

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME
D'UNE FONCTION MONOGÈNE
(Troisième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Après la première note imprimée dans ce journal (15 mars 1899), nous avons publié sur le même sujet dans les Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris (15 mai 1899) une communication¹ où à nos théorèmes 1 et 2 nous en avons ajouté un nouveau.

¹ A notre première note ainsi qu'à cet article se rattachent les travaux suivants:
EMILE BOREL. *Addition au mémoire sur les séries divergentes.* (Annales de l'école normale. Série 3. Tome 16. Page 132.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique.* (Comptes rendus etc. 23 mai 1899.)

EMILE BOREL. *Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul.* (Comptes rendus etc. 23 mai 1899.)

EMILE PICARD. *Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy.* (Comptes rendus etc. 5 juin 1899.)

E. PHRAGMÉN. *Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler.* (Comptes rendus etc. 12 juin 1899.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz.* (Comptes rendus etc. 19 juin 1899.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes.* (Comptes rendus etc. 3 juillet 1899.)

L. LEAU. *Représentation des fonctions par des séries de polynômes.* (Bulletin de la société mathématique de France, t. 27. Page 194—200.)

PAUL PAINLEVÉ. *Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables.* (Comptes rendus etc. 10 juillet 1899.)

EMILE PICARD. *Lectures on Mathematics.* (Clark University Decennial Celebration, 1899) page 246.

Nous avons en outre, dans la seconde note de ce journal, appris à former toute une classe d'expressions limite qui embrasse la série de TAYLOR et dont chaque cas possède une étoile de convergence. Cette étoile est inscrite dans l'étoile principale des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$ et elle est circonscrite au cercle de ces constantes. En augmentant suffisamment un certain nombre entier positif n qui est intimement lié à l'étoile, on fait tendre celle-ci indéfiniment vers l'étoile principale. Pour $n = 1$ elle coïncide avec le cercle. En faisant croître n au delà de toute limite, on obtient une expression limite ayant l'étoile principale même pour étoile de convergence.

Dans le nouveau théorème des Comptes rendus nous avons affirmé l'existence d'une autre classe d'expression limites ayant cette même propriété. Au lieu du nombre entier n il y entre un paramètre réel et continu α de sorte qu'on peut faire varier l'étoile de convergence d'une manière continue entre le cercle et l'étoile principale.

Nous voulons dans cette troisième note montrer comment on peut former ces nouvelles expressions limite. Nous établirons en même temps deux nouveaux théorèmes et nous formerons une nouvelle expression limite pour laquelle l'étoile principale A des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$ est une étoile de convergence.

Comme dans la première note, soit \mathcal{E} une étoile quelconque de centre a . Nous définirons par rapport à \mathcal{E} une nouvelle étoile $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ de la manière suivante.

Considérons la représentation conforme définie par la relation

$$(1) \quad v = e^{\int_0^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta \frac{du}{u}}$$

EMILE BOREL. *Sur la généralisation du prolongement analytique.* (Comptes rendus etc. 23 avril 1900.)

LE ROY. *Sur les séries divergentes.* (Comptes rendus etc. 14 mai 1900.)

Voir encore mes articles:

Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione monogena. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 34. 23 Aprile 1899.

On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function. Cambridge Philosophical Transactions. Vol. 18.

Un mémoire développé sur le même sujet par M. E. BOREL paraîtra prochainement dans ce journal sous le titre: *Sur les séries de polynômes et de fonctions rationnelles.*

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 207

où β désigne une quantité réelle remplissant la condition

$$(2) \quad 0 \leq \beta < 1.$$

Faisons décrire à u une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

Posons, pour $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$u = e^{i\varphi}.$$

On aura

$$\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \frac{du}{u} = -\sin \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi + i \cos \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi.$$

Posons encore, pour $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$u = e^{-i\varphi}.$$

On aura

$$\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \frac{du}{u} = -\sin \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi - i \cos \beta \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi.$$

On a encore¹

$$\int_0^\pi \left(\cotg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi = \int_0^\pi \left(\tg \frac{\varphi}{2} \right)^\beta d\varphi = \frac{\pi}{\cos \beta \frac{\pi}{2}},$$

Par suite, quand u parcourt à partir de $u = 1$ jusqu'à $u = -1$ la partie supérieure de la circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, la quantité

$$v = Re^{i\varphi}$$

décriera un arc de spirale logarithmique défini par l'équation

$$R = e^{-\tg \beta \frac{\pi}{2} \cdot \varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

¹ Voir p. ex. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Calcul intégral, page 125.

Cette spirale logarithmique a pour centre le point $v = 0$, et coupe l'axe des v réels aux deux points:

$$v = 1 \quad \text{et} \quad v = -e^{-\pi \operatorname{tg} \beta \frac{\pi}{2}}.$$

D'autre part, quand u parcourt à partir de $u = 1$ jusqu'à $u = -1$ la partie inférieure de la même circonférence,

$$v = Re^{i\varphi}$$

décrira un nouvel arc de spirale

$$R = e^{\operatorname{tg} \beta \frac{\pi}{2} \cdot \varphi}; \quad 0 \geq \varphi \geq -\pi;$$

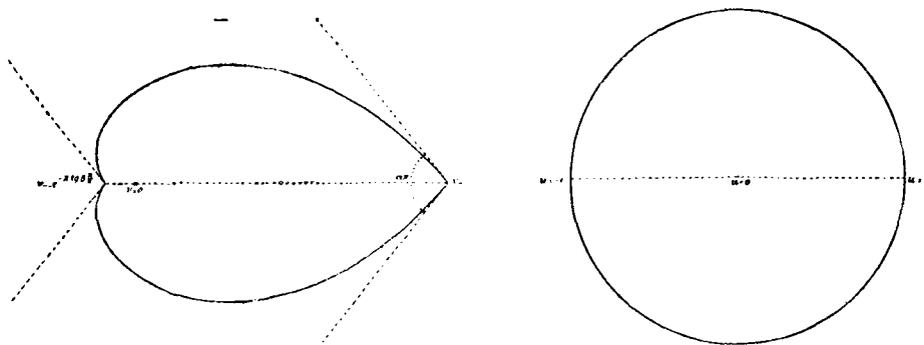
symétrique au premier par rapport à l'axe réel.

La relation (1) peut s'écrire:

$$(3) \quad v = ue^{\int_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

On voit donc immédiatement que l'intérieur du cercle correspond à l'intérieur de la figure cordiforme limitée par les deux arcs de spirale, de manière que le centre du cercle $u = 0$ correspond au centre de la figure cordiforme $v = 0$. Mettons

$$(4) \quad \beta = 1 - \alpha.$$



Les deux arcs limitant la figure cordiforme se coupent au point $v = 1$ sous l'angle intérieur $\alpha\pi$ et au point $v = -e^{-\pi \operatorname{tg} \beta \frac{\pi}{2}}$ sous l'angle intérieur $(2 - \alpha)\pi$.

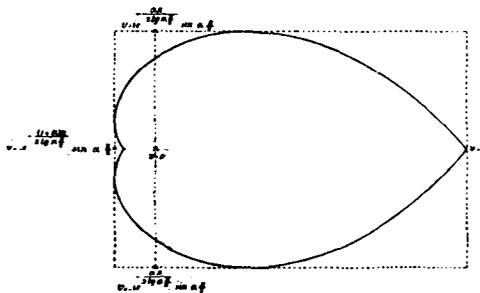
Nous ferons encore la remarque suivante. La figure cordiforme est située à l'intérieur d'un rectangle dont les deux côtés passant par les points

$$v = -e^{-\frac{(1+\alpha)\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad v = +1$$

sont perpendiculaires à l'axe réel et dont les deux autres côtés passant par

$$v = ie^{-\frac{2\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad v = -ie^{-\frac{2\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2}$$

sont parallèles à ce même axe.



Remarquons d'ailleurs qu'au point où la tangente verticale touche la figure en question le rayon vecteur, lorsque α tend vers zéro, se rapproche indéfiniment de la verticale menée par le centre.

On voit qu'on peut, en faisant décroître suffisamment la constante α , faire tendre indéfiniment le contour de la figure précitée vers la ligne droite menant de $v=0$ à $v=1$. Nous avons reproduit (planche I) trois cas différents de la figure cordiforme.

Il est important pour ce qui suit de connaître le développement de v^m suivant les puissances positives de u , m étant un entier positif.

Posons

$$(5) \quad v = ue^{-\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}},$$

$$(6) \quad e^{m \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} = \left[1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{|1|} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{|2|} u^2 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{|\lambda|} u^\lambda + \dots \right].$$

Nous verrons que $h_\lambda^{(m)}(\beta)$ est une fonction entière rationnelle de β de degré λ qui s'annule pour $\beta = 0$. C'est une fonction impaire, quand λ est un nombre impair, et c'est une fonction paire quand λ est un nombre pair. Le coefficient de β^μ ($\mu = 1, 2, \dots, \lambda$) est un polynôme en m de degré μ à coefficients rationnels positifs qui s'annule pour $m = 0$.

Différentions en effet (6) par rapport à u ; on obtient:

$$\begin{aligned} m \left(1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{1} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{2} u^2 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\lambda} u^\lambda + \dots \right) \cdot \left(\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right) \\ = h_1^{(m)}(\beta) \cdot u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{1} u^2 + \frac{h_3^{(m)}(\beta)}{2} u^3 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\lambda} u^\lambda + \dots \end{aligned}$$

Par suite en faisant

$$(7) \quad \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] = g_1(\beta)u + g_2(\beta)u^2 + g_3(\beta)u^3 + g_4(\beta)u^4 + \dots$$

on aura

$$(8) \quad \frac{1}{\lambda-1} h_\lambda^{(m)}(\beta) \\ = m \left(\frac{1}{\lambda-1} h_{\lambda-1}^{(m)}(\beta) g_1(\beta) + \frac{1}{\lambda-2} h_{\lambda-2}^{(m)}(\beta) g_2(\beta) + \dots + \frac{1}{1} h_1^{(m)}(\beta) + g_\lambda(\beta) \right).$$

En différentiant (7) ν fois par rapport à β on aura:

$$\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \left(\log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = \sum_{(\lambda)} \frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d\beta^\nu} u^\lambda$$

et par conséquent:

$$(9) \quad \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = \sum_{(\lambda)} \frac{d^{(\nu)} g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu} u^{\lambda-\nu}.$$

On a:

$$\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu = 1 + u\mathfrak{F}(u); \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

D'où

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu} = 0; & \nu > \lambda \\ \frac{d^\lambda g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\lambda} = 1. \end{cases}$$

par une formule de récurrence très simple. En différentiant (12) par rapport à u , on a

$$(\nu + 1) \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu \cdot \frac{1}{1-u^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (\nu + 1 + 2\mu)(2\mu, \nu + 1) \cdot u^{2\mu}.$$

D'où

$$\begin{aligned} & (\nu + 1) \left(\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right)^\nu \\ &= \sum [(\nu + 1 + 2\mu)(2\mu, \nu + 1) - (\nu - 1 + 2\mu)(2\mu - 2, \nu + 1)] u^{2\mu}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nu + 1 + 2\mu)(2\mu, \nu + 1) = (\nu + 1)(2\mu, \nu) + (\nu - 1 + 2\mu)(2\mu - 2, \nu + 1) \\ (0, \nu + 1) = 1, \quad (2\mu, 1) = \frac{1}{2\mu + 1} \\ \mu = 1, 2, \dots, \infty; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

En faisant le calcul des sept premières fonctions $g_\lambda(\beta)$ et $h_\lambda^{(m)}(\beta)$ on trouve:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1(\beta) = 2\beta, \\ g_2(\beta) = \frac{1}{2}(2\beta)^2, \\ g_3(\beta) = \frac{1}{3}(2\beta)^3 + \frac{1}{3}(2\beta), \\ g_4(\beta) = \frac{1}{4}(2\beta)^4 + \frac{1}{3}(2\beta)^2, \\ g_5(\beta) = \frac{1}{5}(2\beta)^5 + \frac{1}{6}(2\beta)^3 + \frac{1}{5}(2\beta), \\ g_6(\beta) = \frac{1}{6}(2\beta)^6 + \frac{1}{18}(2\beta)^4 + \frac{23}{90}(2\beta)^2, \\ g_7(\beta) = \frac{1}{7}(2\beta)^7 + \frac{1}{72}(2\beta)^5 + \frac{7}{45}(2\beta)^3 + \frac{1}{7}(2\beta), \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & h_1^{(m)}(\beta) = m \cdot (2\beta), \\
 & h_2^{(m)}(\beta) = \left(m^2 + \frac{1}{2}m\right) \cdot (2\beta)^2, \\
 & h_3^{(m)}(\beta) = \left(m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{3}m\right) \cdot (2\beta)^3 + \frac{2}{3} \cdot m \cdot (2\beta), \\
 & h_4^{(m)}(\beta) = \left(m^4 + 3m^3 + \frac{25}{12}m^2 + \frac{1}{4}m\right) \cdot (2\beta)^4 + 8\left(\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{4}m\right) \cdot (2\beta)^2, \\
 & h_5^{(m)}(\beta) = \left(m^5 + 5m^4 + \frac{85}{12}m^3 + \frac{35}{12}m^2 + \frac{1}{5}m\right) \cdot (2\beta)^5 \\
 & \quad + 20\left(\frac{1}{3}m^3 + \frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{5}m\right) \cdot (2\beta)^3 + \frac{24}{5}m \cdot (2\beta), \\
 (17) \quad & h_6^{(m)}(\beta) = \left(m^6 + \frac{15}{2}m^5 + \frac{215}{12}m^4 + \frac{125}{8}m^3 + \frac{1507}{360}m^2 + \frac{1}{6}m\right) \cdot (2\beta)^6 \\
 & \quad + 40\left(\frac{1}{3}m^4 + \frac{5}{4}m^3 + \frac{391}{360}m^2 + \frac{1}{6}m\right) \cdot (2\beta)^4 \\
 & \quad + 184\left(\frac{187}{1035}m^3 + \frac{1}{6}m\right) \cdot (2\beta)^2, \\
 & h_7^{(m)}(\beta) = \left(m^7 + \frac{21}{2}m^6 + \frac{455}{12}m^5 + \frac{455}{8}m^4 + \frac{12187}{360}m^3 + \frac{371}{60}m^2 + \frac{1}{7}m\right) \\
 & \quad \times (2\beta)^7 + 70\left(\frac{1}{3}m^5 + 2m^4 + \frac{611}{180}m^3 + \frac{101}{60}m^2 + \frac{1}{7}m\right) \cdot (2\beta)^5 \\
 & \quad + 784\left(\frac{53}{315}m^3 + \frac{167}{420}m^2 + \frac{1}{7}m\right) \cdot (2\beta)^3 + \frac{720}{7}m \cdot (2\beta), \\
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

On pourra employer comme moyen de contrôle la formule

$$(18) \quad \frac{h_\lambda^{(m)}(1)}{|\lambda} = [(1-u)^{-2m}]_{u, \lambda} = \frac{2m(2m+1) \dots (2m+\lambda-1)}{|\lambda}.$$

Nous avons obtenu les coefficients des polynômes $g_l(\beta)$ par une formule de récurrence. Mais on peut aussi donner facilement une expression explicite de ces polynômes. En s'appuyant sur les formules

$$(4) \quad \beta = 1 - \alpha,$$

$$(2) \quad 0 \leq \beta < 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta} \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} = \frac{1}{2\beta} \int_0^u \frac{(1+u)^\beta - (1-u)^\beta}{(1-u)^\beta} \frac{du}{u} \\ &= \int_0^u \frac{du}{(1-u)^\beta} \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3} u^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{|5} u^4 + \dots \right] \\ &= u + \frac{\beta}{|1} \cdot \frac{u^2}{2} + \left[\frac{\beta(\beta+1)}{|2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3} \right] \frac{u^3}{3} + \left[\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{|3} + \frac{\beta}{|1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3} \right] \frac{u^4}{4} \\ &+ \dots \\ &+ \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-1)}{|2l} + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-3)}{|2l-2} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3} \right. \\ &+ \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-5)}{|2l-4} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{|5} + \dots + \frac{\beta(\beta+1)}{|2} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+2l-3)}{|2l-1} \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{|2l+1} \right] \frac{u^{2l+1}}{2l+1} \\ &+ \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l)}{|2l+1} + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-2)}{|2l-1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-4)}{|2l-3} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{|5} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{|3} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-3)}{|2l-1} + \frac{\beta}{|1} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{|2l+1} \right] \frac{u^{2l+2}}{2l+2}. \end{aligned}$$

En comparant avec (7) on aura donc

$$(19) \left\{ \begin{aligned} g_{2l+1}(\beta) &= 2\beta \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-1)}{|2l} + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-3)}{|2l-2} \cdot \frac{a(a+1)}{|3} \right. \\ &\quad + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-5)}{|2l-4} \cdot \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{|5} + \dots \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)}{|2} \cdot \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+2l-3)}{|2l-1} + \frac{a(a+1)\dots(a+2l-1)}{|2l+1} \right], \\ g_{2l+2}(\beta) &= 2\beta \left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l)}{|2l+1} + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-2)}{|2l-1} \cdot \frac{a(a+1)}{|3} \right. \\ &\quad + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-4)}{|2l-3} \cdot \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{|5} + \dots \\ &\quad \left. + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{|3} \cdot \frac{a(a+1)\dots(a+2l-3)}{|2l-1} + \frac{\beta}{|1} \cdot \frac{a(a+1)\dots(a+2l-1)}{|2l+1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Revenons à la formule:

$$(5) \quad v = ue^{-\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}}.$$

Nous voyons que la constante

$$(20) \quad \int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u},$$

qui dépend du choix de β , joue un rôle important dans la représentation conforme définie par l'égalité

$$(1) \quad \dots \dots \dots v = e^{\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta \frac{du}{u}} \dots \dots \dots$$

Il y aurait donc intérêt à trouver une nouvelle expression en β pour cette constante. Une telle expression s'obtient facilement de la manière suivante:

On a :

$$\frac{1}{2\beta} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{|3} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-u)^\beta} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{|5} \int_0^1 \frac{u^4}{(1-u)^\beta} + \dots$$

En désignant par $B(a, b)$ l'intégrale Eulerienne de première espèce, on a

$$\int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\beta} = B(1, \alpha),$$

$$\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-u)^\beta} = B(3, \alpha),$$

$$\int_0^1 \frac{u^4 du}{(1-u)^\beta} = B(5, \alpha),$$

.....

A cause des formules: ¹

$$B(1, \alpha) = \frac{1}{\alpha},$$

$$B(3, \alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2},$$

$$B(5, \alpha) = \frac{1.2.3.4}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)},$$

.....

¹ Voir par ex. chap. 14 du Cours de M. HERMITE rédigé en 1882 par ANDOYER. Quatrième édition 1891.

on aura l'expression demandée:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+n}{1-n} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{dn}{n} &= 2\beta \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3(\alpha+2)} + \frac{1}{5(\alpha+4)} + \dots \right] \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + n} - \frac{1}{\frac{1}{2}\alpha + n} \right) = 2 \left(\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)} \right). \end{aligned} \right.$$

Ces préliminaires posés, nous donnerons la définition de l'étoile $\mathfrak{E}^{i\alpha}$ se rapportant à l'étoile \mathfrak{E} qui est elle-même une étoile quelconque de centre a .

Posons

$$(22) \quad f(u|\alpha) = Ke^0 \int_0^u \left[\left(\frac{1+n}{1-n} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{dn}{n}$$

où

$$(4) \quad \alpha = 1 - \beta$$

doit vérifier les inégalités

$$(2) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

et où K désigne une constante indépendante de u que nous allons déterminer d'une manière convenable. Fixons le vecteur, soit l , entre a et x et posons

$$(23) \quad \frac{z-a}{x-a} = f(u|\alpha).$$

Quand u décrit une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, z décrira autour de l'axe de symétrie l une figure cordiforme comme celle que nous venons d'étudier. L'axe de symétrie est coupé par la figure cordiforme aux deux points

$$\begin{aligned} z &= a + Ke^0 \int_0^1 \left[\left(\frac{1+n}{1-n} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{dn}{n} \cdot (x-a), \\ z &= a - Ke^0 \int_0^1 \left[\left(\frac{1-n}{1+n} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{dn}{n} \cdot (x-a) \end{aligned}$$

qui correspondent aux points $u = 1$ et $u = -1$ de la circonférence. L'angle intérieur de la figure cordiforme est égal à $\alpha\pi$ au premier point et à $(2 - \alpha)\pi$ au second point.

Soit maintenant r une quantité positive plus petite que l'unité. Mettons

$$(24) \quad K = \frac{1}{r} e^{-\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

En faisant décrire à u un cercle de rayon r concentrique au premier, z décrira une figure que nous désignerons par Z symétrique par rapport à l , située à l'intérieur de la figure cordiforme, et qui se rapproche indéfiniment de celle-ci en même temps que r se rapproche indéfiniment de l'unité. Le vecteur l est rencontré par le contour de Z aux deux points

$$(25) \quad \begin{cases} z = x, \\ z = a - e^{-\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{-\frac{\alpha}{2}} \right] \frac{du}{u}} \cdot (x - a) \end{cases}$$

correspondants aux points $u = r$ et $u = -r$ sur la circonférence du cercle de rayon r .

Soit maintenant \mathfrak{G} une étoile quelconque ayant pour centre a . La figure cordiforme ayant pour axe l étant située à l'intérieur d'un rectangle dont les deux côtés perpendiculaires à l coupent l aux points ¹

$$z = a + Ke^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot (x - a),$$

$$z = a + Ke^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] \frac{du}{u}} e^{-\frac{1+\alpha}{2+4\alpha} \frac{\pi}{2}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot (x - a)$$

¹ Voir page 209.

et dont les deux autres côtés parallèles à l passent par les points

$$z = a + iKe^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{-\frac{a\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot (x - a),$$

$$z = a - iKe^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}} \cdot e^{-\frac{a\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} \cdot \sin \alpha \frac{\pi}{2} \cdot (x - a),$$

on voit qu'en prenant x suffisamment rapproché de a la figure Z fera toujours partie de \mathfrak{G} .

Soit maintenant $|\bar{x} - a|$ la limite supérieure des valeurs $|x - a|$ pour lesquelles la figure correspondante Z fait partie de \mathfrak{G} . Nous désignerons par $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$ l'étoile qu'on obtient en faisant tourner l une fois autour de a et qui a pour contour l'ensemble des points \bar{x} .

Comme nous avons négligé de faire une étude approfondie de la forme de Z reste la question de savoir si, x étant un point sur l plus rapproché du centre a que ne l'est le point \bar{x} , il ne serait pas possible que la figure Z correspondante ne fasse partie de \mathfrak{G} . On voit facilement que ce n'est pas le cas. Prenons pour $\frac{x-a}{\bar{x}-a} = \gamma$ une quantité réelle positive plus petite que l'unité, et diminuons \mathfrak{G} dans la proportion de γ de manière à obtenir \mathfrak{G}_γ . La figure Z fait partie de \mathfrak{G}_γ . L'étoile \mathfrak{G}_γ d'un autre côté fait partie de \mathfrak{G} . La figure Z fait donc elle même partie de \mathfrak{G} .

Il conviendra d'introduire encore la définition suivante. La figure Z sera appelée la figure génératrice et la fonction $f(u|\alpha)$ la fonction génératrice de l'étoile $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$.

La figure cordiforme étant inscrite dans le rectangle dont nous venons de parler on voit par des considérations tout analogues à celles qui ont été employées à la page 51 de la première note que X étant un domaine quelconque à l'intérieur de \mathfrak{G} , il est toujours possible de choisir α suffisamment petit pour que l'étoile $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$ embrasse entièrement le domaine X . Il suffit d'établir entre les constantes r et α une dépendance telle que r tende indéfiniment vers l'unité en même temps que α tend indéfiniment vers zéro. Le rectangle se rapproche alors autant qu'on veut de

la ligne droite allant de a à x et la figure génératrice Z si on diminue suffisamment la constante α se rapproche indéfiniment du rectangle.

Remarquons encore que pour $\alpha = 1$ la figure génératrice devient un cercle ayant le point a pour centre et passant par le point x , et que par conséquent l'étoile $\mathfrak{E}^{(1)}$ est le cercle concentrique à l'étoile \mathfrak{E} passant par le sommet de \mathfrak{E} le plus rapproché du centre a . Remarquons aussi que l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ pour toutes les valeurs de α reste *inscrite* dans l'étoile \mathfrak{E} . C'est une conséquence immédiate de ce que la figure génératrice, comme on le démontre aisément, est inscrite dans le cercle ayant le point a pour centre et $|x - a|$ pour rayon et de ce que le contour de l'étoile $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ passe par conséquent au moins par le sommet de \mathfrak{E} le plus rapproché de l'origine.

Prenons maintenant pour \mathfrak{E} l'étoile principale ¹ \mathcal{A} des constantes

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$$

qui sont assujetties à la condition de CAUCHY ² exigeant que la limite supérieure des valeurs limites des modules $\left| \sqrt{\frac{1}{\mu}} F^{(\mu)}(a) \right|$ soit un nombre fini.

Nous nous proposons de trouver pour $FA^{(\alpha)}(x)$ une expression analytique valable pour l'étoile $A^{(\alpha)}$ et telle que $A^{(\alpha)}$ soit une étoile de convergence de cette expression.

Nous verrons en effet qu'une telle expression existe.

Pour faciliter la recherche nous introduirons des étoiles auxiliaires définies par rapport à $A^{(\alpha)}$.

Soit r' une nouvelle quantité positive telle que

$$(26) \quad r < r' < 1.$$

En faisant décrire à u une nouvelle circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon r' , z décrira le contour d'une figure Z' symétrique par rapport à l , située en dedans de notre figure cordiforme et en dehors de la figure génératrice Z , se rapprochant indéfiniment du contour de la figure cordi-

¹ Seconde note page 200.

² Voir page 43 note 2 de ma première note.

forme quand r' se rapproche indéfiniment de l'unité et se rapprochant indéfiniment du contour de Z si r' se rapproche indéfiniment de r . Les points

$$u = -r'; \quad z = a - \frac{r'}{r} e^r \int_0^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} - \int_0^r \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{-\beta} \frac{du}{u} \cdot (x - a),$$

$$u = r'; \quad z = a + \frac{r'}{r} e^r \int_0^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} \cdot (x - a)$$

se correspondent. On sait que X étant un domaine quelconque à l'intérieur de $A^{(a)}$, il est toujours possible de former une étoile E qui embrasse entièrement X et qui soit située elle-même à l'intérieur de $A^{(a)}$ (c. f. pages 50 et 51 de la première note).

Nous désignerons par E' l'étoile formée par tous les points

$$(27) \quad x' = a + \frac{r'}{r} e^r \int_0^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u} \cdot (x - a)$$

où x appartient à E . On voit qu'en choisissant r' assez rapproché de r l'étoile E' est située entièrement à l'intérieur de $A^{(a)}$. On voit encore que r' étant suffisamment rapproché de r le domaine \bar{E}' constitué par l'ensemble de toutes les points différents qui appartiennent aux domaines Z' est situé entièrement à l'intérieur de l'étoile A . Nous appellerons g la limite supérieure de $FA(z)$ quand Z reste compris dans \bar{E}' .

Opérons maintenant sur $FA(z)$ la substitution ¹

$$(28) \quad z - a = (x - a)f(u|\alpha) = \frac{x - a}{H} \cdot \frac{u}{r} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

$$(29) \quad H = e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

x étant un point quelconque d'un domaine X à l'intérieur de $A^{(a)}$. Il est

¹ Voir (22), (23), (24).

clair que $FA(z)$ donnera ainsi une fonction de u qui est régulière pour $|u| \leq r$ et encore régulière pour $|r| \leq r'$, r' étant assujéti à la condition (26) et étant en même temps suffisamment rapproché de r . En effet lorsque u reste compris dans le domaine $|u| \leq r'$, z est une fonction régulière de u qui est représentée par une figure Z' comprise dans le domaine \bar{E}' , lequel d'après l'hypothèse faite sur r' est situé à l'intérieur de A .

Ayant donc

$$FA(z) = F(a) + \frac{1}{|1|} F^{(1)}(a) \cdot (z - a) + \frac{1}{|2|} F^{(2)}(a) \cdot (z - a)^2 + \dots,$$

si on transforme cette formule à l'aide de ¹

$$(30) \quad (z - a)^m = \left(\frac{x - a}{H}\right)^m \left(\frac{u}{r}\right)^m \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}}$$

$$= \left(\frac{x - a}{rH}\right)^m \cdot u^m \left[1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{|1|} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{|2|} u^2 + \dots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{|\lambda|} u^\lambda + \dots \right]$$

on aura

$$(31) \quad FA(z) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a) \left(\frac{u}{r}\right)^\nu$$

où

$$(32) \quad G_\nu(x - a) = \frac{r^{\nu-1} h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{|1| |\nu-1|} F^{(1)}(a) \frac{x - a}{H} + \frac{r^{\nu-2} h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{|2| |\nu-2|} F^{(2)}(a) \left(\frac{x - a}{H}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{r h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{|\nu-1| |1|} F^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x - a}{H}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{|\nu|} F^{(\nu)}(a) \left(\frac{x - a}{H}\right)^\nu.$$

La série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a) \left(\frac{u}{r}\right)^\nu$ où x appartient au domaine X situé à l'intérieur de $A^{(a)}$ convergera pour $|u| \leq r'$. Par conséquent ²

$$\left| G_\nu(x - a) \frac{1}{r^\nu} \right| \leq g(r')^{-\nu}$$

¹ Voir (6).

² WEIERSTRASS, Werke, Bd. 1, page 67.

et

$$(33) \quad |G_\nu(x - a)| \leq g\left(\frac{r}{r'}\right)^\nu.$$

La série

$$(34) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$$

est donc convergente pour chaque point à l'intérieur de $A^{(a)}$. Elle est encore uniformément convergente pour chaque domaine X à l'intérieur de $A^{(a)}$.

Nous avons vu qu'en faisant $u = r$ on obtient $z = x$. Par suite:

$$(35) \quad FA^{(a)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$$

égalité qui a lieu pour chaque point situé à l'intérieur de $A^{(a)}$.

Supposons maintenant inversement que $x = x_0$ soit une valeur pour laquelle la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$ est convergente. Alors d'après le théorème

d'ABEL,¹ la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)\left(\frac{u}{r}\right)^\nu$ sera convergente pour $|u| < r$. Elle définira

à l'aide des relations (22), (23), (24) une fonction de z , régulière à l'intérieur du domaine Z construit sur le vecteur allant de a à x_0 . Cette fonction est identique à $FA(z)$ à cause de la formation des polynômes $G_\nu(x - a)$. Le point x_0 est donc ou un point à l'intérieur de $A^{(a)}$ ou du moins un sommet de $A^{(a)}$.

Désignons maintenant par $S_a(x|a)$ la série $F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$. On voit immédiatement que l'expression limite $\text{Lim}_{\alpha=0} S_a(x|a)$ a une étoile de convergence qui n'est pas autre chose que l'étoile principale A , et que l'égalité

$$(36) \quad FA(x) = \text{Lim}_{\alpha=0} S_a(x|a)$$

a lieu partout à l'intérieur de A .

Nous pouvons résumer dans le théorème suivant les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici:

¹ Oeuvres. Nouvelle édition. Page 223. Théorème V.

Théorème 4. Désignons par A une étoile de centre a , par α une quantité positive qui ne sera pas plus grande que l'unité et par $A^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A qui sera engendrée par la fonction génératrice $f(u|\alpha)$. On pourra toujours choisir cette fonction telle que α étant suffisamment petit l'étoile $A^{(\alpha)}$ renferme dans son intérieur un domaine donné quelconque situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $A^{(1)}$ devienne le cercle concentrique à A et inscrit dans A .

On pourra encore choisir $f(u|\alpha)$ telle que, A étant l'étoile principale d'une suite de constantes

$$F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a), \dots$$

assujetties à la condition de Cauchy, la série

$$S_a(x|a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$$

où

$$\begin{aligned} G_{\nu}(x-a) &= \frac{h_{\nu-1}^{(1)}}{|\underline{1}|\underline{\nu-1}} F^{(1)}(a) \cdot (x-a) + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}}{|\underline{1}|\underline{\nu-2}} F^{(2)}(a) \cdot (x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_1^{(\nu-1)}}{|\underline{\nu-1}|\underline{1}} F^{(\nu-1)}(a) \cdot (x-a)^{\nu-1} + \frac{h_0^{(\nu)}}{|\underline{\nu}|\underline{a}} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu} \end{aligned}$$

et où

$$h_{\nu-\mu}^{(\mu)}; (\mu=1,2,\dots,\nu; \nu=1,2,3,\dots,\infty)$$

sont des constantes positives déterminées qui ne dépendent que de la fonction génératrice, possède une étoile de convergence qui soit identique à $A^{(\alpha)}$, que l'égalité

$$FA(x) = S_a(x|a)$$

ait lieu partout à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$, et que la série $S_a(x|a)$ pour $\alpha = 1$ devienne la série de Taylor.

L'expression limite $\lim_{\alpha=0} S_a(x|a)$ a une étoile de convergence qui est identique à l'étoile A , et l'égalité

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_a(x|a)$$

a lieu partout à l'intérieur de A .

Nous avons vu (page 219—220) que X étant un domaine fini quelconque à l'intérieur de A on pourra toujours choisir α suffisamment petit pour que $A^{(\alpha)}$ renferme X dans son intérieur. Nous avons obtenu encore, la quantité positive $r' (1 > r' > r > 0)$ étant prise suffisamment rapprochée de r , l'inégalité:

$$(33) \quad |G_\nu(x - a)| < g \left(\frac{r}{r'} \right)^\nu$$

qui a lieu pour tout le domaine X . On a donc pour tout ce domaine

$$(37) \quad \begin{cases} FA(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^m G_\nu(x - a) + \varepsilon, \\ \varepsilon = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} G_\nu(x - a), \end{cases}$$

$$(38) \quad |\varepsilon| \leq g \frac{\left(\frac{r}{r'} \right)^{m+1}}{1 - \frac{r}{r'}}.$$

Fixons maintenant entre r' et α une dépendance telle que $\frac{r}{r'}$ tende indéfiniment vers l'unité quand α tend indéfiniment vers de zéro. Faisons par exemple:

$$(39) \quad r' = r e^{\frac{1}{\omega(\alpha)}}.$$

où $\omega(\alpha)$ est une quantité positive qui dépend de α de telle sorte que

$$(40) \quad \lim_{\alpha=0} \omega(\alpha) = \infty.$$

On aura:

$$\frac{\frac{r}{r'}}{1 - \frac{r}{r'}} < \omega(\alpha),$$

$$(41) \quad |\varepsilon| \leq g \cdot \omega(\alpha) \cdot e^{-\frac{m}{\omega(\alpha)}}.$$

En prenant alors pour m un nombre entier positif tel que

$$(42) \quad m \geq 2\omega(\alpha) \log \omega(\alpha)$$

on obtient

$$(43) \quad |\varepsilon| < \frac{g}{\omega(\alpha)}.$$

Donc, si on fait dépendre l'entier m de α d'une manière choisie de telle sorte que l'inégalité (42) soit vérifiée, au moins pour des valeurs petites de α , l'expression

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$$

aura la propriété que voici:

σ étant une quantité positive déterminée, on pourra toujours trouver une autre quantité positive $\bar{\alpha}$ telle que l'inégalité

$$\left| FA(x) - \sum_{\nu=1}^m G_{\nu}(x-a) \right| < \sigma$$

soit satisfaite pour toutes les quantités x appartenant à X , pourvu que α soit inférieur à $\bar{\alpha}$.

Mais c'est là notre théorème I de la première note qui ainsi se trouve démontré d'une manière sensiblement différente de celle que nous avons employée auparavant.

Le théorème I une fois démontré, le théorème II s'ensuit immédiatement par les mêmes considérations que dans la première note.

Arrêtons nous un instant pour fixer la forme de l'expression $\sum_{\nu=0}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$.

On a, la fonction génératrice étant

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u|\alpha) = \frac{u}{rH} e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}}, \\ H = e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\beta} - 1 \right] \frac{du}{u}}, \\ 0 < r < 1, \end{array} \right.$$

la formule:

$$(45) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^m G_{\nu}(x-a) &= F(a) + \frac{1}{|1} \left(\sum_{\nu=1}^m \frac{h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{|\nu-1} \cdot r^{\nu-1} \right) \cdot F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} \\ &+ \frac{1}{|2} \left(\sum_{\nu=2}^m \frac{h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{|\nu-2} \cdot r^{\nu-2} \right) \cdot F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{H} \right)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{|m-1} \left(\sum_{\nu=m-1}^m \frac{h_{\nu-(m-1)}^{(m-1)}(\beta)}{|\nu-(m-1)} \cdot r^{\nu-(m-1)} \right) \cdot F^{(m-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H} \right)^{m-1} \\ &+ \frac{1}{|m} F^{(m)}(a) \left(\frac{x-a}{H} \right)^m \end{aligned} \right.$$

où $h_{\nu-\mu}^{(\mu)}(\beta)$; ($\mu=1, 2, \dots, \infty$); $h_0^{(\mu)}(\beta) = 1$ sont les polynômes en β dont les propriétés essentielles ont été énoncées à la page 210.

L'inégalité (42) est remplie si on y fait $\alpha = \frac{1}{n}$, $m = n^2$, n étant un nombre entier positif. Posons alors

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \bar{G}_n(x|a) &= F(a) \\ &+ \frac{1}{|1} \left(\frac{1}{H} \sum_{\nu=1}^{n^2} \frac{h_{\nu-1}^{(1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{|\nu-1} \cdot r^{\nu-1} \right) F^{(1)}(a) \cdot (x-a) \\ &+ \frac{1}{|2} \left(\frac{1}{H^2} \sum_{\nu=2}^{n^2} \frac{h_{\nu-2}^{(2)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{|\nu-2} \cdot r^{\nu-2} \right) F^{(2)}(a) \cdot (x-a)^2 \\ &\dots \\ &+ \frac{1}{|n^2-1} \left(\frac{1}{H^{n^2-1}} \sum_{\nu=n^2-1}^{n^2} \frac{h_{\nu-(n^2-1)}^{(n^2-1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{|\nu-(n^2-1)} \cdot r^{\nu-(n^2-1)} \right) \cdot F^{(n^2-1)}(a) (x-a)^{n^2-1} \\ &+ \frac{1}{|n^2} \frac{1}{H^{n^2}} F^{(n^2)}(a) \cdot (x-a)^{n^2} \\ &h_0^{(n)}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons dans notre théorème I (seconde note), substituer le nouveau polynôme $\overline{G}_n(x|a)$ au polynôme $G_n(x|a)$. L'énoncé du théorème reste le même.

Pour démontrer le théorème 4 nous avons employé comme fonction génératrice la forme spéciale (44).

Il est évident qu'on aurait encore pu prendre pour $f(u|\alpha)$ d'autres fonctions. Dans le choix de $f(u|\alpha)$ nous avons introduit une restriction considérable par la condition que les constantes $h_{\nu-\mu}^{(\alpha)}$ doivent être toutes positives et par cette autre condition que la série obtenue doit pour $\alpha = 1$ devenir la série de TAYLOR. En laissant de côté ces restrictions, on obtient évidemment une latitude beaucoup plus grande dans le choix de la fonction génératrice.

Une fonction très élémentaire remplissant ces deux conditions est

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u|\alpha) = \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{(1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{\alpha(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha}, \\ \varepsilon = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha. \end{array} \right.$$

Cette fonction a la propriété suivante. Quand u décrit un cercle ayant pour centre l'origine et l'unité pour rayon, f décrira une figure cunéiforme, symétrique par rapport à l'axe réel et limitée par deux arcs de cercle qui se coupent sous un angle $\alpha\pi$ aux deux points

$$\begin{aligned} f(-1, \alpha) &= -\frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \\ f(1, \alpha) &= \frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha(1 - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

L'intérieur de la figure cunéiforme correspond à l'intérieur du cercle et les deux points $u = 0$, $f = 0$ se correspondent. En faisant

$$\frac{z-a}{x-a} = f(u|\alpha)$$

et en faisant décrire à u une circonférence ayant l'origine pour centre et r pour rayon on obtient la figure génératrice Z . Les points

$$u = -r; \quad z = a - \frac{\alpha + \varepsilon}{1 + \alpha\varepsilon} \cdot (x - a),$$

$$u = r; \quad z = x$$

se correspondent.¹

Revenons à la formule (43). Il y entre outre la constante α encore une constante r . On peut se demander à la série (35) gardera les propriétés énoncées dans notre théorème si on y fait $r = 1$, c'est à dire si au lieu de la figure Z enfermée dans l'intérieur de notre figure cordiforme on prend pour figure génératrice la figure cordiforme elle-même. C'est en effet ce qui a lieu mais pour la démonstration il faut alors avoir recours à des considérations d'une autre nature que celles que nous avons employées jusqu'ici.

M. PHRAGMÉN nous fait à ce sujet la communication suivante que nous ne pouvons faire mieux que de reproduire textuellement:

»Si on veut employer la figure cordiforme elle-même comme figure génératrice, on est amené à étudier la question de la convergence d'une série entière sur la circonférence de son cercle de convergence.

En effet, définissons l'étoile $A^{(\alpha)}$ par la condition que, x désignant un point de cette étoile, toute la figure cordiforme, semblable à la figure génératrice et ayant pour axe la droite entre a et x , doit appartenir à l'étoile A ; soit alors x un point situé à l'intérieur de cette étoile $A^{(\alpha)}$. Cela posé, si on substitue à l'argument z de la fonction $FA(z)$ la fonction de u définie par la formule

$$\frac{z - a}{x - a} = ue^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u}},$$

on aura une fonction de u régulière à l'intérieur du cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon est l'unité. D'ailleurs, dès que l'on a

¹ J'ai employé cette figure cunéiforme au début de mes recherches sur la représentation des fonctions monogènes générales. En réponse à une lettre de M. VIRO VOLTERRA datée de *Pise* le 9 avril 1899 où il me communiquait les principes d'une démonstration appuyée sur l'emploi de la figure cunéiforme, je lui indiquais le jour suivant ma propre démonstration dans une lettre écrite de *Perouse*.

On verra amplement dans la suite l'avantage qu'il y a à employer la figure cordiforme au lieu de la figure cunéiforme.

$\alpha < 1$ cette fonction a nécessairement deux points singuliers situés sur la circonférence de ce cercle, à savoir les points $u = 1$ et $u = -1$. Par conséquent, le développement de cette fonction suivant les puissances de u , développement que nous écrirons

$$(1) \quad \sum_0^{\infty} G_\nu(x-a)u^\nu$$

a pour cercle de convergence le cercle de rayon 1.

Or on démontre, comme nous allons le faire, que cette série converge encore sur la circonférence de son cercle de convergence, et cela *uniformément* sur toute la circonférence, et de même uniformément pour toutes les valeurs de x situées dans un domaine X , donné arbitrairement à l'intérieur de l'étoile $A^{(\alpha)}$.

On peut donc en ce développement faire $u = 1$, et on obtient de la sorte le développement

$$(2) \quad FA(x) = \sum_0^{\infty} G_\nu(x-a)$$

qui converge uniformément dans X .

Pour démontrer le théorème que nous venons d'énoncer sur la convergence uniforme de la série (1), il suffit de rappeler le théorème classique de M. LIPSCHITZ *Sur le développement des fonctions réelles en séries trigonométriques*.¹

Ce théorème peut être énoncé de la manière suivante:²

Soit $\varphi(\theta)$ une fonction réelle et univoque de l'argument réel θ et continue pour $\theta = \theta_0$. Supposons qu'on sache pour $\delta \leq \frac{2m+1}{2n+1}\pi$, où m et n désignant deux entiers dont le premier est plus petit que le second, déterminer une fonction $\psi(\delta)$ de l'argument réel δ , telle que, pour deux valeurs θ' et θ'' de l'angle θ situées toutes deux ou bien entre θ_0 et $\theta_0 + \pi$ ou bien entre θ_0 et $\theta_0 - \pi$ et satisfaisant à l'inégalité

$$|\theta' - \theta''| < \delta$$

on ait:

$$|\varphi(\theta') - \varphi(\theta'')| < \psi(\delta).$$

¹ Journal de Crelle, t. 63.

² Nous avons précisé un peu l'énoncé du théorème.

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 231

Supposons encore qu'on sache déterminer une quantité positive M telle que pour toutes les valeurs réelles de θ on ait $|\varphi(\theta)| < M$.

Cela posé, la différence entre $\varphi(\theta_0)$ et la somme

$$(3) \quad \begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos \theta_0 + a_2 \cos 2\theta_0 + \dots + a_n \cos n\theta_0 \\ & + b_1 \sin \theta_0 + b_2 \sin 2\theta_0 + \dots + b_n \sin n\theta_0 \end{aligned}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \varphi(\theta) d\theta, \dots, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \varphi(\theta) \cos n\theta \cdot d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \varphi(\theta) \sin n\theta \cdot d\theta,$$

les quadratures dans ces formules étant supposées avoir un sens, est inférieure à

$$4M \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{\pi}{(2m+1)^2} \right) + 9\psi \left(\frac{2m+1}{2n+1} \pi \right) + 4\psi \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \cdot \log \frac{4(2n+1)}{\pi}.$$

Si $\varphi(\theta)$ est périodique et de période 2π , de sorte que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont indépendants de θ_0 et que la formule (3) donne le commencement de son développement en série de FOURIER, et si on peut employer, pour toutes les valeurs de θ_0 , la même fonction $\psi(\delta)$ et de plus si cette fonction est telle que $\psi(\delta) \log \frac{4}{\delta}$ tend vers zéro avec δ , il s'ensuit de ce théorème que le développement de $\varphi(\theta)$ en série de FOURIER est uniformément convergent pour toutes les valeurs de θ .

Envisageons maintenant un ensemble fini ou infini de fonctions $\varphi(\theta)$, que nous supposerons encore, pour simplifier, périodiques et de période 2π .

Supposons que, ayant fixé la valeur $\theta = \theta_0$, on puisse employer la même fonction $\psi(\delta)$ pour toutes ces fonctions $\varphi(\theta)$, et que cette fonction soit telle que $\psi(\delta) \log \frac{4}{\delta}$ tende vers zéro quand δ tend vers zéro.

Il est évident, dans ce cas, que la série de FOURIER:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos \theta_0 + a_2 \cos 2\theta_0 + \dots \\ & + b_1 \sin \theta_0 + b_2 \sin 2\theta_0 + \dots \end{aligned}$$

est *uniformément convergente* pour toutes les fonctions $\varphi(\theta)$ appartenant à l'ensemble donné.¹

Pour pouvoir appliquer ces théorèmes aux parties réelle et imaginaire de la fonction de u obtenue en substituant à l'argument z de la fonction $FA(z)$ la fonction de u définie par

$$\frac{z-a}{x-a} = ue^i \int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u},$$

nous remarquons que, z' et z'' désignant deux valeurs de z correspondant aux valeurs $e^{\theta'i}$ et $e^{\theta''i}$ données à u , on aura nécessairement

$$(4) \quad |z'' - z'| < K \cdot |x - a| \cdot |\theta'' - \theta|^{\alpha},$$

K désignant une certaine constante qui ne dépend que de α .² D'un

¹ Il semble que, en général, on n'a guère apprécié ce théorème de M. LIPSCHITZ à sa juste valeur. Le plus souvent on le présente comme un complément du théorème célèbre de DIRICHLET, pouvant servir à examiner la convergence de la série de FOURIER dans le voisinage des points où la fonction donnée possède un nombre infini de maxima et de minima.

Or, si l'on considère le fond des choses, il est évident que de ces deux théorèmes celui de M. LIPSCHITZ est à la fois le plus profond, le plus utile et le plus élémentaire. On pourrait même dire que, tandis que ce dernier théorème est un vrai théorème d'analyse, le théorème de DIRICHLET est plutôt du ressort de l'arithmétique supérieure.

² Si θ' et θ'' satisfont toutes deux, ou bien à l'inégalité $0 < \theta < \pi$ ou bien à l'inégalité $0 > \theta > -\pi$, on pourra prendre $K = \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha}$. On pourra prendre $K = \frac{4^{1-\alpha}}{\alpha}$,

si θ' et θ'' sont arbitraires, pourvu seulement que $|\theta'' - \theta| \leq \frac{\pi}{2}$.

En effet, écrivons pour simplifier v au lieu de $\frac{z-a}{x-a}$, de sorte qu'on ait

$$\log v = \int_0^u \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} \frac{du}{u}.$$

Pour $0 < \theta < \pi$, si nous faisons comme ci-dessus $u = e^{\theta i}$, nous aurons

$$\log v = e^{-i\alpha \frac{\pi}{2}} \int_0^{\theta} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-\alpha} d\theta.$$

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 233
 autre côté, pour toutes les valeurs de z' et de z'' appartenant à X
 on aura

$$(5) \quad |FA(z'') - FA(z')| < K_1 \cdot |z'' - z'|$$

Par conséquent, si θ' et θ'' sont deux valeurs de θ comprises entre 0 et π et si v' et v'' sont les valeurs correspondantes de v , on a

$$(a) \quad \log v'' - \log v' = \int_{\theta'}^{\theta''} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-\alpha} d\theta.$$

Or on a, pour les valeurs considérées de θ ,

$$\frac{2}{\theta} > \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} > 0,$$

par conséquent

$$\left(\frac{2}{\theta} \right)^{1-\alpha} > \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-\alpha},$$

$$\int_{\theta'}^{\theta''} \left(\frac{2}{\theta} \right)^{1-\alpha} d\theta > \int_{\theta'}^{\theta''} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{1-\alpha} d\theta;$$

ce qui donne, en intégrant dans le premier membre, et en ayant égard à (a)

$$\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} (\theta'^{\alpha} - \theta''^{\alpha}) > (\log v'' - \log v').$$

Maintenant on a, en écrivant ξ pour $\log v$,

$$v'' - v' = \int_{\log v'}^{\log v''} e^{\xi} d\xi = \int_{\log v'}^{\log v''} v d\xi;$$

par conséquent, $|v|$ étant inférieure à l'unité, on a

$$|v'' - v'| < |\log v'' - \log v'|.$$

D'ailleurs on a

$$x^{\alpha} + y^{\alpha} > (x + y)^{\alpha}$$

pour x et y positifs, $0 < \alpha < 1$ — ce dont on s'assure immédiatement en considérant les dérivées par rapport à x et à y — et par conséquent

$$\theta'^{\alpha} - \theta''^{\alpha} < (\theta' - \theta'')^{\alpha}.$$

Par conséquent on obtient

$$|v'' - v'| < \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} \cdot |\theta'' - \theta'|^{\alpha}.$$

K_1 désignant une constante plus grande que les valeurs absolues de $F'A(z)$ dans X .

On démontre de même que cette inégalité subsiste si les valeurs θ' et θ'' sont toutes deux comprises entre 0 et $-\pi$.

Si les valeurs θ' et θ'' sont situées de part et d'autre de la valeur $\theta = 0$, on aura

$$|v''| < \frac{2^{1-a}}{a} \cdot |\theta''|^a,$$

$$|v'| < \frac{2^{1-a}}{a} \cdot |\theta'|^a$$

et par conséquent

$$|v'' - v'| < \frac{2^{1-a}}{a} (|\theta''|^a + |\theta'|^a).$$

Or on a pour $a < 1$ et pour x et y positifs, l'inégalité

$$x^a + y^a \leq 2^{1-a}(x + y)^a$$

qui résulte de ce que pour $x + y =$ constante, est maximum $x^a + y^a$, pour $x = y$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |v'' - v'| &< \frac{4^{1-a}}{a} (|\theta''| + |\theta'|)^a \\ &= \frac{4^{1-a}}{a} |\theta'' - \theta'|^a. \end{aligned}$$

Supposons enfin que θ' et θ'' diffèrent, de π tous les deux, de moins de $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas on peut écrire

$$v = v_0 e^{-\int_{-1}^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-a} \frac{du}{u}},$$

et par conséquent pour $u = e^{i\theta}$

$$\log(v - v_0) = \int_{\pi}^{\theta} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right)^{1-a} d\theta \cdot e^{-i\alpha \frac{\pi}{2}}.$$

Nous obtenons immédiatement:

$$|\log(v - v_0)| < |\pi - \theta|$$

ce qui donne aisément

$$|v'' - v'| < |\log(v'' - v_0) - \log(v' - v_0)| < |\theta'' - \theta'|.$$

Or il est évident que

$$|\theta'' - \theta'| < \frac{4^{1-a}}{a} |\theta'' - \theta'|^a.$$

On aura donc

$$(6) \quad |FA(z'') - FA(z')| < K \cdot K_1 \cdot |x - a| \cdot |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

Par conséquent les conditions pour que le développement de FOURIER soit uniformément convergent par rapport à θ sont évidemment remplies et pour la partie réelle et pour la partie imaginaire de la fonction $FA(z)$, considérées comme fonctions de l'angle réel θ introduit par les deux substitutions

$$\frac{z - a}{x - a} = ue^i \int_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u}$$

et

$$u = e^{i\theta}.$$

Considérons alors

$$(7) \quad RFA(z) = a_0 + \sum (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta),$$

développement de la partie réelle de cette fonction en série de FOURIER. Il est évident que pour $u = re^{i\theta}$, on a aussi,

$$(8) \quad RFA(z) = a_0 + \sum (a_n r^n \cos n\theta - b_n r^n \sin n\theta).$$

En effet, d'après le théorème d'ABEL, le second membre est uniformément convergent pour $r \leq 1$, et représente par conséquent, comme le premier, une fonction harmonique dans le cercle $r \leq 1$. Or, ces deux fonctions harmoniques étant, d'après la formule (7), identiques sur la circonférence, elles sont aussi identiques à l'intérieur du cercle, et cela donne précisément la formule (8). Les fonctions harmoniques conjuguées ne peuvent donc différer que d'une constante, et on a par conséquent

$$(9) \quad IFA(z) = \sum (a_n r^n \sin n\theta + b_n r^n \cos n\theta) + \text{const.}$$

$IFA(z)$ désignant la partie réelle de la fonction $\frac{1}{i} FA(z)$.

D'un autre côté on a pour $u = e^{i\theta}$ un développement uniformément convergent en série de FOURIER

$$(10) \quad IFA(z) = a'_0 + \sum (a'_n \cos n\theta - b'_n \sin n\theta)$$

dont en raisonnant comme ci-dessus on tire pour $u = re^{i\theta}$ le développement suivant convergent pour $r \leq 1$

$$(11) \quad IFA(z) = a'_0 + \sum (a'_n r^n \cos n\theta - b'_n r^n \sin n\theta).$$

En comparant ce développement au développement (9), on trouve

$$a'_n = b_n, \quad b'_n = -a_n.$$

Par conséquent on a, pour $|u| \leq 1$

$$FA(z) = a_0 + ia'_0 + \sum (a_n + ia'_n)u^n,$$

et ce développement converge uniformément sur la circonférence $|u| = 1$.

D'ailleurs il est évident, d'après ce que nous avons dit, que cette convergence est uniforme, non seulement par rapport à l'angle θ , mais encore par rapport à la quantité x qui figure dans la formule de substitution, pourvu que cette quantité reste comprise dans le domaine X .

C'est tout ce qu'il fallait établir pour démontrer qu'on a

$$FA(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x - a)$$

et que ce développement est uniformément convergent pour les valeurs de x à l'intérieur de X .

Il est donc démontré qu'on peut employer comme fonction génératrice

$$(48) \quad f(u | \alpha) = \frac{u}{\omega} e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

où

$$(49) \quad \omega = e^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] \frac{du}{u}}$$

et comme figure génératrice la figure cordiforme représentée par

$$z = a + (x - a)f(u | \alpha)$$

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 237

quand u décrit une circonférence qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Les polynômes $G_\nu(x - a)$ deviennent dans ce cas

$$(50) \quad G_\nu(x - a) = \frac{h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{|\underline{1}|_{\nu-1}} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{\omega} + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{|\underline{2}|_{\nu-2}} F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{|\underline{\nu-1}|_1} F^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\nu.$$

Rappelons la formule (21) et remarquons en même temps l'égalité

$$(51) \quad \omega = \left(\frac{1}{2}e\right)^2 e^{\frac{2}{\alpha}} (1 + \alpha\mathfrak{B}(\alpha))$$

qui en résulte immédiatement et qui montre de quelle manière ω tend vers l'infini quand α s'évanouit. De l'égalité (6) on tire encore en faisant $u = 1$ la formule remarquable

$$(52) \quad \omega^\mu = 1 + \frac{h_1^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{1}|} + \frac{h_2^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{2}|} + \dots + \frac{h_\nu^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\nu}|} + \dots$$

ou, en faisant $h_0^{(\mu)}(\beta) = 1$,

$$\omega^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\nu}|}$$

On aura donc pour des valeurs suffisamment petites de x l'identité suivante:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a) \\ &= F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{h_{\nu-\mu}^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\mu}|_{\nu-\mu}} F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{h_\lambda^{(\mu)}(\beta)}{|\underline{\lambda}|} \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}|} (x-a)^\mu. \end{aligned} \right.$$

Le polynôme $G_\nu(x - a)$ est un polynôme en x de degré ν mais c'est en même temps un polynôme en β de degré $\nu - 1$ (voir page 210). Les considérations que nous avons employées pour démontrer la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$ nous montrent immédiatement que x étant un point quelconque à l'intérieur de A , il y a toujours une valeur de β par ex. β_0 telle que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{h_{\nu-\mu}^{(\mu)}(\beta)}{|\mu| \nu - \mu} F^{(\mu)}(a) \left(\frac{x - a}{\omega}\right)^\mu$$

soit uniformément convergente par rapport à β pour chaque domaine

$$0 \leq \underline{\beta} \leq \beta' < \beta_0 < 1.$$

La formule (53) fait ressortir d'une manière intéressante le vrai rôle de la quantité β dans notre mode de représentation. La série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a)$ n'est pas une fonction proprement dite de β , parce que sa valeur, la série étant convergente, est absolument indépendante de β . La quantité β sert seulement à régler l'étendue de la convergence, qui augmente de plus en plus en même temps que β s'approche de l'unité.

Rappelons nous la construction de l'étoile $A^{(\alpha)}$ (voir page 229). On voit que la figure cordiforme étant choisie pour figure génératrice l'étoile $A^{(\alpha)}$ prend une forme très simple.

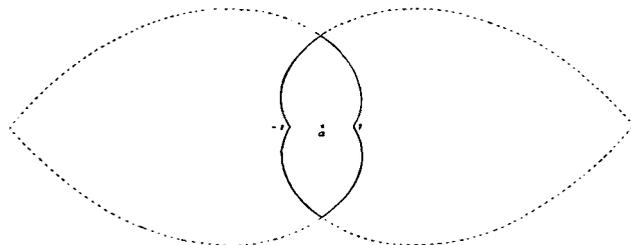
Faisons par exemple

$$F(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

L'étoile $A^{(\alpha)}$ devient dans ce cas, le point $x = 0$ étant pris pour centre, une figure cordiforme qui a pour axe de symétrie l'axe réel, dont le sommet obtus est au point $x = 1$ et dont le sommet aigu est au point $x = -e^{\frac{\pi \operatorname{tg}(1-\alpha)\pi}{2}}$. Nous avons dessiné (planche II) trois spécimens différents de $A^{(\alpha)}$. On remarquera qu'en diminuant α , l'étoile $A^{(\alpha)}$ s'approche avec une grande rapidité de l'étoile A qui est elle-même dans ce cas le plan entier à l'exception de la demi-droite $(1 \dots + \infty)$.

Supposons, pour prendre un autre exemple, que l'étoile A ayant pour centre $x = 0$ n'ait que deux sommets finis $x = 1$, $x = -1$. L'étoile $A^{(\alpha)}$

Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. 239
 devient alors le domaine situé dans l'intérieur de deux figures cordiformes de même paramètre α qui ont toutes les deux pour axe de symétrie l'axe réel et dont l'une a pour sommet obtus $x = 1$ et l'autre $x = -1$.



Nous avons vu que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a) \cdot u^{\nu}$$

étant regardée comme série de puissances par rapport à u a pour rayon de convergence l'unité. Par suite d'après le théorème de CAUCHY¹ la limite supérieure des valeurs limites de $|\sqrt[\nu]{G_{\nu}(x-a)}|$; $\nu = 1, 2, \dots, \infty$ est l'unité. Cette propriété subsiste tant que x appartient à l'intérieur de l'étoile $A^{(\alpha)}$. D'un autre côté la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a)$ étant divergente, tant que x est un point en dehors de $A^{(\alpha)}$ la limite supérieure des valeurs limites de $|\sqrt[\nu]{G_{\nu}(x-a)}|$ est nécessairement plus grande que l'unité quand x est situé en dehors de $A^{(\alpha)}$. Si on remarque encore que chaque point x à l'intérieur de A sera renfermé dans $A^{(\alpha)}$ si l'on donne à α une valeur suffisamment petite, on obtient le théorème suivant.

Théorème 5. *On peut toujours choisir la fonction génératrice d'une manière telle que toutes les propriétés du théorème 4 subsistent et que l'on ait de plus les suivantes:*

- 1°. *La quantité α étant donnée, la limite supérieure des valeurs limites de $|\sqrt[\nu]{G_{\nu}(x-a)}|$; $\nu = 1, 2, \dots, \infty$ est égale à l'unité quand x appartient à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$ et supérieure à l'unité quand x est situé en dehors de $A^{(\alpha)}$.*

¹ Première note, page 44.

- 2°. Le point x étant situé à l'intérieur de l'étoile A , il existe toujours une quantité $\alpha_0 < 1$ telle que, α étant plus petite que α_0 , la limite supérieure des valeurs limites $|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}|$; $\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty$ est égale à l'unité, tandis que x étant situé en dehors de A cette limite supérieure est toujours supérieure à l'unité et cela quel que soit α .

On voit que ce théorème donne un critère précieux pour trouver les sommets de l'étoile A . Pour être sûr que le point x ne peut pas être situé en dedans de A , il suffit en réalité de faire voir que, la quantité α étant choisie aussi petite et une quantité M aussi grande qu'on veut, il y a toujours des indices ν tels que $|G_\nu(x-a)| > M$. D'un autre côté tant que x est situé à l'extérieur de $A^{(\alpha)}$ on est sûr qu'il existe de tels indices.

Dans les cas ordinaires il doit même arriver qu'il y a toujours un indice ν_0 tel que $|G_\nu(x-a)| > M$ tant que $\nu > \nu_0$. D'un autre côté si x est situé à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$ il y a toujours, δ étant choisi si petit qu'on veut et α étant pris suffisamment petit, un indice ν_0 tel que $|G_\nu(x-a)| < \delta$ tant que $\nu > \nu_0$.

Je reviendrai dans une autre note sur cette question de la recherche des sommets de A .

La figure génératrice cordiforme définie par

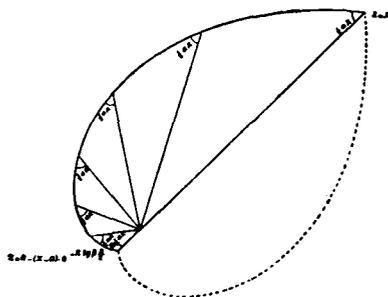
$$z = a + (x-a)f(u|\alpha),$$

la fonction génératrice $f(u|\alpha)$ étant donnée par les égalités (48), (49) où la variable u parcourt une circonférence ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, possède la propriété remarquable que voici. Regardons la figure comme engendrée par un rayon tournant autour du centre a . Un des angles que le rayon forme avec le contour de la figure est toujours $\frac{1}{2}\alpha\pi$ sauf au point

$$z = a - e^{\frac{\alpha}{2}\pi} \int_0^1 \left[\left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1-\alpha} \right] \frac{du}{u} \cdot (x-a)$$

où les deux angles sont $\pi - \frac{1}{2}\alpha\pi$.

Rappelons-nous la définition de l'étoile $A^{(a)}$. Fixons un vecteur et regardons la figure cordiforme autour de ce vecteur qui est inscrite dans l'étoile A . *Les sommets communs de cette figure cordiforme et de l'étoile A sont en même temps à cause de la propriété de la figure cordiforme dont nous venons de parler des sommets de l'étoile $A^{(a)}$*



Donc si E est une étoile concentrique et homothétique à $A^{(a)}$ qui est située dans son intérieur et si \bar{E} est l'ensemble de tous les points qui appartiennent aux différentes figures cordiformes construites autour des vecteurs entre a et un point à l'intérieur ou sur le contour de E l'étoile \bar{E} devient identique avec l'étoile E .

On sait que la limite supérieure $|FA^{(a)}(x)|$ à l'intérieur ou sur le contour de E est la même que la limite supérieure de $|FA^{(a)}(x)|$ sur le contour. Appelons cette limite g . La limite supérieure de $|FA^{(a)}(x)|$ quand z appartient à la figure cordiforme construite autour de l'axe de symétrie (ax) , x appartenant au contour de E , n'est donc pas supérieure à g . On a

$$FA^{(a)}(z) = F(a) + \sum_{v=1}^{\infty} G_v(z-a)u^v.$$

Donc

$$|G_v(x-a)| < g.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 6. *On peut toujours choisir la fonction génératrice d'une telle manière que toutes les propriétés des théorèmes 4 et 5 subsistent et encore la propriété suivante:*

En désignant par E une étoile concentrique homothétique et intérieure à $A^{(a)}$, par x un point sur le contour de E et par g la limite supérieure de $|FA^{(a)}(x)|$ quand x parcourt ce contour; ayant

$$FA^{(a)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu}(x-a),$$

où $G_{\nu}(x-a)$ a la même signification qu'au théorème 4, on aura

$$|G_{\nu}(x-a)| < g; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

On voit facilement qu'en ayant employé par exemple la figure cunéiforme au lieu de la figure cordiforme on aurait obtenu un théorème beaucoup plus compliqué.

Mettons $\alpha = 1$ et il résulte du théorème 6:

Soit \mathcal{E} le cercle de convergence et r une quantité positive plus petite que le rayon de convergence de la série de Taylor

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu}.$$

Soit encore g la limite supérieure de $|FC(x)|$ sur la circonférence qui a le point a pour centre et r pour rayon. On aura alors, x étant un point sur cette circonférence

$$\left| \frac{1}{\nu} F^{(\nu)}(a) \cdot (x-a)^{\nu} \right| < g; \quad \nu = 1, 2, \dots, \infty.$$

C'est le même théorème que celui dont nous avons fait un si fréquent usage dans notre première note¹ et qui est énoncé en général sous la forme

$$\left| \frac{1}{\nu} F^{(\nu)}(a) \right| < gr^{-\nu}.$$

¹ Voir WEIERSTRASS, Werke, Bd. I, page 67. M. HURWITZ m'a communiqué lors d'une visite que je faisais chez lui à Zürich le moi de mai de l'année passée qu'il a eu longtemps l'habitude d'énoncer dans son cours le théorème de WEIERSTRASS sous la forme qui se présente ainsi comme cas spécial de mon théorème 6.

Nous ne devons pas finir cet article sans parler d'un résultat remarquable qui a été trouvé par M. BOREL et qui est antérieur à nos travaux.

M. BOREL a démontré¹ l'égalité

$$FK(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{k^\lambda}{[\lambda]} \left[F(a) + \frac{1}{[\lambda]} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{[\lambda]} F^{(k)}(a)(x-a)^\lambda \right]$$

où k désigne une quantité positive et K est une étoile de convergence circonscrite au cercle des constantes $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(k)}(a), \dots$. Il a montré par là qu'il existe une expression analytique générale édiflée de même que la série de TAYLOR avec les seuls éléments $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots$ pris de la fonction mais valable pour une étoile de convergence circonscrite au cercle de ces éléments et contenant à son intérieur tout point de ce cercle où la fonction reste régulière. Autant que nous avons pu nous en assurer il a été le premier à établir ce résultat capital pour la représentation analytique des fonctions monogènes.

Pendant l'impression de cette note, j'ai eu connaissance d'un nouveau résultat du plus grand intérêt que vient d'obtenir M. BOREL.

L'expression limite par laquelle nous avons exprimé $FA(x)$ et qui possède l'étoile A pour étoile de convergence peut s'écrire

$$\lim_{a=0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n G_\nu(x-a).$$

C'est en réalité une expression limite double. Mais nous avons trouvé dans notre première note qu'on peut toujours exprimer $FA(x)$ par une expression limite simple $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x|a)$. Cette expression limite simple a l'inconvénient que l'étoile A n'est pas avec nécessité une étoile de convergence de l'expression. On peut se demander s'il n'est pas possible de déterminer le polynôme $g_n(x|a)$ de manière que $\lim g_n(x|a)$ possède l'étoile A pour étoile de convergence. M. BOREL vient de montrer par une analyse profonde que nous publierons prochainement que ce n'est pas le cas.

¹ *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables*, Journal de Mathématiques, Série 5, tome 2, année 1896, pages 103—122.

L'expression analytique la plus simple qui représente $FA(x)$ en dedans de A et qui a en même temps l'étoile A pour étoile de convergence est donc nécessairement une expression limite double, comme celle que nous avons donnée dans le théorème 4 de cette note.

