strecke, eben dem amphidromen Querschnitt, wird. Der in dem  $2\lambda$ -Eck enthaltene Punkt  $Y$ , der zu einem Verzweigungspunkt der Ordnung  $\lambda$  führte, wird bei der Ausartung zum Mittelpunkt  $Y$  von  $s$ , der bei der Überlagerung von  $K_F \bmod T$  durch  $K_F \bmod F$  einen Verzweigungspunkt der Ordnung 2 hervorruft. Auch die Reduktion der Anzahl von Äquivalenzklassen der Einteilungsbereiche von 2 auf 1 wird dadurch verständlich, indem im amphidromen Fall die Querschnittmenge  $Ts$  selbst die eine Äquivalenzklasse vertritt.

#### 19. Erweiterung von $T$ auf $K_F$ bei Existenz von mod $T$ einfachen Achsen.

Wir kehren nun zu dem allgemeinen Fall von § 17 zurück. Voraussetzung ist also nur die Existenz von mindestens einer mod  $T$  einfachen Achse. Die Einteilung von  $K_F$  durch die Äquivalenzklassen  $(17, 2)$  eines maximalen Systems  $(17, 1)$  von mod  $T$  einfachen und paarweise fremden Achsen liegt vor, und  $T$  ist auf diese Achsenmenge erweitert.

$B$  sei ein beliebig herausgegriffener Einteilungsbereich,  $T_B$  die zu  $B$  gehörige Untergruppe von  $T$  und  $\lambda$ , das in § 17 mit  $n_B$  bezeichnet wurde, die Relativordnung von  $T_B$ , d. h. die Ordnung von  $T_B/F_B$  oder der damit isomorphen Gruppe  $[T_B]/F$ . Setzt man  $\lambda\mu = n$ , so zerfällt  $T_B$  in  $\mu$  konjugierte Kongruenzklassen, die durch

$$(19, 1) \quad B, \alpha B, \alpha^2 B, \dots, \alpha^{\mu-1} B$$

repräsentiert werden; siehe (12, 1).

Nun kann man zunächst nach § 18 die Gruppe  $T_B$  zu einer in  $B$  bestehenden Gruppe von topologischen Abbildungen erweitern, da die Voraussetzungen von § 18, wie in § 17 dargelegt, ja hierbei erfüllt sind. Ist nun  $\mu > 1$ , so ist das gleiche zunächst für die übrigen  $\mu - 1$  Bereiche von (19, 1) zu leisten. Nun liegt bereits eine topologische Abbildung  $\alpha$  des Randes von  $B$  auf den Rand von  $\alpha B$  vor. Dadurch werden insbesondere die auf dem Rande von  $B$  als Einteilungs-

punkte benutzten Punkte auf den Rand von  $\alpha B$  übertragen, und man kann dort die den Querschnitten von  $B$  entsprechenden Querschnitte ziehen. Dann kann man  $\alpha$  durch eine etwa wieder lineare Abbildung der Querschnitte von  $B$  auf die entsprechenden von  $\alpha B$  erweitern.

Nun ist die Gruppe  $T_{\alpha B} = \alpha T_B \alpha^{-1}$  des Bereichs  $\alpha B$  der Gruppe  $T_B$  isomorph. Ist das erzeugende Element  $\tau$  der Gruppe  $T_C$  eines Einteilungsbereiches  $C$  in  $B$  von einer endlichen Ordnung, die hier mit  $\lambda_\tau$  bezeichnet sei, ist also  $C$  ein  $2\lambda_\tau$ -Eck, so hat auch die Gruppe  $T_{\alpha C} = \alpha T_C \alpha^{-1}$  des entsprechenden Einteilungsbereiches  $\alpha C$  in  $\alpha B$  eine Erzeugende  $\alpha \tau \alpha^{-1}$  derselben Ordnung  $\lambda_\tau$ , und  $\alpha C$  ist ebenfalls ein  $2\lambda_\tau$ -Eck. Es sei  $\mu_\tau = \frac{\lambda}{\lambda_\tau}$ , wobei man erinnert, dass  $\lambda = n_B$  dem  $n$  von § 18 entspricht, während für  $\lambda_\tau$  und  $\mu_\tau$  in § 18  $\lambda$  und  $\mu$  geschrieben wurde. Das in 18 mit  $\alpha$  bezeichnete Element ist jetzt ein gewisses Element  $\alpha_B$  von  $T_B$ . Bei der Erweiterung von  $T_B$  auf  $B$  nach § 18 wurden dann in den Bereichen

$$(19, 2) \quad C, \alpha_B C, \dots, \alpha_B^{\mu_\tau - 1} C$$

beliebig  $\mu_\tau$  Punkte gewählt, die mit

$$(19, 3) \quad Y, \alpha_B Y, \dots, \alpha_B^{\mu_\tau - 1} Y$$

bezeichnet sind. Die Ränder der Bereiche (19, 2) sind durch  $\alpha$  auf Ränder entsprechender Bereiche in  $\alpha B$  abgebildet, die mit

$$(19, 4) \quad \alpha C, \alpha \alpha_B C, \dots, \alpha \alpha_B^{\mu_\tau - 1} C$$

zu bezeichnen sind. In diesen wählt man nun je einen Punkt und bezeichnet ihn beziehungsweise mit

$$(19, 5) \quad \alpha Y, \alpha \alpha_B Y, \dots, \alpha \alpha_B^{\mu_\tau - 1} Y,$$

indem die Punkte (19, 5) die Bilder der Punkte (19, 3) bei der festzusetzenden Abbildung  $\alpha$  von  $B$  auf  $\alpha B$  sein sollen. — Ist  $\tau$  dagegen von unendlicher Ordnung, so sind die mit den Bezeichnungen (19, 3) versehenen Punkte Randpunkte von  $B$ , ihre Abbildung durch  $\alpha$  ist also bereits festgelegt. (Es ist m. a. W. die Willkür in der Wahl von  $Y$  als *innerem* Punkt von  $C$  im Falle eines  $\tau$  von endlicher Ordnung, die diese genaue Festsetzung der Bildpunkte (19, 5) von (19, 3) bei  $\alpha$  erforderlich macht.)

Die in § 18 durch den Buchstaben  $X$  gekennzeichneten Punkte liegen alle auf dem Rande von  $B$ , ihre Bilder bei  $\varkappa$  sind also definiert. Also kann man nun auch die zur Herstellung der  $D$ -Bereiche verwendeten Teilungslinien der Bereiche (19, 2) (also die mit  $r = XY$  u. s. w. bezeichnete Linien der Figuren 11 und 12) durch eine etwa lineare Abbildung  $\varkappa$  auf die Bereiche (19, 4) übertragen. Wie in (18, 1) und (18, 2) bestimmt man nun einen Fundamentalbereich für  $F_B$  in  $T_B C$ , bestehend aus  $\lambda \mu \varkappa = \lambda$   $D$ -Bereichen. Die bereits auf den Rändern dieser  $\lambda$   $D$ -Bereiche vorliegende Abbildung  $\varkappa$  erweitert man beliebig topologisch auf das Innere. Dann kann man danach durch die Funktionalgleichung  $\varkappa f = f \varkappa$  eine Abbildung  $\varkappa$  von ganz  $T_B C$  auf die entsprechende Bereichsmenge in  $\varkappa B$  erzielen.

Ist der zur Einteilung von  $B$  verwendete Querschnitt amphidrom, so erschöpft  $T_B C$  ganz  $B$ . Ist er nicht amphidrom, so gibt es noch genau eine weitere Äquivalenzklasse  $T_B C'$  von Bereichen, und diese wird ganz entsprechend behandelt. Danach ist dann die Abbildung  $\varkappa$  des Bereiches  $B$  auf den Bereich  $\varkappa B$  hergestellt, und  $\varkappa T_B \varkappa^{-1}$  ist also als Gruppe von topologischen Abbildungen von  $\varkappa B$  in sich dargestellt.

Ist  $\mu > 2$ , so setzt man in der gleichen Weise  $\varkappa$  als topologische Abbildung von  $\varkappa B$  auf  $\varkappa^2 B$ , von  $\varkappa^2 B$  auf  $\varkappa^3 B$ , . . ., von  $\varkappa^{\mu-2} B$  auf  $\varkappa^{\mu-1} B$  fest. Um nun  $\varkappa$  auch in  $\varkappa^{\mu-1} B$  zu erklären, wählt man in  $T_B$  ein zur Restklasse  $[\varkappa^\mu]$  gehöriges Element.  $\mu$  ist ja der kleinste positive Exponent, für welchen  $T_B$  in  $[\varkappa^\mu]$  vertreten ist. Sei  $\varphi$  ein solches Element von  $T_B$ . Es gibt also ein  $g \in F$  so, dass

$$\varkappa^\mu = g \varphi$$

ist. Gehört der Punkt  $x$  zu  $\varkappa^{\mu-1} B$ , so setzt man

$$\varkappa x = \varkappa^\mu \varkappa^{-(\mu-1)} x = g \varphi \varkappa^{-(\mu-1)} x,$$

und das ist definiert, da  $\varkappa^{-(\mu-1)} x$  zu  $B$  gehört.

Da jeder Bereich der Äquivalenzklasse  $T_B$  mit einem der  $\mu$  Bereiche (19, 1) kongruent ist, kann man danach mittels der Funktionalgleichung die ganze Gruppe  $T$  auf ganz  $T_B$  erweitern.

Urschöpft die Äquivalenzklasse  $T_B$  nicht ganz  $K_F$ , so wende man dasselbe Verfahren auf eine zweite Bereichsklasse an und fahre so fort, bis man nach endlich vielen Schritten zu Ende kommt. Da die Abbildung zweier Nachbarbereiche auf der ihnen gemeinsamen Achse aus der Menge (17, 2) mit der dort

im Voraus konstruierten übereinstimmt, ist es sichergestellt, dass die Gruppe  $T$  dabei aus in ganz  $K_F$  stetigen Abbildungen besteht.

Dadurch ist das Hauptproblem unter der in § 17 gemachten Voraussetzung, dass es mindestens eine mod  $T$  einfache Achse gibt, gelöst. Wenn wir auch die Allgemeinheit der Konstruktion stellenweise dadurch eingeschränkt haben, dass wir zur Vereinfachung der Ausdrucksweise von linearen Abbildungen Gebrauch machten, so wird der Grad der Freiheit in der Konstruktion von  $T$  in  $K_F$  doch genügend deutlich aus der Darstellung hervorgehen.

Gibt es  $\nu$  inäquivalente  $B$ -Bereiche, und wählt man in dem  $i$ -ten derselben den in § 18 mit  $D + D'$  bezeichneten Teilbereich  $D_i + D'_i$  aus, — im Fall eines amphidromen Querschnitts besteht  $D_i$  nur aus dem Querschnitt, — so bilden

$$(19, 6) \quad D_1 + D'_1 + D_2 + D'_2 + \cdots + D_\nu + D'_\nu$$

einen Fundamentalbereich für  $T$  in  $K_F$ , wenn man die Randpunkte von (19, 6) geeignet mitzählt. Durch Identifizierung bezgl.  $T$  äquivalenter Randpunkte von (19, 6) erhält man die Modulfläche  $K_F$  mod  $T$ , die nun auch positives Geschlecht erhalten kann. Sie hat so viele Randkurven, wie es bezgl.  $T$  Äquivalenzklassen von Randseiten von  $K_F$  gibt.

## 20. Mittlere Verschiebungslänge.

Die dargestellte Lösung der Aufgabe,  $T$  als Abbildungsgruppe in  $K_F$  zu konstruieren, beruhte auf der vorausgesetzten Existenz einer mod  $T$  einfachen Achse. Es bleibt also die Berechtigung dieser Voraussetzung zu untersuchen.

Um die Existenz mod  $T$  einfacher Querschnitte nachzuweisen, wurde in § 15 eine Mittelbildung der Länge normaler Querschnitte für ein vollständiges System (15, 2) von inkongruenten innerhalb einer Äquivalenzklasse vorgenommen und in § 16 bewiesen, dass ein Querschnitt mit kürzester mittlerer Länge mod  $T$  einfach ist. Es soll nun zum Nachweis der Existenz mod  $T$  einfacher Achsen dasselbe Verfahren auf Verschiebungslängen statt Querschnittslängen angewandt werden. Doch liegen die Verhältnisse bei Achsen etwas verwickelter als bei Querschnitten.

Sei  $t$  ein Element unendlicher Ordnung in  $T$  mit der Relativordnung  $l$  und  $t^l = f \in F$ . Dann ist nach (8, 1) die Verschiebungslänge  $L_t$  von  $t$  durch

$$(20, 1) \quad L_t = \frac{1}{l} L_f$$

definiert. Sei  $\lambda$  die Multiplizität von  $t$ , d. h. nach § 10 die Relativordnung des primären Elements, von dem  $t$  eine Potenz ist. Ist  $\lambda\mu = n$ , so zerfällt nach § 11 die Äquivalenzklasse von  $t$  in  $\mu$  konjugierte Kongruenzklassen. Wie in § 11 bemerkt, haben kongruente Elemente gleiche Verschiebungslänge, sodass man von der Verschiebungslänge einer Kongruenzklasse sprechen kann. Wir definieren nun:

Der Mittelwert der Verschiebungslänge der  $\mu$  durch  $t$  bestimmten Kongruenzklassen wird mit  $L_t^*$  bezeichnet und *mittlere Verschiebungslänge von  $t$*  genannt.

$L^*$  ist eine Invariante gegenüber Transformation innerhalb  $T$ . Denn in  $T$  konjugierte Elemente gehören zu derselben Äquivalenzklasse, bestimmen also dasselbe System von Kongruenzklassen.

Die Zahlen  $L^*$  haben keine Häufungswerte. Denn die Zahlen  $L$  haben nach § 9 keine Häufungswerte, und zwischen diesen findet Mittelbildung über eine durch  $n$  beschränkte Anzahl statt.

Repräsentanten der  $\mu$  konjugierten Kongruenzklassen erhält man nach § 11 durch Transformation von  $t$  mit  $x^v$ ,  $0 \leq v \leq \mu - 1$ , und diese Elemente haben alle die Relativordnung  $l$ . Also ist

$$(20, 2) \quad L_t^* = \frac{1}{\mu} \sum_{v=0}^{\mu-1} L_{x^v t x^{-v}},$$

und nach (20, 1) kann man auch schreiben

$$(20, 3) \quad L_t^* = \frac{1}{\mu l} \sum_{v=0}^{\mu-1} L_{x^v f x^{-v}} = \frac{1}{\mu l} \sum_{v=0}^{\mu-1} L_{f I^v}.$$

Ferner kann man, ohne  $\mu$  bestimmen zu müssen,

$$(20, 4) \quad L_t^* = \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} L_{x^v t x^{-v}} = \frac{1}{n l} \sum_{v=0}^{n-1} L_{f I^v}$$

schreiben, denn in (20, 4) wird jede Kongruenzklasse  $\lambda$  Male gezählt, was ohne Einfluss auf die Mittelbildung ist.

Für Elemente der maximalen Multiplizität  $\lambda = n$  ist  $L^* = L$ , da  $\mu = 1$  ist.

Es sei bemerkt, dass auch für Elemente von  $F$  die mittlere Verschiebungslänge im Allgemeinen von der gewöhnlichen verschieden ist, nämlich im Allgemeinen nur dann  $L^* = L$  ist, wenn das Element die Multiplizität  $n$  hat, also  $n$ te Potenz eines Elements von  $T$  ist. Hat das Element eine kleinere Multiplizität,

so ist  $\mu > 1$ , und es findet Mittelbildung statt. Doch kann natürlich »zufällig« der gemittelte Wert gleich dem ursprünglichen sein.

Erhebt man ein Element  $t$  unendlicher Ordnung zur  $r^{\text{ten}}$  Potenz, so ist die mittlere Verschiebungslänge von  $t^r$  das  $|r|$ -fache derjenigen von  $t$ . Denn wenn auch  $t^r$  eine kleinere Relativordnung als  $t$  haben kann, so gilt nach (8,4)

$$L_{t^r} = |r| L_t$$

und für jedes  $\nu$

$$L_{x^\nu t^r x^{-\nu}} = L_{(x^\nu t x^{-\nu})^r} = |r| L_{x^\nu t x^{-\nu}},$$

also nach (20,4)

$$(20,5) \quad L_{t^r}^* = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} L_{x^\nu t^r x^{-\nu}} = \frac{|r|}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} L_{x^\nu t x^{-\nu}} = |r| L_t^*.$$

## 21. Ein Hilfssatz.

Zur Erleichterung der Übersicht in dem folgenden Paragraphen 22, der über die Existenz mod  $T$  einfacher Achsen entscheiden soll, wird in diesem

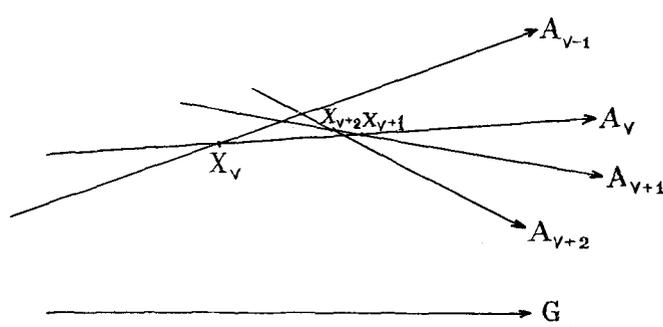


Fig. 15.

Paragraphen ein metrischer Hilfssatz vorweggenommen.

Sei  $G$  (Fig. 15) eine orientierte Gerade der hyperbolischen Ebene und  $A_\nu$ ,  $-\infty < \nu < \infty$ , eine Folge von orientierten Geraden in derselben durch  $G$  bestimmten Halbebene, die folgende drei Bedingungen erfüllen:

- 1) Jede Gerade  $A_\nu$  ist mit  $G$  »gleichgerichtet«, d. h.  $G$  und  $A_\nu$  überqueren ihre gemeinsame Senkrechte in gleichem Sinn, oder anders ausgedrückt, eine positive Strecke auf  $A_\nu$  hat auf  $G$  eine positive Projektion.
- 2)  $A_{\nu+1}$  schneidet  $A_\nu$  in einem mit  $x_{\nu+1}$  bezeichneten Punkt derart, dass der positive Halbstrahl von  $A_{\nu+1}$  in dem Gebiet zwischen  $G$  und  $A_\nu$  liegt.
- 3) Die Folge  $A_\nu$  kommt bei einer gewissen Verschiebung  $g$  mit der Achse  $G$  mit sich zur Deckung; es ist also  $gA_\nu = A_{\nu+\xi}$  für ein festes  $\xi$ .

Unter diesen Voraussetzungen sagt der Hilfssatz aus:

$$(2I, I) \quad L_g < (x_\nu, x_{\nu+1}) + (x_{\nu+1}, x_{\nu+2}) + \dots + (x_{\nu+\xi-1}, x_{\nu+\xi}).$$

Daher bedeutet  $L_g$  die Verschiebungslänge von  $g$ , und  $(x_\nu, x_{\nu+1})$  bezeichnet die mit dem der Orientierung von  $A_\nu$  entsprechenden Vorzeichen gerechnete Länge der Strecke von  $x_\nu$  nach  $x_{\nu+1}$ . — Die rechte Seite von (2I, I) ist wegen der Periodizität unabhängig von dem Werte von  $\nu$ .

Da  $g x_\nu = x_{\nu+\xi}$  ist, ist es klar, dass

$$L_g < |(x_\nu, x_{\nu+1})| + \dots + |(x_{\nu+\xi-1}, x_{\nu+\xi})|$$

ist, denn die rechte Seite ist grösser als die direkte Entfernung von  $x_\nu$  nach  $x_{\nu+\xi}$ , und diese ist wieder grösser als  $L_g$ . Wenn also unter den  $\xi$  Streckenlängen in (2I, I) keine negativen vorkommen, ist der Satz trivialerweise richtig.

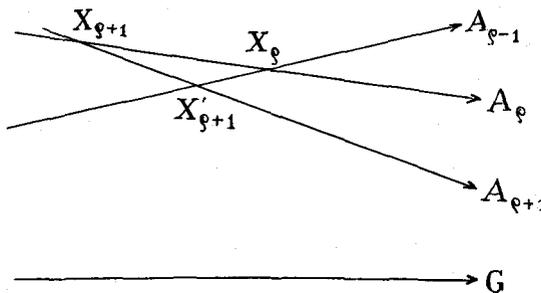


Fig. 16.

Es sei also etwa  $(x_\varrho, x_{\varrho+1}) < 0$ . Dann müssen  $A_{\varrho-1}$  und  $A_{\varrho+1}$  einander schneiden (Fig. 16). Der Schnittpunkt sei mit  $x'_{\varrho+1}$  bezeichnet. Wo nun auch  $x_{\varrho-1}$  auf  $A_{\varrho-1}$  und  $x_{\varrho+2}$  auf  $A_{\varrho+1}$  liegen mögen, so gilt

$$\begin{aligned} & (x_{\varrho-1}, x_\varrho) + (x_\varrho, x_{\varrho+1}) + (x_{\varrho+1}, x_{\varrho+2}) \\ &= (x_{\varrho-1}, x'_{\varrho+1}) + (x'_{\varrho+1}, x_\varrho) + (x_\varrho, x_{\varrho+1}) + (x_{\varrho+1}, x'_{\varrho+1}) + (x'_{\varrho+1}, x_{\varrho+2}) \\ &> (x_{\varrho-1}, x'_{\varrho+1}) + (x'_{\varrho+1}, x_{\varrho+2}); \end{aligned}$$

denn man hat die beiden positiven Glieder  $(x'_{\varrho+1}, x_\varrho)$  und  $(x_{\varrho+1}, x'_{\varrho+1})$  fortgelassen, und deren Summe ist nach der Dreiecksungleichung grösser als der numerische Wert des ebenfalls fortgelassenen negativen Gliedes  $(x_\varrho, x_{\varrho+1})$ .

Indem man also  $A_\varrho$  und alle ihr bei den Potenzen von  $g$  entsprechenden Geraden fortlässt und dementsprechend  $A_{\varrho+1}$  als den Nachfolger von  $A_{\varrho-1}$  auffasst, wodurch  $x'_{\varrho+1}$  an die Stelle der zwei Punkte  $x_\varrho$  und  $x_{\varrho+1}$  tritt, hat man wieder eine Geradenfolge, die die Voraussetzungen 1) bis 3) erfüllt, bei der jedoch  $\xi$  durch  $\xi - 1$  ersetzt ist. Das Verfahren ist also fortsetzbar und muss nach endlich vielen Schritten dadurch abbrechen, dass keine negativen Strecken mehr

vorkommen. Insgesamt hat man bei dem Reduktionsverfahren aus der rechten Seite von  $(21, 1)$  mehr positives als negatives fortgelassen und dabei schliesslich einen Rest erhalten, der  $> L_g$  ist. Also ist die Richtigkeit von  $(21, 1)$  nachgewiesen.

Als Korollar erhält man, dass die rechte Seite von  $(21, 1)$  positiv ist, da  $L_g$  positiv ist.

## 22. Verkleinerung der mittleren Verschiebungslänge.

In diesem Paragraphen wird ein Verfahren angegeben, das im Allgemeinen gestattet, aus einem primären Element unendlicher Ordnung von  $T$ , dessen Achse nicht mod  $T$  einfach ist, ein anderes primäres Element unendlicher Ordnung abzuleiten, das eine kleinere mittlere Verschiebungslänge hat.

Den Grundgedanken des Verfahrens kann man sich durch folgende Überlegung klarmachen, indem man einen Augenblick  $F$  an Stelle von  $T$  treten lässt. Einer mod  $F$  nicht einfachen Achse entspricht auf der Fläche  $\varphi = K_F \bmod F$  eine geschlossene geodätische Linie  $a$  mit mindestens einem Doppelpunkt. Sei  $P$  ein beliebig gewählter Doppelpunkt von  $a$ . Durchläuft man  $a$  von  $P$  aus, bis man zum ersten Mal wieder nach  $P$  zurückkehrt, so hat diese Teilschleife  $a_1$  von  $a$  eine kürzere Länge als  $a$  und weist in  $P$  einen Knick auf.  $a_1$  ist nicht auf  $\varphi$  auf einen Punkt zusammenziehbar, also nicht homotop Null;  $a_1$  ist daher einer geschlossenen geodätischen Linie homotop. Diese ist kürzer als  $a_1$ , da  $a_1$  einen Knick aufweist, also um so mehr kürzer als  $a$ . Die komplementäre Teilschleife  $a_2$ , die man erhält, wenn man nach dem ersten Eintreffen in  $P$  geradeaus fortsetzt bis zum zweiten Eintreffen in  $P$ , ist ebenfalls kürzer als  $a$ , und das gleiche gilt daher von der mit  $a_2$  homotopen geschlossenen geodätischen Linie. Endlich kann man auf  $\varphi$  zu einer geschlossenen Kurve  $a_3$  gelangen, indem man erst  $a_1$  und dann in umgekehrter Durchlaufungsrichtung  $a_2$  durchläuft, was einer »Umschaltung« der in  $P$  zusammenstossenden Kurvenzweige entspricht. Dabei hat  $a_3$  die gleiche Länge wie  $a$ , aber da  $a_3$  zwei Knicke in  $P$  aufweist, ist die mit  $a_3$  homotope geschlossene geodätische Linie wieder kürzer als  $a$ . Man kann also aus einer mod  $F$  nicht einfachen Achse nach Auswahl eines Schnittpunkts mit einer äquivalenten Achse in dreifacher Weise eine andere Achse ableiten, die eine kürzere Verschiebungslänge aufweist. — Tritt nun  $T$  an die Stelle von  $F$ , so hat man es nicht mit einer Bewegungsgruppe zu tun, und man hat keine entsprechende Fläche zur Verfügung; dadurch wird die Schlussweise etwas

komplizierter, — u. a. muss man mit der mittleren statt mit der gewöhnlichen Verschiebungslänge rechnen, — aber der Grundgedanke ist doch ganz analog.

Sei  $t$  ein primäres Element unendlicher Ordnung von  $T$ ,  $l$  seine Relativordnung,  $t^l = f \in F$ ,  $lm = n$  und  $A$  die durch  $t$  orientierte Achse von  $t$ . Die Äquivalenzklasse von  $A$  zerfällt in  $m$  konjugierte Kongruenzklassen; denn  $l$  ist die Multiplizität von  $A$ , da  $t$  primär ist. Hierbei ist  $1 \leq l \leq n$  und dementsprechend  $n \geq m \geq 1$ .

Nun soll  $A$  nicht einfach mod  $T$  sein. Sei  $P$  (Fig. 17) ein solcher Punkt von  $A$ , in welchem  $A$  von einer bezgl.  $T$  äquivalenten Achse geschnitten wird, die wir mit  $A_{-1}$  bezeichnen. Sei  $\tau$  ein solches Element von  $T$ , dass  $\tau^{-1}A = A_{-1}$  ist, und die Orientierung von  $A$  sei durch  $\tau^{-1}$  auf  $A_{-1}$  übertragen; das zu dieser Orientierung gehörige primäre Element auf  $A_{-1}$  ist dann  $\tau^{-1}t\tau$ . Dann geht  $A_{-1}$  in  $A$  durch  $\tau$  und daher auch durch alle Elemente  $t^q\tau$ ,  $-\infty < q < \infty$ , und durch kein weiteres Element von  $T$  über.

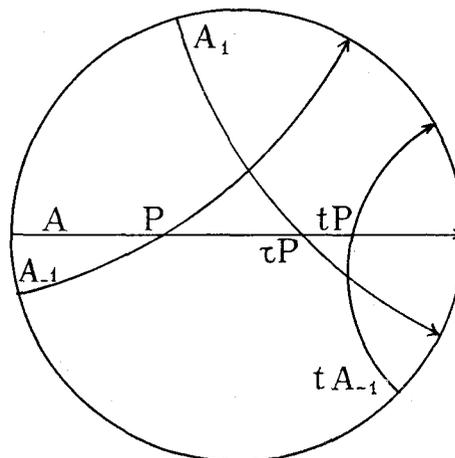


Fig. 17.

Zur Festlegung der geometrischen Vorstellung darf man annehmen, dass  $A$  durch  $A_{-1}$  von rechts nach links überkreuzt wird, wie es in Fig. 17 gezeichnet ist. Übt man nun  $\tau$  auf dieses Achsenpaar aus und beachtet, dass  $\tau$  die zyklische Ordnung und die Orientierung der Grundpunktmenge bewahrt, so geht  $A_{-1}$  in  $A$  und  $A$  in eine Achse  $\tau A = A_1$  über, welche  $A$  von links nach rechts überkreuzt. Der Schnittpunkt wird symbolisch mit  $\tau P$  bezeichnet. Es ist nichts darüber bekannt, ob  $A_{-1}$  und  $A_1$  einander schneiden, oder in welcher Reihenfolge  $P$  und  $\tau P$  auf  $A$  liegen; sie können eventuell auch zusammenfallen.

Allgemein soll für beliebiges  $\varrho \in T$  der Schnittpunkt von  $\varrho A_{-1}$  und  $\varrho A$  mit  $\varrho P$  bezeichnet werden. Dabei ist zu beachten, dass  $P$  nur diesen Achsenschnitt vertritt: Ein anderes Achsenpaar, das sich etwa auch in  $P$  schneidet, geht bei  $\varrho$  in ein Achsenpaar über, dessen Schnittpunkt im Allgemeinen von  $\varrho P$  verschieden ist.

Wie in § 21 werden Streckenlängen durch Angabe von Anfangs- und Endpunkt auf Achsen bekannter Orientierung mit Vorzeichen gerechnet. So ist die

Strecke  $(P, \tau P)$  auf  $A$  in dem der Figur entsprechenden Fall positiv; die folgenden Rechnungen berücksichtigen aber auch den Fall, dass sie Null oder negativ ist.

Für beliebiges  $\varrho \in T$  sind  $\varrho P$  und  $\varrho \tau P$  zwei Punkte der Achse  $\varrho A$ . Indem die Orientierung auf dieser aus der von  $A$  durch  $\varrho$  übertragen ist, bezeichnet  $(\varrho P, \varrho \tau P)$ , oder wie wir auch schreiben werden  $\varrho(P, \tau P)$  eindeutig eine Streckenlänge mit Vorzeichen. Falls  $A_{-1}$  und  $A_1$  einander schneiden, braucht dies Vorzeichen nicht notwendig gleich dem von  $(P, \tau P)$  zu sein. Falls jedoch  $\varrho$  zu  $F$  gehört, also eine Bewegung darstellt, so sind nicht nur die Vorzeichen gleich, sondern es gilt sogar  $(\varrho P, \varrho \tau P) = (P, \tau P)$ . Wir reservieren die Bezeichnung »kongruent« für zwei Strecken dieser Art, die einander bei einem Element von  $F$  entsprechen.

Die Strecke mit dem Anfangspunkt  $P$  und dem Endpunkt  $\tau P$  bestimmt also eine Äquivalenzklasse. Diese zerfällt in  $n$  Kongruenzklassen. Vertreter derselben erhält man z. B., indem man die Strecke den Abbildungen

$$(22, 1) \quad 1, \kappa, \kappa^2, \dots, \kappa^{n-1}$$

unterwirft. An ihrer Stelle kann man auch  $n$  anders gewählte Elemente von  $T$  nehmen, wenn sie nur sämtliche  $n$  Restklassen von  $T$  nach  $F$  vertreten.

Nun bilden wir die Summe der Längen von  $n$  inkongruenten Strecken und bezeichnen sie mit  $a$ :

$$(22, 2) \quad a = \sum_{\nu=0}^{n-1} \kappa^\nu (P, \tau P) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\kappa^\nu P, \kappa^\nu \tau P).$$

Dann hat man auch

$$(22, 3) \quad a = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{l-1} \kappa^\alpha t^\beta (P, \tau P),$$

denn die Elemente  $\kappa^\alpha t^\beta$  vertreten für  $0 \leq \alpha \leq m-1$ ,  $0 \leq \beta \leq l-1$ , sämtliche Restklassen, da  $t^\beta$  für  $0 \leq \beta \leq l-1$  in einer gewissen Reihenfolge zu den Restklassen  $[\kappa^0]$ ,  $[\kappa^m]$ ,  $[\kappa^{2m}]$ ,  $\dots$ ,  $[\kappa^{(l-1)m}]$  gehört.

Man kann nun fragen, wie sich die Grösse  $a$  ändert, wenn man  $\tau$  durch ein anderes der Elemente  $t^l \tau$  ersetzt, welche  $A_{-1}$  in  $A$  überführen. Zunächst werde  $q=1$  angenommen, also  $\tau$  durch  $\tau_1 = t\tau$  ersetzt. Der Punkt  $P$  bleibt derselbe wie zuvor, aber nun übernimmt  $\tau_1 P = t\tau P$  die Rolle von  $\tau P$ . Der neue Wert  $a_1$  von  $a$  lässt sich dann aus (22. 3) berechnen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{l-1} x^\alpha t^\beta (P, t\tau P) \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x^\alpha t^\beta [(P, \tau P) + (\tau P, t\tau P)] \\
&= a + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x^\alpha t^\beta (\tau P, t\tau P) \\
&= a + \sum_{\alpha} x^\alpha \{(\tau P, t\tau P) + (t\tau P, t^2\tau P) + \dots + (t^{l-1}\tau P, t^l\tau P)\},
\end{aligned}$$

also, da die Strecken der geschweiften Klammer alle auf  $A$  liegen,

$$a_1 = a + \sum_{\alpha} x^\alpha (\tau P, t^l \tau P)$$

also, da  $t^l = f$  und daher  $x^\alpha t^l = x^\alpha f = f_{I^\alpha} x^\alpha$  ist,

$$\begin{aligned}
a_1 &= a + \sum_{\alpha} (x^\alpha \tau P, f_{I^\alpha} x^\alpha \tau P) \\
&= a + \sum_{\alpha=0}^{m-1} L_{f_{I^\alpha}}.
\end{aligned}$$

Nun ziehen wir (20, 3) heran. Dort bedeutete  $l$  ebenso wie hier die Relativordnung von  $t$ , und es war  $\mu\lambda = n$ , wo  $\lambda$  die Multiplizität von  $t$  war. Diese ist aber hier  $l$ , da  $t$  primär ist, also ist  $\mu = m$  und  $\mu l = n$ . Somit erhält man

$$(22, 4) \quad a_1 = a + nLi^*.$$

Bei Ersetzung von  $\tau$  durch  $t\tau$  erhält  $a$  also den Zuwachs  $nLi^*$ . Da  $t\tau$  mit  $\tau$  völlig gleichberechtigt ist, folgt allgemein für beliebiges  $q \equiv 0$ , dass bei Ersetzung von  $\tau$  durch  $t^q\tau$  die Grösse  $a$  durch

$$(22, 5) \quad a_q = a + qnLi^*$$

ersetzt wird.

$tP$  ist der Punkt, in dem  $A$  von  $tA_{-1}$  geschnitten wird; siehe Fig. 17. Dabei ist  $(P, tP) > 0$ , wie aus der Abbildung der Grundpunkte von  $A_{-1}$  bei  $t$  folgt. Über die Lage von  $\tau P$  relativ zu  $P$  und  $tP$  ist aber nichts bekannt. Analog wie vorher die Strecke  $(P, \tau P)$  betrachten wir nun die Strecke  $(tP, \tau P)$  und setzen entsprechend (22, 2)

$$\begin{aligned}
(22, 6) \quad b &= \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu (tP, \tau P) \\
&= \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{l-1} x^\alpha t^\beta (tP, \tau P) \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x^\alpha t^\beta t(P, t^{-1} \tau P).
\end{aligned}$$

Da mit  $x^\alpha t^\beta$  auch  $x^\alpha t^\beta t$  alle Restklassen durchläuft, kann man den Faktor  $t$  fortlassen und erhält

$$b = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x^\alpha t^\beta (P, t^{-1} \tau P) = a_{-1},$$

also nach (22, 5)

$$(22, 7) \quad b = a - nL_i^*.$$

In (22, 5) kann man  $q$  so wählen, dass  $0 \leq a_q < nL_i^*$  wird. Das zu diesem  $q$  gehörige Element  $t^q \tau$  ist ein eindeutig bestimmtes aus der Reihe der Elemente, welche  $A_{-1}$  in  $A$  überführen. Um die Bezeichnung nicht ändern zu müssen, wählen wir hinfort dieses Element als das ursprüngliche, mit  $\tau$  bezeichnete. Für die zugehörige, durch (22, 2) definierte Grösse  $a$  gilt dann

$$(22, 8) \quad 0 \leq a < nL_i^*,$$

und für die durch (22, 6) definierte Grösse  $b$  gilt nach (22, 7)

$$(22, 9) \quad -nL_i^* \leq b < 0.$$

Nun soll gezeigt werden: *Wenn  $\tau$  unendliche Ordnung hat, so hat  $\tau$  eine kleinere mittlere Verschiebungslänge als  $t$ .*

Sei  $\lambda$  die Relativordnung von  $\tau$  und  $\lambda\mu = n$ , ferner  $\tau^\lambda = g \in F$ . Voraussetzung ist also  $g \neq 1$ . Die Achse  $A_\tau = A_g$  schneidet nicht  $A$ ; sonst würde das Bild  $\tau^{-1}A = A_{-1}$  von  $A$  bei  $\tau^{-1}$  nicht  $A$  schneiden, entgegen der Ausgangsannahme. Es bestehen nun die beiden Möglichkeiten, dass  $A_\tau$  rechts oder links von der gerichteten Achse  $A$  liegt.

Zunächst sei angenommen, dass  $A_\tau$  rechts von  $A$  liegt (Fig. 18). Wir betrachten die Achsenmenge  $A_\nu = \tau^\nu A$ ,  $-\infty < \nu < \infty$ . Dabei ist dann  $A$  auch durch  $A_0$  bezeichnet. Die Grundpunkte der Achsen  $A_\nu$ , und auch diese Achsen selbst, häufen sich für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen  $V_\tau$  und für  $\nu \rightarrow -\infty$  gegen  $U_\tau$  und treffen alle nicht  $A_\tau$ . Die positiven Grundpunkte der  $A_\nu$  bilden eine monotone Folge im Intervall von  $U_\tau$  bis  $V_\tau$ , ebenso die negativen. Alle  $A_\nu$  sind mit  $A_\tau$  gleich-

gerichtet. Der im Punkte  $\tau^{v+1}P$  beginnende positive Halbstrahl von  $A_{v+1}$  liegt im Gebiet zwischen  $A_\tau$  und  $A_v$ . Bei Ausübung von  $\tau$  wird  $A_v$  in  $A_{v+1}$  übergeführt; also bei Ausübung von  $g = \tau^\lambda$  geht  $A_v$  in  $A_{v+\lambda}$  über; und  $g$  ist eine Verschiebung längs  $A_\tau$ . Man sieht also, dass die Folge  $A_v$  die Voraussetzungen des Hilfssatzes in § 21 befriedigt. Der Geraden  $G$  entspricht hier  $A_\tau$ ,  $\xi$  hat den Wert  $\lambda$ , und der Schnittpunkt  $x_\nu$  trägt hier die Bezeichnung  $\tau^\nu P$ . Also erhält man, indem man in (21, 1)  $\nu = 0$  setzt,

$$(22, 10) \quad L_g < (P, \tau P) + (\tau P, \tau^2 P) + \dots + (\tau^{\lambda-1} P, \tau^\lambda P),$$

und die rechte Seite von (22, 10) ist positiv.

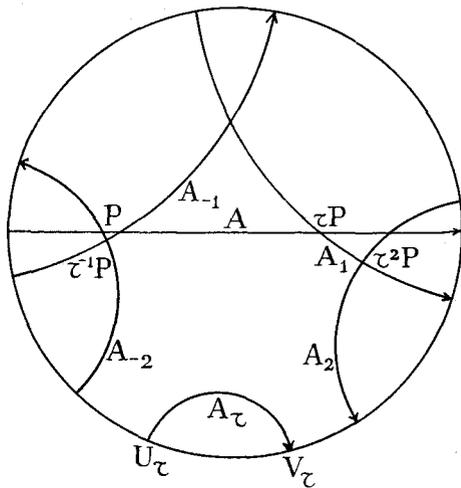


Fig. 18.

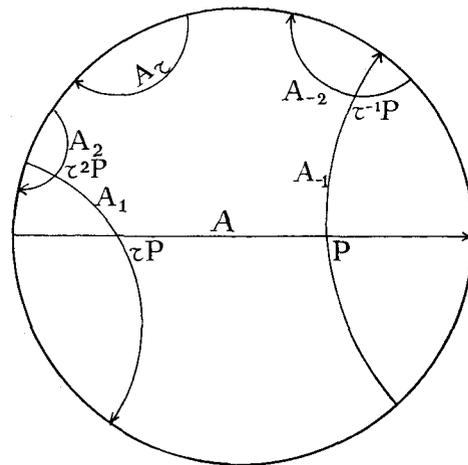


Fig. 19.

Liegt  $A_\tau$  links von  $A$  (Fig. 19), so macht das nur den Unterschied, dass die  $A_v$  entgegengesetzt gerichtet sind wie  $A_\tau$ . Wenn man also, um die Voraussetzungen von (21, 1) zu erfüllen, alle  $A_v$  mit der entgegengesetzten Orientierung versähe, so würde man wieder (22, 10) erhalten. Wir wollen indessen an der Orientierung von  $A$  festhalten und haben daher in diesem Fall (22, 10) durch

$$(22, 11) \quad L_g < - \{ (P, \tau P) + (\tau P, \tau^2 P) + \dots + (\tau^{\lambda-1} P, \tau^\lambda P) \}$$

zu ersetzen. Die geschweifte Klammer hat also in diesem Fall einen negativen Wert.

Ist nun  $q$  ein beliebiges Element von  $T$ , und übt man  $q$  auf die Menge der hier betrachteten Achsen aus, so geht die Achse  $A_v$  des Elements  $\tau^v t \tau^{-v}$  in die Achse  $q A_v$  des Elements  $q \tau^v t \tau^{-v} q^{-1}$  und die Achse  $A_\tau$  in die Achse  $q A_\tau$  des

Elements  $\varrho\tau\varrho^{-1}$  über, das ebenfalls die Relativordnung  $\lambda$  hat. Dies Element verschiebt die Folge  $\varrho A$ , um einen Schritt, und seine  $\lambda^{\text{te}}$  Potenz  $\varrho g\varrho^{-1}$  ist eine Verschiebung längs  $\varrho A$ . Ferner liegt  $\varrho A_\tau$  rechts bzw. links von  $\varrho A$ , je nachdem  $A_\tau$  rechts bzw. links von  $A$  liegt. Nimmt man das erstere an, so erhält man auf Grund der gleichen Betrachtung entsprechend (22, 10) die Ungleichung

$$(22, 12) \quad L_{\varrho g\varrho^{-1}} < (\varrho P, \varrho\tau P) + \dots + (\varrho\tau^{\lambda-1}P, \varrho\tau^\lambda P) \\ = \sum_{\delta=0}^{\lambda-1} (\varrho\tau^\delta P, \varrho\tau^{\delta+1} P).$$

Lässt man nun hierin  $\varrho$  die Elemente  $x^\gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq \mu - 1$ , durchlaufen, wo  $\mu = \frac{n}{\lambda}$  ist, und addiert man die entsprechenden Ungleichungen (22, 12), so erhält man

$$(22, 13) \quad \sum_{\gamma=0}^{\mu-1} L_{x^\gamma g x^{-\gamma}} < \sum_{\gamma=0}^{\mu-1} \sum_{\delta=0}^{\lambda-1} x^\gamma \tau^\delta (P, \tau P).$$

Die Elemente  $\tau^\delta$ ,  $0 \leq \delta \leq \lambda - 1$ , gehören in einer gewissen Reihenfolge zu den Restklassen  $[x^0]$ ,  $[x^\mu]$ ,  $\dots$ ,  $[x^{(\lambda-1)\mu}]$ . Also durchlaufen die Elemente  $x^\gamma \tau^\delta$  alle Restklassen, und die rechte Seite von (22, 13) hat demnach den durch (22, 2) definierten Wert  $a$ . Um die linke Seite zu berechnen, schreiben wir zunächst

$$x^\gamma g x^{-\gamma} = g_{\gamma\gamma}$$

und beachten ferner folgendes: Es ist nicht bekannt, ob  $\tau$  primär ist. Ist  $\lambda'$  die Multiplizität von  $\tau$ , so geht  $\lambda$  in  $\lambda'$  auf. Setzt man  $\lambda' \mu' = n = \lambda \mu$ , so muss  $\mu'$  in  $\mu$  aufgehen. Nun besagt (20, 3) mit Verwendung der in diesem Paragraphen benutzten Bezeichnungen

$$(22, 14) \quad L_\tau^* = \frac{1}{\mu' \lambda} \sum_{\gamma=0}^{\mu'-1} L_{g_{\gamma\gamma}}.$$

Hierin ist es statthaft,  $\mu'$  durch  $\mu$  zu ersetzen, auch wenn  $\tau$  nicht primär, also  $\mu'$  ein echter Teiler von  $\mu$  ist. Denn das bedeutet nur, dass man  $\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda'}{\lambda}$  Male durch die konjugierten Kongruenzklassen von  $\tau$  hindurchzählt und denselben Faktor im Nenner hinzufügt, wodurch an dem Mittelwert nichts geändert wird. Also hat die linke Seite von (22, 13) den Wert

$$\mu \lambda L_\tau^* = n L_\tau^*,$$

und (22, 13) ergibt somit

$$(22, 15) \quad nL_{\tau}^* < a.$$

Liegt  $A_{\tau}$  links von  $A$ , so hat man nach (22, 11) in dieser ganzen Betrachtung nur das Vorzeichen der rechten Seite zu ändern, also erhält man

$$nL_{\tau}^* < -a.$$

Zufolge der getroffenen Wahl von  $\tau$  galt aber (22, 8); also ist  $a$  nicht negativ. Somit folgt, dass  $A_{\tau}$  bei dieser Wahl von  $\tau$  nicht links von  $A$  fallen kann.

Also ist (22, 15) immer gültig, und zusammen mit (22, 8) ergibt das

$$(22, 16) \quad L_{\tau}^* < L_t^*$$

wie oben behauptet. — Ist  $\tau$  nicht primär, so hat das primäre Element, von dem es eine Potenz ist, nach (20, 5) eine noch kleinere mittlere Verschiebungslänge.

Zugleich ergibt sich aus (22, 15), dass  $a > 0$  ist. Also kann das Gleichheitszeichen in (22, 8) und dann auch in (22, 9) nicht eintreten, wenn  $\tau$  von unendlicher Ordnung ist.

In gleicher Weise soll nun das Element

$$(22, 17) \quad \tau' = \tau t^{-1}$$

untersucht werden, das die Achse

$$tA_{-1} = t\tau^{-1}A = \tau'^{-1}A$$

in  $A$  und  $A$  in  $\tau'A = \tau A = A_1$  überführt (Fig. 20). Für dieses Element spielt die durch (22, 6) definierte Konstante  $b$  dieselbe Rolle, wie vorher  $a$ , denn  $(tP, \tau P)$  ist jetzt die Grundstrecke, wie es vorher  $(P, \tau P)$  war. Genau die gleiche Betrachtung führt daher, falls  $\tau'$  unendliche Ordnung hat, entsprechend (22, 15) auf die Ungleichung

$$(22, 18) \quad nL_{\tau'}^* < -b,$$

wenn die Achse  $A_{\tau'}$  links von  $A$  liegt. Das negative Zeichen rührt daher, dass  $A_{\tau'}$  und  $A$  dann entgegengesetzt gerichtet sind. Nähme man  $A_{\tau'}$  rechts von  $A$

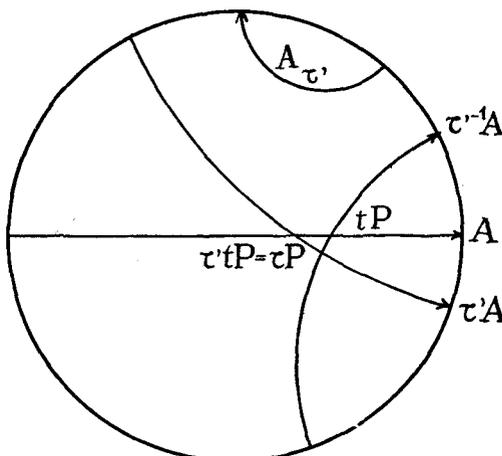


Fig. 20.

an, so würde man entsprechend auf  $nL_i^* < b$  geführt, was (22,9) widerspricht und daher auszuschliessen ist. Aus (22,18) und (22,9) folgt

$$(22, 19) \quad L_i^* < L_i^*$$

entsprechend (22,16). Wenn  $\tau'$  unendliche Ordnung hat, ist demnach wieder das Gleichheitszeichen in (22,8) und (22,9) auszuschliessen.

Als dritter und letzter Fall wird nun noch das Element

$$(22, 20) \quad \tau'' = \tau' \tau = \tau t^{-1} \tau$$

untersucht. Es führt  $A_{-1} = \tau^{-1}A$  in  $\tau'A = A_1$  über, überspringt also  $A$ . Dementsprechend hat man hier statt der aus einer Achse  $A$  abgeleiteten Achsenfolge die aus dem Achsenpaar  $A_{-1}$  und  $A$  durch die Potenzen von  $\tau''$  abgeleitete Achsenfolge zu betrachten.

Nun wird wieder angenommen, dass  $\tau''$  von unendlicher Ordnung ist. Sei  $\lambda''$  die Relativordnung von  $\tau''$  und  $\tau''^{\lambda''} = g'' \in F$ , wobei  $g'' \neq 1$ .

Zunächst soll gezeigt werden, dass  $A$  nicht von  $A_{\tau''}$  geschnitten wird. Das erfordert eine etwas ausführlichere Betrachtung als bei  $A_{\tau}$  bzw.  $A_{\tau'}$ , wo es sich unmittelbar ergab. Man vergegenwärtige sich zunächst, dass  $\tau''$  zwei Punkte,  $U_{\tau''}$  und  $V_{\tau''}$ , von  $E$  festlässt und in den beiden dadurch auf  $E$  bestimmten »Verschiebungsintervallen« entgegengesetzte Verschiebungsrichtung hat, da dies bei  $g''$  der Fall ist (Fig. 21). Ein Grenzpunkt  $x$  auf  $E$  und sein Bild  $\tau''x$  müssen zum gleichen Verschiebungsintervall gehören, und ihre gegenseitige Lage muss der Verschiebungsrichtung entsprechen. Dies wird im folgenden auf die Grundpunkte  $U_{-1}$  und  $V_{-1}$  von  $A_{-1}$  und die ihnen bei  $\tau''$  entsprechenden Grundpunkte  $U_1$  und  $V_1$  von  $A_1$  angewendet. Teilbögen von  $E$  werden wieder, wie in der Fussnote S. 66 angegeben, rechtsläufig gezählt. In allen Fällen ist also entweder  $U_{-1}U_1$  oder  $U_1U_{-1}$  Teil eines Verschiebungsintervalles, ebenso entweder  $V_{-1}V_1$  oder  $V_1V_{-1}$ .

Wenn nun erstens  $A_{-1}$  und  $A$ , einander schneiden, so hat man das Bild der Fig. 22. Wäre  $U_1U_{-1}$  Teil eines Verschiebungsintervalles, so müsste die Verschiebungsrichtung in diesem linksläufig auf  $E$  sein, aber dann könnte  $V_{-1}$  nicht in  $V_1$  übergehen. Also ist  $U_{-1}U_1$  Teil eines Verschiebungsintervalles, und dessen Verschiebungsrichtung ist rechtsläufig. Ebenso folgt, dass  $V_{-1}V_1$  einem rechtsläufigen Intervall angehört. Also sind  $U_{-1}U_1$  und  $V_{-1}V_1$  Teil eines und desselben Verschiebungsintervalles, werden also durch die Grundpunkte von  $\tau''$

nicht getrennt. Diese Grundpunkte liegen also beide in  $U_1 V_{-1}$  oder beide in  $V_1 U_{-1}$ . Also schneidet  $A_{\tau''}$  keine der drei Achsen. Die beiden möglichen Lagen von  $A_{\tau''}$  sind in Fig. 22 gestrichelt gezeichnet mit Angabe der zu  $\tau''$  gehörigen Orientierung.

Wenn zweitens  $A_{-1}$  und  $A_1$  einander nicht schneiden, so hat man das Bild der Fig. 23. Ist  $U_1 U_{-1}$  Teil eines Verschiebungsintervalles, so ist die Verschiebungsrichtung desselben linksläufig. Dann kann nicht  $V_{-1} V_1$  Teil eines Verschiebungsintervalles sein, denn dieses müsste rechtsläufige Verschiebungsrichtung haben, und die Intervalle haben den gemeinsamen Teil  $U_1 V_1$ . Also

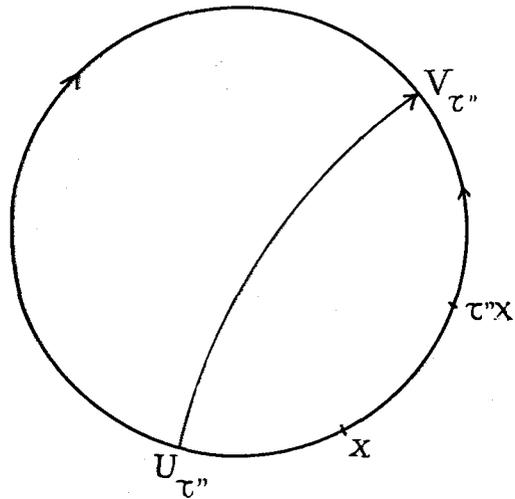


Fig. 21.

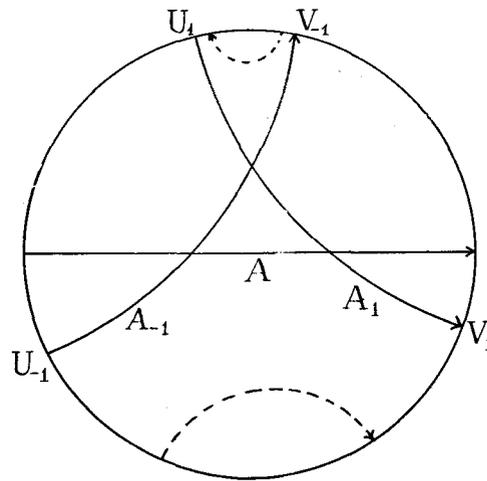


Fig. 22.

muss  $V_1 V_{-1}$  Teil eines Verschiebungsintervalles sein, und zwar desselben wie  $U_1 U_{-1}$ . Also liegen beide Grundpunkte von  $\tau''$  in  $V_{-1} U_1$ . — Ebenso folgt: Ist  $U_{-1} U_1$  Teil eines Verschiebungsintervalles, dann auch  $V_{-1} V_1$ , und beide Grundpunkte von  $\tau''$  liegen in  $V_1 U_{-1}$ . — Siehe die gestrichelten Achsen.

In allen Fällen schneidet  $A_{\tau''}$  also weder  $A$  noch  $A_{-1}$ . Die folgenden Betrachtungen gelten für alle nach den Figuren möglichen Lagen der Achse  $A_{\tau''}$ .

Nun nimmt man als Achsenfolge, die der Folge  $A_{\tau}$  des Hilfssatzes von § 21 entspricht, die Folge

$$\dots, \tau''^{-1} A_{-1}, \tau''^{-1} A, A_{-1}, A, \tau'' A_{-1}, \tau'' A, \tau''^2 A_{-1}, \tau''^2 A, \dots$$

Siehe Figur 24, die einer der möglichen Achsenlagen von  $A_{\tau''}$  entspricht.  $A_{\tau''}$  spielt wieder die Rolle von  $G$  und  $g''$  diejenige von  $g$ , aber  $2\lambda''$  hier diejenige

von  $\xi$ . Die Achsen  $\tau''^v A$  sind entweder alle mit  $A_{\tau''}$  gleichgerichtet (wie in Fig. 24) oder alle entgegengesetzt gerichtet. Ebenso sind die Achsen  $\tau''^v A_{-1}$  entweder alle mit  $A_{\tau''}$  gleichgerichtet oder alle entgegengesetzt gerichtet (wie in der Fig. 24). Um den Hilfssatz anwenden zu können, kann man sich eventuell entgegengesetzt gerichtete für einen Augenblick umorientiert denken. Die der rechten Seite von (21, 1) entsprechenden Teilstrecken sind hier teils  $(P, \tau P)$  und die bei den ersten  $\lambda'' - 1$  Potenzen von  $\tau''$  entsprechenden, teils  $(\tau P, \tau'' P)$  und die bei den ersten  $\lambda'' - 1$  Potenzen von  $\tau''$  entsprechenden. Nun ist nach (22, 20)

$$(\tau P, \tau'' P) = (\tau P, \tau t^{-1} \tau P) = \tau t^{-1} (t P, \tau P),$$

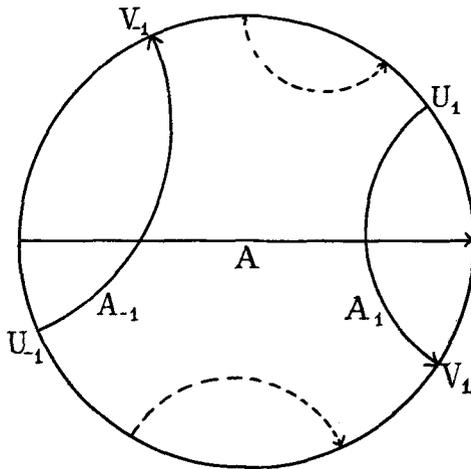


Fig. 23.

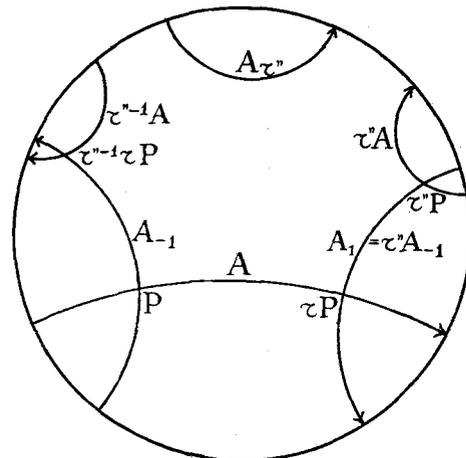


Fig. 24.

also ist nach (22, 6)

$$\sum_{v=0}^{n-1} x^v (\tau P, \tau'' P) = \sum_{v=0}^{n-1} x^v (t P, \tau P) = b,$$

während nach (22, 2)  $\sum_v x^v (P, \tau P) = a$  war.

Man erhält daher aus der Ungleichung (21, 1)

$$(22, 21) \quad L_{g''} < \pm \sum_{\delta=0}^{\lambda''-1} \tau''^\delta (P, \tau P) \pm \sum_{\delta=0}^{\lambda''-1} \tau''^\delta (\tau P, \tau'' P),$$

wobei das Vorzeichen des ersten bzw. zweiten Gliedes das positive ist, wenn  $A$  bzw.  $A_1$  mit  $A_{\tau''}$  gleichgerichtet ist, sonst das negative.

Übt man wieder die Elemente  $x^\gamma$ ,

$$0 \leq \gamma \leq \mu'' - 1, \quad \mu'' = \frac{n}{\lambda''},$$

auf dieses Achsenbild aus, wobei Gleichrichtung oder Ungleichrichtung erhalten bleibt, bildet die (22, 21) entsprechende Ungleichung und addiert alle  $\mu''$  Ungleichungen, so erhält man analog wie in (22, 13)

$$\sum_{\gamma=0}^{\mu''-1} L_{x^\gamma g'' x^{-\gamma}} < \pm \sum_{\gamma=0}^{\mu''-1} \sum_{\delta=0}^{\lambda''-1} x^\gamma x''^\delta (P, \tau P) \pm \sum_{\gamma=0}^{\mu''-1} \sum_{\delta=0}^{\lambda''-1} x^\gamma x''^\delta (\tau P, \tau'' P),$$

also entsprechend (22, 15)

$$(22, 22) \quad nL_{x''}^* < \pm a \pm b.$$

Nun ist  $a - b = nL_i^*$  zufolge (22, 7) und  $|a + b| < nL_i^*$  zufolge (22, 8) und (22, 9). Also ist für jede Vorzeichenkombination

$$\pm a \pm b \leq nL_i^*,$$

und aus (22, 22) schliesst man daher entsprechend (22, 16) und (22, 19)

$$(22, 23) \quad L_{x''}^* < L_i^*.$$

Natürlich können nur solche Fälle der Achsenlage  $A_{x''}$  wirklich vorkommen, die für die rechte Seite von (22, 22) einen positiven Wert zur Folge haben. Der Fig. 24 entspricht die Vorzeichenkombination, die rechts in (22, 22)  $a - b$  ergibt, und dies ist positiv.

### 23. Der Spezialfall.

Nun wähle man  $t$  als ein Element unendlicher Ordnung und kleinster mittlerer Verschiebungslänge in  $T$ . Nach (20, 5) ist  $t$  notwendig primär. Ist  $A_t$  nicht einfach mod  $T$ , so wende man auf  $t$  das Verfahren des vorigen Paragraphen an. Wäre dabei auch nur eines der Elemente  $\tau$ ,  $\tau'$  oder  $\tau''$  von unendlicher Ordnung, so ergäbe sich wegen (22, 16), (22, 19) oder (22, 23) ein Widerspruch, da  $L_i^*$  schon absolutes Minimum in  $T$  ist. Man hat daher folgenden Satz:

Entweder gibt es bei gegebener Gruppe  $T$  mod  $T$  einfache Achsen, oder es gibt ein solches Element  $t$  unendlicher Ordnung von  $T$ , für welches die Konstruktion von § 22 zu Elementen  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\tau''$  führt, die sämtlich von endlicher Ordnung sind.

Die Existenz eines  $t$  der letztgenannten Art wollen wir als den *Spezialfall* bezeichnen, da sich zeigen wird, dass er in der Tat etwas sehr spezielles ist, sodass man sagen kann, dass es »im Allgemeinen« mod  $T$  einfache Achsen gibt. Es wird sich überdies zeigen, — was man aus dem bisherigen noch nicht schliessen kann, — dass es im Spezialfall keine mod  $T$  einfachen Achsen gibt (§ 30), dass also die beiden Fälle des obigen Satzes einander ausschliessen. Insbesondere wird sich also ergeben, dass der Spezialfall nur bei geschlossenen Flächen eintreten kann, und dass er auch für solche etwas sehr spezielles darstellt.

Wegen der Nichtexistenz einfacher Achsen fügt sich die Lösung des Problems dieser Abhandlung für den Spezialfall nicht der früheren allgemeinen Lösung ein, sodass die Konstruktion von  $T$  als Gruppe topologischer Abbildungen von  $K_F$  hier auf neuem Wege gelöst werden muss.

#### 24. Eine Ungleichung zwischen den Ordnungen.

Für die noch folgenden Paragraphen 24 bis 30 ist nun nach § 23 lediglich folgendes vorausgesetzt:  $t$  ist ein primäres Element unendlicher Ordnung von  $T$  mit mod  $T$  nicht einfacher Achse  $A$ , ferner  $P$  ein Punkt dieser Achse, in welchem sie von einer bezgl.  $T$  äquivalenten geschnitten wird, und die nach § 22 gebildeten Elemente  $\tau$ ,  $\tau' = \tau t^{-1}$  und  $\tau'' = \tau' \tau = \tau t^{-1} \tau$  sind alle von endlicher Ordnung.

Die Ordnungen von  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\tau''$  seien bezw. mit  $\lambda$ ,  $\lambda'$  und  $\lambda''$  bezeichnet. Man hat also

$$(24, 1) \quad \tau^\lambda = 1.$$

$$(24, 2) \quad \tau'^{\lambda'} = 1.$$

$$(24, 3) \quad \tau''^{\lambda''} = 1.$$

Dabei kann nicht  $\lambda = 2$  sein, denn die Achsen  $\tau^{-1}A = A_{-1}$  und  $\tau A = A_1$  sind verschieden. Ebenso kann nicht  $\lambda' = 2$  sein, denn  $\tau'^{-1}A = t\tau^{-1}A = tA_{-1}$  und  $\tau' A = \tau A = A_1$  sind verschieden. Über  $\lambda''$  weiss man in dieser Beziehung nichts spezielles. Man hat also

$$(24, 4) \quad \lambda \geq 3, \quad \lambda' \geq 3, \quad \lambda'' \geq 2.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass die kleinen Werte dieser Ordnungen überdies durch die Ungleichung

$$(24, 5) \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} < 1$$

eingeschränkt werden.

Zunächst bemerkt man, dass  $\tau$  und  $\tau'$  völlig gleichberechtigt auftreten, wie dies auch aus § 22 hervorgeht. Vertauscht man ihre Rolle, so hat man  $\tau'' = \tau' \tau$  durch  $\tau \tau' = \tau \tau'' \tau^{-1}$  zu ersetzen, und dies ist ebenfalls von endlicher Ordnung, nämlich von derselben Ordnung  $\lambda''$  wie  $\tau''$ .

Nun werden die folgenden Fälle der Werte der Ordnungen ins Auge gefasst.

1) Es sei  $\lambda'' = 2$ , also  $\tau''^2 = 1$ . Wäre nun  $\lambda = 3$ , also  $\tau^3 = 1$ , so hätte man wegen  $t = \tau'^{-1} \tau$

$$\tau^{-1} t \tau = \tau^{-1} \tau'^{-1} \tau^2 = \tau''^{-1} \tau^2 = \tau'' \tau^2 = \tau' \tau^3 = \tau'.$$

Das ist unmöglich, da  $\tau'$  von endlicher und  $t$  und daher auch  $\tau^{-1} t \tau$  von unendlicher Ordnung ist. — Ebenso kann  $\lambda' = 3$  nicht mit  $\lambda'' = 2$  zusammen bestehen.

Wäre  $\lambda = 4$ , so gehörte  $\tau$  zu der Restklasse  $\left[ x^{\frac{n}{4}} \right]$  oder zu  $\left[ x^{\frac{3n}{4}} \right]$ . Da  $\tau''$  zu  $\left[ x^{\frac{n}{2}} \right]$  gehört, folgt, dass  $\tau' = \tau'' \tau^{-1}$  zu

$$\left[ x^{\frac{n}{2} - \frac{n}{4}} \right] = \left[ x^{\frac{n}{4}} \right] \quad \text{oder zu} \quad \left[ x^{\frac{n}{2} - \frac{3n}{4}} \right] = \left[ x^{-\frac{n}{4}} \right] = \left[ x^{\frac{3n}{4}} \right]$$

gehört. In beiden Fällen ist  $\lambda' = 4$ . Ebenso folgt  $\lambda = 4$ , wenn man  $\lambda' = 4$  voraussetzt. Nun bilde man den Kommutator  $k$  der beiden Elemente

$$\tau t \tau^{-1} = \tau \tau'^{-1} \quad \text{und} \quad t = \tau'^{-1} \tau:$$

$$k = \tau \tau'^{-1} \cdot \tau'^{-1} \tau \cdot \tau' \tau^{-1} \cdot \tau^{-1} \tau'.$$

Wegen  $\tau^4 = \tau'^4 = 1$  wird dies

$$k = \tau \tau' \tau' \tau \tau' \tau \tau'$$

und wegen  $\tau''^2 = \tau' \tau \tau' \tau = 1$

$$k = \tau \tau' \tau \tau' = \tau (\tau''^2) \tau^{-1} = 1.$$

Also müssten die betrachteten zwei Elemente vertauschbar sein. Das ist unmöglich, weil  $t$  und  $\tau t \tau^{-1}$  primäre Elemente auf  $A$  und der davon verschiedenen Achse  $\tau A$  und daher nicht vertauschbar sind.

Man sieht somit, dass man im Falle  $\lambda'' = 2$  stets  $\lambda > 4$  und  $\lambda' > 4$  haben muss; also ist (24, 5) im Falle  $\lambda'' = 2$  befriedigt.

2) Zwei der drei Ordnungszahlen sind 3. Zwei der drei Elemente  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\tau''$  gehören also zu  $\left[x^{\frac{n}{3}}\right]$  oder  $\left[x^{\frac{2n}{3}}\right]$ . Das dritte ist Produkt der mit den Exponenten  $+1$  oder  $-1$  versehenen beiden andern. Da es nicht zu  $[x^0] = F$  gehört, muss es ebenfalls zu  $\left[x^{\frac{n}{3}}\right]$  oder  $\left[x^{\frac{2n}{3}}\right]$  gehören. Also ist auch die dritte Ordnungszahl 3, und man hat

$$\tau^3 = \tau'^3 = \tau''^3 = 1.$$

Betrachtet man nun denselben Kommutator  $k$ , so erhält man durch Anwendung dieser Relationen

$$k = \tau \tau' \tau \tau' \tau \tau' = \tau \tau''^3 \tau^{-1} = 1,$$

also denselben Widerspruch wie oben.

Ist also eine Ordnungszahl 3, so kann keine der beiden anderen 2 oder 3 sein. Diese sind also  $\geq 4$ , und (24, 5) ist somit erfüllt.

3) Kommen 2 und 3 nicht unter den Ordnungszahlen vor, so ist

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} \leq \frac{3}{4},$$

und (24, 5) ist somit erfüllt.

Damit ist die Gültigkeit von (24, 5) nachgewiesen.

## 25. Regularisierung der Untergruppe $T'$ .

Nun sei  $T'$  die durch  $\tau$  und  $\tau'$  erzeugte Untergruppe von  $T$ . Sie enthält eine Untergruppe  $F'$  von  $F$ , den Durchschnitt von  $F$  mit  $T'$ . Dabei ist  $F'$  Normalteiler von  $T'$ ; denn ist  $f' \in F'$  und  $t' \in T'$ , so ist  $t' f' t'^{-1}$  teils in  $F$  enthalten, da  $F$  Normalteiler von  $T$  ist, teils in  $T'$  enthalten, da sowohl  $t'$  wie  $f'$  zu  $T'$  gehören, also im Durchschnitt  $F'$  von  $F$  und  $T'$  enthalten. Die Ordnung  $n'$  der Faktorgruppe  $T'/F'$  ergibt sich, indem man unter den Restklassen  $[x]$ ,  $[x^2]$ ,  $\dots$  von  $T$  nach  $F$  die erste bestimmt, die Elemente von  $T'$  enthält. Ist dies  $[x^n]$ , so ist

$$(25, 1) \quad \nu n' = n.$$

Ist  $\kappa'$  ein Element von  $T'$  in  $[\kappa']$ , so wird  $T'/F'$  durch die durch  $\kappa'$  bestimmte Restklasse von  $T'$  nach  $F'$  erzeugt.

$T'$  enthält das Element  $t = \tau'^{-1}\tau$ , das ja primäres Element der Achse  $A$  war, also alle Elemente von  $T$  mit der Achse  $A$  und weiter alle Elemente von  $T$ , deren Achsen aus  $A$  durch Elemente von  $T'$  hervorgehen.  $T'$  enthält auch das Element  $\tau'' = \tau'\tau$ .

Es soll nun zunächst eine mit  $T'$  isomorphe Gruppe  $\bar{T}'$  von Bewegungen der hyperbolischen Ebene konstruiert werden.

$ABC$  sei ein Dreieck der hyperbolischen Ebene mit den Winkeln

$$\frac{\pi}{\lambda} \text{ bei } A, \frac{\pi}{\lambda'} \text{ bei } B \text{ und } \frac{\pi}{\lambda''} \text{ bei } C$$

(Fig. 25). Die Existenz eines solchen Dreiecks ist nach (24, 5) sichergestellt, denn nach dieser Ungleichung ist die Summe der Winkel  $< \pi$ . Mit  $(AB) = (BA)$  wird die Spiegelung der Ebene an der durch  $A$  und  $B$  bestimmten Geraden bezeichnet. Ihr Quadrat ist die Identität. Die Produkte

$$\bar{\tau} = (AB)(AC), \quad \bar{\tau}' = (BC)(BA), \quad \bar{\tau}'' = (CB)(CA)$$

sind Drehungen (elliptische Substitutionen) um bzw.  $A$ ,  $B$  und  $C$  mit Drehwinkeln  $\frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\frac{2\pi}{\lambda'}$  und  $\frac{2\pi}{\lambda''}$ . Orientiert man das Dreieck so, wie in der Figur, so sind dabei die beiden ersten Drehwinkel rechtsläufig und der dritte linksläufig gezählt. Analog (24, 1—2—3) erhält man

$$\bar{\tau}^\lambda = 1, \quad \bar{\tau}'^{\lambda'} = 1, \quad \bar{\tau}''^{\lambda''} = 1.$$

Ferner hat man

$$\bar{\tau}'' = (CB)(CA) = (BC)(BA)(AB)(AC) = \bar{\tau}'\bar{\tau}$$

ebenso wie in  $T'$ . Ist  $C_1$  der Spiegelpunkt von  $C$  in  $AB$ , so kann man auch  $\bar{\tau}' = (BA)(BC_1)$  schreiben. Dann erhält man

$$\bar{t} = \bar{\tau}'^{-1}\bar{\tau} = (BC_1)(BA)(AB)(AC) = (BC_1)(AC)$$

und ähnlich mit  $\bar{\tau} = (AC_1)(AB)$

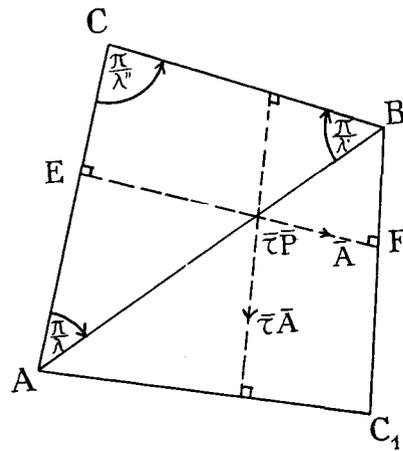


Fig. 25.

$$\bar{\tau} \bar{t} \bar{\tau}^{-1} = \bar{\tau} \bar{\tau}'^{-1} = (A C_1) (A B) (B A) (B C) = (A C_1) (B C).$$

Dabei ist  $\bar{t}$  analog dem  $t$  von  $T'$  gebildet. Wir werden sehen, dass  $\bar{t}$  eine Verschiebung (hyperbolische Substitution) ist.

Nun werde zunächst angenommen, dass weder  $\lambda$  noch  $\lambda'$  den Wert 3 haben, also  $\lambda \geq 4$ ,  $\lambda' \geq 4$ . Dann sind in dem Viereck  $A C B C_1$  die Winkel bei  $A$  und  $B$  recht oder spitz. Die (gleich grossen) Winkel bei  $C$  und  $C_1$  sind spitz, falls  $\lambda'' > 2$ , und recht, falls  $\lambda'' = 2$ . In letzterem Fall sind die Winkel bei  $A$  und  $B$  beide spitz, denn nach § 24 führt  $\lambda'' = 2$  mit sich, dass  $\lambda > 4$  und  $\lambda' > 4$  ist. Insgesamt kommen also in  $A C B C_1$  keine stumpfen Winkel vor, und an rechten Winkeln können vorkommen *entweder* keiner, *oder* ein einzelner (bei  $A$  oder  $B$ ), *oder* ein Paar gegenüberliegender (bei  $A$  und  $B$  oder bei  $C$  und  $C_1$ ). In allen Fällen haben also zwei gegenüberliegenden Seiten eine gemeinsame Senkrechte, und diese fällt in das Innere des Vierecks.

Somit ist  $\bar{t} = (B C_1) (A C)$  eine Verschiebung mit der gemeinsamen Senkrechten  $\bar{A}$  dieser beiden Vierecksseiten als Achse, und das im Viereck verlaufende Stück  $EF$  ist die halbe Verschiebungslänge.  $\bar{A}$  ist in Fig. 25 mit der durch  $\bar{t}$  bestimmten Orientierung gestrichelt eingetragen. Ebenso ist die Achse  $\tau \bar{A}$  von  $\bar{\tau} \bar{t} \bar{\tau}^{-1}$  die gemeinsame Senkrechte des anderen Paares von Gegenseiten; sie ist in der Figur ebenfalls gestrichelt. Die beiden Achsen gehen durch Spiegelung an  $AB$  aus einander hervor, schneiden sich also auf  $AB$ . Der Schnittpunkt ist, um die volle Analogie mit den früheren Bezeichnungen herzustellen, mit  $\bar{\tau} \bar{P}$  bezeichnet.  $\bar{P}$  ist demnach der Schnittpunkt von  $\bar{A}$  und  $\bar{\tau}^{-1} \bar{A}$ . Hier ist die Bezeichnungsweise nicht symbolisch, wie in  $T$ , denn  $\bar{\tau}$  u. s. w. sind ja bestimmte Bewegungen der Ebene in sich.

Nun bezeichne  $\Phi$  die Bewegungsgruppe, die durch die drei Spiegelungen  $(AB)$ ,  $(BC)$  und  $(CA)$  erzeugt wird. Durch  $\Phi$  geht aus  $EF$  offenbar ein aus vollständigen Geraden gebildetes und die ganze Ebene erfüllendes Netz hervor, das wir als das Netz  $\bar{N}$  bezeichnen. Die den Punkt  $A$  bzw.  $B$  enthaltende Masche ist ein reguläres  $\lambda$ -Eck bzw.  $\lambda'$ -Eck, das durch  $\bar{\tau}$  bzw.  $\bar{\tau}'$  um einen Schritt rechts herum in sich gedreht wird. Die den Punkt  $C$  enthaltende Masche ist ein  $2\lambda''$ -Eck, dessen Seiten abwechselnd gleich der des  $\lambda$ -Ecks und der des  $\lambda'$ -Ecks sind, und dessen Winkel alle gleich sind. Es wird bei  $\bar{\tau}''$  um zwei Schritte links herum in sich gedreht.

In  $\Phi$  bilden die aus einer geraden Anzahl von Spiegelungen gebildeten Elemente einen Normalteiler vom Index 2, den wir mit  $\bar{T}'$  bezeichnen. Da das

Produkt zweier der drei Spiegelungen entweder  $\bar{\tau}^{\pm 1}$ ,  $\bar{\tau}'^{\pm 1}$  oder  $\bar{\tau}'^{\pm 1} = (\bar{\tau}'\bar{\tau})^{\pm 1}$  ist, wird  $\bar{T}'$  durch  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}'$  erzeugt.  $\bar{N}$  ist das Dehn'sche Gruppenbild von  $\bar{T}'$ , wenn man die Bezeichnung  $\bar{\tau}$  an die geeignet gerichteten Seiten der  $A$ -Maschen und  $\bar{\tau}'$  ebenso an die  $B$ -Maschen schreibt. Denn jede Operation von  $\bar{T}'$  ist eindeutig bestimmt durch die Zuordnung des Netzpunktes  $\bar{P}$  zu dem Netzpunkt, der sein Bild bei der entsprechenden Operation wird; da die Orientierung der Ebene bei  $\bar{T}'$  erhalten bleibt, kann das orientierte Achsenpaar, das sich in  $\bar{P}$  schneidet, nur auf eine Weise das orientierte Achsenpaar decken, das sich im Bildpunkt schneidet.

In ganz analoger Weise wurden in § 22 die Elemente von  $T$ , und damit auch die der jetzt betrachteten Untergruppe  $T'$ , durch Achsenschnitte gekennzeichnet. Dabei entspricht nun die Menge der Punkte  $T'P$  der Menge der Punkte  $\bar{T}'\bar{P}$  umkehrbar eindeutig. Denn auf  $A$  lagen von diesen die Punkte  $P$  und  $\tau P$  und alle diesen beiden Punkten bei allen Potenzen von  $t$  entsprechenden, und keine anderen. Das gleiche gilt hier für die überstrichenen Punkte und Elemente. Auf den übrigen Geraden des Netzes  $\bar{N} = \bar{T}'\bar{A}$  liegen Punktreihen, die aus dieser durch gewisse Elemente von  $\bar{T}'$  hervorgehen. Ebenso liegen auf den übrigen Geraden des »Netzes«  $N = T'A$  Punktreihen, die aus der auf  $A$  gelegenen Reihe durch die entsprechenden Elemente von  $T'$  hervorgehen. Die Zuordnung der Elemente von  $T'$  zu den gleichbezeichneten von  $\bar{T}'$  stellt also eine Isomorphie zwischen  $T'$  und  $\bar{T}'$  her.

Aus dieser Isomorphie von  $T'$  mit einer Gruppe  $\bar{T}'$  von Bewegungen der hyperbolischen Ebene lassen sich nun eine Reihe von Folgerungen ziehen.

Dem in  $T'$  enthaltenen Normalteiler  $F'$  vom Index  $n'$  entspricht bei der isomorphen Abbildung ein in  $\bar{T}'$  enthaltener Normalteiler  $\bar{F}'$ , der ebenfalls den Index  $n'$  hat und ebenso wie  $F'$  aus lauter Elementen unendlicher Ordnung besteht (abgesehen von dem identischen Element). Nun enthält  $\bar{T}'$  keine parabolischen Substitutionen, da es nicht beliebig nahe bei einander gelegene Netzeckpunkte gibt, und die Netzmaschen beschränkt sind. Also besteht  $\bar{F}'$  aus hyperbolischen Substitutionen. Ferner wird  $\bar{F}'$  durch endlich viele von diesen erzeugt; denn das Viereck  $ACBC_1$  ist ein Fundamentalbereich für  $\bar{T}'$ ; fügt man zu ihm seine Bilder bei  $\bar{\alpha}'$ ,  $\bar{\alpha}'^2$ , . . . ,  $\bar{\alpha}'^{(n'-1)}$ , wo  $\bar{\alpha}'$  das dem am Anfang dieses Paragraphen eingeführten Element  $\alpha'$  von  $T'$  entsprechende Element von  $\bar{T}'$  ist, so erhält man einen Fundamentalbereich für  $\bar{F}'$ , und die Randseiten desselben entsprechen einander zu Paaren bei endlich vielen Elementen von  $\bar{F}'$ . Stellt man  $\bar{T}'$  durch lineare Substitutionen einer komplexen Variablen  $\bar{x}$  dar, die das Innere  $\bar{D}$  des

Einheitskreises  $\bar{E}$  der  $\bar{x}$ -Ebene in sich abbilden, so ist die Konvexfigur von  $\bar{F}'$  ganz  $\bar{D}$ , da das Netz  $\bar{N}$  ganz  $\bar{D}$  ausfüllt. Somit folgt, dass  $\bar{D} \bmod \bar{F}'$  eine geschlossene Fläche eines gewissen Geschlechtes  $p'$  ist. Also ist  $\bar{F}'$  und somit auch  $F'$  keine freie Gruppe. Dann ist aber auch  $F$  keine freie Gruppe, denn freie Gruppen haben bekanntlich nur freie Untergruppen. Man sieht daher: *Der Spezialfall kann nur bei geschlossenen Flächen vorkommen.*

Da  $\lambda \geq 4$ ,  $\lambda' \geq 4$  und  $\lambda'' \geq 2$  ist, haben die  $\lambda$ -Ecke,  $\lambda'$ -Ecke und  $2\lambda''$ -Ecke des Netzes  $\bar{N}$  je mindestens vier Seiten. Sie sind ferner konvexe Polygone.

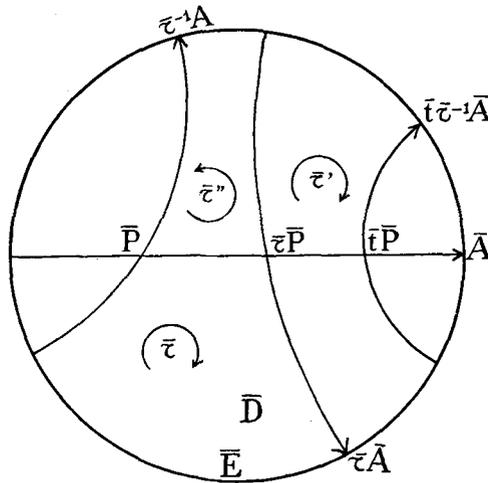


Fig. 26.

Dann können zwei Seiten einer Masche, die durch eine Seite derselben Masche getrennt werden, einander bei Verlängerung nicht schneiden; denn wäre das der Fall, so entstünde ein Dreieck, bei dessen eventueller weiterer Zerschneidung durch andere Netzgeraden immer wieder mindestens ein Dreieck entstünde. Z. B. wird also  $\bar{\tau}A$  weder von  $\bar{\tau}^{-1}A$  noch von  $\bar{t}\bar{\tau}^{-1}A$  geschnitten. (Fig. 26.)

Nun liegen die Grundpunkte von  $\bar{F}'$  auf dem Randkreis  $\bar{E}$  von  $\bar{D}$  überall dicht. Ebenso liegen die Grundpunkte von  $F'$  auf dem Randkreis  $E$  der Einheitskreisscheibe  $D$  der  $x$ -Ebene überall

dicht, da  $F'$  nicht frei ist. Der isomorphen Abbildung von  $\bar{F}'$  auf  $F'$  entspricht eine topologische und die zyklische Ordnung erhaltende Abbildung der Grundpunktmenge  $G_{\bar{F}'}$  auf  $G_{F'}$ . Dabei ist  $G_{\bar{F}'} = G_{\bar{T}}$  und  $G_{F'} = G_T$ . Also wird auch  $\tau A$  weder von  $\tau^{-1}A$  noch von  $t\tau^{-1}A$  geschnitten — diese Achsen haben die gleiche relative Lage wie in Fig. 26 —, und  $\tau P$  liegt daher zwischen  $P$  und  $tP$ . Daraus folgt weiter, dass die Geraden  $T'A$  in  $D$  ein wirkliches Netz  $N$  bilden, das in  $D$  genau so aufgebaut ist, wie  $\bar{N}$  in  $\bar{D}$ . Nur hat  $N$  im Allgemeinen nicht dieselbe metrische Regularität wie  $\bar{N}$ . Man kann daher eine topologische Abbildung  $\mathcal{P}$  von  $\bar{D}$  auf  $D$  so herstellen, dass jede Netzmasche von  $\bar{D}$  auf die entsprechende von  $D$  abgebildet wird und bezgl.  $\bar{F}'$  äquivalente Punkte von  $\bar{D}$

<sup>1</sup> Vgl. l. c. S. 24, I, § 9. Diese Tatsache ist der Kern des Satzes, dass sich jede Isomorphie zwischen  $\bar{F}'$  und  $F'$  durch eine topologische Abbildung der geschlossenen Fläche  $\bar{D} \bmod \bar{F}'$  auf die geschlossene Fläche  $D \bmod F'$  bewirken lässt.

dabei in bezgl.  $F'$  äquivalente Punkte von  $D$  abgebildet werden. Der Abbildung  $\mathfrak{P}$  entspricht eine topologische Abbildung der Fläche  $\bar{D}$  mod  $\bar{F}'$  auf die Fläche  $D$  mod  $F'$ , bei der auch die durch die Netzgeraden von  $\bar{N}$  bewirkte Unterteilung der ersteren Fläche in die entsprechende, durch die Netzgeraden von  $N$  bewirkte Unterteilung der zweiten Fläche übergeht.

Nun ist ja  $\bar{T}'$  eine Gruppe topologischer Abbildungen (nämlich Bewegungen) von  $\bar{D}$  auf sich. Also ist  $T' = \mathfrak{P}\bar{T}'\mathfrak{P}^{-1}$  eine Gruppe topologischer Abbildungen von  $D$  auf sich. Für die Untergruppe  $T'$  von  $T$  ist es daher gelungen, die ursprünglich nur in der Grenzpunktmenge, d. h. hier dem ganzen Randkreis  $E$ , gegebene Abbildungsgruppe auf das ganze Kreisinnere  $D$  zu erweitern, und für die Fläche  $D$  mod  $F'$  entspricht dies einer Abbildung der endlichen Ordnung  $n'$ . Das für die Gesamtgruppe  $T$  gestellte Problem ist also zunächst nur für die Untergruppe  $T'$  gelöst.

Ehe der Übergang von  $T'$  zu  $T$  zur Untersuchung gelangt, ist zunächst noch ein Nachtrag hinzuzufügen, da oben angenommen wurde, dass weder  $\lambda$  noch  $\lambda'$  den Wert 3 hätte. Aus dieser Voraussetzung wurde teils geschlossen, dass die Winkel im Viereck  $ACBC_1$  nicht stumpf waren, teils, dass die  $\lambda$ -Ecke und  $\lambda'$ -Ecke mindestens vier Seiten hatten, also  $\bar{\tau}\bar{A}$  von seinen Nachbarn  $\bar{\tau}^{-1}\bar{A}$  und  $i\bar{\tau}^{-1}\bar{A}$  nicht geschnitten wurde.

Da  $\tau$  und  $\tau'$  gleichberechtigt sind, darf man annehmen, es sei  $\lambda' = 3$ . Nach § 24 sind dann  $\lambda \geq 4$  und  $\lambda'' \geq 4$ . In Fig. 25 ist Winkel  $ABC = \frac{\pi}{3}$ . Fügt man zu der Figur noch das Spiegelbild des Dreiecks  $ABC$  in  $BC$  (Fig. 27), wobei  $A_1$  das Spiegelbild von  $A$  ist, so liegen  $A_1, B, C_1$  auf einer Geraden. Im Viereck  $ACA_1C_1$  ist der Winkel bei  $A_1$  und bei  $C_1$  spitz, der Winkel bei  $A$  recht oder spitz, ebenso der Winkel bei  $C$ . Also haben die Gegenseiten  $AC$  und  $A_1C_1$  eine ins Innere des Vierecks fallende gemeinsame Senkrechte. Nun falle man von  $B$  aus das Lot  $BH$  auf  $CA$ . Der Fusspunkt  $H$  fällt innerhalb  $CA$ , da  $\frac{\pi}{\lambda}$  und  $\frac{\pi}{\lambda''}$  spitz sind. Ist  $\lambda = \lambda''$ , so ist  $BH$  Symmetrieachse der Figur, also gemeinsame Senkrechte von  $CA$  und  $C_1A_1$ . Ist  $\lambda'' > \lambda$ ,

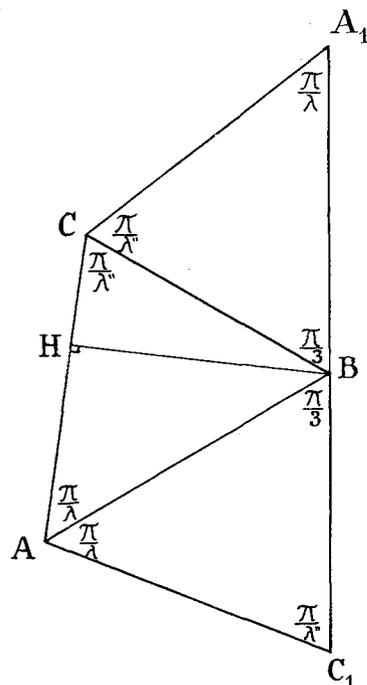


Fig. 27.

also  $\frac{\pi}{\lambda''} < \frac{\pi}{\lambda}$ , so ist Winkel  $CBH > ABH$ , also  $HBC_1$  spitz, also hat die gemeinsame Senkrechte von  $AC$  und  $A_1C_1$  ihren Fusspunkt auf  $BC_1$ . In diesem Fall fällt die Konstruktion des Netzes  $\bar{N}$  ganz ebenso aus, wie früher. Ist  $\lambda'' < \lambda$ , so wird  $HBA_1$  spitz, die gemeinsame Senkrechte von  $AC$  und  $A_1C_1$  hat also ihren Fusspunkt auf  $BA_1$ . Es entsteht auch in diesem Fall ein Netz  $\bar{N}$ , nur liegt dabei die  $B$  umgebende Dreiecksmasche innerhalb der  $A$  umgebenden

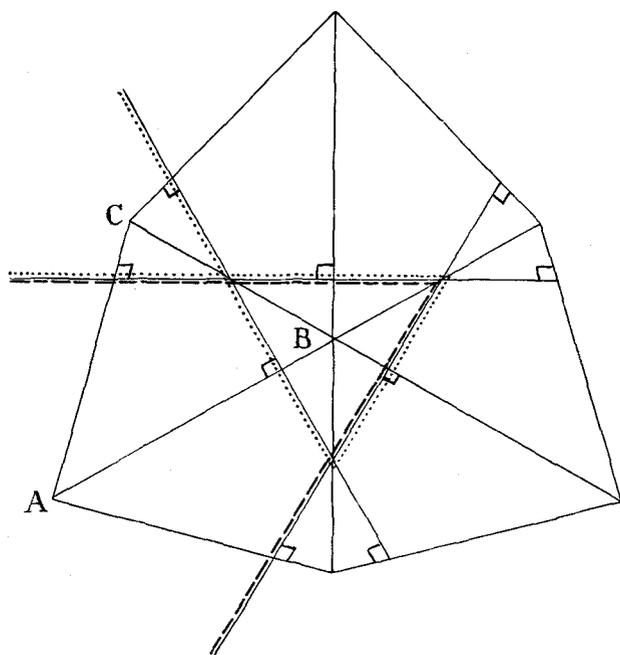


Fig 28.

$\lambda$ -Ecksmasche, und die  $C$  umgebende  $2\lambda''$ -Ecksmasche überschlägt sich an den Ecken. Vgl. Fig. 28, wo ein Teil der  $A$ -Masche durch Strichelung und ein Teil der  $C$ -Masche durch Punktierung angedeutet ist. Aber die obige Schlussweise, nach der  $\bar{T}'$  als mit  $T'$  isomorph erkannt wird, bleibt gültig. Sie gilt auch im Übergangsfall  $\lambda = \lambda''$ , in dem die  $B$ -Masche sich auf den Punkt  $B$  zusammenzieht; die Operation  $\bar{\tau}'$  bleibt auch in diesem Fall als die Drittdrehung um  $B$  bestehen.

Um wie oben eine topologische Abbildung  $\mathfrak{P}$  von  $\bar{D}$  auf  $D$  herzustellen, ist es im Fall  $\lambda' = 3$  zweckmässig, zu einem anderen

Achsensystem für die Einteilung überzugehen. Man spiegelt in diesem Fall das Ausgangsdreieck an  $AC$  statt an  $AB$ , wobei  $B_1$  der Spiegelpunkt von  $B$  in  $AC$  sei (Fig. 29). Im Viereck  $ABCB_1$  sind die Winkel bei  $B$  und  $B_1$  spitz, nämlich  $\frac{\pi}{3}$ , und bei  $A$  und  $C$  recht oder spitz, also fallen die gemeinsamen

Senkrechten der Gegenpaare von Seiten innerhalb des Vierecks. Als Netz  $\bar{N}$  nehmen wir hier das aus diesen gemeinsamen Senkrechten bei der Spiegelungsgruppe  $\Phi$  hervorgebrachte Netz. Die Maschen desselben sind  $\lambda$ -Ecke um  $A$ , die wie früher zu  $\bar{\tau} = (AB)(AC)$  gehören,  $\lambda''$ -Ecke um  $C$ , die zu  $\bar{\tau}'' = (CB)(CA)$  gehören, und Sechsecke um  $B$ , die zu  $\bar{\tau}' = (BC)(BA)$  gehören. Dies neue Netz

enthält also keine dreieckigen Maschen, und die Konstruktion von  $\mathfrak{A}$  geschieht dann wie oben.

Zur Erläuterung dieses Übergangs zu einem anderen Achsensystem sei die Bemerkung hinzugefügt, dass man ihn als die Wahl anderer Erzeugender für  $\bar{T}$  und damit auch für  $T'$  erklären kann. Früher nahmen wir  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}'$  als Erzeugende; diese drehten die zugehörigen Netzmaschen einen Schritt rechts herum, und ihr Produkt  $\bar{\tau}'\bar{\tau} = \bar{\tau}''$  drehte ihre Masche 2 Schritte links herum. Um volle Analogie zu erhalten, wählen wir hier als Erzeugende

$$\bar{\tau}''^{-1} = (CA)(CB)$$

und  $\bar{\tau}$ , die beide ihre Maschen einen Schritt rechts herum drehen. Als Produkt hat man dann

$$\bar{\tau}\bar{\tau}''^{-1} = (AB)(AC)(CA)(CB) = (AB)(CB) = \bar{\tau}'^{-1},$$

das seine Masche um zwei Schritte links herum dreht. Mit anderen Worten: Man wählt unter den drei Elementen, von denen jedes das Produkt der beiden anderen mit geeigneten Exponenten  $\pm 1$  ist, als Erzeugende die zwei aus, deren Ordnung grösser als 3 ist. Die Ordnungszahl 3 tritt dann bei dem Produkt auf, wo sie wegen der Verdoppelung der Anzahl der Netzseitenmaschen von 3 auf 6 nicht mehr störend wirkt. Die Konstruktion von  $\mathfrak{A}$  und damit die Konstruktion von  $T'$  als Gruppe topologischer Abbildungen in  $D$  geht dann wie zuvor.

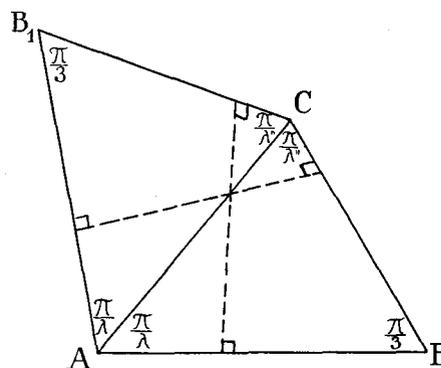


Fig. 29.

### 26. Index von $T'$ in $T$ .

$D \bmod F$  ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht  $p > 1$  und  $D \bmod F'$  eine solche vom Geschlecht  $p' \geq p$ . Die letztere ist eine unverzweigte Überlagerungsfläche der ersteren. Dann geht bekanntlich<sup>1</sup>  $p - 1$  in  $p' - 1$  auf, der Quotient ist gleich der Blätterzahl der Überlagerungsfläche, und das ist der

<sup>1</sup> H. KNESER, Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. Math. Ann. Bd. 103 (1930).

H. SEIFERT, Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen. Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd. 12 (1936).

Index von  $F'$  in  $F$ . Also hat  $F'$  einen endlichen Index  $j$  in  $F$ , und man kann Elemente

$$(26, 1) \quad f_0 = 1, f_1, f_2, \dots, f_{j-1}$$

von  $F$  so wählen, dass

$$(26, 2) \quad F = F' f_0 + F' f_1 + \dots + F' f_{j-1}$$

eine Zerlegung von  $F$  nach  $F'$  ist. Ferner sei daran erinnert, dass nach (25, 1)  $\nu n' = n$  war und dass  $x'$  ein Element von  $T'$  aus der Restklasse  $[x^\nu]$  bedeutete.

Ein beliebiges Element  $t$  von  $T$  hat die Form  $f x^r$ ,  $f \in F$ . Ist

$$r = q\nu + r', \quad 0 \leq r' < \nu, \quad \text{so ist} \quad x'^{-q} f x^r \in [x^{r'}],$$

also

$$x'^{-q} f x^r = g x^{r'}, \quad g \in F.$$

Setzt man nach (26, 2)

$$g = g' f_q, \quad 0 \leq q \leq j-1, \quad g' \in F',$$

so erhält man

$$(26, 3) \quad t = f x^r = x'^q g' f_q x^{r'} = t' f_q x^{r'}, \quad t' \in T'.$$

Diese Darstellung der Elemente von  $T$  ist eindeutig; denn die Elemente  $x^{r'}$  und  $f_q$  sind eindeutig durch  $t$  bestimmt. Somit folgt aus (26, 3) eine Zerlegung von  $T$  nach  $T'$ , und

$$(26, 4) \quad i = j\nu$$

ist der Index von  $T'$  in  $T$ , indem es  $j$  Werte für  $q$  und  $\nu$  Werte für  $r'$  gibt.

### 27. Anwendung der Verzweigungsformel von Hurwitz.

Hat der Index  $i$  von  $T'$  in  $T$  den Wert 1, so ist  $T' = T$ , und die Aufgabe,  $T$  als Abbildungsgruppe in  $D$  zu konstruieren, ist in § 25 gelöst. Es bleibt also zu untersuchen, ob  $i > 1$  sein kann, und wie in diesem Fall die Konstruktion weiterzuführen ist.

Für eine Abbildungsklasse der endlichen Ordnung  $n$  einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $p$  gilt die Formel<sup>1</sup>

$$(27, 1) \quad n \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) = 2p - 2 - n(\varepsilon - 2).$$

<sup>1</sup> I. c. S. 24, III, pg. 114.

Das ist die Verzweigungsformel von Riemann-Hurwitz in folgender verallgemeinerter Bedeutung: Durch die Abbildungsklasse wird in der (abelschen) Homologiegruppe, d. h. der Faktorgruppe der Kommutatorgruppe von  $F$ , ein Automorphismus induziert, der durch eine ganzzahlige Matrix mit  $2p$  Zeilen und Spalten beschrieben werden kann. Das  $\varepsilon$  der Formel (27, 1) ist die Multiplizität des Eigenwertes 1 für diese Matrix; und zwar ist  $\varepsilon$  stets gerade.  $\zeta$  bedeutet die Ordnung einer maximalen abelschen (zyklischen) Untergruppe endlicher Ordnung in  $T$ ; siehe § 6. Das  $\Sigma$  deutet eine Summation über ein vollständiges System nicht konjugierter maximaler zyklischer Untergruppen an, und deren Anzahl, die endlich ist und mit  $w$  bezeichnet sei, ist am Summationszeichen angeschrieben.

Hat man bereits das angestrebte Ziel, die Konstruktion einer Abbildung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung in der Abbildungsklasse  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, erreicht, so existiert eine Modulfläche, und die Fläche vom Geschlecht  $p$  kann als reguläre Überlagerungsfläche über dieser aufgefasst werden. Dann ist (27, 1) die Verzweigungsformel von Hurwitz im gewöhnlichen Sinn, d. h.  $n$  ist die Blätterzahl,  $\varepsilon$  das doppelte des Geschlechts der Modulfläche,  $w$  die Anzahl der Verzweigungspunkte und die Werte  $\zeta$  die zu ihnen gehörigen Verzweigungsordnungen, d. h. die Anzahl der Blätter, die zyklisch um den Verzweigungspunkt zusammenhängen.

Nun wenden wir (27, 1) zunächst auf die Gruppe  $T'$ , oder was auf dasselbe hinauskommt, auf die Gruppe  $\bar{T}'$  an. Da  $\bar{T}'$  einer Abbildung der endlichen Ordnung  $n'$  entspricht, kann man hier die zuletzt genannte Interpretation von (27, 1) verwenden. In § 25 war das Viereck  $ACBC_1$  der Fig. 25 ein Fundamentalbereich für  $\bar{T}'$  in  $\bar{D}$ , wobei  $AC$  durch  $\bar{\tau}$  auf  $AC_1$  und  $BC_1$  durch  $\bar{\tau}'$  auf  $BC$  abgebildet wurde. Also hat die Modulfläche  $\bar{D} \bmod \bar{T}'$  den Zusammenhang der Kugel, es ist also  $\varepsilon = 0$ . Ferner ist  $w = 3$ , indem  $A$ ,  $B$  und  $C$  die drei Verzweigungspunkte repräsentieren;  $C_1$  ist ja bezgl.  $\bar{T}'$  äquivalent mit  $C$ . Die zugehörigen Verzweigungsordnungen sind bezw.  $\lambda$ ,  $\lambda'$  und  $\lambda''$ . Endlich ist  $n$  durch  $n'$  und  $p$  durch  $p'$  zu ersetzen. Zieht man noch das Glied  $2n'$  auf die linke Seite, so wird aus (27, 1) die Formel

$$(27, 2) \quad n' \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} \right] = 2(p' - 1).$$

Sodann deuten wir (27, 1) in der erstgenannten Interpretation für die Gruppe  $T$ . Dabei ist, wie bisher,  $n$  die Ordnung der Abbildungsklasse, also die Ordnung von  $T/F$ , und  $p$  das Geschlecht der geschlossenen Fläche  $D \bmod F$ . Die Multiplizität  $\varepsilon$  des Eigenwertes 1 ist einstweilen unbekannt, und über die

Anzahl  $w$  nicht-konjugierter maximaler zyklischer Untergruppen von  $T$  weiss man einstweilen nur, dass jedenfalls  $w \geq 1$  ist, da  $T$  ja Elemente endlicher Ordnung enthält. Zwar war  $w = 3$  für die Untergruppe  $T'$  von  $T$ , aber Untergruppen, die in  $T'$  nicht konjugiert sind, können ja eventuell in  $T$  konjugiert sein.

Durch Multiplikation mit  $j$  und Umordnung erhält (27, 1) die Form

$$(27, 3) \quad j n \left\{ \varepsilon - 2 + \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right\} = 2j(p - 1).$$

Wie in § 26 erwähnt, ist  $j(p - 1) = p' - 1$ , sodass die rechten Seiten von (27, 2) und (27, 3) übereinstimmen. Mit Benutzung von (25, 1) erhält man daher

$$n' \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} \right] = j n n' \left\{ \varepsilon - 2 + \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right\}.$$

Kürzt man mit  $n'$  und verwendet (26, 4), so erhält man schliesslich

$$(27, 4) \quad 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} = i \left\{ \varepsilon - 2 + \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right\}.$$

Zufolge (24, 5) sind beide Seiten von (27, 4) positiv.

Das Element  $\tau$  der Ordnung  $\lambda$  ist primär in  $T'$ , da es die maximale zyklische Gruppe, zu der es gehört, erzeugt. Dagegen weiss man nicht, ob es in  $T$  primär ist. Mit  $\alpha \lambda$ ,  $\alpha \geq 1$ , kann man die Ordnung eines primären Elements von  $T$ , von dem  $\tau$  eine Potenz ist, bezeichnen. Indem man aus der  $\sum_w$  in (27, 4) das dieser zyklischen Untergruppe entsprechende Glied herauszieht und  $i$  in 1 und  $i - 1$  spaltet, kann man (27, 4) in

$$(27, 5) \quad 0 = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} + (\varepsilon - 2) + \sum_{w=1} \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \\ + (i - 1) \left\{ \varepsilon - 2 + \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right\}$$

umformen. Dabei bedeutet  $\sum_{w=1}$  die Summation über die übrigen  $w - 1$  maximalen zyklischen Untergruppen, falls  $w > 1$  ist.

Wäre nun  $\varepsilon > 0$ , so wäre ja  $\varepsilon \geq 2$ , da  $\varepsilon$  gerade ist. Dann wären alle Glieder auf der rechten Seite von (27, 5) positiv oder Null, und jedenfalls  $\frac{1}{\lambda'}$  und  $\frac{1}{\lambda''}$  sind positiv. Also ergäbe (27, 5) einen Widerspruch. Man folgert also, dass  $\varepsilon = 0$  ist.

Daraus folgt nun weiter, dass  $w \geq 3$  sein muss, da die rechte Seite von (27, 4) positiv sein soll. Es soll nun gezeigt werden, dass  $w = 3$  ist. Angenommen es sei  $w \geq 4$ . Dann gibt es in  $T$  eine maximale zyklische Untergruppe, die nicht in  $T'$  repräsentiert ist, also ist  $T$  umfassender als  $T'$ , und daher ist  $i \geq 2$ . Analog wie oben definieren wir: Es sei bezw.  $\alpha\lambda$ ,  $\alpha \geq 1$ ;  $\alpha'\lambda'$ ,  $\alpha' \geq 1$ ;  $\alpha''\lambda''$ ,  $\alpha'' \geq 1$  die Ordnung eines primären Elements von  $T$ , von dem bezw.  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $\tau''$  eine Potenz ist. Diese Bezeichnung wird aufrecht erhalten unabhängig davon, ob die maximalen zyklischen Untergruppen von  $T$ , zu denen  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\tau''$  gehören, nicht konjugiert sind, oder zwei von ihnen konjugiert sind, oder alle drei konjugiert sind. Unter den Zahlen  $\alpha\lambda$ ,  $\alpha'\lambda'$ ,  $\alpha''\lambda''$  wähle man die grösste aus. Es sei dies z. B.  $\alpha\lambda$ . Indem man in (27, 4)  $\varepsilon = 0$  setzt und  $i$  in die Summanden 2 und  $i - 2$  zerlegt, kann man dann (27, 4) in

$$1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} = 2 \left[ -2 + 1 - \frac{1}{\alpha\lambda} + 1 - \frac{1}{r_1} + 1 - \frac{1}{r_2} + 1 - \frac{1}{r_3} + \sum_{\xi=4}^w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] \\ + (i - 2) \left\{ -2 + \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right\}$$

umformen. Hierbei sind  $\alpha\lambda$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  die Ordnungszahlen für vier ausgewählte nicht-konjugierte maximale zyklische Untergruppen in  $T$ . Dies kann man

$$0 = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \left( \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\alpha\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda''} + 2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r_1} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r_2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r_3} \right) + \sum_{\xi=4}^w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] \\ + (i - 2) \left\{ -2 + \sum_w \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right\}$$

schreiben. Da nun  $r_1 \geq 2$ ,  $r_2 \geq 2$ ,  $r_3 \geq 2$  und

$$\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\alpha\lambda} \geq \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\alpha'\lambda'} = \frac{1}{\lambda'} \left( 1 - \frac{1}{\alpha'} \right) \geq 0$$

ist, sind alle Glieder der rechten Seite positiv oder Null, und jedenfalls  $\frac{1}{\lambda''}$  ist positiv. Also ergibt sich ein Widerspruch, und man schliesst  $w = 3$ .

Zu  $T$  gehören also, ebenso wie zu  $T'$ , die Werte  $\varepsilon = 0$  und  $w = 3$ . Man kann somit (27, 4) in der Form

$$(27, 6) \quad 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} = i \left[ 1 - \frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_3} \right]$$

schreiben. Beide Seiten hierin sind positive Zahlen.

Falls nun  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\tau''$  zu drei untereinander nicht konjugierten maximalen zyklischen Untergruppen von  $T$  gehören, so repräsentieren diese ein vollständiges System von nicht konjugierten, und man kann

$$\zeta_1 = \alpha\lambda, \quad \zeta_2 = \alpha'\lambda', \quad \zeta_3 = \alpha''\lambda''$$

schreiben. Also nimmt (27, 6) durch Zerlegung von  $i$  in  $1$  und  $i - 1$  die Form

$$0 = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\lambda'} \left( 1 - \frac{1}{\alpha'} \right) + \frac{1}{\lambda''} \left( 1 - \frac{1}{\alpha''} \right) + (i - 1) \left[ 1 - \frac{1}{\alpha\lambda} - \frac{1}{\alpha'\lambda'} - \frac{1}{\alpha''\lambda''} \right]$$

an. Rechts sind alle Glieder positiv oder Null, also müssen sie alle Null sein. Also erhält man  $i = 1$ , d. h.  $T' = T$ .

Es bleibt also nur noch der Fall zu untersuchen, dass unter diesen drei Gruppen konjugierte vorkommen. Dann gibt es in  $T$  eine nicht in  $T'$  vertretene maximale zyklische Untergruppe, also muss  $i \geq 2$  sein.

## 28. Anwendung einer Ungleichung von Wiman.

Die Ordnung  $n$  der Abbildungsklasse ist durch das Geschlecht  $p$  ( $> 1$ ) der Fläche beschränkt, indem die Ungleichung

$$(28, 1) \quad n \leq 4p + 2$$

besteht. Diese ist von A. Wiman für die Ordnung  $n$  birationaler Transformationen einer algebraischen Kurve vom Geschlecht  $p > 1$  in sich aufgestellt worden, indem solche Transformationen bekanntlich immer eine endliche Ordnung haben. Der Inhalt des Satzes lässt sich aber, wie ich früher gezeigt habe<sup>1</sup>, von allen Beziehungen zur Theorie der algebraischen Funktionen befreien und zu einem Satz über Abbildungsklassen endlicher Ordnung machen.

---

<sup>1</sup> J. NIELSEN, Topologischer Beweis eines Satzes von Wiman. Mat. Tidsskr. B (1936). Vgl. die dort angegebene Literatur, insbesondere die zuerst durch F. STEIGER gegebene Verallgemeinerung des Beweises für den Wimanschen Satz.

Wegen  $\varepsilon = 0$  und  $w = 3$  kann man (27, 1) in der Form

$$1 - \frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_3} = \frac{2p-2}{n} = \frac{2p-2}{4p+2} \cdot \frac{4p+2}{n}$$

$$= \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4p+2} \right) \cdot \frac{4p+2}{n}$$

schreiben, also hat man nach (28, 1)

$$(28, 2) \quad 1 - \frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_3} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{4p+2},$$

wobei die rechte Seite wegen  $p > 1$  positiv ist.

Nun sind  $\lambda$ ,  $\lambda'$  und  $\lambda''$  Teiler von  $n$  und daher nach (28, 1) alle  $\leq 4p+2$ . Man erhält daher aus (27, 6) durch Vergleich mit (28, 2)

$$1 - \frac{3}{4p+2} \geq i \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4p+2} \right]$$

und daraus

$$i \leq \frac{1 - \frac{3}{4p+2}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4p+2}} = \frac{4p-1}{2p-2},$$

also

$$(28, 3) \quad i \leq 2 + \frac{3}{2p-2}.$$

Ein Wert  $i > 2$  kommt nach (28, 3) nur für  $p = 2$  in Frage, und zwar dann auch nur der Wert  $i = 3$ . Nun sind die möglichen Typen der Abbildungsklassen endlicher Ordnung für  $p = 2$  in der l. c.<sup>1</sup> angegebenen Abhandlung III, Acta math. 58, p. 120 tabellarisch aufgezählt. Nur vier von ihnen, nämlich die mit VIII, IX, XI und XII bezeichneten Typen entsprechen  $w = 3$ . In VIII ist  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 5$ , also  $3 \left( 1 - \frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_3} \right) = \frac{6}{5} > 1$ . In IX ist  $\zeta_1 = \zeta_2 = 6$ ,  $\zeta_3 = 3$ , also  $3 \left( 1 - \frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} - \frac{1}{\zeta_3} \right) = 1$ . Da beide Seiten von (27, 6) kleiner als 1 sind, kommt also der Wert  $i = 3$  für diese beiden Typen nicht in Betracht. Für die mit XI und XII bezeichneten Typen ist im § 15 derselben Abhandlung die Konstruktion einer Abbildung endlicher Ordnung mit anderen Mitteln durchgeführt worden, sodass diese hier ausser Betracht gelassen werden können.

Somit ist im folgenden nur noch der Fall  $i = 2$  zu behandeln.

<sup>1</sup> Siehe die Note S. 24.

## 29. Der Fall des Index 2.

Indem nun  $T'$  in  $T$  den Index 2 hat, ist  $T'$  Normalteiler von  $T$ . Das Quadrat jedes ausserhalb  $T'$  gelegenen Elements von  $T$  liegt dann in  $T'$ . Wie am Schluss von § 27 bemerkt gibt es in  $T$  mindestens eine maximale zyklische Untergruppe, die nicht in  $T'$  vertreten ist. Eine solche muss nun die Ordnung 2 haben, denn das Quadrat eines primären Elements muss zu  $T'$  gehören, also 1 sein, da die Untergruppe sonst in  $T'$  mit einem von 1 verschiedenen Element vertreten wäre. Andererseits kann es dann aber auch nur eine solche Untergruppe geben. Denn hätten zwei von den Zahlen  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  den Wert 2, so würde die rechte Seite von (27, 6) negativ. Man erkennt also: Von den drei in  $T'$  existierenden nicht-konjugierten maximalen zyklischen Untergruppen werden zwei, aber nicht alle drei, in  $T$  konjugiert. Den drei Äquivalenzklassen von Untergruppen endlicher Ordnung in  $T'$  entsprechen also in  $T$  zwei solche; ausser diesen gibt es in  $T$  noch eine dritte, die in  $T'$  nicht vertreten ist, und diese letztere hat die Ordnung 2.

Indem wir einen Augenblick von den bisherigen Bezeichnungen abweichen, bezeichnen wir mit  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  drei primäre Elemente der endlichen Ordnungen  $l_1, l_2, l_3$  von  $T'$ , welche drei nicht-konjugierte Untergruppen von  $T'$  erzeugen. Die Äquivalenzklassen der  $\omega_1$  und  $\omega_2$  enthaltenden Untergruppen mögen in  $T$  zusammenfallen. Es gibt also ein nicht zu  $T'$  gehöriges Element  $\varphi$  von  $T$ , welches die maximale zyklische Untergruppe von  $T$ , zu der  $\omega_1$  gehört, in die maximale zyklische Untergruppe von  $T$ , zu der  $\omega_2$  gehört, transformiert. Ausserdem weiss man, dass  $\varphi \omega_1 \varphi^{-1}$  zu  $T'$  gehört, da  $T'$  Normalteiler von  $T$  ist. Also wird  $\omega_1$  durch  $\varphi$  in eine Potenz von  $\omega_2$  transformiert:

$$(29, 1) \quad \varphi \omega_1 \varphi^{-1} = \omega_2^g.$$

Nun hat  $\varphi \omega_1 \varphi^{-1}$  ebenso wie  $\omega_1$  die Ordnung  $l_1$ , und  $\omega_2^g$  hat eine in der Ordnung  $l_2$  von  $\omega_2$  aufgehende Ordnung. Also geht  $l_1$  in  $l_2$  auf. In dieser Betrachtung kann man die Rollen von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  vertauschen, also geht auch  $l_2$  in  $l_1$  auf, und man erhält  $l_2 = l_1$ . Dieser gemeinsame Wert kann dann nach § 24 weder 2 noch 3 sein. Man hat also

$$(29, 2) \quad l_1 = l_2 \geq 4.$$

Aus § 25 geht hervor, dass das Element  $\tau'' = \tau' \tau$  nur dann bei der Konstruktion des Polygonnetzes eine Sonderstellung einnahm, wenn seine Ordnung  $\lambda'' \leq 3$  war. Wenn nun  $\tau''$  und  $\tau$  oder  $\tau''$  und  $\tau'$  zu konjugierten Untergruppen von  $T$  gehören, hat man nach (29, 2)  $\lambda'' \geq 4$ , und in diesem Fall konnte man, wie aus § 25 hervorgeht,  $\tau''$  an Stelle von  $\tau$  oder  $\tau'$  als eine der beiden Erzeugenden von  $T'$  wählen, und das Polygonnetz  $\bar{N}$  und damit auch  $N$  in der zuerst behandelten Form erhalten. Man kann daher die ursprüngliche Benennung  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\tau''$  der drei primären Elemente endlicher Ordnung von  $T'$ , zu der wir jetzt wieder zurückkehren, so gewählt denken, dass es die Elemente  $\tau$  und  $\tau'$  sind, die in  $T$  zu konjugierten maximalen zyklischen Untergruppen gehören. Man hat dann entsprechend (29, 2)

$$(29, 3) \quad \lambda = \lambda' \geq 4.$$

In der regularisierten Darstellung  $\bar{T}'$  von  $T'$  dreht die elliptische Substitution  $\bar{\tau}$  rechts herum um ihren Drehpunkt einen Winkel der Grösse  $\frac{2\pi}{\lambda}$ . Ist  $\bar{Q}$  ein Punkt von  $\bar{E}$ , so liegen also die Punkte  $\bar{Q}, \bar{\tau}\bar{Q}, \bar{\tau}^2\bar{Q}, \dots, \bar{\tau}^{\lambda-1}\bar{Q}$  in dieser Reihenfolge rechtsläufig auf  $\bar{E}$ . Dasselbe gilt für  $\bar{\tau}'$  mit demselben Wert  $\lambda$  wegen (29, 3). Wegen der Erhaltung der zyklischen Ordnung auf  $\bar{E}$  und  $E$  bei der Isomorphie zwischen  $\bar{T}'$  und  $T'$  liegen daher, wenn  $Q$  ein Punkt von  $E$  ist, die Punkte  $Q, \tau Q, \tau^2 Q, \dots, \tau^{\lambda-1} Q$  und ebenso  $Q, \tau' Q, \tau'^2 Q, \dots, \tau'^{\lambda-1} Q$  in dieser Reihenfolge auf  $E$ , beide Male im gleichen Umlaufssinn. Das gleiche gilt dann bei  $\varphi\tau\varphi^{-1}$  für beliebiges  $\varphi$  aus  $T$ , da  $\varphi$  die zyklische Ordnung und Orientierung auf  $E$  erhält. Wählt man nun  $\varphi$  entsprechend (29, 1), so muss daher  $\varrho = 1$  werden, und man erhält

$$(29, 4) \quad \varphi\tau\varphi^{-1} = \tau'.$$

Dabei gehört  $\varphi$  nicht zu  $T'$ . Weiter folgt, dass

$$(29, 5) \quad \varphi\tau'\varphi^{-1} = \varphi^2\tau\varphi^{-2} = \tau_1$$

in  $T'$  mit  $\tau$  konjugiert ist, da  $\varphi^2$  zu  $T'$  gehört.

Die Transformation mit  $\varphi$  erzeugt eine isomorphe Abbildung  $J$  des Normalteilers  $T'$  von  $T$  in sich. Diese ist durch die Abbildung

$$(29, 6) \quad J(\tau) = \tau', \quad J(\tau') = \tau_1$$

der benutzten Erzeugenden von  $T'$  gegeben.

Der Automorphismus  $J$  von  $T'$  ergibt durch die isomorphe Abbildung von  $T'$  auf  $\bar{T}'$  in  $\bar{T}'$  einen Automorphismus, den man ebenfalls mit  $J$  bezeichnen kann. Man hat dann entsprechend (29, 6)

$$(29, 7) \quad J(\bar{\tau}) = \bar{\tau}', \quad J(\bar{\tau}') = \bar{\tau}_1,$$

wobei  $\bar{\tau}_1$  dem  $\tau_1$  bei der Isomorphie zwischen  $\bar{T}'$  und  $T'$  entspricht. Für  $\bar{T}'$  hat man zunächst kein dem  $\varphi$  entsprechendes Element, da  $\bar{T}'$  ja einstweilen in keiner umfassenderen Gruppe enthalten ist, aber da  $\varphi^2$  zu  $T'$  gehört, entspricht ihm ein Element von  $\bar{T}'$ , das wir etwa mit  $(\bar{\varphi}^2)$  bezeichnen. Nun hat man entsprechend (29, 5)

$$(29, 8) \quad \bar{\tau}_1 = (\bar{\varphi}^2) \bar{\tau} (\bar{\varphi}^2)^{-1}.$$

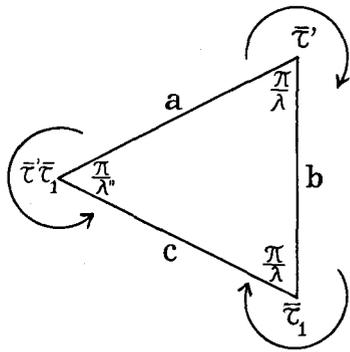


Fig. 30.

Dabei hat auch  $\bar{\tau}_1$  die Ordnung  $\lambda$  und dreht ebenso wie  $\bar{\tau}$  rechts herum einen Winkel der Grösse  $\frac{2\pi}{\lambda}$ . Nach (29, 7) kann man  $\bar{T}'$  auch durch  $\bar{\tau}'$  und  $\bar{\tau}_1$  erzeugen. Man bezeichne nun den Drehpunkt einer elliptischen Substitution durch dasselbe Symbol wie diese Substitution selbst. Dann kann man die Bewegungsgruppe  $\bar{T}'$  folgendermassen herstellen: Man verbindet (Fig. 30)  $\bar{\tau}'$  und  $\bar{\tau}_1$  und trägt in beiden Punkten nach

derselben Seite den Winkel  $\frac{\pi}{\lambda}$  ab. Dann schneiden die freien Schenkel einander; denn bezeichnet man wie in der Figur die drei Geraden durch  $a, b, c$  und die Spiegelungen in ihnen durch dasselbe Symbol, so ist  $\bar{\tau}' = ab$  und  $\bar{\tau}_1 = bc$ , also  $\bar{\tau}' \bar{\tau}_1 = ac$ , und nach (29, 7) ist  $\bar{\tau}' \bar{\tau}_1 = J(\bar{\tau} \bar{\tau}')$ , hat also wie  $\bar{\tau} \bar{\tau}' = \bar{\tau} \bar{\tau}'' \bar{\tau}^{-1}$  die endliche Ordnung  $\lambda''$ . Im Schnittpunkt  $\bar{\tau}' \bar{\tau}_1$  entsteht also der Winkel  $\frac{\pi}{\lambda''}$ . Das Dreieck  $\bar{\tau}', \bar{\tau}_1, \bar{\tau}' \bar{\tau}_1$  hat also dieselbe Winkel wie das Dreieck  $\bar{\tau}', \bar{\tau}, \bar{\tau}''$  (d. h. das Dreieck  $BAC$  der Fig. 25), ist also mit diesem kongruent und geht aus ihm durch eine Drehung um den gemeinsamen Eckpunkt  $\bar{\tau}'$  hervor. Diese Drehung kann indessen nur eine Potenz von  $\bar{\tau}'$  sein. Denn der Punkt  $\bar{\tau}_1$  ist nach (29, 8) Bild des Punktes  $\bar{\tau}$  bei einem Element  $(\bar{\varphi}^2)$  von  $\bar{T}'$ , und  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}_1$  haben wegen der Kongruenz der Dreiecke den gleichen Abstand von dem Punkt  $\bar{\tau}'$ . Diejenigen mit dem Punkt  $\bar{\tau}$  bezgl.  $\bar{T}'$  äquivalenten Punkte, welche von dem Punkt  $\bar{\tau}'$  denselben Abstand haben wie  $\bar{\tau}$ , sind nach der Struktur des Polygonnetzes nur die Mittel-

punkte der  $\lambda$ -Ecke, welche mit dem zu  $\bar{\tau}'$  gehörigen  $\lambda$ -Eck eine Ecke gemeinsam haben. Also ist

$$(\bar{\varphi}^2) = \bar{\tau}'^\delta$$

für ein gewisses  $\delta$ , und daher zufolge der Isomorphie zwischen  $\bar{T}'$  und  $T'$

$$(29, 9) \quad \varphi^2 = \tau'^\delta.$$

Führt man nun das ebenfalls nicht zu  $T'$  gehörige Element

$$\sigma = \tau'^{-\delta} \varphi$$

an Stelle von  $\varphi$  ein, so hat man einerseits wegen (29, 4)

$$(29, 10) \quad \sigma \tau \sigma^{-1} = \tau'^{-\delta} \varphi \tau \varphi^{-1} \tau'^\delta = \tau'$$

andererseits wegen (29, 5) und (29, 9)

$$(29, 11) \quad \sigma \tau' \sigma^{-1} = \tau'^{-\delta} \varphi \tau' \varphi^{-1} \tau'^\delta = \tau'^{-\delta} \tau_1 \tau'^\delta = \varphi^{-2} \tau_1 \varphi^2 = \tau.$$

Dann ist nach (29, 10) und (29, 11)

$$\sigma t \sigma^{-1} = \sigma \tau'^{-1} \tau \sigma^{-1} = \tau^{-1} \tau' = t^{-1},$$

also nach § 7 die Achse  $A$  von  $t$  amphidrom und

$$(29, 12) \quad \sigma^2 = 1.$$

Ferner hat man wegen (29, 12)

$$\tau'' = \tau' \tau = \sigma \tau \sigma^{-1} \tau = \sigma \tau \sigma \tau = (\sigma \tau)^2.$$

Das Element  $\tau''$  ist also nicht primär in  $T$ , sondern Quadrat des Elements  $\sigma \tau$  der Ordnung  $2\lambda''$ . Dies wiederum ist primär in  $T$ , denn spätestens das Quadrat eines primären Elements von  $T$  gehört zu  $T'$ . Mit den Bezeichnungen von § 27 hat man daher für  $\alpha''$  den Wert 2. Dagegen sind  $\tau$  und  $\tau'$  auch in  $T$  primär. Denn wegen  $\lambda = \lambda'$  und  $\zeta_3 = 2$  kann man (27, 6) in der Form

$$1 - \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda''} = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\alpha \lambda} - \frac{1}{2\lambda''} - \frac{1}{2} \right] = 1 - \frac{2}{\alpha \lambda} - \frac{1}{\lambda''}$$

schreiben, und daraus folgt  $\alpha = 1$ .

Für die Gruppe  $T'$  hat man, wie man aus der regularisierten Darstellung  $\bar{T}'$  abliest, die abstrakte Darstellung

$$(T'): \quad \begin{cases} \text{Erzeugende: } \tau, \tau' \\ \text{Definierende Relationen: } \tau^\lambda = \tau'^\lambda = I, (\tau' \tau)^{\lambda''} = I. \end{cases}$$

Die Gruppe  $T$ , die  $T'$  mit dem Index 2 umfasst, erhält man, indem man das ausserhalb  $T'$  gelegene Element  $\sigma$  als neue Erzeugende hinzufügt. Man hat dann zunächst die Darstellung

$$(T): \quad \begin{cases} \text{Erzeugende: } \tau, \tau', \sigma \\ \text{Definierende Relationen: } \tau^\lambda = \tau'^\lambda = I, (\tau' \tau)^{\lambda''} = I, \\ \sigma^2 = I, \sigma \tau \sigma^{-1} = \tau', \sigma \tau' \sigma^{-1} = \tau. \end{cases}$$

Denn mittels dieser Relationen kann man jedes Potenzprodukt von  $\tau$ ,  $\tau'$  und  $\sigma$  in der Form eines Potenzprodukts von  $\tau$  und  $\tau'$  allein oder eines solchen gefolgt von einem Faktor  $\sigma$  umformen; und für Potenzprodukte in  $\tau$  und  $\tau'$  allein ist das Relationensystem ja vollständig.

Aus dieser Darstellung kann man nun sofort die Erzeugende  $\tau'$  eliminieren und erhält dann die Darstellung

$$(T): \quad \begin{cases} \text{Erzeugende: } \tau, \sigma \\ \text{Definierende Relationen: } \tau^\lambda = \sigma^2 = (\sigma \tau)^{2\lambda''} = I. \end{cases}$$

Hiernach sieht man nun unmittelbar, dass man eine mit  $T$  isomorphe Gruppe  $\bar{T}$  aus der früheren Darstellung von  $\bar{T}'$  durch das metrisch reguläre Netz  $\bar{N}$  erhalten kann. Man führt eine Halbdrehung  $\sigma$  um den Schnittpunkt  $\bar{\tau} \bar{P}$  der Achsen  $\bar{A}$  und  $\bar{\tau} \bar{A}$  (vgl. Fig. 25 und 26) als neue Erzeugende hinzu. Wegen  $\lambda = \lambda'$  kommt  $\bar{N}$  dabei mit sich zur Deckung. Denn zu  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\tau}'$  gehören reguläre  $\lambda$ -Ecke mit gleich grossem Winkel, und diese sind daher kongruent, sodass (Fig. 26)  $\bar{\tau} \bar{P}$  der Mittelpunkt von  $\bar{P}$  und  $\bar{\tau} \bar{P}$  wird. Zu  $\bar{\tau}''$  gehört ein reguläres  $2\lambda''$ -Eck, und dies wird durch das Element  $\sigma \tau$  der Ordnung  $2\lambda''$  um einen Schritt in sich gedreht. Die Bewegungsgruppe  $\bar{T}$  von  $\bar{N}$  in sich, die durch  $\bar{\tau}$  und  $\bar{\sigma}$  erzeugt wird, entspricht daher der obigen Darstellung von  $T$ .

Mittels der früher konstruierten topologischen Abbildung  $\mathcal{P}$  von  $\bar{D}$  auf  $D$  hat man daher  $T$  in der Form  $T = \mathcal{P} \bar{T} \mathcal{P}^{-1}$  als Gruppe topologischer Abbildungen von  $D$  in sich dargestellt. Damit ist die gestellte Aufgabe auch in dem als »Spezialfall« bezeichneten Falle gelöst.

### 30. Nicht-Existenz von mod $T$ einfachen Achsen im Spezialfall.

Zum Abschluss soll noch gezeigt werden, dass es in dem in § 23 als Spezialfall bezeichneten Falle keine mod  $T$  einfache Achse gibt, wie dort schon behauptet wurde, dass also die beiden im Satz von § 23 genannten Fälle einander ausschliessen.

Da es auch im Spezialfalle eine Abbildung der endlichen Ordnung  $n$  in der betrachteten Abbildungsklasse gibt, gibt es eine Modulfläche für die Abbildung, und die Abbildung kann als Blättervertauschung der Fläche über der Modulfläche beschrieben werden. Die Modulfläche ist, wie die Fläche selbst, geschlossen. Wegen  $\varepsilon = 0$  und  $w = 3$  (siehe § 27) hat die Modulfläche den Zusammenhang der Kugel, und es liegen drei Verzweigungsstellen auf ihr. Eine mod  $T$  einfache Achse ist ja nun eine solche, die durch keine ihrer bei  $T$  äquivalenten geschnitten wird. Ihr entspricht auf der Fläche eine geschlossene geodätische Linie, die erstens selbst einfach, d. h. ohne Doppelpunkte ist, da eine mod  $T$  einfache Achse ja a fortiori mod  $F$  einfach ist, und die auch ihre bei Blättervertauschungen entstehenden Bilder nicht trifft. Das heisst aber, dass die Spur der geschlossenen geodätischen Linie auf der Modulfläche auch auf dieser eine einfach geschlossene Linie ist. Eine einfach geschlossene Linie auf einer Kugel mit drei Verzweigungspunkten zerlegt aber die Verzweigungspunkte in  $1 + 2$  oder in  $0 + 3$ . In beiden Fällen begrenzt sie auch auf der Überlagerungsfläche ein Elementarflächenstück, denn auch ein Elementarflächenstück mit einem Verzweigungspunkt endlicher Ordnung hat ja nur Elementarflächenstücke als Überlagerungsgebilde. Kurven der Fläche, die auf der Modulfläche eine einfache Spur haben, sind also homotop Null, und es kommen somit keine geschlossenen geodätischen Linien, die Achsen entsprechen, unter ihnen vor.

