

UN THÉORÈME D'ALGÈBRE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

T. J. STIELTJES

À LEYDE.

Voici un théorème d'algèbre qui s'est présenté à moi en étudiant les formules analytiques qui servent à exprimer le déplacement d'un système invariable autour d'un point fixe. (Voir DUHAMEL: *Cours de mécanique*, introduction.)

Soient

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

les coefficients de deux substitutions orthogonales à déterminant $+1$ et

$$R = \begin{vmatrix} A + a & B + b & C + c \\ A' + a' & B' + b' & C' + c' \\ A'' + a'' & B'' + b'' & C'' + c'' \end{vmatrix}$$

alors ce déterminant R (qui visiblement n'est pas identiquement zéro) jouit de cette propriété que lorsque $R = 0$ en même temps tous ses mineurs du second degré s'évanouissent. Je trouve en effet que le carré d'un tel mineur peut se mettre sous la forme:

$R \times$ Fonction entière de $a, \dots, c'', A, \dots, C''$.

Voici la signification géométrique de ce théorème. Lorsque, par l'effet du déplacement, un seul point (x, y, z) vient dans la position $(-x, -y, -z)$ cela entraîne nécessairement que tous les points d'un certain plan jouissent de la même propriété. Le déplacement se ramène à une rotation de 180° autour d'un certain axe. — C'est du reste un cas d'exception qui échappe à l'analyse de M. DUHAMEL. Les formules de M. DUHAMEL cessent de déterminer l'axe de rotation (qui pourtant est parfaitement déterminé) parce qu'on a $p = 0, q = 0, r = 0$. (On a $p^2 + q^2 + r^2 = \sin^2 \omega$ dans la notation de M. DUHAMEL.)

Ce théorème d'algèbre subsiste encore dans le cas de deux variables

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

et j'ai lieu de penser qu'il en est de même pour quatre variables, bien que je ne l'aie pas encore complètement démontré. Serait il donc possible de l'étendre à un nombre quelconque de variables? Ce sujet a quelque rapport au théorème de M. BRIOSCHI, que l'équation:

$$\begin{vmatrix} a + z & b & c & \dots & k \\ a' & b' + z & c' & \dots & k' \\ a'' & b'' & c'' + z & \dots & k'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(n-1)} & b^{(n-1)} & c^{(n-1)} & \dots & k^{(n-1)} + z \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines réciproques et imaginaires (abstraction faite de la racine $z = -1$ lorsque n est impair⁽¹⁾).

Leyde, 29 Août 1884.

(¹) Journ. de LIOUVILLE, T. 19, 1^e Sér. p. 253.