

NOUVELLES RECHERCHES  
SUR  
LES SÉRIES EMPLOYÉES DANS LES THÉORIES DES PLANÈTES

PAR  
HUGO GYLDÉN  
À STOCKHOLM.

*Préliminaires.*

Dans le présent travail je me suis proposé de continuer les recherches sur la convergence des séries employées dans l'astronomie pour représenter les coordonnées des planètes que j'ai publiées dans les *Acta mathematica*, t. 9, de les amplifier par de nouvelles considérations et de leur donner toute la généralité nécessaire dont ne jouissaient pas encore les résultats obtenus précédemment.

Dans le mémoire cité plus haut (*Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden*) on a examiné avec soin les méthodes d'intégration relatives à une certaine équation différentielle du second ordre qui se présente fréquemment dans la mécanique céleste. Cette équation n'étant pas linéaire au début, le devient toutes les fois qu'on néglige les termes dépendant de la troisième puissance de la force perturbatrice, ainsi que les termes d'un ordre plus élevé. Mais il paraît indispensable d'éviter cette forme dès le commencement du calcul, car bien que l'on n'ait pas démontré directement l'impossibilité de parvenir à la solution absolue en négligeant les termes du troisième ordre dans la première approximation, des tentatives stériles et réitérées, même dans les derniers temps, ont rendu cependant extrêmement probable que la solution absolue ne s'obtiendra pas en uti-

lisant exclusivement des équations linéaires. D'un autre côté, en employant, dans les diverses approximations, des équations différentielles renfermant certains termes des ordres supérieurs, on a obtenu des développements purement trigonométriques, où les coefficients contenant des diviseurs évanouissants ont disparu. On conclut de là que les séries renfermant des termes très grands à cause de petits diviseurs, et qui peuvent être divergentes, ne proviennent pas inévitablement de ce qu'on a admis la forme trigonométrique, mais qu'elles tiennent à la supposition vicieuse qu'on puisse toujours ordonner les approximations successives suivant les puissances des forces troublantes. En effet, si dans la première approximation on n'a retenu que les termes du premier ou du second ordre, on a eu recours pour les diviseurs à un mode de développement qui cesse d'être légitime dans certains cas exceptionnels où se présentent les plus grandes difficultés. Que les séries ainsi obtenues deviennent divergentes, il n'y a pas lieu de s'en étonner. Et puis, les diverses approximations ne donnant pas, dans les cas difficiles, des résultats qui s'approchent de plus en plus d'une limite déterminée, et les résultats obtenus dans chacune d'elles ne se présentant pas toujours sous la forme d'une série trigonométrique convergente, on ne saurait rien décider sur la forme analytique du résultat demandé. Mais il est aussi évident que, si l'on trouve, par une approximation quelconque, un développement divergent, cela ne prouve en aucune façon la divergence du résultat définitif.

Considérons le cas de deux planètes se mouvant autour du soleil.

Les arguments dont on se sert en développant la fonction perturbatrice sont originellement au nombre de six, pourvu qu'on les compte à partir de directions fixes. Comme arguments primitifs on peut adopter les angles suivants: les longitudes des deux planètes comptées à partir de directions fixes dans les plans des orbites instantanées; les longitudes des périhélies comptées comme les longitudes des planètes, et enfin les angles compris entre la ligne d'intersection des deux plans et les directions fixes. Ce sont là les arguments principaux ou les éléments dont se composent les arguments des divers termes du développement. Mais ces éléments n'entrent dans les divers arguments que de manière à se réduire toujours à quatre. On serait d'abord porté à attribuer une grande importance à ce fait. Cependant les entiers par lesquels sont multipliés ces quatre éléments dans les arguments des divers termes ne sont pas

indépendants entre eux: au contraire, ils sont soumis à une condition telle que le nombre des termes du développement ne pourrait pas être altéré en employant les quatre éléments au lieu des six éléments primitifs. La considération des arguments, en tant qu'ils sont composés de quatre éléments, n'ayant pas une importance fondamentale pour la représentation analytique des perturbations peut cependant devenir de quelque utilité pour certaines recherches spéciales.

Les arguments de l'espèce que je viens de signaler, seront appelés *arguments astronomiques* et je désignerai aussi par ce nom toute fonction linéaire de ces éléments et même plus généralement, toute fonction égale à un argument astronomique augmenté de termes dépendant eux-mêmes d'arguments astronomiques. Ainsi l'anomalie vraie étant un argument astronomique, l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique le sont aussi.

Admettons que le mouvement d'une planète soit stable, c'est à dire que l'orbite parcourue par le mobile soit toujours située dans l'espace entre deux surfaces sphériques et concentriques; alors le temps s'exprime le plus souvent au moyen des arguments astronomiques. Dans un tel cas, il serait facile d'établir les relations en vertu desquelles on exprimerait aisément tous les arguments astronomiques au moyen d'un seul d'eux multiplié par des nombres irrationnels. Ainsi l'anomalie vraie de la planète troublante multipliée par le rapport des mouvements anamalistiques des deux planètes serait aussi un argument astronomique, car la différence entre ce produit et l'anomalie vraie de la planète troublée est composée d'une constante et de termes périodiques dépendant d'arguments astronomiques.

Mais il peut arriver — quoique ce cas soit bien rare dans la nature d'après ce que nous savons — qu'on ne puisse pas exprimer le temps au moyen des arguments astronomiques seuls. Lorsqu'un tel cas se présente il existe toujours une relation linéaire entre les mouvements, en vertu de laquelle la somme de ces mouvements multipliés chacun par un entier convenable disparaît ou prend une valeur constante. A l'aide d'une telle relation un des arguments peut être éliminé et remplacé par une combinaison convenable des autres. Mais en revanche on voit naître, dans la relation qui lie le temps aux arguments astronomiques, une nouvelle inégalité dont le coefficient est une arbitraire et dont l'argument est une anomalie, ou bien le temps multiplié par un nombre

irrationnel, de sorte que la différence entre le nouvel argument et un argument astronomique quelconque contiendra toujours une partie séculaire.

Cette inégalité dont la présence est bien rare dans notre système planétaire a reçu le nom de *libration*. En considérant, d'une manière plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici dans les traités de mécanique céleste, le terme de la fonction perturbatrice d'où pourrait ressortir la libration, on voit que l'inégalité correspondante s'exprime au moyen des fonctions elliptiques. Dans le cas d'un module plus petit que l'unité les arguments astronomiques n'éprouvent aucune altération, mais dans le cas où les observations font ressortir la valeur du module plus grande que l'unité, la nouvelle inégalité dépendant d'un argument non-astronomique se trouve introduite.

Dans le cas intermédiaire où le module est exactement égal à l'unité les fonctions elliptiques ne se développent pas en séries trigonométriques. Alors on ne saurait éviter les exponentielles; mais dans les expressions des inégalités ces fonctions entrent de telle façon que leur influence se borne à introduire, dans les coefficients, une partie variable dont la valeur tend vers une limite déterminée, lorsque la variable indépendante acquiert des valeurs très grandes positives ou négatives. Donc on peut appeler les termes renfermant des exponentielles: *termes asymptotiques*.

Toutes les fois qu'un terme de la fonction perturbatrice pourrait engendrer une inégalité dépendant d'un argument non astronomique ou bien une inégalité ordinaire dont le coefficient serait très grand, il est indispensable, pour avoir tout d'abord un résultat suffisamment approché, d'éviter tout développement suivant les puissances de cette inégalité et d'en tenir compte en faisant le calcul des inégalités dues aux autres termes de la fonction perturbatrice.

C'était par ces considérations que j'avais proposé dans les *Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris*,<sup>1</sup> d'opérer le calcul des perturbations moyennant une équation de LAMÉ (dont l'intégrale a été trouvée par M. HERMITE). Conformément aux trois cas principaux: celui des arguments astronomiques, celui de la libration et enfin le cas asymptotique, l'équation dont il s'agit prend trois formes différentes que j'ai mises en évidence. Nulle doute qu'on ne puisse dans les cas qui se pré-

---

<sup>1</sup> T. 92, 1881.

sentent le plus souvent, effectuer le calcul des inégalités au moyen des formules qui en résultent; mais il y a des exceptions que je vais signaler.

Supposant les mouvements moyens tels qu'il y a lieu de présumer le cas d'une libration ou bien d'une très grande inégalité provenant d'un certain terme de la fonction perturbatrice, je désigne un tel terme par le nom de *terme critique*. Quelquefois il peut se présenter, dans le développement de la dite fonction, l'apparence d'une infinité de termes critiques, pourvu qu'on les considère séparément sans tenir compte des autres. Cela étant, l'emploi de l'équation de LAMÉ ne conduit pas immédiatement à des résultats d'où la convergence absolue puisse être aisément déduite, surtout si l'on est amené à considérer simultanément plusieurs planètes troublantes; mais on peut toujours y opérer une transformation telle qu'on aura une nouvelle équation tout à fait semblable à celle qui donne naissance aux premières fonctions elliptiques et à la première équation de LAMÉ, cette nouvelle équation étant délivrée du premier terme critique. En appliquant au résultat ainsi obtenu les procédés au moyen desquels on a éliminé le premier terme critique, on aura un nouveau système de fonctions elliptiques et une nouvelle équation de LAMÉ. On pourrait continuer l'intégration proposée et l'on parviendrait à éliminer ainsi, de proche en proche, les termes critiques; de sorte que le reste des termes de la fonction perturbatrice deviendrait de plus en plus insensible.

Mais du fait que la somme des termes omis dans la fonction perturbatrice est insensible on ne peut pas toujours démontrer la valeur insensible de la somme des inégalités qui leur correspondent, ce qui serait le but de nos recherches. Pour faire voir que la valeur dont il s'agit reste très petite il faut montrer que, même si les termes négligés, considérés séparément, donneraient lieu à des inégalités sensibles, l'influence mutuelle des diverses inégalités empêche l'agrandissement, hors d'une certaine limite, des inégalités résultant des termes lointains dans le développement de la fonction perturbatrice.

Que les inégalités dont nous avons parlé restent très petites toutes les fois qu'il ne s'agit que des termes non-élémentaires, cela se comprend en vertu des recherches contenues dans mon mémoire déjà cité. Il suit de là la convergence des séries employées dans le cas d'une orbite intermédiaire, en désignant par ce mot une orbite telle que les expressions des coordonnées sont dépourvues de tout terme élémentaire, et que les

inégalités s'expriment au moyen de deux arguments. L'intégration de l'équation différentielle d'où se tire la longitude dans l'orbite ou bien la réduction du temps, mais modifiée de manière à ne contenir que deux arguments, a été étudiée soigneusement dans la troisième partie de mon mémoire de 1887. Cependant certains points de cette étude n'étant pas mis en plein jour autant qu'on pourrait le désirer, on va trouver, dans les pages suivantes, quelques additions y relatives.

On reconnaît aisément que l'orbite intermédiaire coïncide avec l'orbite vraie toutes les fois qu'on peut négliger la masse de la planète troublée et l'excentricité de la planète troublante, ainsi que l'inclinaison mutuelle des deux orbites.

Quant au cas le plus général parmi ceux qui ont été traités dans mon mémoire précédent, je n'ai pas pu constater jusqu'à présent, d'autre objection essentielle à faire au principe de la méthode d'intégration adoptée que celle d'une assez grande prolixité relativement à l'application. Il me faut toutefois avouer que j'y ai adopté comme légitime un procédé dont l'usage général a été admis par LE VERRIER, mais dont la portée n'a pas encore été étudiée soigneusement. Il s'agit d'obtenir l'intégrale d'un produit de deux facteurs dont l'un est fonction seulement des termes élémentaires mais l'autre dépend des longitudes des planètes, et il y a lieu de supposer que cette intégrale s'obtienne au moyen des quadratures par parties. Il est cependant possible que la portée de la méthode dont je viens de parler soit restreinte à une exactitude limitée, mais dans ce cas il serait facile d'intercaler un procédé supplémentaire à l'aide duquel le résultat demandé s'obtiendrait en toute rigueur.

Quoi qu'il en soit, une nouvelle méthode plus efficace que ne l'est celle qu'on a employée dans le mémoire de 1887, serait évidemment à désirer. C'est l'exposition d'une telle méthode qu'on va lire dans les pages suivantes; on va encore reconnaître quelques propriétés de la théorie des inégalités, qui ont échappé aux recherches précédentes mais qui sont d'une importance considérable.

Enfin, la partie de la relation entre le temps et les arguments astronomiques qui contient des termes élémentaires, et qui ne s'obtient pas toujours au moyen de l'ancienne méthode, peut être déterminée exactement à l'aide des nouveaux procédés.

---

Quelquefois, pour m'exprimer plus brièvement, j'ai marqué la concordance entre deux quantités  $A$  et  $B$  par rapport à l'ordre de grandeur en employant la notation

$$A \overline{\propto} B.$$

Ainsi la comparaison

$$A \overline{\propto} \epsilon^n$$

signifie que

$$\frac{A}{\epsilon^n}$$

est toujours, même pour des valeurs évanouissantes de  $\epsilon$ , un nombre fini, pas très grand, ni très petit, ou bien une quantité de l'ordre zéro.

---

Après ces préliminaires nous passons à l'exposition des nouvelles recherches.

---

## CHAPITRE I.

### L'intégration d'une équation différentielle du deuxième ordre et du troisième degré avec un terme tout connu.

---

#### § 1. *Application de la méthode des coefficients indéterminés.*

1. L'équation différentielle du second ordre dont l'intégration donne le rayon-vecteur est très compliquée, du moins si l'on n'a pas négligé tous les termes du degré supérieur au premier. Il n'est pas, cependant, permis d'omettre toujours les termes de degré supérieur afin de réduire ainsi l'équation proposée en une équation linéaire: il faut, au contraire, dès les premiers pas, retenir certains termes du troisième degré, sinon, le résultat d'intégration peut se présenter sous la forme d'une série divergente.

Mais l'équation dont il s'agit, et dont l'étude est très épineuse, peut être, toutefois, décomposée en une suite d'équations plus simples, de sorte qu'on aura le résultat demandé au moyen d'approximations successives dont la convergence est comparable à celle d'une série ordonnée suivant les puissances d'une quantité plus petite que l'unité.

L'équation la plus simple qui nous pourrait servir comme point de départ, est celle-ci:

$$(1) \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3 \\ = -\gamma_1 \cos[(1 - \sigma_1)v - B_1] - \gamma_2 \cos[(1 - \sigma_2)v - B_2] - \dots$$

où les coefficients  $\beta_1, \beta_3, \sigma_1, \sigma_2, \dots$  sont de petites quantités de l'ordre des forces troublantes, tandis que les  $\gamma$  sont des coefficients du même ordre mais multipliés encore par des puissances et produits des excentricités et des inclinaisons mutuelles, de sorte qu'ils forment une série dont la convergence est uniforme.

On serait porté à croire que le terme du troisième degré puisse être omis. Cherchons ce qui en résulterait.

On aurait d'abord, en désignant par  $x$  et par  $\Gamma$  les arbitraires de l'intégration,

$$(2) \quad \rho = x \cos[(1 - \zeta)v - \Gamma] + \frac{\gamma_1}{\beta_1 - 2\sigma_1 + \sigma_1^2} \cos[(1 - \sigma_1)v - B_1] + \dots$$

où le coefficient  $\zeta$  est déterminé par la relation

$$1 - \zeta = \sqrt{1 - \beta_1}.$$

Tant que les différences

$$\beta_1 - 2\sigma + \sigma^2$$

sont des quantités du même ordre que  $\beta_1$ , l'expression de  $\rho$  que nous venons de trouver reste nécessairement convergente, et on peut toujours en considérer la valeur comme très petite de l'ordre des excentricités, pourvu que la valeur de l'arbitraire  $x$  soit elle-même très petite. Dans ce cas le terme  $\beta_3\rho^3$  serait du troisième ordre par rapport aux excentricités, et on obtiendrait, par la voie des approximations successives, la correction à ajouter à l'expression (2) due à ce terme.



Mais il peut aussi arriver que, parmi les dénominateurs de l'expression (2), il s'en trouve un ou plusieurs ou même un nombre infini, qui s'approchent tellement de zéro que les coefficients qui en dépendent deviennent très grands, ce qui entraîne des valeurs exagérées ou même infinies de la fonction  $\rho$ , telle que nous l'avons exprimée au moyen de l'équation (2). On s'aperçoit de là qu'on n'est plus autorisé à admettre, dans le cas envisagé, ni la convergence de la série (2), ni la réussite des approximations indiquées. La raison en est la prépondérance du terme négligé toutes les fois qu'un diviseur devient très petit. Pour avoir une expression effectivement approchée de l'intégrale de l'équation (1), il nous faut donc une méthode d'intégration qui fasse, déjà dans la première approximation, contribuer au résultat le terme dépendant de  $\beta_3$ . Mais ce terme étant retenu, l'intégration dont il s'agit devient très épineuse; il convient donc à commencer par l'étude d'une équation un peu simplifiée. Or, on a supposé, dans l'équation (1), tous les coefficients  $\gamma_1$  à l'exception d'un seul, égaux à zéro.

La méthode d'intégration qui se présente d'abord est celle des coefficients indéterminés. Certes, l'équation proposée étant du troisième degré, les équations de condition au moyen desquelles se déterminent les inconnues le seront aussi, d'où il est visible que le calcul des coefficients deviendrait extrêmement pénible; cependant, l'emploi de la méthode dont j'ai parlé nous dévoilera très facilement quelques propriétés importantes de l'intégrale.

2. Admettons dans l'équation

$$(3) \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3 = -\gamma \cos[(1 - \sigma)v - B]$$

la fonction  $\rho$  décomposée en deux parties, de sorte qu'on ait:

$$\rho = \rho_0 + R,$$

et que la fonction  $\rho_0$  soit exprimée par les deux termes:

$$\rho_0 = x \cos f + x_1 \cos f_1,$$

où l'on a écrit, pour abrégé,

$$f = (1 - \zeta)v - \Gamma; \quad f_1 = (1 - \sigma)v - B.$$

De l'expression adoptée de  $\rho_0$  nous tirons d'abord:

$$\begin{aligned}\rho_0^3 &= \left[ \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x_1^2 \right] x \cos f + \left[ \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right] x_1 \cos f_1 \\ &+ \frac{3}{4}x^2 x_1 \cos(2f - f_1) + \frac{3}{4}xx_1^2 \cos(f - 2f_1) \\ &+ \frac{3}{4}x^2 x_1 \cos(2f + f_1) + \frac{3}{4}xx_1^2 \cos(f + 2f_1) \\ &+ \frac{1}{4}x^3 \cos 3f + \frac{1}{4}x_1^3 \cos 3f_1.\end{aligned}$$

Après avoir introduit cette expression de  $\rho_0^3$  dans l'équation (3), nous allons déterminer les inconnues  $x_1$  et  $\zeta$  de manière à faire disparaître les coefficients de  $\cos f$  et de  $\cos f_1$ . En désignant par  $\frac{1}{2}(R^2)$  la partie constante de  $R^2$ , il en résulte les équations de condition:

$$(4) \quad \begin{cases} -(1 - \zeta)^2 + (1 - \beta_1) + \frac{3}{4}\beta_3 x^2 - \frac{3}{2}\beta_3 [x^2 + x_1^2 + (R^2)] = 0, \\ -(1 - \sigma)^2 + (1 - \beta_1) + \frac{3}{4}\beta_3 x_1^2 - \frac{3}{2}\beta_3 [x^2 + x_1^2 + (R^2)] = -\frac{\gamma}{x_1}, \end{cases}$$

et l'équation du second ordre qui sert à déterminer la fonction  $R$  sera:

$$\begin{aligned}(5) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3 \rho_0^2)R - 3\beta_3 \rho_0 \left( R^2 - \frac{1}{2}(R^2) \right) - \beta_3 R^3 \\ = \frac{3}{4}\beta_3 x^2 x_1 \cos(2f - f_1) + \frac{3}{4}\beta_3 xx_1^2 \cos(f - 2f_1) \\ + \frac{3}{4}\beta_3 x^2 x_1 \cos(2f + f_1) + \frac{3}{4}\beta_3 xx_1^2 \cos(f + 2f_1) \\ + \frac{1}{4}\beta_3 x^3 \cos 3f + \frac{1}{4}\beta_3 x_1^3 \cos 3f_1.\end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous un instant à considérer les conséquences des équations (4). En y introduisant les notations

$$3\varepsilon_2 = \frac{4}{3\beta_3} \left[ (1 - \sigma)^2 - (1 - \beta_1) + \frac{3}{2}\beta_3 \left( x^2 + \frac{1}{2}(R^2) \right) \right],$$

$$2\varepsilon_1 = \frac{4\gamma}{3\beta_3},$$

la deuxième d'elles s'écrit ainsi:

$$(6) \quad x_1^3 + 3\varepsilon_2 x_1 = 2\varepsilon_1$$

d'où l'on tire:

$$x_1 = \sqrt[3]{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}} + \sqrt[3]{\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}}.$$

Il s'ensuit de cette formule que la valeur de  $x_1$  ne surpasse pas la limite

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\varepsilon_1}$$

pourvu qu'on ait:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3 > 0;$$

dans le cas opposé, il est facile de voir qu'il existe toujours une racine négative de l'équation (6) ne devenant pas plus grande que

$$-\sqrt[3]{\varepsilon_1}.$$

En effet, si nous posons:

$$\varepsilon_2 = \omega \varepsilon_1^{\frac{2}{3}}$$

l'équation dont il s'agit prend la forme

$$x_1^3 + 3\omega \varepsilon_1^{\frac{2}{3}} x_1 = 2\varepsilon_1,$$

et si nous introduisons, au lieu de  $x_1$ , la nouvelle inconnue  $z$ , liée à la première par la relation

$$x_1 = \varepsilon_1^{\frac{1}{3}} z,$$

nous aurons:

$$(7) \quad z^3 + 3\omega z = 2.$$

Supposons qu'on ait:

$$\omega = -1;$$

alors les trois racines de l'équation que nous venons d'établir seraient:

$$z = + 2; \quad z = - 1; \quad z = - 1.$$

La première d'elles correspond à la limite positive de  $x_1$ , la seconde ou la troisième à la limite négative du même coefficient.

De l'équation (7) on déduit facilement le développement que voici:

$$(8) \quad z = \frac{2}{3\omega} \left\{ 1 - \frac{1}{1} \left( \frac{4}{27\omega} \right) + \frac{6}{1 \cdot 2} \left( \frac{4}{27\omega} \right)^2 - \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{4}{27\omega} \right)^3 + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{3n(3n-1)(3n-2) \dots (2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left( \frac{4}{27\omega} \right)^n \mp \dots \right\}$$

qui reste convergent autant que l'on a:

$$\omega \overline{>} 1 \quad \text{ou} \quad \omega \overline{<} - 1.$$

Relativement aux valeurs assez grandes de  $\omega$ , positives ou négatives, on peut se contenter de l'expression

$$z = \frac{2}{3\omega},$$

ou bien de celle-ci:

$$x_1 = \frac{2 \varepsilon_1}{3 \varepsilon_2}.$$

Cette expression qui, par rapport à l'exactitude, est comparable aux coefficients du développement (2), est entièrement en défaut, toutes les fois que la valeur absolue de  $\omega$  reste inférieure à l'unité. Par là on est en état de juger jusqu'à quel point le dit développement peut être utilisé.

Concevons particulièrement le cas où

$$\omega > - 1,$$

ce qui permet l'emploi de la formule

$$z = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\omega^3 + 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\omega^3 + 1}},$$

ou bien de celle-ci:

$$z = (\omega^3 + 1)^{\frac{1}{6}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{\omega^3 + 1}}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sqrt{\omega^3 + 1}}} \right\}.$$

Si maintenant  $\omega$  était positif, la valeur de  $z$  s'obtiendrait au moyen du développement

$$(9) \quad z = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\omega^3 + 1}} + \frac{10}{81} \frac{1}{(\omega^3 + 1)^{\frac{4}{3}}} + \dots$$

qui découle de la formule précédente; mais si, au contraire,  $\omega$  avait une valeur entre 0 et  $-1$ , on exprimerait  $z$  au moyen d'un développement suivant les puissances de  $\sqrt{\omega^3 + 1}$  ou bien suivant celles de  $\omega^3$ . Voici le premier de ces développements:

$$(10) \quad z = 2 \left\{ 1 - \frac{1}{9}(\omega^3 + 1) - \frac{1}{81} \frac{10}{3}(\omega^3 + 1)^2 - \dots \right\};$$

il nous donne la racine réelle correspondant aux valeurs de  $\omega$  peu différentes de  $-1$ .

Nous ajoutons encore quelques mots sur les diverses équations de condition correspondant à certains cas spéciaux.

D'abord, on peut se demander les conditions à remplir pour qu'on ait:

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1^{\frac{2}{3}},$$

ou bien:

$$\omega = -1.$$

Les valeurs des deux coefficients  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  que nous avons déjà signalées nous fournissent la relation suivante:

$$(11) \quad \frac{4}{9\beta_3} \left[ (1 - \sigma)^2 - (1 - \beta_1) + \frac{3}{2}\beta_3 \left( x^2 + \frac{1}{2}(R^2) \right) \right] = - \left[ \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\beta_3} \right]^{\frac{2}{3}},$$

d'où l'on tire, eu égard à la deuxième des équations (4),

$$\frac{4}{9\beta_3} \left[ \frac{\gamma}{x_1} - \frac{3}{4}\beta_3 x_1^2 \right] = - \left[ \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\beta_3} \right]^{\frac{2}{3}}.$$

Evidemment, on satisfait à cette équation par deux valeurs de  $x_1$ , à savoir:

$$x_1 = 2 \left( \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

et:

$$x_1 = - \left( \frac{2\gamma}{3\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui convient à l'hypothèse  $\omega = -1$ .

Nous supposons toujours que  $x$  et  $x_1$  soient, tous les deux, de petites quantités de l'ordre des excentricités. Relativement à  $x$  cette hypothèse est légitime en soi-même, mais la supposition relativement à  $x_1$  repose sur une autre hypothèse, à savoir qu'on ait:

$$\frac{\gamma}{\beta_3} \underline{\omega} \varepsilon^3,$$

$\varepsilon$  étant une quantité de l'ordre des excentricités ou des inclinaisons.

Les suppositions admises entraînent, comme nous le verrons plus tard, de petites valeurs de  $(R^2)$ , tout au plus de l'ordre de  $\varepsilon^2$ . On ne saurait donc satisfaire à l'équation (11) à moins qu'on n'ait:

$$(1 - \sigma)^2 < 1 - \beta_1$$

et

$$\frac{-(1 - \sigma)^2 + (1 - \beta_1)}{\beta_3} \underline{\omega} \varepsilon^2.$$

On tire immédiatement des équations (4):

$$-(1 - \zeta)^2 + (1 - \sigma)^2 + \frac{3}{4}\beta_3(x^2 - x_1^2) = \frac{\gamma}{x_1},$$

ou bien, si l'on néglige  $\zeta^2$  auprès de  $2\zeta$  et  $\sigma^2$  auprès de  $2\sigma$ ,

$$2(\zeta - \sigma) + \frac{3}{4}\beta_3(x^2 - x_1^2) = \frac{\gamma}{x_1}.$$

D'un autre côté, si l'on ajoute successivement les relations:

$$\frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{16}\beta_3 x_1^2$$

et

$$\frac{\gamma}{x_1} = -\frac{3}{2}\beta_3 x_1^2$$

à l'équation précédente, il en résultera les deux formules que voici:

$$2(\varsigma - \sigma) = -\frac{3}{4}\beta_3 \left( x^2 - \frac{5}{4}x_1^2 \right),$$

$$2(\varsigma - \sigma) = -\frac{3}{4}\beta_3(x^2 + x_1^2).$$

Donc, aux deux solutions relatives au coefficient  $x_1$  correspondent deux valeurs de la différence  $\varsigma - \sigma$ .

Il serait très facile de montrer, par un exemple, l'existence d'un cas tel que nous avons envisagé dans les lignes précédentes. En effet, si l'on admet

$$\beta_1 = 1 - (1 - \sigma)^2 - \frac{9}{4}\beta_3 \left( \frac{2}{3} \frac{r}{\beta_3} \right)^{\frac{2}{3}},$$

et qu'on suppose l'arbitraire  $x$  très petite auprès de  $x_1$ , de sorte qu'on puisse la négliger, la constante ( $R^2$ ) serait aussi très petite. Ayant ainsi satisfait à la condition (11), on a trouvé deux solutions distinctes et différentes entre elles.

Voyons maintenant quelles sont les conséquences de la supposition

$$\varepsilon_2 = 0.$$

On trouve tout d'abord, en ayant égard à la valeur de  $\varepsilon_1$  donnée plus haut, l'équation de condition que voici:

$$(12) \quad (1 - \sigma)^2 - (1 - \beta_1) + \frac{3}{2}\beta_3 \left( x^2 + \frac{1}{2}(R^2) \right) = 0,$$

et la valeur correspondante de  $x_1$  s'obtient immédiatement au moyen de la formule

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\beta_3} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{\frac{2}{3}\beta_3}.$$

Pour comparer les deux cas spéciaux que nous venons d'envisager, désignons par  $\beta'_1$  la valeur de  $\beta_1$  dans le cas où

$$\omega = -1;$$

alors la différence des équations (11) et (12) nous donne:

$$\beta'_1 - \beta_1 = -\frac{9\beta_3}{4} \left[ \frac{2r}{3\beta_3} \right]^{\frac{2}{3}}.$$

On voit donc que même un très petit changement dans la valeur de  $\beta_1$  peut produire de graves altérations dans la nature des intégrales, toutes les fois que la différence  $2\sigma - \beta_1$  est très petite par rapport à  $\sigma$  ou à  $\beta_1$ .

Le cas spécial de notre problème caractérisé par la condition

$$\varepsilon_2 = 0$$

— ou plutôt un cas qui en diffère très peu — a déjà été envisagé par LEVERRIER et plus tard par M. TISSERAND. Les résultats auxquels sont parvenus ces deux savants ne sont cependant pas tout-à-fait décisifs, vu qu'ils n'ont pas considéré, dans leurs recherches, le terme dépendant de  $x_1^3$ . La supposition

$$\varepsilon_2 = 0,$$

ou bien celle-ci:

$$2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 = 0$$

doit alors introduire, dans le résultat, des termes multipliés par le temps ou par un argument astronomique, d'où l'on pourrait conclure l'instabilité du mouvement. Mais en conservant le terme du troisième degré, on évitera non seulement la sortie de l'argument hors des signes trigonométriques, mais encore les très grandes valeurs du coefficient  $x_1$ . Néanmoins le résultat pourrait être tel que l'instabilité fût indiquée.

En effet si, après avoir supposé le coefficient  $\varepsilon_1$  tellement petite que la valeur de  $\omega$  tombe entre  $-1$  et  $+1$ , on admet pour le rapport  $\frac{r}{\beta_3}$  une valeur du premier degré, on obtiendra relativement au coefficient  $x_1$  un résultat dont la valeur numérique sera du même ordre que la racine cubique de l'excentricité. Mais une telle valeur peut s'approcher si près de l'unité que le développement de la fonction perturbatrice cesse d'être convergent. Dans ce cas, on ne saurait rien juger sur la stabilité du mouvement en employant les méthodes qu'on va trouver dans le présent mémoire.



Mais si, au contraire, le rapport  $\frac{\gamma}{\beta_3}$  est du troisième degré, ou d'un degré encore plus élevé, la valeur du coefficient  $x_1$  sera au moins du premier degré, de sorte que la fonction  $\rho_0$  reste toujours une petite quantité de l'ordre des excentricités, l'arbitraire  $x$  étant supposée une quantité du même ordre.

Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus ne sont encore, il est vrai, que très incomplètes; cependant, elles nous offrent une idée de la vraie nature des résultats demandés.

3. Les résultats que nous venons de trouver, dans le numéro précédent, peuvent, si deux racines de l'équation (6) sont égales ou presque égales, s'écarter sensiblement de la solution complète de l'équation (3). On a cependant trouvé une solution qui donne une idée de la vraie solution, ce que nous allons conclure du fait que la fonction  $R$  reste, même dans les cas exceptionnels, de l'ordre de  $\rho_0$ , mais qu'elle devient très petite dans les cas ordinaires, à savoir lorsque la valeur absolue du paramètre  $\omega$  est sensiblement plus grande que l'unité. Relativement aux cas ordinaires, il n'y a nulle difficulté d'obtenir le développement de l'intégrale cherchée tellement exact qu'on peut le désirer.

On peut cependant faire entrer, dès le début, une simplification considérable dans notre problème, en observant que les termes, dont les arguments ont la forme générale

$$(2s + 1)f \pm m(f - f_1),$$

$s$  et  $m$  étant des entiers dont  $s$  peut avoir la valeur d'un nombre positif quelconque à l'exception de zéro, restent toujours très petits dans l'intégrale, du moins si  $m$  n'est pas tellement grand qu'on puisse le comparer à

$$\frac{2s + 1}{\sigma + \varsigma}.$$

Certainement, les termes dont il s'agit exercent quelque influence sur les termes élémentaires, à savoir sur ceux qui dépendent de l'argument

$$f \pm m(f - f_1),$$

mais cette influence est très petite, et on peut en tenir compte d'une

manière très aisée. Nous pouvons donc nous dispenser de considérer, dans notre étude générale, les dits termes.

En réunissant les termes élémentaires, c'est-à-dire ceux dont les arguments permettent des diviseurs fort petits, et qui en conséquence apparaissent fort agrandis dans l'intégrale, nous en désignerons la somme par  $(\rho)$ , et il sera évidemment permis de mettre

$$(13) \quad (\rho) = \eta \cos [(1 - \varsigma)v - \pi],$$

$\eta$  et  $\pi$  étant des fonctions de la différence

$$f - f_1 = w.$$

Maintenant, si nous posons:

$$(14) \quad \begin{cases} g = \eta \cos (\pi - \Gamma), \\ h = \eta \sin (\pi - \Gamma), \end{cases}$$

nous aurons, en admettant toujours la notation

$$f = (1 - \varsigma)v - \Gamma,$$

la formule:

$$(15) \quad (\rho) = g \cos f + h \sin f.$$

Par la définition (13), il est visible qu'on peut mettre:

$$(\rho)^3 = \frac{3}{4}(\rho)\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^3 \cos 3[(1 - \varsigma)v - \pi],$$

et si nous posons, dans l'équation (3),

$$\rho = (\rho) + S,$$

nous pouvons décomposer cette équation dans les deux suivantes:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d^2(\rho)}{dv^2} + \left[1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right](\rho) = -r \cos f_1 + [(\rho), S], \\ \frac{d^2S}{dv^2} + \left[1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]S = \frac{1}{4}\beta_3\eta^3 \cos 3[(1 - \varsigma)v - \pi] \\ \quad + \beta_3 \{3(\rho)^2 + 3(\rho)S + S^2\}S - [(\rho), S]. \end{cases}$$

Il est facile de saisir pourquoi on a introduit les symboles de la forme

$$[x, y].$$

On s'en servira pour transférer certains termes d'une équation à une autre, en supposant déterminée la somme seule des deux équations, tandis que chacune d'elles est supposée en quelque sorte arbitraire.

Concevons, en effet, qu'on ait une équation différentielle quelconque, dont l'intégrale soit cherchée au moyen des approximations successives. L'intégrale étant composée de termes de divers genres, on trouvera souvent utile, pour faciliter la marche du calcul, de trancher d'abord l'équation proposée en plusieurs autres, chacune soumise à la condition de ne donner naissance qu'à des termes d'une forme déterminée. Mais comme chaque approximation nouvelle peut produire des termes de plusieurs formes, la décomposition de l'équation proposée ne s'opère que de proche en proche.

Evidemment, les fonctions désignées par les symboles que nous avons introduits dans les diverses équations, peuvent être déterminées de telle manière que les termes d'une certaine forme soient retranchés d'une équation, mais ajoutés à une autre.

Faisons d'abord l'application de cette manière de distribuer les divers termes sur les différentes équations, dont la somme redonne l'équation primitive.

Si, dans la première des équations (16), on néglige le terme  $[(\rho), S]$  on aura un résultat approché que nous désignerons par

$$(\rho)_1 = \eta_1 \cos [(1 - \zeta_1)v - \pi_1].$$

Ayant des expressions approchées des fonctions  $\eta_1$  et  $\pi_1$ , il sera facile d'établir l'expression approchée de  $S$ .

En effet, les variations de  $\eta$  et de  $\pi$  étant très petites, on est autorisé à intégrer la seconde des équations en y supposant ces fonctions constantes. En ne considérant, dans la première approximation, que le terme tout connu à droite, on a :

$$S = -\frac{\frac{1}{4}\beta_3\eta^3}{9(1-\zeta)^3 - (1-\beta_1)} \cos 3[(1-\zeta)v - \pi],$$

formule dans laquelle on peut introduire les expressions approchées de  $\eta$  et de  $\pi$ .

Les termes dont la forme est celle de termes en  $(\rho)$ , et qui par conséquent doivent être supprimés dans la seconde des équations (16) par le symbole  $[(\rho), S]$ , s'obtiennent tout d'abord. Les voici:

$$[(\rho), S] = -\frac{\frac{3}{16}\beta_3^2\eta^4}{9(1-\zeta)^2 - (1-\beta_1)}(\rho) + \frac{\frac{3}{64}\beta_3^3\eta^6}{[9(1-\zeta)^2 - (1-\beta_1)]^2}(\rho),$$

de sorte qu'on aura, au lieu de la première des équations (16), la suivante:

$$(17) \quad \frac{d^2(\rho)}{dv^2} + \left[ 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2 \right](\rho) = -r \cos f_1$$

$$- \left\{ \frac{\frac{3}{16}\beta_3^2\eta^4}{9(1-\zeta)^2 - (1-\beta_1)} - \frac{\frac{3}{64}\beta_3^3\eta^6}{[9(1-\zeta)^2 - (1-\beta_1)]^2} \right\}(\rho),$$

où l'on peut considérer tous les termes à droite comme donnés.

Il n'y a pas, évidemment, de difficulté de continuer les approximations entamées.

Cela étant, nous abordons l'intégration de l'équation (17) en n'y considérant que le premier terme à droite.

Admettons les développements

$$(18) \quad \begin{cases} g = x + x_1 \cos w + x_2 \cos 2w + \dots \\ h = \lambda_1 \sin w + \lambda_2 \sin 2w + \dots \end{cases}$$

ce qui donne:

$$(19) \quad (\rho) = x \cos f + \frac{1}{2}(x_1 - \lambda_1) \cos(f+w) + \frac{1}{2}(x_2 - \lambda_2) \cos(f+2w) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2}(x_1 + \lambda_1) \cos(f-w) + \frac{1}{2}(x_2 + \lambda_2) \cos(f-2w) + \dots$$

D'un autre côté, puisqu'on a:

$$g^2 + h^2 = \eta^2$$

il sera évidemment possible d'établir le développement

$$(20) \quad \eta^2 = \eta_0^{(2)} + \eta_1^{(2)} \cos w + \eta_2^{(2)} \cos 2w + \dots$$

où, pour abrégier l'écriture, on peut omettre les indices supérieures.

Or, on obtiendra facilement les expressions suivantes:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = x^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + \lambda_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + \lambda_2^2) + \dots \\ \eta_1 = 2xx_1 + [x_1x_2 + \lambda_1\lambda_2] + [x_2x_3 + \lambda_2\lambda_3] + \dots \\ \eta_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - \lambda_1^2) + 2xx_2 + [x_1x_3 + \lambda_1\lambda_3] + [x_2x_4 + \lambda_2\lambda_4] + \dots \\ \eta_3 = 2xx_3 + [x_1x_2 - \lambda_1\lambda_2] + [x_1x_4 + \lambda_1\lambda_4] + [x_2x_5 + \lambda_2\lambda_5] + \dots \\ \eta_4 = \frac{1}{2}(x_2^2 - \lambda_2^2) + [x_1x_3 - \lambda_1\lambda_3] + [x_1x_5 + \lambda_1\lambda_5] + [x_2x_6 + \lambda_2\lambda_6] + \dots \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

et, en se servant de ces notations, les équations de condition que voici:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ -(1 - \epsilon)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 \right] x - \frac{3}{8}\beta_3 \{ x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 + \dots \} = 0, \\ \left[ -(1 - \sigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 \right] (x_1 + \lambda_1) - \frac{3}{4}\beta_3 \left\{ x\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1(x_2 + \lambda_2) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2}\eta_2[x_1 - \lambda_1 + x_3 + \lambda_3] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2}\eta_3[x_2 - \lambda_2 + x_4 + \lambda_4] \right. \\ \quad \left. + \dots \dots \dots \right\} = -2\gamma \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ -[1 - \varsigma + (\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 \right] (x_1 - \lambda_1) \\
 & \quad - \frac{3}{4}\beta_3 \left\{ x\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1(x_2 - \lambda_2) \right. \\
 & \quad \quad \quad + \frac{1}{2}\eta_2[x_1 + \lambda_1 + x_3 - \lambda_3] \\
 & \quad \quad \quad + \frac{1}{2}\eta_3[x_2 + \lambda_2 + x_4 - \lambda_4] \\
 & \quad \quad \quad \left. + \dots \dots \dots \right\} = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \left[ -[1 - \varsigma - n(\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 \right] (x_n + \lambda_n) \\
 \text{(II)} \quad & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_1[x_{n-1} + \lambda_{n-1} + x_{n+1} + \lambda_{n+1}] \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_2[x_{n-2} + \lambda_{n-2} + x_{n+2} + \lambda_{n+2}] \\
 & \quad - \dots \dots \dots \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_{n-1}[x_1 + \lambda_1 + x_{2n-1} + \lambda_{2n-1}] \\
 & \quad - \frac{3}{4}\beta_3\eta_n \left[ x + \frac{1}{2}(x_{2n} + \lambda_{2n}) \right] \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_{n+1}[x_1 - \lambda_1 + x_{2n+1} + \lambda_{2n+1}] \\
 & \quad - \dots \dots \dots = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ - [1 - \varsigma + n(\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 \right] (x_n - \lambda_n) \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_1 [x_{n-1} - \lambda_{n-1} + x_{n+1} - \lambda_{n+1}] \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_2 [x_{n-2} - \lambda_{n-2} + x_{n+2} - \lambda_{n+2}] \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_{n-1} [x_1 - \lambda_1 + x_{2n-1} - \lambda_{2n-1}] \\
 & \quad - \frac{3}{4}\beta_3\eta_n \left[ x + \frac{1}{2}(x_{2n} - \lambda_{2n}) \right] \\
 & \quad - \frac{3}{8}\beta_3\eta_{n+1} [x_1 + \lambda_1 + (x_{2n+1} - \lambda_{2n+1})] \\
 & \quad - \dots = 0.
 \end{aligned}$$

La solution de ces deux systèmes d'équations est visiblement très pénible: s'il était permis de supposer les coefficients  $\eta_0, \eta_1, \dots$  connus, la détermination des coefficients  $x_1, x_2, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  et de  $\varsigma$  dépendrait de la solution d'un système infini d'équations linéaires, mais puisque, dans notre problème, les  $\eta^{(2)}$  sont des fonctions du deuxième degré par rapport aux coefficients  $x$  et  $\lambda$ , il faut considérer les systèmes (I) et (II) simultanément. On comprend aisément que la solution des équations dont il s'agit ne s'obtient qu'au moyen d'approximations; mais même par cette voie il serait difficile de parvenir à des résultats exacts. Nous nous contenterons d'en indiquer les premières opérations.

Supposons, dans ce but, qu'on puisse négliger les coefficients  $x_2$  et  $\lambda_2$ , ainsi que tous les coefficients suivants; alors nous aurons:

$$\begin{aligned}
 \eta_0 &= x^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + \lambda_1^2), \\
 \eta_1 &= 2xx_1, \\
 \eta_2 &= \frac{1}{2}(x_1^2 - \lambda_1^2),
 \end{aligned}$$

et les trois premières des équations du système (II) deviennent

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} -(1 - \varsigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + \lambda_1^2) \right] = \frac{3}{4}\beta_3 x_1^2, \\ \left\{ -(1 - \sigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + \lambda_1^2) \right] \right\} (x_1 + \lambda_1) \\ \quad - \frac{3}{16}\beta_3 (x_1^2 - \lambda_1^2)(x_1 - \lambda_1) - \frac{3}{2}\beta_3 x^2 x_1 = -2\gamma, \\ \left\{ -[1 - \varsigma + (\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + \lambda_1^2) \right] \right\} (x_1 - \lambda_1) \\ \quad - \frac{3}{16}\beta_3 (x_1^2 - \lambda_1^2)(x_1 + \lambda_1) - \frac{3}{2}\beta_3 x^2 x_1 = 0. \end{array} \right.$$

Sans entrer dans les détails quant à la détermination des trois inconnues:  $\varsigma$ ,  $x_1$  et  $\lambda_1$ , on peut tout de suite, des équations signalées, tirer quelques conséquences importantes.

En formant la différence entre les deux premières de ces équations, après avoir divisé la deuxième par  $x_1 + \lambda_1$ , nous aurons:

$$2(\sigma - \varsigma) - (\sigma^2 - \varsigma^2) = \frac{1}{x_1 + \lambda_1} \left\{ \frac{3}{2}\beta_3 x^2 x_1 - 2\gamma \right\} + \frac{3}{16}\beta_3 (x_1 - \lambda_1)^2 - \frac{3}{4}\beta_3 x_1^2.$$

De même, la première et la troisième des dites équations, celle-là étant divisée par  $x_1 - \lambda_1$ , nous donne:

$$-2(\sigma - \varsigma)(1 - \varsigma) - (\sigma - \varsigma)^2 = \frac{3}{2}\beta_3 \frac{x^2 x_1}{x_1 - \lambda_1} + \frac{3}{16}\beta_3 (x_1 + \lambda_1)^2 - \frac{3}{4}\beta_3 x_1^2.$$

Ces deux résultats nous fournit les suivants, en omettant  $\varsigma$  auprès de l'unité: d'abord la formule

$$4(\sigma - \varsigma) = \frac{3}{2}\beta_3 x^2 x_1 \left[ \frac{1}{x_1 + \lambda_1} - \frac{1}{x_1 - \lambda_1} \right] - \frac{3}{4}\beta_3 x_1 \lambda_1 - \frac{2\gamma}{x_1 + \lambda_1},$$

et puis, en négligeant le terme  $\sigma^2 - \varsigma^2$ , l'équation

$$0 = \frac{3}{2}\beta_3 x^2 x_1 \left[ \frac{1}{x_1 + \lambda_1} + \frac{1}{x_1 - \lambda_1} \right] - \frac{2\gamma}{x_1 + \lambda_1} + \frac{3}{8}\beta_3 (x_1^2 + \lambda_1^2) - \frac{3}{2}\beta_3 x_1^2.$$



Si dans cette dernière équation ainsi que dans la deuxième des équations (21) on met:

$$\lambda_1 = px_1,$$

on aura:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\beta_3 x^2 - \frac{2\gamma}{x_1}(1-p) - \frac{3}{2}\beta_3 x_1^2(1-p^2) + \frac{3}{8}\beta_3 x_1^2(1-p^4), \\ \left[ -(1-\sigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 x^2 \right] (1+p)x_1 - \frac{3}{2}\beta_3 x^2 x_1 - \frac{3}{16}\beta_3 (1-p)(1-p^2)x_1^2 \\ &\quad - \frac{3}{8}\beta_3 (1+p)(1+p^2)x_1^3 = -2\gamma. \end{aligned}$$

On voit facilement que ces deux équations sont satisfaites par une valeur positive de  $x_1$ , jointe à une valeur de  $p$  entre 0 et +1. Mais cette racine positive pouvant devenir, dans certains cas, trop grande pour être compatible avec la nature de notre problème, il faut qu'on examine le cas d'une racine négative.

Posons:

$$\frac{\gamma}{3\beta_3 x_1^2} = -f,$$

la quantité  $f$  est, par l'hypothèse, toujours positive, pourvu que le coefficient  $\gamma$  soit positif. De l'équation du quatrième degré en  $p$  on tire maintenant:

$$0 = \frac{x^2}{x_1^2} + 2f(1-p) - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} - p^2 + \frac{1}{4}p^4 \right).$$

Il découle de cette équation, ce qu'on voit facilement, qu'une des racines s'approche de l'unité, à mesure que le coefficient  $f$  prend des valeurs plus considérables. Mais, dans les cas qui se présentent le plus souvent, le coefficient  $\gamma$  est de l'ordre du produit  $\beta_3 x$ , d'où l'on conclut une assez grande valeur de  $f$ , et, en conséquence, que le facteur  $p$  ne diffère que très peu de l'unité.

Si, dans les résultats que nous avons obtenus précédemment, on suppose  $p = 1$ , on retombera dans les équations (4), en y omettant les termes dépendant de  $(R)$ . Ces équations peuvent donc servir comme

point de départ des approximations successives toutes les fois qu'on est autorisé à commencer par l'hypothèse

$$p = 1.$$

Mais nous avons appris, dans ce qui précède, que la valeur de  $p$  ne diffère ordinairement que très peu de l'unité, on est donc amené à commencer les approximations par admettre cette hypothèse, ou bien par faire application des équations (4).

Si l'on retient  $x_2$  et  $\lambda_2$  à côté de  $x_0$ ,  $x_1$  et  $\lambda_1$ , en supposant les coefficients  $x_3$ ,  $\lambda_3$ , ... négligeables, les règles du calcul deviendront plus compliquées que celles que nous avons communiquées précédemment. Mais comme nous allons connaître, dans les pages suivantes, des méthodes plus expéditives, nous n'insistons plus à poursuivre la voie stérile des déterminations successives des coefficients, bien que la méthode entamée puisse donner, excepté dans les cas trop difficiles, des résultats satisfaisants. Mais sans entrer dans le détail du calcul, on peut tirer des systèmes (I) et (II) une conclusion importante.

Admettons que  $\gamma$  soit une quantité du troisième degré, c'est à dire une quantité du troisième ordre par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, nous aurons, en négligeant  $x_2$  et  $\lambda_2$  ainsi que les coefficients suivants, un résultat du premier degré quant à  $x_1$  et  $\lambda_1$ , la différence  $2\sigma - \beta_1$  étant toujours supposée très petite. Si ensuite nous introduisons ces valeurs dans  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , ainsi que dans les deux équations du système (II) qui contiennent les produits de  $\eta_0$  par  $(x_2 + \lambda_2)$  et  $(x_2 - \lambda_2)$ , et que nous omettions les termes dépendant de  $x_3$  et de  $\lambda_3$  ainsi que les coefficients suivants, les valeurs de  $x_2$  et de  $\lambda_2$  que nous obtenons ainsi seront, ce qui est facile à voir, du même degré que le sont  $x_1$  et  $\lambda_1$ . En continuant les opérations analogues, on aura toujours des résultats du premier degré. Donc, si la suite des coefficients  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , ... forment une série convergente, cela tient à la convergence des facteurs, contenus dans ces quantités, qui ne dépendent que des indices.

Nous sommes donc arrivés au fait que les expressions représentant les inégalités planétaires peuvent renfermer des développements, ne procédant ni suivant les puissances des forces troublantes, ni suivant celles des excentricités ou des inclinaisons. Nous verrons que ces séries, néanmoins,

sont convergentes, et qu'elles ne nécessitent pas la substitution d'un nouvel argument à l'argument astronomique.

4. Au lieu de chercher immédiatement le développement suivant les multiples de  $v$ , on peut se proposer de faire avancer la solution de notre problème en introduisant une nouvelle variable indépendante convenablement choisie. Si en même temps, on remplace la fonction  $(\rho)$  par une autre,  $E$ , il sera possible de déterminer la relation entre  $(\rho)$  et  $E$ , et celle qui existe entre  $v$  et la nouvelle variable que nous désignerons par  $u$ , de manière à nous offrir immédiatement une méthode d'effectuer les approximations successives et de faire voir la convergence du résultat.

En effet, si nous désignons par  $\phi$  une fonction encore à notre disposition, et que nous posions:

$$(\rho) = \frac{E}{1 + \phi}; \quad dv = \frac{du}{(1 + \phi)^2},$$

nous aurons une nouvelle équation différentielle du second ordre en  $E$ , qui est linéaire, mais qui contient, au lieu de la troisième puissance de  $E$ , une certaine fonction de ses coefficients. La fonction  $\phi$  peut être choisie tellement que l'équation en  $E$  s'intègre immédiatement lorsque les termes à droite sont connus; mais ces termes n'étant pas tout connus d'abord, il faut les chercher au moyen des approximations.

Des relations écrites ci-dessus on tire facilement:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2} = \frac{d^2E}{du^2} (1 + \phi)^3 - E \frac{d^2\phi}{du^2} (1 + \phi)^2.$$

En vertu de cette expression et de la relation qui lie  $(\rho)$  à  $E$ , l'équation (17) se transforme en celle-ci:

$$\frac{d^2E}{du^2} + \left\{ \frac{1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2}{(1 + \phi)^4} - \frac{1}{1 + \phi} \frac{d^2\phi}{du^2} \right\} E = \frac{1}{(1 + \phi)^3} \{-r \cos f_1 - \dots\}.$$

Maintenant, si nous déterminons la fonction  $\phi$  de façon à satisfaire à l'équation

$$\frac{1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2}{(1 + \phi)^4} - \frac{d^2\phi}{du^2} \frac{1}{1 + \phi} = 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3H,$$

$H$  étant une constante que nous choisissons de manière que la variable  $u$  soit un argument astronomique, c'est à dire qu'elle passe avec  $v$  par  $0, 2\pi, 4\pi$ , etc., nous aurons:

$$(24) \quad \frac{d^3 E}{du^3} + \left\{ 1 - \beta_1 - \frac{3}{4} \beta_3 H \right\} E = \frac{1}{(1 + \phi)^2} \{ -r \cos f_1 + \dots \}$$

et

$$(25) \quad \frac{d^3 \phi}{du^3} + \left\{ 4(1 - \beta_1) - \frac{3}{4} \beta_3 (3\eta^2 + H) \right\} \phi - 6 \left( 1 - \beta_1 - \frac{3}{4} \beta_3 \eta^2 \right) \phi^2 + \dots \\ = -\frac{3}{4} \beta_3 (\eta^2 - H).$$

En désignant la différence  $v - u$  par  $\Psi$ , et en posant:

$$U = (1 - \zeta)u - \Gamma = f - (1 - \zeta)\Psi,$$

$$U_1 = (1 - \sigma)u - B = f_1 - (1 - \sigma)\Psi,$$

la fonction  $\eta^2$  s'exprimera évidemment au moyen de l'argument

$$U - U_1 = \omega$$

et de la fonction  $\Psi$ . Si l'on néglige, dans la première approximation, la fonction  $\Psi$ , nous aurons en vertu de l'équation (25) la valeur de  $\phi$ , après quoi la fonction  $\Psi$  s'obtient au moyen d'une quadrature. Cette fonction,  $\phi$ , étant en quelque sorte arbitraire, on peut omettre d'y introduire les termes dépendant des constantes d'intégration. On aura en conséquence la fonction dont il s'agit exprimée par la seule variable  $\omega$ , et en continuant les approximations, les deux quantités,  $\eta^2$  et  $\phi$ , ne dépendront que de la dite variable.

La première approximation relativement à  $\phi$  s'obtenant tout de suite, nous aurons:

$$(26) \quad \phi = -\frac{3}{16} \beta_3 (\eta^2 - H),$$

et puisqu'on a:

$$dv = (1 - 2\phi + 3\phi^2 - \dots) du,$$

il est aisé de voir que la fonction  $\Psi$  s'exprime approximativement par la formule

$$(27) \quad \Psi = \frac{3}{8} \beta_3 \int (\eta^2 - H) du.$$

Donc, la constante  $H$  doit, dans la première approximation, être égale au terme constant du développement de la fonction  $\eta^2$ , terme que nous avons désigné par  $\eta_0$ .

Par ces considérations il est facile de comprendre que les termes au membre droit de l'équation (24) peuvent être transformés en termes dépendant des arguments  $U_1$  et  $\omega$ , et que la série qu'on obtient ainsi sera convergente. En effet, par la relation

$$f_1 = U_1 + (1 - \sigma)\Psi$$

on aura

$$\cos f_1 = P \cos U_1 - Q \sin U_1,$$

$P$  et  $Q$  étant des fonctions de  $\omega$ , à savoir:

$$P = 1 - \frac{1}{1.2} (1 - \sigma)^2 \Psi^2 + \frac{1}{1.2.3.4} (1 - \sigma)^4 \Psi^4 - \dots,$$

$$Q = (1 - \sigma)\Psi - \frac{1}{1.2.3} (1 - \sigma)^3 \Psi^3 + \dots$$

Mais en considérant d'abord  $\Psi$  comme une série trigonométrique dont l'argument est  $\omega$ , on aura les fonctions  $P$  et  $Q$  exprimées au moyen de développements analogues, qui seront nécessairement convergentes.

Il s'ensuit des résultats que nous venons d'établir que la fonction  $E$  s'exprime par les arguments  $U$  et  $\omega$ , de sorte que, si l'on pose:

$$(28) \quad E = X \cos U + Y \sin U,$$

les fonctions  $X$  et  $Y$  seront données au moyen des développements:

$$X = k + k_1 \cos \omega + k_2 \cos 2\omega + \dots,$$

$$Y = l_1 \sin \omega + l_2 \sin 2\omega + \dots,$$

les  $k$  et les  $l$  étant des coefficients constants.

Les fonctions  $g$  et  $h$  que nous avons introduites par les équations (14) s'expriment aisément au moyen de  $X$  et de  $Y$ . Pour établir ces relations, nous remplaçons, dans l'équation (28), l'argument  $U$  par  $f - (1 - \zeta)\Psi$ . Nous aurons ainsi:

$$E = \{X \cos [(1 - \zeta)\Psi] - Y \sin [(1 - \zeta)\Psi]\} \cos f \\ + \{X \sin [(1 - \zeta)\Psi] + Y \cos [(1 - \zeta)\Psi]\} \sin f;$$

et puisqu'on a

$$E = (1 + \phi)(\rho),$$

on en tire:

$$(29) \quad \begin{cases} g = \frac{X \cos [(1 - \zeta)\Psi] - Y \sin [(1 - \zeta)\Psi]}{1 + \phi}, \\ h = \frac{X \sin [(1 - \zeta)\Psi] + Y \cos [(1 - \zeta)\Psi]}{1 + \phi}. \end{cases}$$

En formant l'expression

$$(H)^2 = X^2 + Y^2,$$

on reconnaîtra au premier coup d'oeil la relation entre  $\eta^2$  et  $(H)^2$ ; elle est la suivante:

$$(30) \quad \eta^2 = \frac{(H)^2}{(1 + \phi)^2},$$

qui entraîne celle-ci:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\eta^2}{(H)^2}.$$

On obtient donc facilement les  $g, h, \eta^2$ , les  $X, Y, (H)^2$  étant connus.

Si l'on établit les expressions

$$P = \mu_0 + \mu_1 \cos \omega + \mu_2 \cos 2\omega + \dots,$$

$$Q = \nu_1 \sin \omega + \nu_2 \sin 2\omega + \dots,$$

on aura, vu que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont soumises à la condition

$$P^2 + Q^2 = 1,$$

les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 1 &= \mu_0^2 + \frac{1}{2}\mu_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2 + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{2}\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2 + \dots \\
 0 &= 2\mu_0\mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \dots \\
 &\quad + \nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \dots \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit de là que parmi les coefficients  $\mu$  et  $\nu$  il n'y a aucun qui surpasse la limite  $\sqrt{2}$ , et que, si plusieurs de ces coefficients ne sont pas très petits, chacun d'eux est sensiblement inférieur à l'unité. On peut fixer, par cette circonstance, le point de départ des approximations successives.

Ayant ainsi indiqué les résultats qu'on peut, sans trop de peine, obtenir en utilisant les méthodes indirectes, nous allons, pour intégrer l'équation proposée, aborder l'application des fonctions elliptiques, ce qui nous fournira des méthodes plus directes.

## § 2. *Solution au moyen des fonctions elliptiques. Première méthode.*

1. Reprenons l'équation (17) du paragraphe précédent, laquelle nous écrivons maintenant de la manière suivante:

$$(1) \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\gamma^2\right)\rho = -r \cos f_1.$$

Evidemment, on y a négligé les termes contenus dans le symbole [ ]; puis, on a omis, pour abrégé l'écriture, les crochets autour de  $\rho$ .

Après avoir, dans l'équation ainsi établie, introduit:

$$(2) \quad \rho = G \cos f_1 + H \sin f_1,$$

on peut déterminer les fonctions  $G$  et  $H$ , qui restent encore à notre disposition, mais qui sont toutefois soumises à la condition

$$G^2 + H^2 = \eta^2,$$

de façon qu'elles deviennent indépendantes des arguments  $f$  et  $f_1$  isolés; la seule variable dont dépendent maintenant ces fonctions, est donc la différence

$$f - f_1 = w.$$

Si l'on introduit l'expression (2) dans l'équation (1), et qu'on fasse disparaître les coefficients de  $\cos f_1$  et de  $\sin f_1$ , on aura les équations suivantes:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 G}{dv^2} + 2(1 - \sigma) \frac{dH}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \eta^2 \right] G = -r, \\ \frac{d^2 H}{dv^2} - 2(1 - \sigma) \frac{dG}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \eta^2 \right] H = 0. \end{cases}$$

Les fonctions  $G$  et  $H$  ne dépendant que de l'argument  $w$ , il est visible que leurs secondes dérivées sont très petites par rapport aux premières; il y a donc lieu à établir une première approximation en intégrant le système

$$(4) \quad \begin{cases} 2(1 - \sigma) \frac{dH}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \eta^2 \right] G = -r, \\ -2(1 - \sigma) \frac{dG}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \eta^2 \right] H = 0. \end{cases}$$

Après avoir formé les expressions approchées de  $G$  et de  $H$ , on développera très facilement celles des fonctions

$$M = -\frac{d^2 G}{dv^2}; \quad N = -\frac{d^2 H}{dv^2};$$

et les expressions de  $G$  et de  $H$  s'obtiennent maintenant avec une exactitude plus grande que n'offrent les résultats à tirer des équations (4), en intégrant le système que voici:

$$(5) \quad \begin{cases} 2(1 - \sigma) \frac{dH}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \eta^2 \right] G = -r + M, \\ -2(1 - \sigma) \frac{dG}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 \eta^2 \right] H = N. \end{cases}$$



Maintenant, si l'on fait:

$$(6) \quad \eta^2 = \frac{4}{3} \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} + \frac{y}{1 - \sigma},$$

et qu'on observe la relation

$$2 \left( G \frac{dG}{dv} + H \frac{dH}{dv} \right) = 2\eta \frac{d\eta}{dv} = \frac{1}{1 - \sigma} \frac{dy}{dv},$$

on déduit des équations précédentes:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dv} = -rH + MH - NG, \\ -\frac{3}{8}\beta y \frac{dy}{dv} = -r \frac{dG}{dv} + M \frac{dG}{dv} + N \frac{dH}{dv}, \end{cases}$$

équations dans lesquelles on a admis, pour abréger, la notation

$$\frac{\beta_3}{(1 - \sigma)^2} = \beta.$$

L'intégrale de la seconde des équations (7) s'obtient immédiatement. En désignant la constante d'intégration par:

$$-re_0 + \frac{3}{16}\beta_3 \left[ e_0^2 - \frac{4}{3} \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} \right]^2,$$

$e_0$  étant une arbitraire, ou bien par:

$$-re_0 + \frac{3}{16}\beta\delta^2,$$

où l'on a employé la notation

$$(8) \quad \frac{4}{3} \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} - e_0^2 = \frac{\delta}{1 - \sigma},$$

on aura:

$$(9) \quad \frac{3}{16}\beta(\delta^2 - y^2) - re_0 = -rG + \int \left[ M \frac{dG}{dv} + N \frac{dH}{dv} \right] dv.$$

Je préfère de garder l'équation (9) sous la forme précédente, bien qu'on puisse l'écrire ainsi:

$$\frac{3}{16}\beta(\delta^2 - y^2) - re_0 = -rG - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dG}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dv}\right)^2\right\}.$$

En vertu des notations que je viens d'employer, la relation entre  $\eta^2$  et  $y$  s'exprime au moyen de la formule suivante:

$$\eta^2 - e_0^2 = \frac{1}{1-\sigma}(y + \delta);$$

et si l'on pose:

$$y + \delta = z$$

on aura:

$$(10) \quad \eta^2 = e_0^2 + \frac{z}{1-\sigma}.$$

Cela étant, supposons:

$$M = N = 0$$

et formons la somme des carrés de la première des équations (7) et de l'équation (9); dans l'équation résultante, remplaçons  $y$  par  $z - \delta$ , et éliminons  $\eta^2$  à l'aide de l'équation (10). Nous aurons:

$$(11) \quad \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = z\left\{\frac{\gamma^2}{1-\sigma} + \frac{3}{4}r\beta e_0\delta - \left[\frac{3}{8}r\beta e_0 + \frac{9}{64}\beta^2\delta^2\right]z + \frac{9}{64}\beta^2\delta z^2 - \frac{9}{256}\beta^2 z^3\right\}.$$

Le résultat que nous venons de trouver s'obtient aussi de la manière suivante:

En différentiant la première des équations (7), après y avoir introduit  $z$  au lieu de  $y$ , nous aurons:

$$\frac{d^2z}{dv^2} = -\gamma\frac{dH}{dv} + \frac{d(MH - NG)}{dv};$$

mais la première des équations (5) nous donne:

$$2(1-\sigma)\frac{dH}{dv} - \frac{3}{4}\beta_3\frac{y}{1-\sigma}G = -\gamma + M,$$

ou bien:

$$r \frac{dH}{dv} = \frac{3}{8} r \beta (z - \delta) G = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{1 - \sigma} + \frac{1}{2} \frac{M}{1 - \sigma}.$$

En y introduisant la valeur de  $rG$  tirée de l'équation (9), l'expression de  $\frac{dH}{dv}$  devient

$$r \frac{dH}{dv} = \frac{3}{8} \beta (z - \delta) \left\{ r e_0 + \frac{3}{16} \beta z (z - \delta) + \int \left[ M \frac{dG}{dv} + N \frac{dH}{dv} \right] dv \right\} \\ - \frac{1}{2} \frac{r^2}{1 - \sigma} + \frac{1}{2} \frac{r}{1 - \sigma} M.$$

Maintenant, si nous adoptons la notation

$$(12) \quad W = -\frac{3}{8} \beta (z - \delta) \int \left[ M \frac{dG}{dv} + N \frac{dH}{dv} \right] dv - \frac{1}{2} \frac{r}{1 - \sigma} M + \frac{d(MH - NG)}{dv},$$

l'équation du second ordre devient:

$$(13) \quad \frac{d^2 z}{dv^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{1 - \sigma} + \frac{3}{4} r \beta e_0 \delta \right] - \left[ \frac{3}{8} r \beta e_0 + \frac{9}{64} \beta^2 \delta^2 \right] z \\ + \frac{3}{2} \frac{9}{64} \beta^2 \delta z^2 - \frac{9}{128} \beta^2 z^3 + W.$$

Si, dans cette équation, nous faisons  $W = 0$ , nous retrouverons, en l'intégrant, l'équation (11), pourvu que l'arbitraire introduite par l'intégration ait la valeur zéro. Mais nous pouvons nous servir de l'équation (13) afin d'avoir l'expression complète de  $z$  au moyen des approximations successives, en supposant dans la première approximation  $W = 0$ . A l'aide de la valeur approchée de  $z$  que nous désignerons par  $z_0$ , on formera l'expression de la fonction  $W_0$  qui servira comme valeur approchée de  $W$ .

En désignant par  $\Delta z$  la correction à ajouter à  $z_0$  pour avoir l'expression complète de  $z$ , on aura une valeur approchée de  $\Delta z$  en intégrant l'équation

$$(14) \quad \frac{d^2 \Delta z}{dv^2} + \left[ \frac{3}{8} r \beta e_0 + \frac{9}{64} \beta^2 \delta^2 - \frac{27}{64} \beta^2 \delta z_0 + \frac{27}{128} \beta^2 z_0^2 \right] \Delta z \\ - \frac{27}{128} \beta^2 [-\delta + z_0] \Delta z^2 - \frac{9}{128} \beta^2 \Delta z^3 + W,$$

après y avoir remplacé la fonction  $W$  par  $W_0$  et supprimé les termes dépendant de  $\Delta z^2$  et  $\Delta z^3$ .

Ayant obtenu, de la manière indiquée, une valeur préliminaire de  $\Delta z$ , on cherchera de nouveau la fonction  $W$ , et on aura, en utilisant toujours l'équation (14), un résultat plus approché que le précédent. En continuant ces procédés, on parvient à une expression de  $\Delta z$  dont l'exactitude sera très grande.

Il s'agit maintenant de trouver l'intégrale de l'équation (14), la partie à droite étant supposée tout connue. Nous allons montrer, dans le numéro suivant, qu'une équation linéaire de la forme dont il s'agit s'intègre rigoureusement au moyen des fonctions connues.

2. Supposons qu'on connaisse l'intégrale de l'équation

$$(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = A_0 + A_1y + A_2y^2 + \dots + A_ny^n.$$

En désignant cette intégrale par

$$Y = f(x, a, b),$$

$a$  et  $b$  étant les arbitraires d'intégration, nous admettons que ses dérivées partielles par rapport à  $a$  et à  $b$  restent holomorphes, les valeurs de  $a$  et de  $b$  étant comprises entre des limites déterminées.

Maintenant, si l'on pose:

$$a = a_0 + \alpha, \quad b = b_0 + \beta,$$

et qu'on désigne par

$$Y_0 = f(x, a_0, b_0)$$

la valeur de  $Y$  correspondant aux valeurs spéciales  $a_0$  et  $b_0$ , la fonction  $Y$  s'exprimera au moyen de la série infinie dont les premiers termes sont ceux-ci:

$$Y = Y_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial a_0} \alpha + \frac{\partial Y_0}{\partial b_0} \beta + \dots$$

En portant ce développement dans l'équation proposée, nous aurons, en égalant à zéro les coefficients de  $\alpha$  et de  $\beta$ ,

$$\frac{d^2 \frac{\partial Y_0}{\partial a_0}}{dx^2} = [A_1 + 2A_2 Y_0 + 3A_3 Y_0^2 + \dots + nA_n Y_0^{n-1}] \frac{\partial Y_0}{\partial a_0},$$

et une autre équation en  $\frac{\partial Y_0}{\partial b_0}$  tout à fait semblable. Donc, la fonction  $Y$  étant l'intégrale de l'équation ( $\alpha$ ), l'intégrale de l'équation

$$(\beta) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = [A_1 + 2A_2 Y + 3A_3 Y^2 + \dots + nA_n Y^{n-1}] y$$

s'exprime au moyen de la formule

$$(\gamma) \quad y = C_1 \frac{\partial Y}{\partial a} + C_2 \frac{\partial Y}{\partial b},$$

$C_1$  et  $C_2$  étant les deux arbitraires.

Voici quelques applications du théorème que nous venons d'établir; nous y admettons d'abord  $n = 3$  et

$$A_0 = A_2 = 0.$$

Soient, en faisant dans notre premier exemple la distinction entre trois cas différents,

$$\begin{array}{ll} 1) & A_1 = -(1 + k^2); \quad A_3 = 2k^2, \\ 2) & A_1 = 2k^2 - 1; \quad A_3 = -2k^2, \\ 3) & A_1 = 2 - k^2; \quad A_3 = -2, \end{array}$$

où l'on a désigné par  $k^2$  une constante prise à volonté. Une première intégrale de l'équation ( $\alpha$ ) s'obtenant immédiatement, les résultats s'écrivent, si l'on choisit les arbitraires convenablement, ainsi:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)y^2 + k^2 y^4,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - k^2 + (2k^2 - 1)y^2 - k^2 y^4,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (2 - k^2)y^2 - y^4.$$

La seconde intégration nous donne, en désignant par  $x_0$  l'arbitraire, qui reste la même dans tous les trois cas,

$$Y = \operatorname{sn}(x + x_0),$$

$$Y = \operatorname{cn}(x + x_0),$$

$$Y = \operatorname{dn}(x + x_0).$$

Maintenant, si l'on porte ces valeurs dans l'équation ( $\beta$ ), il en résulte les trois équations suivantes, dans lesquelles on a mis  $x$  au lieu de  $x + x_0$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2 \cdot 3 k^2 \operatorname{sn} x^2 - (1 + k^2)]y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2 \cdot 3 k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - 4k^2]y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2 \cdot 3 k^2 \operatorname{sn} x^2 - 4 - k^2]y;$$

et, en vertu de la formule ( $\gamma$ ), on en trouve les intégrales particulières:

$$y = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$y = -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,$$

$$y = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.$$

Il serait facile d'obtenir, en différentiant par rapport à l'autre arbitraire, ou bien par rapport au module, les autres intégrales particulières; cependant, le calcul qui s'y rapporte, et qui s'appuyerait sur les formules connues de M. HERMITE, n'étant pas d'intérêt direct pour nos recherches, nous nous dispensons de le donner.

On a donc retrouvé les intégrales connues de l'équation de LAMÉ, pour des valeurs particulières des arbitraires qu'elle contient.

Examinons maintenant le cas où l'on a:

$$Y = \frac{\nu(1 - \operatorname{sn} x)}{1 - p \operatorname{sn} x},$$

$\nu$  et  $p$  étant des coefficients constants dont les valeurs absolues sont plus petites que l'unité.

En supposant l'une des arbitraires d'intégration comprise dans la variable  $x$  on aurait:

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = - \frac{\nu(1-p) \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1-p \operatorname{sn} x)^2}.$$

Donc, cette expression est aussi une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ A_1 + 2A_2 \frac{\nu(1-\operatorname{sn} x)}{1-p \operatorname{sn} x} + 3A_3 \left( \frac{\nu(1-\operatorname{sn} x)}{1-p \operatorname{sn} x} \right)^2 \right] y,$$

les coefficients  $A_0, A_1, A_2, A_3$  de même que l'arbitraire  $\bar{A}$  introduite par l'intégration de l'équation ( $\alpha$ ) ayant des valeurs telles que l'expression hypothétique que nous avons donnée à  $Y$  soit une intégrale de l'équation

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \bar{A} + A_0 y + \frac{1}{2} A_1 y^2 + \frac{1}{3} A_2 y^3 + \frac{1}{4} A_3 y^4.$$

Cela étant, au lieu de chercher l'autre intégrale particulière au moyen d'une différentiation partielle il vaut mieux la déduire moyennant la formule bien connue:

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2},$$

dans laquelle on doit maintenant porter la valeur

$$y_1 = - \frac{\nu(1-p) \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1-p \operatorname{sn} x)^2}.$$

Il résulte de là:

$$y_2 = - \frac{\nu(1-p) \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1-p \operatorname{sn} x)^2} \int \frac{(1-p \operatorname{sn} x)^4 dx}{\nu^2(1-p)^2 \operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2}.$$

Cette formule n'étant pas encore mise sous une forme propre à l'usage, il faut la transformer d'une manière convenable. Dans ce but nous nous rappelons les relations

$$\frac{1}{\operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{k'^2 \operatorname{cn} x^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{1}{\operatorname{dn} x^2},$$

$$\frac{k^2}{\operatorname{cn} x^2} = \frac{K - E - k^2 K}{K} - \frac{d \frac{H_1(x)}{H_1(x)}}{dx},$$

$$-\frac{k^2}{\operatorname{dn} x^2} = -\frac{E}{K} - \frac{d \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)}}{dx}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{1}{\operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{k'^4} \left\{ \frac{K - E - k^2 K}{K} - \frac{d \frac{H_1(x)}{H_1(x)}}{dx} - k^2 \frac{E}{K} - k^2 \frac{d \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)}}{dx} \right\}.$$

Mais, puisqu'on a:

$$\frac{H_1'(x)}{H_1(x)} = \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)} - \frac{k^2 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x},$$

la formule précédente s'écrit ainsi:

$$\frac{1}{\operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{k'^4} \left\{ l + \frac{d \frac{k^2 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}}{dx} - (1 + k^2) \frac{d \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)}}{dx} \right\},$$

où l'on a désigné par  $l$  la constante

$$\frac{(1 - k^2)K - (1 + k^2)E}{K} = \frac{3}{2} \frac{\pi}{2K} k^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8} k^2 - \frac{1}{64} k^4 - \dots \right\}.$$

En vertu de ces formules on trouverait facilement l'expression de  $y_2$  sous la forme d'une série trigonométrique convergente pour toutes les valeurs réelles de  $x$ , à laquelle se trouve ajouté un terme de la forme

$$\frac{hx \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1 - p \operatorname{sn} x)^2},$$

$h$  étant une constante.

Le calcul serait presque tout à fait identique avec celui dont nous avons fait l'exposé dans les lignes précédentes, si nous avions supposé:

$$Y = \frac{\nu(1 - \operatorname{cn} x)}{1 - p \operatorname{cn} x}.$$



Les formules y relatives s'obtiennent aussi des précédentes au moyen d'une transformation des fonctions elliptiques qui y entrent; mais puisque les nouvelles expressions nous seront utiles dans ce qui suit, je vais les déduire directement avec quelques détails.

Il s'agit d'abord de donner à la fonction

$$y_2 = \frac{\nu(1-p) \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1-p \operatorname{cn} x)^2} \int \frac{(1-p \operatorname{cn} x)^4 dx}{\nu^2(1-p)^2 \operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^2}$$

une forme convenable.

En vertu des relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^2} &= \frac{1}{\operatorname{sn} x^2} + \frac{k^2}{\operatorname{dn} x^2}, \\ \frac{k^2}{\operatorname{dn} x^2} &= \frac{k^2 E}{k'^2 K} + \frac{k^2}{k'^2} \frac{d \theta_1'(x)}{\theta_1(x)}, \\ \frac{1}{\operatorname{sn} x^2} &= \frac{K-E}{K} - \frac{d H_1'(x)}{H_1(x)}, \end{aligned}$$

ou bien:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x^2} = \frac{K-E}{K} - \frac{d \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}}{dx} - \frac{d \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)}}{dx},$$

on aura:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{k'^2 K + (k^2 - k'^2) E}{k'^2 K} - \frac{d \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}}{dx} + \frac{k^2 - k'^2}{k'^2} \frac{d \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)}}{dx}.$$

En portant cette valeur dans l'expression précédente de  $y_2$ , il faut avoir égard aux relations

$$\begin{aligned} \int (1-p \operatorname{cn} x)^4 \frac{d \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}}{dx} dx &= \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x} (1-p \operatorname{cn} x)^4 - 4p \int \operatorname{cn} x (1-p \operatorname{cn} x)^3 dx, \\ \int (1-p \operatorname{cn} x)^4 \frac{d \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)}}{dx} dx &= (1-p \operatorname{cn} x)^4 \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)} \\ &\quad - 4p \int \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x (1-p \operatorname{cn} x)^3 \frac{\theta_1'(x)}{\theta_1(x)} dx, \end{aligned}$$

et il est maintenant facile de voir que la fonction  $y_2$  s'exprime au moyen de la formule

$$y_2 = hy_1x + f_2(x),$$

$h$  étant une constante et  $f_2$  une série de la forme

$$f_2(x) = h_0 + h_1 \cos \frac{\pi}{2K}x + h_2 \cos 2 \frac{\pi}{2K}x + \dots,$$

tandis que l'expression

$$y_1 = f_1(x) = \frac{\nu(1-p) \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1-p \operatorname{cn} x)^2}$$

donne le développement que voici:

$$f_1(x) = l_1 \sin \frac{\pi}{2K}x + l_2 \sin 2 \frac{\pi}{2K}x + \dots$$

Cela étant, nous allons considérer l'équation

$$(15) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ A_1 + 2A_2 \frac{x(1-\operatorname{cn} x)}{1-p \operatorname{cn} x} + 3A_3 \left( \frac{x(1-\operatorname{cn} x)}{1-p \operatorname{cn} x} \right)^2 \right\} y + W.$$

L'intégrale générale s'écrit immédiatement comme suit:

$$y = f_1(x) \left\{ C_1 - \int [hx f_1(x) + f_2(x)] W dx \right\} \\ + [hx f_1(x) + f_2(x)] \left\{ C_2 + \int f_1(x) W dx \right\},$$

mais cette forme n'est pas convenable aux applications, vu qu'elle renferme des termes contenant la variable hors des signes trigonométriques. Or nous ferons voir que ces termes se détruisent.

En effet, si nous ne considérons que les termes dont il s'agit, à savoir:

$$- hf_1(x) \int x f_1(x) W dx + hx f_1(x) \int f_1(x) W dx,$$

et que nous remarquons la relation

$$\int x f_1(x) W dx = x \int f_1(x) W dx - \int dx \int f_1(x) W dx,$$

l'expression de  $y$  sera donnée au moyen de la formule suivante:

$$(16) \quad y = C_1 f_1(x) + C_2 [h x f_1(x) + f_2(x)] \\ - f_1(x) \int f_2(x) W dx + f_2(x) \int f_1(x) W dx \\ + h f_1(x) \int dx \int f_1(x) W dx.$$

Dans les applications que nous allons faire de la formule (15), les arbitraires  $C_1$  et  $C_2$  sont surabondantes, de sorte qu'on peut les déterminer de manière à rendre le résultat aussi simple que possible. On met donc d'abord

$$C_1 = 0.$$

La fonction  $W$  étant donnée par la série

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos \frac{\pi}{2K} x + \lambda_2 \cos 2 \frac{\pi}{2K} x + \dots,$$

elle entraînera évidemment, dans l'expression de  $y$ , un terme de la forme

$$- \lambda x f_1(x);$$

mais l'arbitraire  $C_2$  étant encore à notre disposition, nous la déterminerons de manière à faire disparaître les termes de la forme indiquée, et nous aurons finalement un résultat qui ne contient qu'un terme constant et des termes purement périodiques.

3. Reprenons l'équation (11), après y avoir introduit les notations que voici:

$$r = \beta \varepsilon; \quad dv = \frac{16}{3} \frac{\mu}{\beta} dx,$$

$\varepsilon$  et  $\mu$  étant deux constantes, la première d'un ordre impair par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, la seconde étant encore à notre disposition.

Nous aurons d'abord:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z \left\{ \frac{256}{9} \left[ \frac{\varepsilon^2}{1-\sigma} + \frac{3}{4} \varepsilon e_0 \delta \right] - \left[ 4\delta^2 + \frac{32}{3} \varepsilon e_0 \right] z + 4\delta z^2 - z^3 \right\},$$

expression qui se transforme en celle-ci:

$$(17) \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z(c - z)(\gamma_0 + \gamma_1 z + z^2),$$

si l'on désigne par  $c$  la racine réelle de l'équation

$$(18) \quad z^3 - 4\delta z^2 + \left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right]z = \frac{64}{9}\varepsilon\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right],$$

ou bien, dans le cas de trois racines réelles, celle qui disparaît avec  $\varepsilon$ .

Evidemment, les constantes  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  qui entrent dans l'équation (17) doivent satisfaire aux trois conditions suivantes:

$$(19) \quad \begin{cases} c\gamma_0 = \frac{64\varepsilon}{9}\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right], \\ -\gamma_0 + c\gamma_1 = -\left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right], \\ -\gamma_1 + c = 4\delta. \end{cases}$$

Mais ces conditions ne sont pas, cependant, indépendantes entre elles, vu qu'on peut toujours déduire l'une d'elles des deux autres, en ayant égard à l'équation

$$(18') \quad c^3 - 4\delta c^2 + \left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right]c = \frac{64}{9}\varepsilon\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right].$$

En effet, si l'on ajoute, après avoir multiplié la deuxième des équations (19) par  $c$ , et la troisième par  $c^2$ , la somme de ces produits à la première des dites équations, on retombe dans l'équation (18').

Arrêtons-nous un moment pour examiner la nature numérique de la quantité  $c$ . Dans ce but, observons que, dans les cas ordinaires,  $\delta$  est une quantité positive ou négative de l'ordre zéro par rapport aux masses troublantes et par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, mais qu'elle peut, dans des cas peu fréquents, devenir très petite.

Si  $\delta$  est une quantité de l'ordre zéro, la valeur de  $c$  se développera en une série dont le terme le plus sensible sera:

$$c = \frac{64}{9} \frac{\varepsilon\left(\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right)}{4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0}.$$

Comme  $\varepsilon$ , ainsi que  $e_0$ , est toujours une constante positive, la valeur de  $c$ , tirée de la formule indiquée, est évidemment une quantité de l'ordre de  $\varepsilon\varepsilon$  ou de  $\varepsilon e_0$ . Mais cette valeur peut être positive ou négative; elle peut même devenir nulle, ce qui exigerait que la valeur de  $\delta$  satisfasse à la condition

$$\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta = 0.$$

Si  $\delta$  était positif, la valeur de  $c$  serait toujours positive.

Dans le cas d'une très petite valeur de  $\delta$ , posons:

$$3\varepsilon_2 = 4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0,$$

$$2\varepsilon_1 = \frac{64}{9}\varepsilon\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right] + 4\delta c^2,$$

ce qui nous donne, au lieu de l'équation (18'):

$$c^3 + 3\varepsilon_2 c = 2\varepsilon_1,$$

dont on obtient la seule racine réelle par la formule

$$c = \sqrt[3]{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}} + \sqrt[3]{\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}}.$$

Par ce résultat, on serait porté à croire que deux racines de l'équation (18) fussent toujours imaginaires, mais une telle conclusion serait prématurée. Certes, si la valeur de  $\delta$  était tellement petite qu'on obtint, en utilisant les formules données ci-dessus, les valeurs de  $\varepsilon_1$  et de  $c$  au moyen d'approximations successives, l'équation (18) ne permettrait qu'une seule solution réelle. Mais, si au contraire la valeur absolue de  $\delta$  excédait une certaine limite, on pourrait retomber sur le cas irréductible.

Cherchons à limiter, avec un peu de détails, les différents cas qui peuvent se produire dans la nature des racines de l'équation (18).

Dans ce but, posons:

$$z = \zeta + \frac{4}{3}\delta,$$

ce qui nous donne, si nous admettons les notations

$$(20) \quad \begin{cases} a_2 = \frac{4}{9}\delta^2 - \frac{32}{9}\varepsilon e_0, \\ a_1 = -\frac{8}{27}\delta^3 + \frac{32}{9}\varepsilon e_0\delta + \frac{128}{9}\frac{\varepsilon^3}{1-\sigma}, \end{cases}$$

au lieu de l'équation (18), celle-ci:

$$(21) \quad \zeta^3 - 3a_2\zeta = 2a_1.$$

L'équation que nous venons de trouver admet trois racines réelles, autant que la condition

$$-a_2^3 + a_1^2 \overline{<} 0$$

subsiste; dans le cas où vaut le signe supérieur, deux racines sont égales.

En considérant les valeurs de  $a_1$  et de  $a_2$ , nous aurons facilement:

$$-a_2^3 + a_1^2 = \frac{8 \cdot 128}{9 \cdot 9 \cdot 9} \left\{ -\frac{6\varepsilon^2\delta^3}{1-\sigma} - 3\varepsilon^2 e_0^2 \delta^2 + \frac{72\varepsilon^3 e_0 \delta}{1-\sigma} + \frac{144\varepsilon^4}{(1-\sigma)^2} + 32\varepsilon^3 e_0^3 \right\}.$$

Donc, si nous posons:

$$(22) \quad F = -\delta^3 - \frac{1}{2}e_0^2(1-\sigma)\delta^2 + 12\varepsilon e_0\delta + 24\frac{\varepsilon^3}{1-\sigma} + \frac{16}{3}(1-\sigma)\varepsilon e_0^3,$$

les conditions sous lesquelles l'équation (18) n'admet qu'une seule racine réelle, qu'elle en admet trois dont deux sont égales, et enfin qu'elle a trois racines réelles et inégales, s'expriment ainsi:

$$F > 0; \quad F = 0; \quad F < 0.$$

On voit facilement que le signe de  $F$  est le même que celui de  $-\delta$ , si cette quantité a une valeur numérique suffisamment considérable. Par contre, si  $\delta$  était très petit, le signe de  $F$  ne dépendrait pas uniquement de celui de  $\delta$ , mais aussi d'autres conditions, que nous allons mettre en lumière.

D'abord, pour rendre nos expressions plus simples, posons:

$$\delta = e_0^2(1-\sigma)\lambda; \quad \varepsilon = e_0^3(1-\sigma)^2s,$$

ce qui nous donne:

$$a_2 = \frac{4}{9} e_0^4 (1 - \sigma)^2 (\lambda^2 - 8s),$$

$$a_1 = \frac{8}{27} e_0^6 (1 - \sigma)^3 (-\lambda^3 + 12\lambda s + 48s^2),$$

$$F = e_0^6 (1 - \sigma)^3 \left( -\lambda^3 - \frac{1}{2} \lambda^2 + 12\lambda s + \frac{16}{3} s + 24s^2 \right).$$

Etablissons d'abord les conditions sous lesquelles toutes les trois racines soient égales entre elles. Avant tout, l'équation

$$(23) \quad \lambda^3 + \frac{1}{2} \lambda^2 - 12\lambda s - \frac{16}{3} s - 24s^2 = 0$$

doit être satisfaite. Mais, comme il est visible immédiatement de l'équation (21), les trois racines égales satisfaisant à cette équation ne peuvent avoir d'autres valeurs que zéro, ce qui entraîne les conditions

$$a_2 = 0; \quad a_1 = 0,$$

ou bien

$$\lambda^2 - 8s = 0; \quad \lambda^3 - 12\lambda s - 48s^2 = 0.$$

En éliminant  $s$  de ces équations, on aura l'équation finale

$$\frac{3}{2} \lambda^4 + \lambda^3 = 0,$$

d'où l'on obtient trois racines égales à zéro, et la quatrième égale à  $-\frac{2}{3}$ . Trois des valeurs correspondantes de  $s$  seront nulles, mais la quatrième devient  $\frac{1}{18}$ . Or, on se convaincra facilement que l'équation (23) sera satisfaite par les valeurs

$$\lambda = -\frac{2}{3}; \quad s = \frac{1}{18}.$$

Mais ce qui est le plus essentiel dans la recherche présente, c'est de déterminer les couples de valeurs de  $\lambda$  et de  $s$  qui satisfassent à l'équation (23), c'est à dire de fixer les conditions sous lesquelles l'équation (21)

admette deux racines égales. Nous supposons que le paramètre  $s$  ait une valeur quelconque positive entre 0 et  $S$ ,  $S$  étant donné par la comparaison

$$S \overline{\underline{=}} \frac{1}{e_0^2}.$$

Supposons d'abord que l'équation (23) n'admette qu'une seule racine réelle, cette racine sera évidemment positive. Désignons-la par  $\lambda_0$ .

Cela étant, les racines de l'équation (21), dont nous supposons deux égales entre elles, s'obtenant au moyen des formules

$$\zeta_0 = \zeta_1 = -\sqrt[3]{a_1}; \quad \zeta_2 = 2\sqrt[3]{a_1},$$

nous aurons immédiatement celles de l'équation (18). Désignons-les par  $c, c_1, c_2$ , et introduisons la valeur du coefficient  $a_1$ , après y avoir remplacé  $\lambda$  par  $\lambda_0$ . Cependant, la valeur que nous avons donnée précédemment se remplaçant par la suivante:

$$a_1 = \frac{8}{27} e_0^6 (1 - \sigma)^3 \left( \frac{1}{2} \lambda_0^2 - \frac{16}{3} s + 24s^2 \right)$$

toutes les fois que l'équation (23) subsiste, nous emploierons cette dernière forme. Enfin, puisque  $a_1$  reste toujours positif, à l'exception des cas d'une valeur très petite de  $s$ , nous aurons:

$$c = c_1 = \frac{4}{3} e_0^2 (1 - \sigma) \left\{ \lambda_0 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \lambda_0^2 - \frac{16}{3} s + 24s^2} \right\},$$

$$c_2 = \frac{4}{3} e_0^2 (1 - \sigma) \left\{ \lambda_0 + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \lambda_0^2 - \frac{16}{3} s + 24s^2} \right\}.$$

Mais l'équation (23) peut aussi admettre trois racines réelles; déterminons la valeur de  $s$  qui rende deux de ces racines égales.

Pour y arriver, posons:

$$\lambda = -\frac{1}{\delta} + \xi,$$

ce qui conduit à l'équation que voici:

$$(23') \quad \xi^3 - 3 \left[ 4s + \frac{1}{3\delta} \right] \xi = 2 \left[ 12s^2 + \frac{5}{3} s - \frac{1}{21\delta} \right].$$



Si  $s$  disparaît, on tire immédiatement de cette équation les racines:

$$\xi_0 = -\frac{1}{3}; \quad \xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{6},$$

auxquelles correspondent:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Cherchons maintenant à fixer les conditions auxquelles doit satisfaire le paramètre  $s$  pour rendre réelles les trois racines de l'équation (23'). Dans ce but, formons l'expression

$$G = -\left[4s + \frac{1}{36}\right]^3 + \left[12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216}\right]^2.$$

Effectuant les calculs, il en résultera:

$$\begin{aligned} G &= s\left(144s^3 - 24s^2 + \frac{4}{3}s - \frac{2}{81}\right) \\ &= 144s\left(s - \frac{1}{18}\right)^3, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que les valeurs de  $s$  entre 0 et  $\frac{1}{18}$  donnent naissance à trois racines réelles de l'équation dont il s'agit. De ces racines, deux sont égales, non seulement si  $s$  s'évanouit, mais aussi lorsque  $s$  est égal à  $\frac{1}{18}$ . En adoptant cette valeur de  $s$ , nous aurons:

$$\xi^3 - 3 \cdot \frac{1}{4}\xi = 2 \frac{1}{8},$$

d'où l'on tire:

$$\xi_0 = \xi_1 = -\frac{1}{2}; \quad \xi_2 = 1,$$

ce qui entraîne les valeurs de  $\lambda$  que voici:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = -\frac{2}{3}; \quad \lambda_2 = \frac{5}{6}.$$

Si l'équation (23) admettait trois racines réelles, nous aurions trois

valeurs différentes de la quantité  $\delta$ , deux négatives et une positive, qui rendraient égales deux des racines de l'équation (21). Désignons ces valeurs de  $\delta$  par  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , de sorte que:

$$\delta_0 < \delta_1 < \delta_2.$$

Si, au contraire, la valeur de  $\delta$  surpassait  $\frac{1}{18}$ , l'équation (23) n'admettrait qu'une seule racine réelle, laquelle s'exprimerait au moyen de la formule

$$\lambda = -\frac{1}{6} + \sqrt[3]{12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216} + 12\sqrt{s}\left(s - \frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ + \sqrt[3]{12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216} - 12\sqrt{s}\left(s - \frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit par là que, dans le cas d'une grande valeur de  $s$ ,  $\lambda$  est une quantité du même ordre que  $s^{\frac{2}{3}}$ . Il en résulte, si l'on suppose:

$$s \approx \frac{1}{e_0^2},$$

la comparaison

$$\lambda \approx \frac{1}{e_0^{\frac{4}{3}}},$$

ce qui entraîne:

$$\delta \approx e_0^{\frac{2}{3}}.$$

Si la valeur effective de  $\delta$  était si grande qu'elle ne fût pas compatible avec la comparaison précédente, il n'y aurait pas lieu de craindre que l'équation (18) eût de racines égales, ce qui rendrait moins commode l'application de la méthode dont il s'agit maintenant.

Maintenant, si  $s$  est tellement petit que l'équation (23) admet trois racines réelles, le résultat de nos recherches s'exprimera brièvement ainsi:

Si la valeur effective de  $\delta$  est plus grande que  $\delta_2$ , ou qu'elle tombe entre  $\delta_1$  et  $\delta_0$ , l'équation (18) admet trois racines réelles; mais si:

$$\delta_2 > \delta > \delta_1,$$

ou bien si

$$\delta_0 > \delta,$$

elle n'admet qu'une seule racine réelle.

Dans les cas spéciaux que nous avons envisagés précédemment, les valeurs de  $\delta$  sont les suivantes :

a)  $s = 0,$

$$\delta_0 = -\frac{1}{2}e_0^2(1 - \sigma); \quad \delta_1 = \delta_2 = 0,$$

b)  $s = \frac{1}{18},$

$$\delta_0 = \delta_1 = -\frac{2}{3}e_0^2(1 - \sigma); \quad \delta_2 = \frac{5}{6}e_0^2(1 - \sigma).$$

Les racines de l'équation (18) qui correspondent aux valeurs indiquées de  $\delta$ , s'obtiennent aisément; on les trouve ci-dessous :

I<sup>er</sup> cas.

$$\delta_0 = -\frac{1}{2}e_0^2(1 - \sigma); \quad \varepsilon = 0; \quad a_1 = \frac{8}{27}\left(\frac{1}{2}e_0^2(1 - \sigma)\right)^3,$$

$$c = 0; \quad c_1 = c_2 = -e_0^2(1 - \sigma).$$

II<sup>ième</sup> cas.

$$\delta_1 = \delta_2 = 0; \quad \varepsilon = 0,$$

$$c = c_1 = c_2 = 0.$$

III<sup>ième</sup> cas.

$$\delta_0 = \delta_1 = -\frac{2}{3}e_0^2(1 - \sigma); \quad \varepsilon = \frac{1}{18}e_0^3(1 - \sigma)^2; \quad a_1 = 0,$$

$$c = c_1 = c_2 = -\frac{8}{9}e_0^2(1 - \sigma).$$

IV<sup>ième</sup> cas.

$$\delta_2 = \frac{5}{6}e_0^2(1 - \sigma); \quad \varepsilon = \frac{1}{18}e_0^3(1 - \sigma)^2; \quad a_1 = \left(\frac{1}{3}e_0^2(1 - \sigma)\right)^3,$$

$$c_0 = c_1 = \frac{7}{9}e_0^2(1 - \sigma); \quad c_2 = \frac{16}{9}e_0^2(1 - \sigma).$$

Après ces considérations, revenons à l'équation (17).

En posant:

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + z^2 = (z - c_1)(z - c_2),$$

nous aurons, en vertu des équations (19), les expressions:

$$c_1 = m + n\sqrt{-1},$$

$$c_2 = m - n\sqrt{-1},$$

où l'on a employé les notations

$$(24) \quad \begin{cases} m = 2\delta - \frac{1}{2}c, \\ n^2 = -2\delta c + \frac{3}{4}c^2 + \frac{32}{3}\epsilon e_0, \end{cases}$$

ou bien:

$$(24') \quad \begin{cases} m = 2e_0^2(1 - \sigma)\lambda - \frac{1}{2}c, \\ n^2 = -2e_0^2(1 - \sigma)\lambda c + \frac{3}{4}c^2 + \frac{32}{3}e_0^4(1 - \sigma)^2 s. \end{cases}$$

Ayant exprimé ainsi les racines de l'équation (18) par  $m$  et  $n$ , il faut que la quantité  $n$  disparaisse dans les quatre cas que nous avons envisagés précédemment. En effectuant le calcul on a évidemment, par les valeurs données plus haut, satisfait à cette condition.

Avant de terminer ces réflexions sur la nature des racines de l'équation (18), faisons la remarque que, dans le cas d'une valeur négative de  $c$ , on peut changer les signes de  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  et de  $z$  sans altérer l'équation (17); nous sommes donc autorisés à admettre que, dans la dite équation, la valeur de  $c$  soit toujours positive.

4. Si dans l'équation (17), qui s'écrit ainsi:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z(c - z)[(z - m)^2 + n^2],$$

on met:

$$(25) \quad z = \frac{\nu(1 - \cos \vartheta)}{1 - p \cos \vartheta},$$

$\nu$  et  $p$  étant deux constantes à notre disposition, et  $\vartheta$  une fonction de  $x$ , on aura d'abord :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\nu(1-p) \sin \vartheta d\vartheta}{(1-p \cos \vartheta)^2 dx},$$

$$c - z = \frac{c - \nu + (\nu - pc) \cos \vartheta}{1 - p \cos \vartheta},$$

$$(z - m)^2 + n^2 = \frac{B_0 + B_1 \cos \vartheta + B_2 \cos^2 \vartheta}{(1 - p \cos \vartheta)^2},$$

où l'on a employé les notations que voici :

$$(26) \quad \begin{cases} B_0 = \nu^2 - 2\nu m + m^2 + n^2 = (m - \nu)^2 + n^2, \\ B_1 = -2\nu^2 + 2\nu m(1 + p) - 2m^2 p - 2n^2 p, \\ B_2 = \nu^2 - 2\nu m p + (m^2 + n^2)p^2 = (pm - \nu)^2 + n^2 p^2. \end{cases}$$

Pour arriver immédiatement à la forme canonique des intégrales elliptiques, il faut que nous déterminions les constantes  $\nu$  et  $p$  de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} \nu - pc = c - \nu, \\ \nu^2 - \nu m(1 + p) + (m^2 + n^2)p = 0, \end{cases}$$

dont la seconde s'écrit ainsi :

$$(27') \quad (\nu - m)(\nu - mp) = -n^2 p.$$

Il résulte de là :

$$(28) \quad \nu = \frac{c}{2}(1 + p)$$

et :

$$\left(\frac{c}{2}m - \frac{c^2}{4}\right)(1 + p)^2 - (m^2 + n^2)p = 0.$$

En posant encore :

$$(29) \quad r = \frac{2(m^2 + n^2)}{c(c - 2m)},$$

l'équation précédente prend la forme

$$(p + 1)^2 + 2rp = 0,$$

d'où l'on tire:

$$(30) \quad p = -1 - r \pm \sqrt{(1+r)^2 - 1}.$$

La constante  $\mu$  étant encore à notre disposition, nous la déterminerons de manière à rendre les formules résultantes aussi simples que possible, ce qui arrivera, si nous posons:

$$(31) \quad \mu^2 = \frac{\nu(1-p)^2}{(c-\nu)(B_0+B_2)} = \frac{2\nu(1-p)}{c(B_0+B_2)} = \frac{1-p^2}{B_0+B_2};$$

puis nous admettons la notation

$$(32) \quad k^2 = \frac{B_2}{B_0+B_2},$$

et nous aurons, pour déterminer la fonction  $\vartheta$ , l'équation

$$(33) \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta},$$

d'où il résulte immédiatement:

$$(33') \quad \vartheta = \operatorname{am}(x - x_0), \quad \operatorname{mod}. k,$$

$x_0$  étant la constante d'intégration.

Nous sommes ainsi arrivés à la solution de notre problème, du moins quant à la forme. Mais il nous reste d'examiner les propriétés numériques des constantes qui entrent dans nos formules, en premier lieu les limites du paramètre  $p$  et celles du module  $k$ .

En supposant que la quantité  $r$  varie entre  $+\infty$  et  $-\infty$ , il est aisé de voir que le paramètre  $p$  acquiert des valeurs imaginaires, toutes les fois que la valeur de  $r$  tombe entre 0 et  $-2$ . Mais hors de ces limites, chaque valeur de  $r$  donne une valeur réelle de  $p$  n'excédant pas l'unité. On peut la trouver moyennant le développement que voici:

$$p = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+r} - \frac{1}{8} \frac{1}{(1+r)^2} - \dots$$

On voit immédiatement que les valeurs de  $p$  sont toutes comprises entre  $-1$  et  $+1$ , mais puisque  $r$  ne devient jamais nul, ce que nous allons montrer tout de suite, le paramètre  $p$  ne s'approche pas trop de l'unité négative.

On conclut facilement des équations (24) les relations suivantes:

$$(34) \quad \begin{cases} m^2 + n^2 = (2\delta - c)^2 + \frac{32}{3} \varepsilon e_0, \\ c - 2m = -2(2\delta - c), \end{cases}$$

d'où l'on voit que la somme  $m^2 + n^2$  ne peut pas disparaître, à moins que le coefficient  $\varepsilon$  ne soit nul. On aura d'ailleurs, en vertu de l'équation (29), la formule

$$(35) \quad r = -\frac{2\delta - c}{c} - \frac{32}{3} \frac{\varepsilon e_0}{c(2\delta - c)},$$

d'où il est visible que les deux termes formant  $r$  ne se détruisent pas.

En se rappelant que  $\delta$  est, dans les cas ordinaires, une quantité de l'ordre zéro, et que  $c$  est toujours très petit, il est aisé de voir que  $r$  sera généralement très grand. On peut donc mettre approximativement:

$$1 + r = -\frac{2\delta}{c},$$

ou bien:

$$p = \frac{1}{4} \frac{c}{\delta}.$$

Le coefficient  $p$  étant très petit dans les cas que nous considérons maintenant, nous l'omettons auprès de l'unité, ce qui nous donne, toujours approximativement:

$$\nu = \frac{c}{2},$$

$$m - \nu = 2\delta - c;$$

et ensuite, vu que l'équation (27') nous donne:

$$\nu - mp = \frac{n^2 p}{m - \nu},$$

il résultera:

$$\begin{aligned} \nu - mp &= \frac{n^2 p}{2\delta - c}, \\ &= \frac{1}{4} \frac{c}{\delta} \frac{n^2}{2\delta - c}. \end{aligned}$$

Les valeurs des coefficients  $B_0$  et  $B_2$  s'expriment maintenant par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} B_0 &= (2\delta - c)^2 + n^2, \\ B_2 &= \frac{1}{16} \frac{c^2}{\delta^2} \left[ 1 + \frac{n^2}{(2\delta - c)^2} \right] n^2, \end{aligned}$$

lesquelles entraînent la valeur de  $k$  que voici:

$$k^2 = \frac{1}{16} \frac{c^2}{\delta^2} \frac{\left( 1 + \frac{n^2}{(2\delta - c)^2} \right) n^2}{(2\delta - c)^2 + \left( 1 + \frac{1}{16} \frac{c^2}{\delta^2} + \frac{1}{16} \frac{c^2}{\delta^2} \frac{n^2}{(2\delta - c)^2} \right) n^2},$$

expression qui, si on néglige toujours  $c$  auprès de  $\delta$ , prend la forme suivante très simple

$$k^2 = \frac{1}{64} \frac{c^2 n^2}{\delta^4},$$

ou bien, en y introduisant la valeur de  $n^2$ ,

$$k^2 = \frac{c^2 \left( -2\delta c + \frac{32}{3} \epsilon \epsilon_0 \right)}{64\delta^4}.$$

Avec le même degré d'approximation que nous avons gardé dans la formule précédente, on aura la valeur de  $\mu$  en vertu de l'expression:

$$\mu^2 = \frac{1}{4\delta^2};$$

et puisque on a:

$$dv = \frac{16}{3} \frac{\mu}{\beta} dx,$$



la relation entre les variables indépendantes  $v$  et  $x$  s'écrit ainsi:

$$dx = \frac{3}{8} \beta \delta dv,$$

d'où il est facile de conclure que la différence  $\sigma - \varsigma$ , que nous désignerons par  $\bar{\varsigma}$ , s'exprime par la formule:

$$(36) \quad \bar{\varsigma} = \frac{3}{8} \beta \delta \frac{\pi}{2K}.$$

Le module  $k$  est évidemment une quantité du troisième ordre par rapport aux excentricités, pourvu que  $\varepsilon$  soit du premier ordre. Mais il faut toutefois se rappeler que  $n^2$  prend aussi des valeurs négatives, ce qui entraîne des valeurs imaginaires de  $k$ . Par une transformation bien connue on obtient dans un tel cas, à savoir si  $B_2$  est négatif,

$$-\frac{k^2}{k'^2} = -\frac{B_2}{B_0},$$

et

$$(37) \quad z = \nu \frac{\operatorname{dn} k'x - \operatorname{cn} k'x}{\operatorname{dn} k'x - p \operatorname{cn} k'x}, \quad \operatorname{mod.} = i \frac{k}{k'}.$$

On retrouve aisément cette formule d'une manière directe. En effet, si nous mettons:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1 + \frac{B_2}{B_0} \sin^2 \phi}},$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 + \frac{B_2}{B_0}} \sin \phi}{\sqrt{1 + \frac{B_2}{B_0} \sin^2 \phi}},$$

nous aurons par différentiation:

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{1 + \frac{B_2}{B_0}}{\left\{ 1 + \frac{B_2}{B_0} \sin^2 \phi \right\}^{\frac{3}{2}}} \sin \phi d\phi,$$

ce qui nous donne:

$$\nu(1-p)^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \mu^2 B_0 (c - \nu) \left( 1 + \frac{B_2}{B_0} \sin^2 \phi \right).$$

Donc, en posant:

$$(38) \quad \frac{B_2}{B_0} = \frac{k^2}{k'^2},$$

et en observant qu'on a:

$$(39) \quad \frac{\nu(1-p)^2}{(c-\nu)B_0} = \frac{2\nu(1-p)}{cB_0} = \frac{1-p^2}{B_0} = \frac{\nu(1-p)^2}{(c-\nu)(B_0+B_2)} \frac{1}{k'^2} = \frac{\mu^2}{k'^2},$$

il résulte:

$$\phi = \operatorname{am} k'x, \quad \operatorname{mod} = i \frac{k}{k'},$$

la constante  $x_0$  étant supposée comprise en  $x$ .

Ayant ainsi déterminé l'amplitude  $\phi$ , on aura immédiatement, en vertu de l'équation (25), le résultat que nous avons déjà exprimé par l'équation (37).

5. Toutes les fois que le coefficient  $p$  n'est plus une quantité petite, les considérations sur les valeurs de  $k$  et de  $\mu$  aboutissent à changer notablement le caractère des résultats que nous avons obtenus précédemment.

Déjà dans le numéro précédent nous avons fait ressortir que les valeurs réelles de  $p$  tombent toujours entre  $+1$  et  $-1$ . Puis, nous avons vu que les hypothèses  $r = -2$  et  $r = 0$  entraînent les dites valeurs de  $p$ , mais que de chaque valeur de  $r$  entre  $-2$  et  $0$  découle un résultat imaginaire relativement à  $p$ . Il nous reste donc à déterminer les limites de la quantité  $r$ , considérée comme fonction de  $\delta$ ,  $c$ ,  $\varepsilon$  et  $e_0$ , ou bien des trois racines  $c$ ,  $c_1$  et  $c_2$ .

Dans ce but reprenons la formule (29). En y introduisant:

$$m^2 + n^2 = c_1 c_2,$$

et

$$c(c - 2m) = c(c - c_1 - c_2),$$

nous aurons:

$$(35') \quad r = \frac{2c_1 c_2}{c(c - c_1 - c_2)},$$

où il faut observer que le produit  $c_1 c_2$  est toujours positif. En posant pour un moment:

$$\frac{c_1}{c} = \alpha; \quad \frac{c_2}{c} = \beta,$$

l'expression précédente s'écrit ainsi:

$$r = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha - \beta},$$

et on en tire:

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{2\beta(1 - \beta)}{(1 - \alpha - \beta)^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{(1 - \alpha - \beta)^2}.$$

Les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  qui rendent  $r$  minimum s'obtiennent maintenant en résolvant les équations

$$\beta(1 - \beta) = 0,$$

$$\alpha(1 - \alpha) = 0.$$

On les satisfait par:

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0,$$

ou bien par:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 1.$$

La première solution nous donne:

$$r = 0$$

et la seconde:

$$r = -2.$$

On peut d'une autre manière mettre en évidence le résultat que nous venons de signaler. Il est visible, par la symétrie, qu'on a:

$$\alpha = \beta.$$

En portant cette valeur dans l'expression de  $r$ , on aura:

$$2\alpha^2 + 2r\alpha = r,$$

d'où il résulte:

$$\alpha = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r}.$$

Si l'on admet:

$$r = 0,$$

la valeur de  $\alpha$  sera nulle, et si l'on fait:

$$r = -2,$$

nous aurons:

$$\alpha = 1.$$

Mais encore, chaque valeur de  $r$  entre 0 et  $-2$  nous conduit à un résultat imaginaire relativement à  $\alpha$ . Donc, les valeurs de  $r$  s'étendent de  $-\infty$  à  $-2$ , et de 0 jusqu'à  $+\infty$ .

Il est facile de voir qu'on retombe toujours dans le cas:  $r = -2$ , si les deux racines  $c$  et  $c_1$  sont égales.

Cela étant, nous allons considérer en particulier le 3<sup>ième</sup> cas du numéro 3. En se rappelant les valeurs que nous avons données de  $\delta$ , de  $c$  et de  $\varepsilon$ , ou bien celles des trois racines, on aura en vertu de la formule (35) ou (35'):

$$r = -2,$$

ce qui donne:

$$p = 1.$$

Après avoir trouvé le coefficient  $p$ , on obtient immédiatement au moyen de l'équation (27'):

$$(m - \nu)^2 = -n^2,$$

ou bien, vu qu'on a, dans le cas présent,

$$\nu = c,$$

l'équation

$$(m - c)^2 = -n^2.$$

Ensuite, on tire des équations (26) les valeurs

$$B_0 = B_2 = 0,$$

mais on n'obtient celle de  $k^2$  ou de  $-\frac{k^2}{k'^2}$  que sous la forme indéterminée:  $\frac{0}{0}$ . Pour déduire la vraie valeur du module, posons:

$$p = 1 - \Delta p,$$

ce qui nous donne:

$$B_0 = (m - \nu)^2 + n^2 = [(m - \nu)m + n^2] \Delta p,$$

$$\begin{aligned} B_2 &= B_0 - 2[(m - \nu)m + n^2] \Delta p + (m^2 + n^2) \Delta p^2, \\ &= -[(m - c)m + n^2] \Delta p + (m^2 + n^2) \Delta p^2 - mc \Delta p^2. \end{aligned}$$

Avec ces résultats on obtient tout de suite:

$$\begin{aligned} -\frac{k^2}{k'^2} &= \frac{(m - c)m + n^2 - (m^2 + n^2 - mc) \Delta p}{(m - c)m + n^2} \\ &= 1 - \Delta p, \end{aligned}$$

ce qui montre que le module  $-\frac{k^2}{k'^2}$  s'approche avec  $p$  de l'unité, tandis que  $k^2$  tend vers  $-\infty$ . Mais alors la fonction  $z$  acquiert brusquement une valeur constante, à savoir  $c$ , dont l'expression est

$$c = -\frac{8}{9} e_0^2 (1 - \sigma).$$

En introduisant, dans l'équation (10), la valeur signalée de  $z$ , il résulte:

$$\eta^2 = \frac{1}{9} e_0^2.$$

Pour rendre notre exposé plus simple, écrivons  $l^2$  au lieu de  $-\frac{k^2}{k'^2}$ ; puis, désignons par  $L$  l'intégrale elliptique complète de la première espèce correspondant au module  $l$ . Or, puisque nous avons:

$$\begin{aligned} k'dx &= \frac{3}{16} \beta \frac{k'}{\mu} dv \\ &= \frac{3}{16} \beta \sqrt{\frac{B_0}{1 - p^2}} dv \\ &= \frac{3}{16} \beta \sqrt{\frac{(m - \nu)m + n^2}{2 - \Delta p}} dv, \end{aligned}$$

le facteur  $\bar{\zeta}$  s'exprimera au moyen de la formule

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{16} \beta \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{(m-\nu)m+n^2}{2-\Delta p}},$$

d'où l'on conclut que  $\bar{\zeta}$  tend vers zéro, lorsque  $p$  s'approche de l'unité.

6. Les substitutions que nous avons employées jusqu'ici pour mettre les différentielles sous la forme canonique des différentielles elliptiques, se remplacent avantageusement, lorsque les trois racines sont réelles et très petites, ou bien si la valeur de  $p$  est imaginaire, par d'autres, dont je vais communiquer quelques unes.

En supposant:

$$c < c_1 < c_2,$$

j'écris notre différentielle ainsi:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z(c-z)(c_1-z)(c_2-z).$$

En posant:

$$(40) \quad z = \frac{c(1-\zeta)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta},$$

on trouve:

$$c-z = \frac{c\left(1-\frac{c}{c_1}\zeta\right)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta},$$

$$c_1-z = \frac{c_1\left(1-\frac{c}{c_1}\zeta\right)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta},$$

$$c_2-z = \frac{c_2\left(1-\frac{c}{c_2}\zeta\right)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta} \left\{ 1 - \frac{c}{c_1} \frac{c_2-c_1}{c_2-c} \zeta \right\},$$

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{c\left(1-\frac{c}{c_1}\zeta\right)}{\left(1-\frac{c}{c_1}\zeta\right)^2} \frac{d\zeta}{dx},$$

de sorte que, si l'on choisit le coefficient  $\mu^2$  de manière à satisfaire à la condition

$$\begin{aligned} 4 &= \mu^2 c_1 c_2 \left(1 - \frac{c}{c_2}\right) \\ &= \mu^2 c_1 (c_2 - c), \end{aligned}$$

et que l'on admette la notation

$$k^2 = \frac{c}{c_1} \frac{c_2 - c_1}{c_2 - c},$$

notre résultat sera:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = 4\zeta(1 - \zeta)(1 - k^2\zeta).$$

Il s'ensuit de là:

$$\zeta = \operatorname{sn} x^2,$$

la constante d'intégration étant supposée comprise en  $x$ .

Dans le cas de deux racines égales, c'est à dire si l'on a:

$$c = c_1,$$

la fonction  $z$  se réduit à la valeur constante  $c$ , et on trouve:

$$k = 1.$$

Par la valeur de  $\mu^2$  que nous avons donnée on déduit:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{3}{32} \beta \sqrt{c_1(c_2 - c)},$$

expression d'où l'on peut rétablir le résultat approché que nous avons signalé par la formule (36).

En effet, si l'on admettait, dans l'équation (18),  $\delta$  tellement grand qu'on pût négliger le terme  $\frac{3^2}{3} \varepsilon e_0$  par rapport à  $4\delta^2$ , de sorte que fût:

$$cc_2 + cc_1 + c_1c_2 = 4\delta^2,$$

on aurait, puisque  $c$  est moindre qu'une quantité de l'ordre zéro, la formule approchée

$$\frac{dx}{dv} = \frac{3}{16} \beta \delta.$$

Cette valeur n'étant que la moitié de celle que nous avons trouvée dans le numéro 4, les deux résultats paraissent se contredire l'un l'autre. Cependant, en considérant que la fonction  $z$ , telle que l'équation (40) nous l'a donnée, se développe suivant les multiples de  $\frac{\pi}{2K} 2x$ , on trouvera:

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{8} \beta \delta \frac{\pi}{2K},$$

ce qui s'accorde avec la formule (36).

Il me faut ajouter que les formules que nous venons de déduire, dans ce numéro, s'appliquent non seulement au cas où les trois racines de l'équation (18) sont très petites, mais aussi toutes les fois que les racines dont nous avons parlé, sont réelles.

7. En supposant toujours les trois racines réelles, on peut opérer la réduction à la forme canonique en utilisant la substitution

$$(41) \quad z = \frac{c_2}{1 + \zeta^2}.$$

Il découle de là:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= - \frac{2c_2 \zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{dx}, \\ c - z &= - \frac{c_2 - c(1 + \zeta^2)}{1 + \zeta^2}, \\ c_1 - z &= - \frac{c_2 - c_1(1 + \zeta^2)}{1 + \zeta^2}, \\ c_2 - z &= \frac{c_2 \zeta^2}{1 + \zeta^2}, \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on satisfait à la condition

$$4 = \mu^2 c_1 (c_2 - c),$$

on aura:

$$\frac{c_1}{c_2 - c_1} \left( \frac{d\zeta}{dx} \right)^2 = \left( 1 - \frac{c_1}{c_2 - c_1} \zeta^2 \right) \left( 1 - \frac{c}{c_2 - c} \zeta^2 \right).$$



Maintenant, si nous reprenons la notation

$$k^2 = \frac{c}{c_1} \frac{c_2 - c_1}{c_2 - c},$$

nous aurons immédiatement:

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_1}} \operatorname{sn}(x + x_0),$$

$x_0$  étant une arbitraire.

En introduisant cette valeur de  $\zeta$  dans l'expression (41), on tombera dans le résultat

$$(41') \quad z = \frac{c_1 c_2}{c_1 + (c_2 - c_1) \operatorname{sn}(x + x_0)^2},$$

que nous allons comparer à l'équation (40), qui peut s'écrire ainsi:

$$z = \frac{cc_1}{c_1 + (c_1 - c)(\operatorname{tang} \operatorname{am} x)^2}.$$

Pour opérer le rapprochement des deux résultats, mettons le premier sous la forme

$$z = \frac{c_1 c_2}{\frac{c_1 c_2}{c} - \frac{c_1}{c} (c_2 - c) [\operatorname{dn}(x + x_0)]^2}.$$

Maintenant, si nous identifions  $x_0$  avec  $-K + iK'$ , et que nous observions l'expression

$$k'^2 = \frac{c_2}{c_1} \frac{c_1 - c}{c_2 - c},$$

nous aurons immédiatement notre deuxième résultat.

Cependant,  $x_0$  étant une constante arbitraire, elle peut être réelle, ce qui entraînera des valeurs réelles de  $z$  entre  $c_1$  et  $c_2$ . Evidemment, une telle solution doit être rejetée toutes les fois que  $c_1$  et  $c_2$  acquièrent des valeurs de l'ordre zéro, mais dans le cas où toutes les racines sont de petites quantités du même ordre, il paraît possible de la mettre en usage, pourvu que la constante  $e_0$ , qui doit être déterminée au moyen des observations, subisse un changement convenable.

Si l'on admettait la solution donnée par l'équation (41'), on aurait,

les deux racines étant égales, un cas asymptotique, vu que l'expression de  $z$  renferme des exponentielles.

Pour en faire ressortir les formules qui donnent la fonction  $z$  renfermée entre 0 et  $c$ , la variable restant réelle, écrivons l'équation (41') de la manière suivante:

$$z = \frac{c_1}{1 - \frac{c_2 - c_1}{c_2} \operatorname{cn}(x + x_0)^2}.$$

En portant dans cette expression la valeur

$$x_0 = iK',$$

il en résulte:

$$z = \frac{c_1}{1 + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \frac{\operatorname{dn} x^2}{k^2 \operatorname{sn} x^2}}.$$

Maintenant, si nous faisons:

$$c_1 = c; \quad k = 1,$$

il viendra:

$$z = \frac{c(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2 + \frac{4(c_2 - c)}{c_2}}.$$

Telle est l'expression demandée; elle donne pour des valeurs infinies de  $x$ , positives ou négatives,  $z = c$ , mais si  $x$  était nul, il en résulterait:  $z = 0$ .

La formule à laquelle nous sommes parvenus, s'obtient aussi d'une manière directe.

En effet, si nous posons:

$$z = \frac{c}{1 + \zeta^2},$$

il sera facile d'obtenir l'équation que voici:

$$4\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \mu^2 [c_2(1 + \zeta^2) - c][c_1(1 + \zeta^2) - c],$$

d'où il résulte, en supposant

$$c = c_1; \quad 4 = \mu^2 c (c_2 - c):$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \zeta \sqrt{1 + \frac{c_2 - c}{c_2 - c} \zeta^2}.$$

On arrive immédiatement à l'intégrale de cette équation en mettant

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}} \operatorname{tang} \varphi.$$

En effet, l'équation précédente se transformant en celle-ci:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sin \varphi,$$

on en conclut:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = e^x,$$

la constante d'intégration étant comprise dans le  $x$ .

Maintenant, puisqu'on a:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

on trouvera:

$$\begin{aligned} \zeta &= 2 \sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}} \frac{e^x}{1 - e^{2x}} \\ &= - \sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}} \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne:

$$z = \frac{c}{1 + \frac{c_2 - c}{c_2} \frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}},$$

c'est à dire la formule que nous avons déduite plus haut.

Nous verrons, dans ce qui suit, que la solution asymptotique n'appartient pas à notre problème; elle est due uniquement à la manière d'aborder les approximations que nous avons adoptée dans le numero 1.

8. Ayant ainsi, par les recherches que nous avons communiquées dans les numéros précédents, trouvé l'expression analytique de la fonction  $\gamma^2$  ou bien, ce qui revient au même, de  $z$ , telle qu'on peut l'obtenir en ne considérant que les termes indépendants des fonctions  $M$  et  $N$ , il nous reste à établir les formules qui expriment les fonctions  $G$  et  $H$ . Dans ce but, reprenons l'équation (9) qui nous donne la formule suivante:

$$(42) \quad G = e_0 + \frac{3}{16} \frac{z}{\varepsilon} (-2\delta + z).$$

En y portant la valeur de  $z$  tirée de la formule (25), nous aurons:

$$(43) \quad G = e_0 + \frac{3}{16} \frac{\nu}{\varepsilon} \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 - p \operatorname{cn} x} \left\{ -2\delta + \frac{\nu(1 - \operatorname{cn} x)}{1 - p \operatorname{cn} x} \right\}.$$

Nous nous arrêtons un moment à cette formule pour en tirer un résultat approché.

Si  $\delta$  est une quantité de l'ordre zéro, nous avons approximativement:

$$2\nu\delta = c\delta = \frac{16}{3} e_0 \varepsilon + \frac{64}{9} \frac{\varepsilon^2}{\delta};$$

donc, en négligeant le terme dépendant de  $\nu^2$ , nous aurons la formule approchée

$$G = e_0 - e_0 \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 - p \operatorname{cn} x} - \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 - p \operatorname{cn} x}$$

ou bien:

$$G = e_0 \frac{(1-p) \operatorname{cn} x}{1 - p \operatorname{cn} x} - \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 - p \operatorname{cn} x}.$$

En y restituant les valeurs de  $\delta$  et de  $\varepsilon$ , à savoir:

$$\delta = \frac{4}{3} \frac{2\sigma - \beta_1}{\beta_3},$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\beta_3},$$

et en omettant les termes dépendant de  $p$  et du module  $k$ , l'expression de  $G$  devient:

$$(A) \quad G = e_0 \cos w - \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1} (1 - \cos w),$$

où l'on a introduit l'argument  $w$  au lieu de  $x$ .

Si, dans la formule (42), on introduit l'expression de  $z$ , donnée par l'équation (40), il en résulte:

$$(44) \quad G = e_0 + \frac{3}{16} \frac{cc_1}{\varepsilon} \frac{\text{cn } x^2}{c_1 - c \text{ sn } x^2} \left\{ -2\delta + \frac{cc_1 \text{ cn } x^2}{c_1 - c \text{ sn } x^2} \right\};$$

et enfin, en substituant l'expression (41'), on aura:

$$(45) \quad G = e_0 + \frac{3}{16} \frac{c_1 c_2}{\varepsilon} \frac{1}{c_1 + (c_2 - c_1)[\text{sn}(x + x_0)]^2} \left\{ -2\delta + \frac{c_1 c_2}{c_1 + (c_2 - c_1)[\text{sn}(x + x_0)]^2} \right\}.$$

La fonction  $H$  s'obtient moyennant la première des équations (7). En divisant par  $\gamma$  on aura immédiatement:

$$(46) \quad H = -\frac{1}{\gamma} \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dv} = -\frac{3}{16} \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{dz}{dx},$$

les termes dépendant de  $M$  et de  $N$  étant négligés.

Il résulte de cette expression, eu égard à la formule (25),

$$(47) \quad H = -\frac{3}{16} \frac{\nu(1-p)}{\mu\varepsilon} \frac{\text{sn } x \text{ dn } x}{(1-p \text{ cn } x)^2}.$$

Pour avoir une expression approchée de  $H$ , de même nature que la formule (A), rappelons-nous que le coefficient  $\mu$  s'exprime approximativement par  $\frac{1}{2\delta}$ , la valeur de  $\delta$  étant assez grande. De là il s'ensuit:

$$\frac{\nu}{\mu\varepsilon} = \frac{c\delta}{\varepsilon} = \frac{16}{3} e_0 + \frac{64}{9} \frac{\varepsilon}{\delta},$$

de sorte que nous aurons:

$$(B) \quad H = -\left( e_0 + \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1} \right) \sin w.$$

Ensuite, de la formule (46), en y introduisant l'expression (40), découle la relation:

$$(48) \quad H = \frac{3}{16} \frac{c}{c_1} \frac{c_1 - c}{\mu\varepsilon} \frac{2 \text{ sn } x \text{ cn } x \text{ dn } x}{\left( 1 - \frac{c}{c_1} \text{ sn } x^2 \right)^2},$$

et la formule (41') conduit au résultat suivant:

$$(49) \quad H = \frac{3}{16} \frac{c_2 c_2 - c_1}{c_1} \frac{2 \operatorname{sn}(x + x_0) \operatorname{cn}(x + x_0) \operatorname{dn}(x + x_0)}{\mu \varepsilon \left(1 + \frac{c_2 - c_1}{c_1} \operatorname{sn}(x + x_0)^2\right)^2}.$$

Dans les deux formules (48) et (49), on peut finalement remplacer le facteur  $\frac{1}{\mu}$  par:

$$2 \sqrt{c_1(c_2 - c)}.$$

La valeur approchée du coefficient  $\bar{\zeta}$  s'obtient aisément au moyen de la formule

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{8} \beta \delta.$$

En y introduisant l'expression de  $\delta$ , nous obtenons:

$$\bar{\zeta} = \sigma - \zeta = \frac{1}{2} \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{1 - \sigma} - \frac{3}{8} \frac{\beta_3 e_0^2}{1 - \sigma}.$$

Mais puisque nous avons négligé les fonctions  $M$  et  $N$ , nous ne sommes pas autorisés à attendre du calcul que nous venons d'achever un résultat tout à fait exact. En effet, il y a, dans l'expression obtenue, des termes dépendant de  $\sigma^2$  ou de  $\beta_3 \sigma$  qui ne sont pas encore complets. Négligeons-les, et notre résultat deviendra:

$$\zeta = \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{3}{8} \beta_3 e_0^2.$$

La fonction  $\rho$  s'obtient maintenant immédiatement par la substitution des valeurs (A) et (B) dans l'équation (2). Ainsi, nous obtenons:

$$\rho = \left(e_0 + \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1}\right) \cos f - \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1} \cos f_1,$$

résultat approché, il est vrai, mais qui pourtant nous permet d'identifier, du moins approximativement, le coefficient  $e_0 + \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1}$  avec la constante  $x$ , introduite dans le paragraphe précédent.

Examinons encore le cas où:

$$\frac{4\varepsilon}{1 - \sigma} + 3e_0 \delta = 0,$$

c'est à dire où  $c$  devient nul sans que le coefficient  $\varepsilon$  disparaisse. Les formules (43) et (47) nous donnent immédiatement:

$$G = e_0; \quad H = 0,$$

d'où il résulte:

$$\rho = e_0 \cos f_1.$$

Mais dans le cas actuel on a aussi, en vertu de la première des équations (4),

$$\left(2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 e_0^2\right)e_0 = -\gamma.$$

On conclut de là que ni le coefficient  $e_0$ , ni l'angle  $B$ , qui entre dans l'argument  $f_1$ , ne sont plus des arbitraires, mais que l'un se trouve par calcul, et que l'autre est une des données du problème.

9. En introduisant dans la formule (40) les valeurs de  $c$ , de  $c_1$  et de  $c_2$ , que nous venons de signaler au n° 3, cas IV, à savoir:

$$c = \frac{7}{9}e_0^2(1 - \sigma); \quad c_1 = \frac{7}{9}e_0^2(1 - \sigma); \quad c_2 = \frac{16}{9}e_0^2(1 - \sigma),$$

nous aurons

$$z = c; \quad k = 1.$$

Ce résultat aurait changé brusquement si l'on attribuait une valeur infiniment petite, mais différente de zéro, à la différence  $c_1 - c$ . En effet, dans ce cas les valeurs de  $z$  s'étendraient depuis  $z = 0$  jusqu'à  $z = c$ .

Si les racines  $c$ ,  $c_1$  et  $c_2$  étaient, toutes les trois, du même ordre, le module serait évidemment de l'ordre zéro par rapport aux masses et aux excentricités, mais plus la différence  $c_1 - c$  est sensible, plus la valeur du module s'éloigne de l'unité, de sorte que les développements trigonométriques seront, le plus souvent, assez convergents.

Mais on peut très facilement éviter les cas d'un module trop approché de l'unité. Cela s'entend aisément, si l'on écrit les équations (5) de la manière suivante:

$$2(1 - \sigma)\frac{dH}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \Delta\beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]G = -\gamma + M - \Delta\beta_1 G,$$

$$- 2(1 - \sigma)\frac{dG}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \Delta\beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]H = N - \Delta\beta_1 H.$$

En effet, en attribuant au coefficient  $\Delta\beta_1$  une valeur telle qu'on ait:

$$\Delta\beta_1 \underline{\underline{=}} \beta_3 e_0^2 (1 - \sigma),$$

on pourrait facilement opérer dans les valeurs de  $c$ , de  $c_1$  et de  $c_2$  un changement propre à rendre le module suffisamment petit.

Considérons la partie dépendant des termes  $\Delta\beta_1 G$  et  $\Delta\beta_1 H$  de la fonction  $W$ , que nous avons donnée par l'équation (12). En désignant cette partie par  $W_1$ , nous aurons

$$W_1 = \frac{3}{8} \beta \Delta\beta_1 (z - \delta) \int \left[ G \frac{dG}{dv} + H \frac{dH}{dv} \right] dv + \frac{1}{2} \frac{\gamma \Delta\beta_1}{1 - \sigma} G,$$

ou bien:

$$(50) \quad W_1 = \frac{3}{8} \beta \Delta\beta_1 \eta^2 (z - \delta) + \frac{1}{2} \frac{\gamma \Delta\beta_1}{1 - \sigma} G,$$

d'où il est visible que la fonction  $W_1$  est tout au moins du deuxième ordre par rapport aux masses et du quatrième ordre par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, pourvu que les fonctions  $G$  et  $H$ , comme nous l'avons supposé, soient de l'ordre des excentricités.

10. Il nous reste maintenant à aborder les approximations qui suivent celle que nous avons déjà examinée; mais puisque la marche du calcul est bien indiquée par les expressions du numéro 2, nous nous dispensons de traiter ce sujet plus amplement.

Après avoir obtenu les fonctions  $G$  et  $H$ , on aura immédiatement, par une double différentiation, les fonctions  $M$  et  $N$ . Il serait donc facile de former l'expression de la fonction  $W$ , ou bien, de la développer en une série trigonométrique, dont la convergence serait incontestable, vu qu'elle ne contiendrait qu'un seul argument. De même, on obtiendrait aisément les développements des fonctions que nous avons désignées, dans le numéro 2, par  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ , de sorte que l'application de la formule (16) ne présentera plus de difficulté.

Mais considérons un moment la constante  $h$  qui figure dans les formules du numéro 2, et dont l'introduction tendait à faire disparaître les termes contenant la variable  $x$  hors des signes trigonométriques. Evidemment, cette constante ne doit pas être trop petite, vu qu'autrement il se



présenterait une valeur de la constante surabondante  $C_2$  qui n'offrirait aucune approximation.

Dans le numéro 2, nous avons établi les expressions:

$$y_1 = \frac{\nu(1-p) \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1-p \operatorname{cn} x)^2},$$

$$y_2 = hy_1 x + f_2(x),$$

et, d'autre part, nous avons obtenu:

$$y_2 = \frac{f_1(x)}{\nu^2(1-p)^2} \int \frac{(1-p \operatorname{cn} x)^4 dx}{\operatorname{sn} x^2 \operatorname{cn} x^2}.$$

Or, en se rappelant les formules par lesquelles s'expriment les quantités faisant partie de l'intégrale contenue dans l'expression de  $y_2$ , on s'aperçoit facilement que le coefficient de  $x$  est composé de plusieurs termes dont les plus grands sont multipliés par  $p^2$  ou  $k^2$ . Dans l'expression de  $y_2$ , ces termes acquièrent le facteur  $\frac{1}{\nu^2}$ , d'où l'on conclut que la constante  $h$  sera de l'ordre de  $\frac{p^2}{\nu^2}$  ou bien de l'ordre de  $\frac{k^2}{\nu^2}$ . Mais le facteur  $\frac{p^2}{\nu^2}$  est au moins une quantité de l'ordre zéro, et il peut même devenir très grand; l'autre facteur au contraire est ordinairement une quantité très petite, qui cependant, dans les cas où  $k$  s'approche de l'unité, peut acquérir des valeurs assez considérables.

Cela étant, on voit, en considérant la formule (16), que la constante  $C_2$ , déterminée de manière à faire disparaître le coefficient de  $xf_1(x)$ , sera une quantité de l'ordre de  $\frac{W}{\beta}$ , quantité très petite par rapport à  $G$  et  $H$ . On est donc arrivé à une véritable approximation.

11. Bien que la méthode d'intégration que nous venons d'expliquer conduise toujours à un résultat tellement approximatif qu'on puisse l'adopter, dans les calculs numériques, comme résultat définitif, il est à désirer, au point de vue théorique, qu'on trouve un mode de continuer les approximations, lorsque le procédé qui s'appuie sur l'intégration de l'équation (13) devient impraticable à cause des différentiations réitérées.

C'est pour expliquer une manière d'atteindre à une exactitude quelconque que je vais ajouter les considérations suivantes.

Désignons par  $G_0$  et  $H_0$  deux fonctions qui, substituées au lieu de  $G$  et de  $H$  dans les équations (3), les satisfont à très peu près. Posons ensuite:

$$G = G_0 + G_1; \quad H = H_0 + H_1,$$

nous tirons des dites équations les suivantes:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 G_1}{dv^2} + 2(1 - \sigma) \frac{dH_1}{dv} + \left\{ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2) \right\} G_1 \\ = \bar{G} + \frac{3}{2}\beta_3(G_0 G_1 + H_0 H_1) G_1 + \frac{3}{4}\beta_3(G_1^2 + H_1^2) G_1, \\ \frac{d^2 H_1}{dv^2} - 2(1 - \sigma) \frac{dG_1}{dv} + \left\{ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2) \right\} H_1 \\ = \bar{H} + \frac{3}{2}\beta_3(G_0 G_1 + H_0 H_1) H_1 + \frac{3}{4}\beta_3(G_1^2 + H_1^2) H_1, \end{aligned} \right.$$

$\bar{G}$  et  $\bar{H}$  étant les restes des équations (3), obtenus en y mettant  $G_0$  et  $H_0$  au lieu de  $G$  et de  $H$ , à savoir:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{G} &= -\frac{d^2 G_0}{dv^2} - 2(1 - \sigma) \frac{dH_0}{dv} - \left\{ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2) \right\} G_0 - r, \\ \bar{H} &= -\frac{d^2 H_0}{dv^2} + 2(1 - \sigma) \frac{dG_0}{dv} - \left\{ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2) \right\} H_0. \end{aligned} \right.$$

Mais, puisque  $\bar{G}$  et  $\bar{H}$  sont des quantités extrêmement petites — disons par exemple tout au moins du dixième ordre relativement aux forces perturbatrices — on peut entamer le procès d'intégration des équations (51) en omettant les termes du deuxième et du troisième ordre par rapport à  $G_1$  et  $H_1$ . Nous aurons ainsi un système d'équations dont l'intégration ne présente aucune difficulté sérieuse, si ce n'est qu'on se voie réduit à la nécessité, dans les diverses approximations, de faire disparaître les termes séculaires par des manèges pris spécialement dans ce but.

Si nous désignons par  $U$  la fonction  $G_1 + iH_1$ , nous tirons des équations (51), après en avoir multiplié la seconde par  $i$ , la suivante

$$(53) \quad \frac{d^2 U}{dv^2} - 2i(1 - \sigma) \frac{dU}{dv} + \left\{ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2) \right\} U = \bar{G} + i\bar{H},$$

où l'on a mis de côté les termes du deuxième et du troisième ordre par rapport aux quantités  $G_1$  et  $H_1$ .

En me réservant de donner, plus loin, les détails du calcul par lequel s'obtient le développement absolu de la fonction  $U$ , je me contente, pour le moment, de signaler le résultat qui se présente tout d'abord.

Soit

$$\gamma_n e^{in\varpi}$$

un terme de  $\bar{G} + i\bar{H}$ , nous admettons que  $n$  soit un très grand nombre, de sorte que le produit  $n\bar{\zeta}$  puisse être considéré comme une quantité de l'ordre zéro; soit de plus

$$g_n e^{in\varpi}$$

le terme principal de  $U$  qui disparaît avec  $\gamma_n$ . Maintenant, si nous désignons par  $\eta_0$  la partie constante de  $G_0^2 + H_0^2$ , nous aurons, en vertu de l'équation (53), le résultat que voici:

$$\left[ -(n\bar{\zeta})^2 + 2n\bar{\zeta}(1 - \sigma) + 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 \right] g_n = \gamma_n.$$

On en obtient, sans difficulté, la valeur de  $g_n$ , qui devient généralement une quantité du même ordre que  $\gamma_n$ ; seulement si le produit  $n\bar{\zeta}$  est très approché de  $\sigma - \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_3\eta_0 - \frac{1}{2}(n\bar{\zeta})^2$ , il en pourrait résulter une valeur assez grande et mal déterminée. Mais, n'oublions pas que nous avons négligé, dans l'équation (53), les termes du troisième ordre. Si nous en tenons compte, il résultera toujours une très petite valeur de  $g_n$ , tout au plus du même ordre que la racine cubique du rapport des coefficients  $\gamma_n$  et  $\beta_3$ .

## 12. Revenons encore aux cas asymptotiques.

On pourrait croire que les formules contenant des exponentielles représentent des cas proprement appartenant à notre problème, mais il

n'en est rien. Le fait est que les équations (4), certaines conditions étant satisfaites, admettent des solutions asymptotiques, ce qui, cependant, ne nécessite pas que les équations (3) ou (5) offrent de pareilles solutions. L'apparition d'une solution asymptotique nous montre seulement que la manière d'approximation dans laquelle on commence par intégrer les équations (4), ne s'applique plus, dans les cas envisagés, à l'intégration des équations (3). Nous avons déjà vu, dans le paragraphe 9, comment on peut éviter de tels cas; donc, il nous reste seulement de montrer que les approximations, en partant d'une solution asymptotique, ne sont plus convergentes.

Dans ce but, reprenons l'équation (13). Dans l'expression de la fonction  $W$ , donnée par la formule (12), nous ne retenons que le terme

$$-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{1-\sigma} M = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1-\sigma} \frac{d^2 G}{dv^2},$$

ce qui nous donnera, si nous remplaçons la variable indépendante  $v$  par  $x$ , et que nous exprimions les coefficients au moyen des trois racines  $c$ ,  $c_1$  et  $c_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} = & \frac{1}{2} \mu^2 c c_1 c_2 - \mu^2 (c_1 c_2 + c c_2 + c c_1) z + \frac{3}{2} \mu^2 (c + c_1 + c_2) z^2 - 2 \mu^2 z^3 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1-\sigma} \frac{d^2 G}{dx^2}. \end{aligned}$$

Posons d'abord:

$$c_1 = c,$$

il en résultera:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2} \mu^2 c^2 c_2 - \frac{1}{2} \mu^2 (c^2 + 2 c c_2) z + \frac{3}{2} \mu^2 (2c + c_2) z^2 - 2 \mu^2 z^3 + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{1-\sigma} \frac{d^2 G}{dx^2}.$$

Après avoir multiplié cette équation par  $\frac{dz}{dx}$ , on en tire, en l'intégrant, le résultat que voici:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z (c - z)^2 (c_2 - z) + \frac{\gamma}{1-\sigma} \int \frac{d^2 G}{dx^2} \frac{dz}{dx} dx.$$

En posant:

$$z = \frac{c}{1 + \zeta^2}; \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{2c\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{dx},$$

on tire de l'équation précédente:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \frac{\mu^2 c}{4} \zeta^2 (c_2 - c + c^2 \zeta^2) - \frac{1}{4} \frac{\gamma(1 + \zeta^2)}{(1 - \sigma)c^2 \zeta^2} \int \frac{d^2 G}{dx^2} \frac{2c\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{dx} dx.$$

Or, après avoir déterminé  $\mu$  de manière à avoir:

$$\frac{\mu^2}{4} c(c_2 - c) = 1,$$

on obtiendra par différentiation:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dx^2} &= \zeta + \frac{2c_2}{c_2 - c} \zeta^3 + \frac{\gamma(1 + \zeta^2)^3}{c(1 - \sigma)\zeta^2} \int \frac{d^2 G}{dx^2} \frac{\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \frac{d\zeta}{dx} dx \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\gamma(1 + \zeta^2)^2}{c(1 - \sigma)\zeta} \frac{d\zeta}{dx} \frac{d^2 G}{dx^2}, \end{aligned}$$

équation qu'on ne saurait intégrer qu'au moyen d'approximations successives, dont on fait le commencement en négligeant les termes dépendant de la fonction  $\frac{d^2 G}{dx^2}$ .

En effet, si nous désignons par  $\zeta_0$  ce que devient  $\zeta$  lorsqu'on néglige  $\frac{d^2 G}{dx^2}$ , la fonction  $\zeta_0$  s'obtient en intégrant l'équation

$$\left(\frac{d\zeta_0}{dx}\right)^2 = \zeta_0^2 \left(1 + \frac{c_2}{c_2 - c} \zeta_0^2\right).$$

On en tire:

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2} \frac{2}{e^x - e^{-x}}};$$

et si l'on pose:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1,$$

l'équation du deuxième ordre en  $\zeta_1$  devient:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} - \left[1 + 2.3 \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2\right] \zeta_1 &= \frac{1}{4} \frac{\gamma}{c(1 - \sigma)} \frac{(e^x + e^{-x}) \left((e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2}\right)^2}{(e^x - e^{-x})^5} \frac{d^2 G}{dx^2} \\ &\quad - \frac{\gamma}{c(1 - \sigma)} \frac{\left((e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2}\right)^2}{2 \left(\frac{c_2 - c}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} (e^x - e^{-x})^3} \int \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{\left((e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2}\right)^2} \frac{d^2 G}{dx^2} dx, \end{aligned}$$

pourvu qu'on y néglige le carré ainsi que la troisième puissance de  $\zeta_1$ , et de même le produit de  $\zeta_1$  par  $\gamma$ .

En vertu du théorème que nous avons démontré au n° 2, on obtiendra immédiatement une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} - \left[ 1 + 2 \cdot 3 \left( \frac{2}{e^x - e^{-x}} \right)^2 \right] \zeta_1 = 0,$$

à savoir celle-ci:

$$y_1 = \zeta_1 = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

L'autre intégrale s'obtient à l'aide de la formule

$$y_2 = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2} \int \frac{(e^x - e^{-x})^4 dx}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

En intégrant par parties, il viendra:

$$\int \frac{(e^x - e^{-x})^4 dx}{(e^x + e^{-x})^2} = - \frac{(e^x - e^{-x})^3}{e^x + e^{-x}} + \frac{3}{2} (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) - 6x,$$

de sorte qu'on aura:

$$y_2 = - (e^x - e^{-x}) + \frac{3(e^x + e^{-x})^2}{2(e^x - e^{-x})} - 6x \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

Pour mettre en évidence l'expression complète de la fonction  $\zeta_1$ , il faut encore chercher le développement de  $\frac{d^2G}{dx^2}$ . Dans ce but, reprenons l'équation (42), et différencions-la deux fois. Nous aurons ainsi:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = - \frac{3}{8} \frac{\partial d^2z}{\varepsilon dx^2} + \frac{3}{8\varepsilon} \left[ \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + z \frac{d^2z}{dx^2} \right] = \frac{3}{8} \frac{z - \partial d^2z}{\varepsilon dx^2} + \frac{3}{8\varepsilon} \left( \frac{dz}{dx} \right)^2.$$

En portant dans cette formule les expressions

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2c(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2}} - \frac{2c(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})^3}{\left[ (e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2} \right]^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2c(e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2}} + (e^x - e^{-x})^2 F,$$

$F$  étant une fonction de  $x$  ne devenant pas infinie pour  $x$  égal à zéro, nous aurons, en ne retenant, dans l'expression de  $\frac{d^2G}{dx^2}$ , que le terme qui reste fini lorsque  $x$  disparaît:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -\frac{3}{8} \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{2c(e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2 + 4 \frac{c_2 - c}{c_2}}.$$

Maintenant, si nous cherchons l'expression complète de  $\zeta_1$ , nous y trouverons nécessairement des termes multipliés par des puissances positives de  $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$ , ce qui montre que la fonction  $\zeta_1$  devient infinie, si  $x$  est égal à zéro. De là on conclut que la solution asymptotique donnant la fonction  $z$  exprimée en exponentielles, ne peut pas être regardée comme une vraie approximation.

### § 3. Deuxième méthode.

1. L'emploi des fonctions elliptiques à l'intégration de l'équation dont il s'agit, est d'autant plus important que les développements qui en résultent s'appliquent également à la recherche de l'intégrale des équations avec plusieurs termes tout connus. Si cette idée était réalisée, on serait porté à faire l'application des formules les plus simples et les plus claires; et puis, il y aurait lieu de mettre en usage diverses expressions selon la nature numérique de l'équation proposée. C'est pour avoir les expressions les plus variées représentant la solution de notre problème que je vais la traiter encore par deux méthodes différentes.

Pour point de départ des recherches du présent paragraphe nous prenons les équations (5) du paragraphe précédent, à savoir:

$$(1) \quad \begin{cases} 2(1 - \sigma) \frac{dH}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4} \beta_3 \eta^2 \right] G = -\gamma + M, \\ -2(1 - \sigma) \frac{dG}{dv} + \left[ 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4} \beta_3 \eta^2 \right] H = N. \end{cases}$$

On peut les intégrer de la manière que nous allons montrer maintenant.

En désignant par  $\Delta\beta$  l'incrément qu'il faut ajouter à  $\beta_1$  pour avoir, dans les diverses approximations, des résultats dépourvus de tout terme séculaire, et en posant:

$$(2) \quad \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_1\gamma^2 - \Delta\beta}{2(1-\sigma)} = 2 \frac{d\theta}{dv},$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{-i\gamma + iM - N - i(G + iH)\Delta\beta}{2(1-\sigma)} = P, \\ \frac{i\gamma - iM - N + i(G - iH)\Delta\beta}{2(1-\sigma)} = Q, \end{cases}$$

on tire des équations (1) les suivantes:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dG}{dv} + i \frac{dH}{dv} + 2i \frac{d\theta}{dv} (G + iH) = P, \\ \frac{dG}{dv} - i \frac{dH}{dv} - 2i \frac{d\theta}{dv} (G - iH) = Q, \end{cases}$$

En se rappelant les notations introduites dans le n° 1 du paragraphe précédent, on déduit facilement de l'équation (2) la relation

$$(5) \quad \frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{16}\beta(z - \delta) - \frac{\Delta\beta}{4(1-\sigma)}$$

qui sert au calcul de  $\theta$ , si la fonction  $z$  est connue.

La fonction  $\theta$  déterminée, les intégrales des équations (4) s'expriment au moyen des formules que voici:

$$(6) \quad \begin{cases} G + iH = e^{-2i\theta} \left\{ e_1 + \int e^{2i\theta} P dv \right\}, \\ G - iH = e^{2i\theta} \left\{ e_1 + \int e^{-2i\theta} Q dv \right\}, \end{cases}$$

$e_1$  étant une arbitraire qui devient identique avec la constante  $e_0$  aussitôt que  $P$  et  $Q$  disparaissent.

Cherchons toutefois de déterminer la fonction  $\theta$  d'une manière directe.

2. Multipliant membre à membre les équations (6), on aura, en se rappelant la relation

$$G^2 + H^2 = \eta^2,$$



la formule ci-dessous:

$$(7) \quad \eta^2 = e_1^2 + e_1 \int \{e^{2i\theta} Pdv + e^{-2i\theta} Qdv\} + \left[ \int e^{2i\theta} Pdv \right] \left[ \int e^{-2i\theta} Qdv \right].$$

En différentiant cette formule, après l'avoir multipliée par  $\frac{3}{16} \frac{\beta_3}{1-\sigma}$ , nous aurons:

$$(8) \quad \frac{d^2\theta}{dv^2} = -\frac{3}{16} \frac{\beta_3 e_1}{1-\sigma} \{e^{2i\theta} Pdv + e^{-2i\theta} Qdv\} - \frac{3}{16} \frac{\beta_3}{1-\sigma} X,$$

où l'on s'est servi de la notation

$$(9) \quad X = e^{2i\theta} P \int e^{-2i\theta} Qdv + e^{-2i\theta} Q \int e^{2i\theta} Pdv.$$

D'un autre côté, nous avons, en vertu de la première des équations 7 (§ 2),

$$\frac{d\eta^2}{dv} = -\frac{\gamma}{1-\sigma} H + \frac{MH - NG}{1-\sigma}.$$

Maintenant, si l'on introduit l'expression de  $H$  tirée des équations (6), à savoir:

$$H = i \frac{e_1}{2} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) + \frac{i}{2} \{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv - e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\}$$

et qu'on multiplie l'équation précédente par  $\frac{3}{16} \frac{\beta_3}{1-\sigma}$ , il en résulte:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dv^2} &= i \frac{3}{32} \beta_3 e_1 (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) \\ &+ i \frac{3}{32} \beta_3 \gamma \{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv - e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\} \\ &- \frac{3}{16} \beta_3 (MH - NG). \end{aligned}$$

L'équation que nous venons de trouver doit être identique avec l'équation (8), mais la forme de l'équation (10) étant plus convenable aux applications que ne l'est cette équation, nous admettons la dernière comme fondement des recherches suivantes.

En observant les relations

$$\begin{aligned} d[e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}] &= 2i[e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}]d\theta, \\ d\{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv + e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\} \\ &= 2i\{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv - e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\}d\theta + (P + Q)dv, \end{aligned}$$

on tire immédiatement de l'équation (10) la suivante:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2\theta}{dv^2} \frac{d\theta}{dv} &= \frac{3}{32} \beta \gamma e_1 \frac{d(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}{dv} \\ &+ \frac{3}{32} \beta \gamma \frac{d\{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv + e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\}}{dv} \\ &- \frac{3}{32} \beta \gamma (P + Q) - \frac{3}{8} \beta (MH - NG) \frac{d\theta}{dv}, \end{aligned}$$

dont l'intégrale, en désignant l'arbitraire par  $h$ , s'exprime ainsi:

$$\begin{aligned} (11) \quad \left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 &= h + \frac{3}{32} \beta \gamma e_1 (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ &+ \frac{3}{32} \beta \gamma \{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv + e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\} \\ &- \frac{3}{8} \beta \int [MH - NG] \frac{d\theta}{dv} dv - \frac{3}{32} \beta \gamma \int [P + Q] dv. \end{aligned}$$

Etant arrivé à ce résultat, il sera facile de rétablir l'équation (13) du paragraphe précédent, ce qui deviendra utile pour la comparaison de la méthode du paragraphe présent avec celle que nous avons déjà exposée.

En effet, par la différentiation de l'équation (10), on aura tout de suite:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta}{dv^3} &= -2 \frac{3}{32} \beta \gamma e_1 (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \frac{d\theta}{dv} \\ &- 2 \frac{3}{32} \beta \gamma \{e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Qdv + e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} Pdv\} \frac{d\theta}{dv} \\ &+ i \frac{3}{32} \beta \gamma (Q - P) - \frac{3}{16} \beta \frac{d(MH - NG)}{dv}; \end{aligned}$$

et, si l'on ajoute cette équation à l'équation (11), multipliée par  $2 \frac{d\theta}{dv}$ , il en résulte

$$(12) \quad \frac{d^2\theta}{dv^2} + 2\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = 2h \frac{d\theta}{dv} + i \frac{3}{32} \beta r (Q - P) - \frac{3}{4} \beta Y,$$

où, pour abrégier l'écriture, on a employé la notation que voici:

$$(13) \quad Y = \frac{d\theta}{dv} \int [MH - NG] \frac{d\theta}{dv} dv + \frac{1}{4} \frac{d\theta}{dv} r \int (P + Q) dv \\ + \frac{1}{4} \frac{d(MH - NG)}{dv}.$$

L'équation que nous venons de trouver n'est au fond autre chose que l'équation citée du paragraphe précédent, ce qui pourrait être démontré, si après avoir fait  $\Delta\beta$  égal à zéro, on introduit dans l'équation (12) la valeur du rapport  $\frac{d\theta}{dv}$  selon la formule (5). L'identité des deux équations se manifeste immédiatement, pourvu que la constante  $h$  soit donnée par la formule:

$$h = \left(\frac{3}{16} \beta\right)^2 \delta^2 - \frac{3}{16} \beta r e_0.$$

Ayant, de cette manière, déterminé la constante introduite par l'intégration, on pourra utiliser l'équation (11) pour en déduire quelques propriétés de la fonction  $\theta$ .

3. Si l'on néglige, dans les équations (3), les quantités  $M$  et  $N$ , et que l'on y introduise les expressions de  $G + iH$  et de  $G - iH$  que donnent les formules (6), on sera conduit à deux équations linéaires du premier ordre, desquelles on obtient, en les intégrant, les expressions

$$(14) \quad \begin{cases} \int e^{2i\theta} P dv = -\frac{i}{2(1-\sigma)} e^{-i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v} \int e^{i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v} \{r e^{2i\theta} + e_1 \Delta\beta\} dv, \\ \int e^{-2i\theta} Q dv = \frac{i}{2(1-\sigma)} e^{i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v} \int e^{-i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v} \{r e^{-2i\theta} + e_1 \Delta\beta\} dv. \end{cases}$$

Reprenons le développement (20) du § 1, à savoir:

$$\eta^2 = \eta_0 + \eta_1 \cos w + \eta_2 \cos 2w + \dots,$$

l'angle  $w$  étant toujours donné par la formule

$$w = f - f_1,$$

d'où il suit:

$$\frac{dw}{dv} = \sigma - \zeta = \bar{\zeta}.$$

Admettons de plus le développement

$$\theta = \theta_0 w + \theta_1 \sin w + \theta_2 \sin 2w + \dots,$$

ou bien celui-ci:

$$\frac{d\theta}{dv} = \bar{\zeta} \{ \theta_0 + \theta_1 \cos w + 2\theta_2 \cos 2w + \dots \}.$$

En introduisant le développement de  $\eta^2$  ainsi que celui de  $\frac{d\theta}{dv}$  dans l'équation (2), nous aurons les relations suivantes entre les  $\eta$  et les  $\theta$ :

$$2\bar{\zeta}\theta_0 = \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta}{2(1-\sigma)},$$

$$2\bar{\zeta}\theta_1 = -\frac{3}{8} \frac{\beta_3}{1-\sigma} \eta_1,$$

$$2 \cdot 2\bar{\zeta}\theta_2 = -\frac{3}{8} \frac{\beta_3}{1-\sigma} \eta_2,$$

etc.

Puisque nous n'avons considéré qu'un seul terme connu, les fonctions  $G$  et  $H$  ne doivent dépendre que d'un seul argument, à savoir de  $w$ ; de là résulte la nécessité de déterminer le coefficient  $\theta_0$  d'une manière telle que tout argument illégitime soit chassé. Le coefficient dont il s'agit peut être choisi de deux façons différentes.

D'abord, la condition dont nous avons fait mention serait satisfaite si nous mettions:

$$\theta_0 = \frac{1}{2},$$

ce qui entraînerait:

$$\bar{\zeta} = \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta}{2(1 - \sigma)}.$$

Soit, pour abrégier,

$$\frac{\Delta\beta}{2(1 - \sigma)} = \lambda;$$

la somme  $\bar{\zeta} + \lambda$  est donc évidemment indépendante de  $\Delta\beta$ .

Mais afin d'éviter les arguments superflus, on pourrait aussi mettre:

$$\theta_0 = 0,$$

hypothèse qui s'exprime aussi par l'équation

$$\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta}{2(1 - \sigma)} = 0$$

mais qui ne conduit pas, immédiatement, à la formule d'où résulte le coefficient  $\bar{\zeta}$ .

Dans l'équation de condition que nous avons mise en évidence, l'incrément  $\Delta\beta$  n'est point arbitraire; il est au contraire déterminé par la condition que, des formules (14) doivent résulter de petites valeurs ne contenant aucun terme séculaire. On conclut de ce fait que la constante  $e_1$  n'est plus arbitraire, mais qu'elle s'obtient à l'aide d'une certaine condition. En revanche, on verra naître, par le procès d'intégration, un nouveau terme, dont le coefficient est arbitraire et dont l'argument contient le facteur que nous désignons par  $\bar{\zeta}$ .

Arrivé à ce point, on se rappellera l'analogie avec le cas ordinaire de la libration, mais on s'apercevra toutefois d'une différence distincte. Dans le cas de la libration des mouvements moyens, il s'agit toujours de remplacer un argument astronomique par un nouvel argument; dans le cas dont nous nous occupons ici c'est le mode de calcul et la place de l'arbitraire qui changent. Ce changement ne peut, cependant, se présenter que dans le cas d'une très petite valeur de la constante  $h$ .

Il faut donc considérer deux cas séparément: commençons par adopter la valeur  $\frac{1}{2}$  du coefficient  $\theta_0$ .

4. Lorsque la fonction  $\theta$  renferme un terme séculaire, le développement des fonctions qui entrent dans les formules (14), s'exprime sous la forme que voici:

$$(15) \quad e^{\pm 2i\theta} = e^{\pm iw} \{ B_0 + B_1 \cos w + B_2 \cos 2w + \dots \\ \pm iA_1 \sin w \pm iA_2 \sin 2w \pm \dots \}.$$

En effet, le développement que nous avons admis, résulte immédiatement de ce que:

$$e^{\pm 2i\theta} = e^{\pm iw} \left\{ 1 \pm 2i\theta_1 \sin w \pm 2i\theta_2 \sin 2w \pm \dots \right. \\ \left. - \frac{4}{1 \cdot 2} [\theta_1 \sin w + \theta_2 \sin 2w + \dots]^2 \right. \\ \left. \mp \frac{8i}{1 \cdot 2 \cdot 3} [\theta_1 \sin w + \theta_2 \sin 2w + \dots]^3 + \dots \right\},$$

d'où l'on tire facilement les expressions des coefficients  $A$  et  $B$ . En voici les premières:

$$B_0 = 1 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \dots + \frac{1}{4}(\theta_1^4 + \theta_2^4 + \dots) \\ + (\theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3^2 + \theta_2^2\theta_3^2 + \dots), \\ A_1 = 2\theta_1 - \theta_1^3 - 2\theta_1\theta_2^2 + \theta_1^3\theta_3 + \dots, \\ B_1 = -2\theta_1\theta_2 - 2\theta_2\theta_3 - \dots, \\ A_2 = 2\theta_2 - 2\theta_1^2\theta_3 + \dots, \\ B_2 = \theta_1^2 - 2\theta_1\theta_3 + \theta_1^2\theta_3^2 + \dots, \\ \text{etc.}$$

Or le développement que nous venons d'établir s'écrit aussi de la manière suivante:

$$(15') \quad e^{\pm 2i\theta} = -\frac{1}{2}(A_1 - B_1) + B_0 e^{\pm iw} - \frac{1}{2}(A_2 - B_2) e^{\mp iw} \\ + \frac{1}{2}(A_1 + B_1) e^{\pm 2iw} - \frac{1}{2}(A_3 - B_3) e^{\mp 2iw} + \dots,$$

expression que nous allons introduire dans les équations (14).

Maintenant, si l'on choisit l'incrément  $\Delta\beta$  de manière à détruire le coefficient de  $e^{i\lambda v}$  ou de  $e^{-i\lambda v}$  dans les équations (14), il faut satisfaire à la condition

$$(16) \quad -\frac{\gamma}{2}(A_1 - B_1) + e_1 \Delta\beta = 0,$$

ce qui nous conduit aux expressions suivantes:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int e^{2i\theta} P dv = -\frac{\gamma B_0 e^{i\omega}}{2(1-\sigma)(\bar{\zeta} + \lambda)} - \frac{\gamma(A_1 + B_1)e^{2i\omega}}{4(1-\sigma)(2\bar{\zeta} + \lambda)} - \dots \\ \quad + \frac{\gamma(A_2 - B_2)e^{-i\omega}}{4(1-\sigma)(-\bar{\zeta} + \lambda)} + \frac{\gamma(A_3 - B_3)e^{-2i\omega}}{4(1-\sigma)(-2\bar{\zeta} + \lambda)} + \dots \\ \int e^{-2i\theta} Q dv = -\frac{\gamma B_0 e^{-i\omega}}{2(1-\sigma)(\bar{\zeta} + \lambda)} - \frac{\gamma(A_1 + B_1)e^{-2i\omega}}{4(1-\sigma)(2\bar{\zeta} + \lambda)} - \dots \\ \quad + \frac{\gamma(A_2 - B_2)e^{i\omega}}{4(1-\sigma)(-\bar{\zeta} + \lambda)} + \frac{\gamma(A_3 - B_3)e^{2i\omega}}{4(1-\sigma)(-2\bar{\zeta} + \lambda)} + \dots \end{array} \right.$$

Ayant obtenu ces résultats, on peut tirer des équations que nous avons établies dans les pages précédentes, quelques observations importantes. D'abord, en introduisant les développements (17) dans l'expression (7), et ne mettant en évidence que le terme constant du résultat, nous aurons:

$$(18) \quad \eta_0 = e_1^2 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{4(1-\sigma)^2(\bar{\zeta} + \lambda)^2} + \frac{\gamma^2(A_1 + B_1)^2}{16(1-\sigma)^2(2\bar{\zeta} + \lambda)^2} + \dots$$

Mais, d'un autre côté, nous nous rappelons les relations

$$\bar{\zeta} + \lambda = \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0}{2(1-\sigma)},$$

$$\lambda = \frac{\gamma(A_1 - B_1)}{4e_1(1-\sigma)},$$

de sorte que la détermination des quantités  $\eta_0$  et  $\bar{\zeta} + \lambda$  peut s'effectuer, les  $B_0, A_1, B_1, \dots$  étant connus; et bien que la supposition qu'on connaisse d'avance ces coefficients ne soit pas légitime, on peut très souvent commencer les approximations en faisant:

$$B_0 = 1$$

et en négligeant les autres coefficients, ce qui nous donnerait des valeurs approchées de  $\eta_0$  et de  $\bar{\zeta}$ .

Cela supposé, nous retombons dans une équation du troisième degré en  $\bar{\zeta} + \lambda$  ou en  $\eta_0$ . Si l'on se sert de la notation

$$\frac{\delta_1}{1-\sigma} = \frac{4}{3} \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} - e_1^2,$$

l'équation en  $\bar{\zeta} + \lambda$  devient:

$$\bar{\zeta} + \lambda - \frac{3}{8} \beta \delta_1 = - \frac{3}{32} \frac{\beta \gamma^2}{(1-\sigma)(\bar{\zeta} + \lambda)^2}.$$

De cette équation on conclut facilement que la somme  $\bar{\zeta} + \lambda$  est dans les cas ordinaires une quantité du même ordre que  $\beta_1$  ou  $\beta_3$ , mais qu'elle devient tout au plus de l'ordre de

$$\beta_3^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{2}{3}},$$

si  $\delta_1$  est très petit. Posons donc:

$$\bar{\zeta} + \lambda = - f \beta_3^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{2}{3}},$$

$f$  étant un coefficient dont la valeur numérique ne devient jamais très petite, et nous aurons:

$$\frac{\gamma}{\bar{\zeta} + \lambda} = - \frac{1}{f} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}},$$

d'où il s'ensuit que le rapport  $\frac{\gamma}{\bar{\zeta} + \lambda}$  s'évanouit avec  $\gamma$ .

Maintenant, il serait facile d'établir des expressions approchées des coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots$ ; cependant nous ne nous arrêterons pas à ce point. Toutefois il importe de remarquer que le développement (18) est toujours convergent, vu que la valeur numérique de la quantité  $\lambda$  est sensiblement au dessous de celle de  $\bar{\zeta}$ .

5. Revenons à l'équation (11). En y négligeant les termes dépendant des fonctions  $M$  et  $N$ , ainsi que la somme  $P + Q$ , qui est à peu près égale à  $N$ , elle prend la forme

$$(19) \quad \left( \frac{d\theta}{dv} \right)^2 = h + \frac{3}{16} \beta \gamma e_1 \cos 2\theta + \frac{3}{32} \frac{\beta \gamma B_0^2}{f(1-\sigma)} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} + \dots$$

+ termes périodiques.



Si maintenant le coefficient  $\delta$  était tellement petit qu'il fût comparable au carré de  $e_1$  ou de  $e_0$ , la partie constante de la formule précédente pourrait bien être très petite par rapport au coefficient de  $\cos 2\theta$ , ou même négative. Ensuite, puisque les coefficients des termes périodiques, qui ne sont pas mis en évidence dans notre formule, sont très petits en comparaison de celui de  $\cos 2\theta$ , ce qui est facile à voir en considérant les équations (17), il résulterait une valeur négative de  $\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2$ , toutes les fois que la fonction  $\theta$  excéderait certaines limites.

Les circonstances étant telles, on retomberait dans le second cas, où il faudrait adopter:

$$\theta_0 = 0.$$

Maintenant nous commençons par signaler le développement

$$e^{\pm 2i\theta} = B_0 + B_1 \cos w + B_2 \cos 2w + \dots \\ \pm iA_1 \sin w \pm iA_2 \sin 2w \pm \dots,$$

où l'on a utilisé les notations du n° 4.

D'abord, il est bien évident qu'on doit déterminer l'incrément  $\Delta\beta$  en satisfaisant à la condition

$$(20) \quad B_0\gamma + e_1\Delta\beta = 0.$$

Cela posé, on déduit des équations (14) les formules:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int e^{2i\theta} P dv = -\frac{i\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{\zeta}B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \sin nw \\ \quad \quad \quad -\frac{\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{\zeta}A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \cos nw, \\ \int e^{-2i\theta} Q dv = \frac{i\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{\zeta}B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \sin nw \\ \quad \quad \quad -\frac{\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^{\infty} \frac{n\bar{\zeta}A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \cos nw, \end{array} \right.$$

qui serviront en première ligne à la recherche de l'expression de la fonction  $\gamma^2$ . Il s'agit avant tout d'en former la partie constante. La voici:

$$(22) \quad \eta_0 = e_1^2 + \frac{\gamma^2}{8(1-\sigma)^2} \sum_1^{\infty} \left\{ \left( \frac{n\bar{\zeta}B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{n\bar{\zeta}A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \right)^2 \right\}.$$

En vertu de cette valeur de  $\eta_0$  et de celle de  $\Delta\beta$  tirée de l'équation (20), on déduit de la condition

$$2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta = 0$$

l'équation suivante du troisième degré en  $e_1$

$$(23) \quad e_1^2 - \frac{4B_0\gamma}{3\beta_3 e_1} - \frac{4}{3\beta_3} (2\sigma - \sigma^2 - \beta_1) + \frac{\gamma^2}{8(1-\sigma)^2} \sum_1^{\infty} \left\{ \left( \frac{n\bar{\zeta}B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{n\bar{\zeta}A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\zeta})^2 - \lambda^2} \right)^2 \right\} = 0,$$

d'où s'obtient le coefficient  $e_1$ , qui ne doit plus être considéré comme une constante arbitraire.

Pour déterminer, dans le cas actuel, le coefficient  $\bar{\zeta}$ , ainsi que pour faire ressortir la constante arbitraire, reprenons l'équation (11). En n'y considérant, dans une première approximation, que les premiers termes, nous aurons

$$(24) \quad \left( \frac{d\theta}{dv} \right)^2 = h + \frac{3}{16}\beta_7 e_1 - 2\frac{3}{16}\beta_7 e_1 \sin^2 \theta;$$

et si nous introduisons, au lieu de  $\theta$ , une nouvelle fonction donnée par la formule

$$\sin \theta = l \sin \varphi,$$

où l'on a admis la notation

$$(25) \quad l = \sqrt{\frac{h + \frac{3}{16}\beta_7 e_1}{2\frac{3}{16}\beta_7 e_1}},$$

l'équation précédente se transforme en celle-ci:

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \left(h + \frac{3}{16}\beta\gamma e_1\right) \cos^2 \varphi.$$

Mais puisqu'on a:

$$d\theta = \frac{l \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \varphi}},$$

il résultera finalement:

$$\frac{d\varphi}{dv} = \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1} \sqrt{1 - l^2 \sin^2 \varphi},$$

le module  $l$  pouvant être considéré comme une constante arbitraire, vu qu'il dépend de l'arbitraire  $e_0$  contenue dans  $\delta$ .

En désignant par

$$- \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1} v_0$$

la partie constante de l'argument, la fonction  $\varphi$  s'exprime par une fonction elliptique de la variable

$$u = \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1} (v - v_0),$$

et son développement en série trigonométrique procède suivant les multiples de

$$\frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1} (v - v_0),$$

$L$  étant l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Il s'ensuit de là que le coefficient nommé  $\bar{\zeta}$  s'exprime par la formule

$$\bar{\zeta} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}.$$

Rassemblons les résultats du calcul précédent. Les voici:

$$\sin \theta = l \operatorname{sn} u,$$

$$\cos \theta = \operatorname{dn} u;$$

et on en tire encore:

$$\sin 2\theta = 2l \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2l^2 \operatorname{sn} u^2.$$

Après avoir établi ces formules, on trouve sans difficulté les développements de la fonction  $e^{\pm 2i\theta}$ , qui nous permettent de calculer les termes non considérés jusqu'ici dans les équations (10) et (11).

En considérant la valeur

$$h = \left(\frac{3}{16}\beta\right)^2 \delta^2 - \frac{3}{16}\beta r e_0,$$

on aura, au moyen de la formule (25), l'expression suivante de  $l$ :

$$(25') \quad l = \pm \delta \sqrt{\frac{3}{32} \frac{\beta}{r e_1}} \sqrt{1 - \frac{16}{3} \frac{\gamma(e_0 - e_1)}{\beta \delta^2}},$$

d'où il est visible que la valeur de  $l$  très rarement, c'est à dire seulement dans le cas d'une très petite valeur de  $\delta$ , reste moindre que l'unité. Mais le coefficient  $\delta$  étant généralement une quantité de l'ordre zéro, on retombe, le plus souvent, dans le premier cas.

Mais il faut avant tout se rappeler que la formule établie donnant la valeur de  $l$  n'est qu'approchée. En effet, en désignant par  $k$  le réciproque du module  $l$ , nous aurons en vertu de l'équation (19)

$$(26) \quad k^2 = \frac{\frac{3}{8}\beta r e_1}{h + \frac{3}{16}\beta r e_1 + \frac{3}{32} \frac{\beta r}{1 - \sigma} \frac{B_0^2}{f} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

résultat qui diffère, par le dernier terme du dénominateur, de celui qui s'ensuit de la formule (25).

Donc, les résultats que nous venons d'obtenir dans les deux cas considérés séparément, ne s'approchant pas l'un de l'autre dans un cas intermédiaire, examinons si, en partant de l'équation

$$(27) \quad \frac{d^2 V_0}{dv^2} = -\frac{3}{16}\beta r e_1 \sin 2V_0,$$

on pourrait parvenir, au moyen d'approximations successives, à l'intégrale exacte de l'équation (10).

6. Les recherches que nous allons aborder, et dont le but a été signalé tout à l'heure, reposent sur les résultats généraux que j'ai donnés, dans le mémoire de 1887, relativement aux intégrales des équations du même type que celui de l'équation (10). En conséquence, il me suffit de renvoyer le lecteur, quant à ces résultats, au dit mémoire, et de n'en alléguer que ce qui s'applique aux recherches présentes.

Dans ce but écrivons l'équation (10) de la manière suivante:

$$(28) \quad \frac{d^2\theta}{dv^2} = -\frac{3}{16}\beta\gamma e_1 \sin 2\theta - \frac{3}{16}\frac{\beta\gamma}{f}\left(\frac{r}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}W,$$

et supposons-y la fonction  $W$  donnée par le développement que voici:

$$W = w_1 \sin w + w_2 \sin 2w + \dots,$$

les  $w_1, w_2, \dots$  étant des coefficients constants tout au plus de l'ordre zéro.

Ensuite, si nous posons:

$$\theta = V_0 + V_1,$$

et que nous désignons par  $h_2, h_4, \dots$  les parties constantes des fonctions  $V_1^2, V_1^4, \dots$ , il sera facile d'opérer la décomposition de l'équation (28) dans les deux équations qui suivent

$$(27') \quad \frac{d^2V_0}{dv^2} = -\alpha^2 \sin V_0 \cos V_0,$$

où l'on a admis la notation

$$\alpha^2 = \frac{3}{8}\beta\gamma e_1 \left\{ 1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \dots \right\},$$

et

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{d^2V_1}{dv^2} - \alpha^2(2 \sin V_0^2 - 1)V_1 = & -\frac{3}{16}\frac{\beta\gamma}{f}\left(\frac{r}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}W \\ & - \frac{3}{8}\beta\gamma e_1 \left\{ -\frac{4(V_1^2 - h_2)}{1.2} + \frac{16(V_1^4 - h_4)}{1.2.3.4} - \dots \right\} \sin V_0 \cos V_0 \\ & - \frac{3}{8}\beta\gamma e_1 \left\{ \frac{4V_1^3}{1.2.3} - \frac{16V_1^5}{1.2.3.4.5} + \dots \right\} (2 \sin V_0^2 - 1) \\ & + \frac{3}{8}\beta\gamma e_1 \left\{ \frac{4h_2}{1.2} - \frac{16h_4}{1.2.3.4} + \dots \right\} (2 \sin V_0^2 - 1)V_1. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Les termes de la quatrième ligne m'ont échappé dans mon mémoire: *Untersuchungen* etc.; p. 236.

On trouve, dans le mémoire mentionné, l'intégrale de l'équation (27'), mise sous deux formes différentes correspondant aux deux cas que nous venons d'envisager dans les pages précédentes.

D'abord, si le module  $k$  était moindre que l'unité, sa valeur s'obtiendrait au moyen de la formule

$$(30) \quad k \frac{K}{\pi} = \frac{a}{\xi},$$

et la fonction  $V_0$  s'exprimerait par la formule

$$V_0 = \operatorname{am} \frac{K}{\pi} w;$$

mais si, au contraire,  $k$  excédait l'unité, on aurait

$$\sin V_0 = l \operatorname{sn} \frac{2L}{\pi} w.$$

En portant ces résultats dans l'équation (29), et en écrivant, pour rapprocher les notations de celle de mon mémoire de 1887,

$$\frac{K}{\pi} w = \xi; \quad \frac{2L}{\pi} w = \eta,$$

nous obtenons

$$(31) \quad \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - (2k^2 \operatorname{sn}^2 \xi - k^2) V_1 = -\frac{3}{4} \frac{\beta \gamma}{f \xi^3} \left( \frac{\pi}{2K} \right)^2 \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} W + \dots$$

et

$$(32) \quad \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} - (2l^2 \operatorname{sn}^2 \eta - 1) V_1 = -\frac{3}{16} \frac{\beta \gamma}{f a^3} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} W + \dots$$

Or cette dernière équation se remplace par la suivante

$$(32') \quad \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} - (2l^2 \operatorname{sn}^2 \eta - 1) V_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} W + \dots,$$

pourvu qu'on admette la notation que voici:

$$f_1 = f \left( 1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \dots \right).$$

7. En utilisant les formules que j'ai données dans le mémoire de 1887, partie III, les intégrales des équations (31) et (32') s'obtiennent immédiatement. Il résulte de l'équation (31)

$$(33) \quad V_1 = c_1 \operatorname{dn} \xi + c_2 \operatorname{dn} \xi \left\{ \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} + \frac{E}{K} \xi \right\} \\ - \frac{3}{4} \frac{\beta \gamma}{f \zeta^2 k'^2} \left( \frac{\pi}{2K} \right)^2 \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} \int W \operatorname{dn} \xi d\xi \right. \\ \left. - \operatorname{dn} \xi \int W \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} d\xi \right\} \\ - \frac{3}{4} \frac{\beta \gamma}{f \zeta^2 k'^2} \left( \frac{\pi}{2K} \right)^2 \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{E}{K} \operatorname{dn} \xi \int d\xi \int W \operatorname{dn} \xi d\xi.$$

Maintenant, si nous remplaçons dans cette expression  $d\xi$  par  $\frac{K}{\pi} dw$ , et que nous y introduisons les développements des fonctions  $\operatorname{dn} \xi$  et  $\operatorname{dn} \xi \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi}$  suivant les multiples de  $\frac{\pi}{K} \xi = w$ , il est aisé de voir que le procès d'intégration ne produit aucun agrandissement des termes de la fonction  $W$  (à l'exception de celui qui peut résulter de la multiplication par le facteur commun) mais bien qu'il fait sortir l'argument  $w$  ou  $\xi$  hors des signes trigonométriques. Cependant, en attribuant à la constante surabondante  $c_2$  une valeur convenable, il sera très facile de faire disparaître les termes de cette nature; il reste seulement à examiner la grandeur de cette constante.

En ne considérant que les premiers termes des divers développements, nous avons:

$$W = w_1 \sin w, \\ \operatorname{dn} \xi = \frac{\pi}{2K} + \frac{\pi}{2K} \frac{4q}{1+q^2} \cos w, \\ \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} = -4q \sin w,$$

d'où l'on obtient l'expression du terme affecté du facteur  $\xi$ . La voici:

$$- \frac{3}{2} \frac{\beta \gamma}{f \zeta^2 k'^2} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} w_1 q \xi \operatorname{dn} \xi.$$

Evidemment, le coefficient de  $\xi \operatorname{dn} \xi$  dans cette expression doit être égal à  $c_2 \frac{E}{K}$ , afin que les termes contenant le facteur  $\xi$  se détruisent. Il en résulte la valeur

$$c_2 = \frac{3}{2} \frac{\beta \gamma}{f_1 \delta^2 k'^2} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{K}{E} w_1 q,$$

qui s'écrit aussi de la manière suivante

$$(34) \quad \begin{aligned} c_2 &= \frac{4a^2}{f_1 \delta^2 k'^2 e_1} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{K}{E} w_1 q \\ &= \frac{k^2}{f_1 k'^2 e_1} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{K}{E} w_1 q. \end{aligned}$$

Par cette expression il est visible que la constante  $c_2$  est, dans les cas les plus fréquents, une quantité très petite, mais que, si la valeur du module devient très approchée de l'unité, elle peut acquérir des valeurs assez considérables. Si, avec une telle valeur de  $c_2$ , on cherchait un nouveau résultat relativement à  $k$ , ce qui nécessiterait le calcul des coefficients  $h_2, h_4, \dots$ , on obtiendrait dans la plupart des cas une valeur effectivement plus approximative. Mais cela n'arrive pas nécessairement: quoique la formule (30) donne toujours une valeur de  $k$  plus petite que l'unité, la divergence des approximations successives peuvent montrer qu'on doit passer au second cas.

8. Considérons maintenant l'intégrale de l'équation (32').

En désignant par  $I$  ce que devient  $E$  lorsqu'on remplace  $k^2$  par  $l^2$ , l'intégrale de l'équation dont il s'agit sera exprimée au moyen de la formule

$$(35) \quad \begin{aligned} V_1 &= c_1 \operatorname{cn} \eta - c_2 \left\{ \operatorname{cn} \eta \left[ \frac{d \log \theta(\eta)}{d\eta} - \frac{L - I - l^2 L}{L} \eta \right] - \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1 l'^2} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \operatorname{cn} \eta \int W \operatorname{cn} \eta \frac{d \log \theta(\eta)}{d\eta} d\eta - \operatorname{cn} \eta \frac{d \log \theta(\eta)}{d\eta} \int W \operatorname{cn} \eta d\eta \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1 l'^2} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \operatorname{cn} \eta \int W \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta d\eta - \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta \int W \operatorname{cn} \eta d\eta \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{L - I - l^2 L}{f_1 e_1 l'^2 L} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \operatorname{cn} \eta \int d\eta \int W \operatorname{cn} \eta d\eta. \end{aligned}$$



En effectuant les intégrations que demandent les divers termes de cette formule, on voit naître des termes séculaires dans deux intégrales différentes. Considérons-les séparément.

D'abord, on aura à l'aide des formules approximatives

$$\operatorname{cn} \eta \frac{d \log \theta(\eta)}{d \eta} = 2q \sin w; \quad W = w_1 \sin w,$$

en ne retenant que le terme séculaire,

$$\int W \operatorname{cn} \eta \frac{d \log \theta(\eta)}{d \eta} d \eta = q w_1 \eta,$$

résultat, au lieu duquel on peut, en ayant égard à l'équation (25'), mettre celui-ci:

$$\frac{1}{16} l^2 w_1 \eta = \frac{1}{16} \frac{3}{32} \frac{\beta \delta^2 w_1}{r e_1} \left\{ 1 - \frac{16}{3} \frac{\gamma(e_0 - e_1)}{\beta \delta^2} \right\} \eta.$$

L'autre terme à facteur séculaire provient de l'intégrale

$$\int W \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta d \eta.$$

En n'y considérant que la partie principale du terme séculaire, admettons

$$\operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta = \sin w; \quad W = w_1 \sin w,$$

ce qui donne:

$$\int W \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta d \eta = \frac{1}{2} w_1 \eta.$$

Maintenant, pour déterminer la constante  $c_2$ , nous aurons la relation

$$(36) \quad \frac{L - I - l^2 L}{L} c_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1 l^2} \left( \frac{\gamma}{\beta_3} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{16} l^2 \right) w_1,$$

d'où l'on conclut que la valeur  $c_2$  ne devient assez petite que sous des conditions spéciales qui se produisent très rarement.

En effet, le coefficient de  $c_2$  contenant le facteur  $l^2$ , il faut que le terme à droit divisé par  $l^2$  soit une quantité très petite, même si  $l^2$  disparaît.

Cela ne pouvant pas arriver à moins que le coefficient  $w_1$  ne contienne lui-même le facteur  $l^2$ , examinons à cet égard brièvement la fonction

$$e^{2i\theta} \int e^{-2i\theta} Q dv - e^{-2i\theta} \int e^{2i\theta} P dv$$

d'où découlent les termes en  $W$ .

Il est d'abord visible en inspectant, soit les équations (14), soit les équations (21), que la fonction dont il s'agit contient toujours le facteur  $B_0 \gamma$  divisé par une quantité très petite ce que nous avons rappelé, dans l'équation (28), en mettant en évidence le facteur  $\frac{1}{f} \left(\frac{r}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Mais puisque le coefficient de  $\sin w$  contient le facteur  $A_1$ , il se trouve multiplié par  $l$ . Donc, la constante surabondante  $c_2$  s'exprimant par la formule

$$c_2 = \frac{T}{l},$$

$T$  étant une quantité qui ne disparaît pas avec  $l$ , la dite constante peut devenir très grande, de sorte que la fonction  $V_1$  n'apparaisse plus comme une petite correction à ajouter à la fonction  $V_0$ . L'application des formules que nous venons d'exposer dans ce numéro paraît donc restreinte aux cas où l'arbitraire  $l$  est moindre que l'unité, mais en même temps non pas trop avoisinant zéro. Conclure de là que la méthode d'intégrer l'équation (28) dont nous avons fait usage, devient impraticable, ce serait néanmoins une conclusion prématurée. Car, en ajoutant, dans l'équation (27'), au coefficient  $\frac{3}{8} \beta \gamma e_1$  une correction  $x$ , et en retranchant le terme  $-x \sin V_0 \cos V_0$  du membre droit de l'équation (29), on peut choisir l'indéterminée  $x$  de façon à faire disparaître, dans la fonction  $W$ , le terme dépendant de  $\sin w$ .

Cela étant, il est aisé de voir que le terme sémiséculaire provenant de la formule (35) est affecté du facteur  $q$  ou bien, ce qui revient au même, du facteur  $l^2$ . La méthode que nous venons d'exposer s'applique donc même au cas où l'arbitraire  $l$  est très petite.

#### § 4. *Troisième méthode.*

1. Les procédés dont nous avons fait l'exposition dans les pages précédentes, reposent sur l'hypothèse qu'on soit autorisé à négliger, dans la première approximation, les deuxièmes dérivées des fonctions  $G$  et  $H$ . Nous avons fait voir, il est vrai, que cette hypothèse est légitime, vu qu'on aura, dans la seconde approximation, des termes tout connus, dépendant de la deuxième puissance des forces troublantes, tandis que le terme tout connu dans l'équation proposée était du premier ordre. Néanmoins, il nous sera utile d'obtenir l'intégrale de l'équation dont il s'agit sans omettre les secondes différentielles, problème qui sera l'objet des recherches que nous allons communiquer tout de suite. Mais en retenant les secondes différentielles, d'autres difficultés se présentent, principalement en ce que les diverses approximations ne seront plus indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'on ne pourra pas obtenir une certaine d'elles moyennant un calcul direct. En effet, chaque nouvelle approximation entraîne des changements plus ou moins graves dans les résultats déjà obtenus.

Dans les applications numériques, la méthode que nous envisageons maintenant, ne sera pas à préférer aux précédentes, tant que l'équation proposée ne contient qu'un seul terme tout connu. Mais elle jouit de l'avantage de s'appliquer, de la manière la plus directe, aux cas de plusieurs termes connus. Il me faut cependant remarquer d'abord que les approximations entamées dans les §§ 2 et 3 procèdent suivant les puissances des masses troublantes, tandis que celles que nous allons aborder maintenant procèdent ordinairement suivant les puissances d'une quantité du deuxième ordre par rapport aux excentricités, mais exceptionnellement suivant celles d'une quantité de l'ordre zéro.

Reprenons l'équation posée, à savoir:

$$(1) \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_2\rho^3 = -\gamma \cos(f - w)$$

et admettons:

$$\rho = \rho_0 + R.$$

Si maintenant  $\rho_0$  était déterminé par l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho_0 - \beta_3\rho_0^3 = 0,$$

il nous resterait, pour déterminer la fonction  $R$ , l'équation

$$\frac{d^2R}{dv^2} + [1 - \beta_1 - 3\beta_3\rho_0^2]R = -\gamma \cos(f - w) + 3\beta_3R^2\rho_0 + \beta_3R^3.$$

Dans ces deux équations nous faisons entrer une petite modification. En désignant par  $\Delta\beta_1$  et  $p$  deux constantes indéterminées, et en admettant la notation

$$\beta_1 + \Delta\beta_1 = \bar{\beta},$$

nous les écrivons de la manière suivante:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \bar{\beta})\rho_0 - \beta_3\rho_0^3 = 0, \\ \frac{d^2R}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3\rho_0^2)R = -\gamma \cos(f - w) + 3\beta_3R^2\rho_0 - \Delta\beta_1\rho_0 \\ \quad \quad \quad + \beta_3R^3 + (p - \Delta\beta_1)R. \end{cases}$$

Evidemment, la somme de ces deux équations n'étant autre chose que l'équation (1), on en conclut que la décomposition est légitime.

Les constantes indéterminées  $\Delta\beta_1$  et  $p$  ont été introduites à fin d'éviter, dans les approximations suivantes, les arguments  $f$  et  $f - w$ .

2. La première des équations (2) s'intègre aisément au moyen de fonctions elliptiques. En effet, si l'on désigne par  $g^2$  une arbitraire, on aura tout de suite:

$$\left(\frac{d\rho_0}{dv}\right)^2 = g^2 - (1 - \bar{\beta})\rho_0^2 + \frac{1}{2}\beta_3\rho_0^4,$$

ou bien, en admettant les notations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{g^2}{x^2}(1 + k^2) = 1 - \bar{\beta}, \\ \frac{g^2}{x^4}k^2 = \frac{1}{2}\beta_3, \end{cases}$$

l'équation

$$(4) \quad \left(\frac{d\rho_0}{dv}\right)^2 = g^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{x^2}\right) \left(1 - k^2 \frac{\rho_0^2}{x^2}\right).$$

Maintenant, si l'on pose:

$$\frac{g}{x} dv = du,$$

et qu'on désigne par  $u_0$  une constante arbitraire, il résultera de l'équation précédente:

$$(5) \quad \rho_0 = x \operatorname{sn}(u - u_0), \quad \text{mod. } k.$$

Pour rendre ce résultat comparable à ceux que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents, posons:

$$u = \frac{2K}{\pi} (1 - \varsigma) v,$$

$$u_0 = -K + \frac{2K}{\pi} \Gamma,$$

$K$  étant l'intégrale complète de première espèce. De ces relations on conclut facilement les suivantes:

$$(6) \quad 1 - \varsigma = \sqrt{\frac{1 - \beta \pi}{1 + k^2 2K}},$$

$$(7) \quad \rho_0 = \frac{x \operatorname{cn} \frac{2K}{\pi} [(1 - \varsigma)v - \Gamma]}{\operatorname{dn} \frac{2K}{\pi} [(1 - \varsigma)v - \Gamma]}.$$

Si  $\beta_3$  était négatif, le module deviendrait imaginaire, et les formules correspondant au module réel s'obtiendraient tout de suite en vertu d'un théorème bien connu. Mais cherchons-les d'une manière immédiate.

En introduisant dans l'équation (4), après y avoir posé  $-k^2$  au lieu de  $k^2$ ,

$$\rho_0 = x \cos \varphi,$$

nous aurons:

$$x^2 \left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2 = g^2 (1 + k^2 \cos^2 \varphi)$$

ou bien:

$$\frac{x^2}{g^2(1+k^2)} \left( \frac{d\varphi}{dv} \right)^2 = 1 - \frac{k^2}{1+k^2} \sin^2 \varphi.$$

En admettant les notations

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{1+k^2} &= l^2, \\ g \frac{\sqrt{1+k^2}}{x} dv &= \frac{g}{x\sqrt{1-l^2}} dv \\ &= dv, \end{aligned}$$

on en tire:

$$\varphi = \text{am}(v - v_0), \quad \text{mod. } l,$$

$v_0$  étant une arbitraire que nous identifierons à  $\frac{2L}{\pi} \Gamma$ .

Finalement, si nous posons:

$$\begin{aligned} (8) \quad 1 - \zeta &= \frac{g}{x} \sqrt{1+k^2} \frac{\pi}{2L} \\ &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1-2l^2}} \frac{\pi}{2L}, \end{aligned}$$

notre résultat prendra la forme:

$$(9) \quad \rho_0 = x \text{cn} \frac{2L}{\pi} [(1-\zeta)v - \Gamma].$$

3. Venons maintenant à l'intégration de la seconde des équations

(2). En la multipliant par

$$\frac{x^2}{g^2} = \frac{1+k^2}{1-\beta},$$

et en désignant par  $W$  la somme des termes du second membre, nous en concluons:

$$\frac{d^2 R}{du^2} + \left\{ 1 + k^2 + \frac{p(1+k^2)}{1-\beta} - 3\beta_3 \frac{x^2}{g^2} \rho_0^2 \right\} R = \frac{x^4}{g^2} W.$$

Mais, puisqu'on a

$$\beta_3 \frac{x^2}{g^2} = 2 \frac{k^2}{x^2},$$

l'équation précédente prend la forme

$$(10) \quad \frac{d^2 R}{du^2} - \{2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 - 1 - k^2 - 3\vartheta\} R = \frac{x^2}{g^2} W,$$

où l'on a écrit  $u$  au lieu de  $u - u_0$ , et employé la notation

$$3\vartheta = p \frac{1 + k^2}{1 - \bar{\beta}}.$$

Dans le cas où  $\beta_3$  prend une valeur négative, on multipliera la seconde des équations (2) par  $\frac{x^2}{g^2(1 + k^2)}$ , ce qui donne:

$$\frac{d^2 R}{dv^2} + \left\{ \frac{x^2(1 - \bar{\beta})}{g^2(1 + k^2)} + 3\chi - 3 \frac{\beta_3 x^4}{g^2(1 + k^2)} \operatorname{cn} v^2 \right\} R = \frac{x^2}{g^2(1 + k^2)} W,$$

où l'on a posé:

$$3\chi = \frac{x^2 p}{g^2(1 + k^2)} = \frac{x^2}{g^2} p(1 - l^2).$$

En mettant dans les équations (3)  $-k^2$  au lieu de  $k^2$  et en observant les relations

$$\frac{x^2(1 - \bar{\beta})}{g^2(1 + k^2)} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = 1 - 2l^2,$$

$$-\frac{3\beta_3 x^4}{g^2(1 + k^2)} = 2 \cdot 3 \frac{k^2}{1 + k^2} = 2 \cdot 3l^2,$$

on conclut:

$$(11) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} - \{2 \cdot 3l^2 \operatorname{sn} v^2 - 1 - 4l^2 - 3\chi\} R = \frac{1 - 2l^2}{1 - \bar{\beta}} W.$$

Nous ne poursuivons plus les détails dans le cas où  $\beta_3$  est négatif, vu qu'un tel cas ne se présente que très exceptionnellement parmi les problèmes de la mécanique céleste; le cas échéant, il serait facile d'obtenir, au moyen de transformations connues, les expressions correspondant à la valeur négative de  $\beta_3$ .

S'il s'agissait de trouver l'intégrale de l'équation (10), les termes du second membre étant tout connus, rien n'empêcherait d'appliquer les résultats que M. HERMITE a donnés d'une manière admirablement élégante dans son mémoire *sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 106 et 107. Cependant, les termes du second membre n'étant pas donnés

dès l'abord, les difficultés qui nous restent à surmonter ne résident pas dans l'établissement de l'expression analytique de  $R$  comme fonction de  $u$  et  $W$ , mais bien dans le développement des termes de la fonction  $W$  elle-même. Cette fonction n'étant donnée, dans l'équation (10), qu'au moyen d'une expression contenant l'inconnue  $R$ , on ne saurait la déterminer d'une manière directe; il est donc indispensable de recourir aux approximations successives.

L'expression de la fonction  $W$  que nous empruntons à la seconde des équations (2), est celle-ci:

$$(12) \quad W = -\gamma \cos(f-w) + 3\beta_3 R^2 \rho_0 + \beta_3 R^3 \\ - \Delta\beta_1 \rho_0 + (p - \Delta\beta_1)R.$$

Pour y séparer, d'une manière aisée, les termes dont la somme doit disparaître, désignons généralement par

$$\overset{c(x)}{\mathbb{T}}(F)$$

le coefficient du terme qui se trouve multiplié par  $\cos x$  dans le développement d'une fonction quelconque  $F$ , et par

$$\overset{s(x)}{\mathbb{T}}(F)$$

le coefficient du terme dépendant de  $\sin x$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettons les caractéristiques  $c$  et  $s$ . Ainsi nous désignons par

$$\overset{0}{\mathbb{T}}(R^2)$$

le terme constant dans le développement de  $R^2$ , et par

$$\overset{f-w}{\mathbb{T}}(R^3)$$

le coefficient de  $\cos(f-w)$  dans le développement de  $R^3$ .

Cela établi, si  $R$  contient le terme

$$x_1 \cos(f-w),$$

nous aurons les conditions par lesquelles s'obtiennent  $p$  et  $\Delta\beta_1$  exprimées au moyen des équations que voici:



$$3\beta_3 \overset{0}{\mathbb{T}}(R^2) - \Delta\beta_1 = 0,$$

$$\beta_3 \overset{f-w}{\mathbb{T}}(R^3) + (p - \Delta\beta_1)x_1 = 0,$$

d'où l'on tire:

$$\Delta\beta_1 = 3\beta_3 \overset{0}{\mathbb{T}}(R^2),$$

$$p = -\frac{1}{x_1} \beta_3 \overset{f-w}{\mathbb{T}}(R^3) + 3\beta_3 \overset{0}{\mathbb{T}}(R^2).$$

Si ensuite, dans la fonction  $R$ , on ne considère que le seul terme

$$x_1 \cos(f-w),$$

il en résulte:

$$\overset{f-w}{\mathbb{T}}(R^3) = \frac{3}{4}x_1^3,$$

$$\overset{0}{\mathbb{T}}(R^2) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

d'où s'obtient:

$$(13) \quad \begin{cases} \Delta\beta_1 = \frac{3}{2}\beta_3 x_1^2, \\ p = \frac{3}{4}\beta_3 x_1^2. \end{cases}$$

Ayant obtenu ces résultats, nous poserons:

$$R = \rho_1 + R_1,$$

$$W = -\gamma \cos(f-w) + W_1,$$

et nous déterminerons la fonction  $\rho_1$  à l'aide de l'équation (10), après y avoir remplacé  $W$  par  $-\gamma \cos(f-w)$ , ou bien au moyen de la seconde des équations (2), en n'y retenant, au second membre, que cette partie de  $W$ . Ainsi nous aurons:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2\rho_1}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3\rho_0^2)\rho_1 = -\gamma \cos(f-w), \\ \frac{d^2R_1}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3\rho_0^2)R_1 = W_1, \end{cases}$$

où la fonction  $W_1$  est donnée par l'expression suivante:

$$(15) \quad W_1 = 3\beta_3\rho_1^2\rho_0 + \beta_3\rho_1^3 - \Delta\beta_1\rho_0 + (p - \Delta\beta_1)(\rho_1 + R_1) \\ + 2 \cdot 3\beta_3\rho_0\rho_1R_1 + 3\beta_3R_1^2\rho_0 + 3\beta_3\rho_1^2R_1 + 3\beta_3\rho_1R_1^2 + \beta_3R_1^3$$

4. Avant d'établir, avec plus de détails, l'expression de la fonction  $W_1$ , arrêtons-nous à l'intégration de la première des équations (14) ou bien à celle de l'équation (10). En nous rappelant la forme de l'équation de LAMÉ adoptée par M. HERMITE, à savoir:

$$\frac{d^2R}{du^2} - [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 + 2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} a^2 - 4 - 4k^2]R = 0,$$

nous aurons, par comparaison avec l'équation (10),

$$6k^2 \operatorname{sn} a^2 - 4 - 4k^2 = -1 - k^2 - 3\vartheta.$$

On tire de là:

$$2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 - k^2 = -\vartheta,$$

$$2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 = k^2 - \vartheta,$$

$$2 \operatorname{sn} a^2 - 1 = \frac{1 - \vartheta}{k^2}.$$

Effectuons le calcul d'après les trois formules de M. HERMITE, à savoir:

$$\operatorname{sn} \omega^2 = \frac{\operatorname{sn} a^4(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 - k^2)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1},$$

$$\operatorname{cn} \omega^2 = -\frac{\operatorname{cn} a^4(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1},$$

$$\operatorname{dn} \omega^2 = -\frac{\operatorname{dn} a^4(2 \operatorname{sn} a^2 - 1)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1}.$$

Nous aurons d'abord:

$$\operatorname{sn} a^2 = \frac{1 + k^2 - \vartheta}{2k^2}; \quad \operatorname{cn} a^2 = -\frac{1 - k^2 - \vartheta}{2k^2}; \quad \operatorname{dn} a^2 = \frac{1 - k^2 + \vartheta}{2},$$

et ensuite:

$$\begin{aligned} 3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1 &= (2 \operatorname{sn} a^2 - 1)(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1) - k^2 \operatorname{sn} a^4 \\ &= (2 \operatorname{sn} a^2 - 1)(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1) - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sn} a^2 (2 \operatorname{sn} a^2 - 1 + 1) \\ &= \frac{(1 - \vartheta)(k^2 - \vartheta)}{k^2} - \frac{(1 + k^2 - \vartheta)^2}{4k^2}. \end{aligned}$$

Après avoir admis la notation:

$$\lambda^2 = \frac{(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 - k^2)(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1)(2 \operatorname{sn} a^2 - 1)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1},$$

M. HERMITE est parvenu à l'expression suivante de l'intégrale de l'équation de LAMÉ:

$$R = CD_u \left\{ \frac{H(u + \omega)}{\theta(u)} e^{\left(\lambda - \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)}\right)u} \right\} + C'D_u \left\{ \frac{H(u - \omega)}{\theta(u)} e^{-\left(\lambda - \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)}\right)u} \right\}.$$

Maintenant, pour rendre les formules que nous allons déduire plus nettes, nous admettrons quelques simplifications, qui, d'ailleurs, ne touchent pas sensiblement à l'exactitude des résultats, non plus à leur portée. Donc, en nous rappelant que la quantité  $\vartheta$  est très petite, et comparable à  $k^2$  quant à sa grandeur, nous l'omettons à côté de l'unité.

Avec ces simplifications, les formules précédentes nous donnent les valeurs que voici:

$$\operatorname{sn} \omega^2 = \frac{\vartheta}{k^2}; \quad \operatorname{cn} \omega^2 = \frac{k^2 - \vartheta}{k^2}; \quad \operatorname{dn} \omega^2 = 1,$$

$$\lambda^2 = 4\vartheta(k^2 - \vartheta).$$

Considérons toujours  $k^2$ , ainsi que  $\vartheta$  comme des quantités très petites, et posons:

$$\nu = \lambda - \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)},$$

il sera permis de mettre:

$$\begin{aligned} \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)} &= \frac{1}{2} k^2 \sin \omega \cos \omega \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\vartheta(k^2 - \vartheta)}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut:

$$\nu = \frac{3}{2} \sqrt{\vartheta(k^2 - \vartheta)}.$$

Maintenant, si nous désignons par  $y_1$  et  $y_2$  les intégrales particulières de l'équation de LAMÉ, de sorte que:

$$y_1 = D_u \frac{H(u + \omega)}{\theta(u)} e^{\nu u}; \quad y_2 = D_u \frac{H(u - \omega)}{\theta(u)} e^{-\nu u},$$

et que nous admettions les notations suivantes:

$$a = \cos \omega = \frac{\sqrt{k^2 - \vartheta}}{k}; \quad b = \sin \omega = \frac{\sqrt{\vartheta}}{k},$$

nous aurons, en négligeant toujours les termes du premier ordre à côté de ceux de l'ordre zéro,

$$y_1 = (a \cos u - b \sin u) e^{\nu u},$$

$$y_2 = (a \cos u + b \sin u) e^{-\nu u}.$$

Partant de ces expressions, on déduit aisément la valeur que voici:

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = -2ab = -\sin 2\omega.$$

Si maintenant on met, dans l'équation (10),  $W$  au lieu de  $\frac{x^2}{g^2} W$ , l'expression de  $R$  devient, vu que le facteur  $\frac{x^2}{g^2}$  est à peu près égal à l'unité:

$$(16) \quad R = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$+ \frac{a \cos u + b \sin u}{2ab} e^{-\nu u} \int (a \cos u - b \sin u) W e^{\nu u} du$$

$$- \frac{a \cos u - b \sin u}{2ab} e^{\nu u} \int (a \cos u + b \sin u) W e^{-\nu u} du,$$

$c_1$  et  $c_2$  étant les deux constantes d'intégration.

Ayant ainsi trouvé la formule générale donnant l'intégrale de l'équation (10), nous allons en faire l'application à un cas spécial. Or,

nous supposons, en ne considérant qu'un terme isolé dans l'expression de  $W$ :

$$W = r_n \cos(f - nw) = r_n \sin(u - nw),$$

$n$  étant un entier positif ou négatif.

En formant les produits de la fonction  $W$  par  $\cos u$  et  $\sin u$ , nous omettons les termes dont les valeurs ne s'agrandissent pas par l'intégration, et nous aurons:

$$W \cos u = -\frac{1}{2} r_n \sin nw,$$

$$W \sin u = \frac{1}{2} r_n \cos nw.$$

Maintenant, si nous nous rappelons les formules

$$\int \sin nwe^{\nu u} du = \frac{-n(\sigma - \zeta) \cos nw + \nu \sin nw}{n^2(\sigma - \zeta)^2 + \nu^2} e^{\nu u},$$

$$\int \cos nwe^{\nu u} du = \frac{n(\sigma - \zeta) \sin nw + \nu \cos nw}{n^2(\sigma - \zeta)^2 + \nu^2} e^{\nu u},$$

et que nous désignons par  $\rho_n$  ce que devient  $R$  dans l'hypothèse actuelle, notre résultat sera:

$$(17) \quad \rho_n = \frac{\frac{1}{2} r_n n(\sigma - \zeta)}{n^2(\sigma - \zeta)^2 + \nu^2} \cos(f - nw) + \frac{a^2 - b^2}{2ab} \frac{\frac{1}{2} r_n \nu}{n^2(\sigma - \zeta)^2 + \nu^2} \cos(f - nw) \\ - \frac{a^2 + b^2}{2ab} \frac{\frac{1}{2} r_n \nu}{n^2(\sigma - \zeta)^2 + \nu^2} \cos(f + nw),$$

où l'on a supprimé les deux termes dépendant des arbitraires.

Il faut remarquer que la formule obtenue donne toujours à  $\rho_n$  une valeur réelle, même si  $\nu$  est imaginaire. En effet, les quantités  $\nu$  et  $a$  devenant imaginaires simultanément, les facteurs imaginaires se détruisent, l'un l'autre. Mais le résultat que nous venons d'obtenir est remarquable à un autre point de vue, car on en tire le fait important que la valeur de  $\rho_n$  s'approche de son premier terme, ou bien de:

$$\frac{r_n}{2n(\sigma - \zeta)} \cos(f - nw),$$

à mesure que l'entier  $n$  acquiert de grandes valeurs, ce qui montre la convergence de la série

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots,$$

à condition que la série

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots$$

soit convergente, ou même que cette série ait la forme

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots,$$

les  $a$  étant des quantités non croissantes.

5. Le résultat approximatif que nous avons signalé par la formule (17), s'obtient aussi d'une manière tout à fait simple, comme nous allons montrer. Dans ce but, introduisons dans l'équation

$$\frac{d^2 \rho_n}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3 \rho_0^2) \rho_n = \gamma_n \cos(f - nw)$$

la valeur

$$\rho_0 = x \cos f;$$

il en résulte:

$$\frac{d^2 \rho_n}{dv^2} + \left(1 - \bar{\beta} + p - \frac{3}{2} \beta_3 x^2 - \frac{3}{2} \beta_3 x^2 \cos 2f\right) \rho_n = \gamma_n \cos(f - nw).$$

Or, si nous supposons:

$$\rho_n = x_n \cos(f - nw) + \lambda_n \cos(f + nw),$$

nous aurons, au moyen de l'équation en  $\rho_n$  et en négligeant les termes dépendant de l'argument  $3f \pm nw$ , les deux conditions que voici:

$$\begin{cases} -[1 - \varsigma - n(\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \bar{\beta} + p - \frac{3}{2} \beta_3 x^2 \left\{ x_n - \frac{3}{4} \beta_3 x^2 \lambda_n = \gamma_n, \right. \\ \left. -[1 - \varsigma + n(\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \bar{\beta} + p - \frac{3}{2} \beta_3 x^2 \left\{ \lambda_n - \frac{3}{4} \beta_3 x^2 x_n = 0. \right. \right. \end{cases}$$

Pour simplifier les relations obtenues, rappelons-nous l'expression

$$(1 - \varsigma)^2 = 1 - \bar{\beta} - \frac{3}{4} \beta_3 x^2,$$

qui découle de la formule (6), en y négligeant les termes du deuxième ordre par rapport à  $\beta_1$ .

Cela posé, et si nous omettons les termes du deuxième ordre par rapport à  $\varsigma$  et à  $\sigma$ , les équations précédentes prennent la forme:

$$\begin{cases} 2n(\sigma - \varsigma) + p - \frac{3}{4}\beta_3 x^2 \Big\} x_n - \frac{3}{4}\beta_3 x^2 \lambda_n = r_n, \\ \Big\{ -2n(\sigma - \varsigma) + p - \frac{3}{4}\beta_3 x^2 \Big\} \lambda_n - \frac{3}{4}\beta_3 x^2 x_n = 0. \end{cases}$$

En multipliant la première de ces équations par  $2n(\sigma - \varsigma) - p + \frac{3}{4}\beta_3 x^2$ , et la seconde par  $-\frac{3}{4}\beta_3 x^2$ , la somme des deux produits nous donne:

$$\begin{aligned} & \left\{ [2n(\sigma - \varsigma)]^2 - \left(p - \frac{3}{4}\beta_3 x^2\right)^2 \right\} x_n + \left(\frac{3}{4}\beta_3 x^2\right)^2 x_n \\ & = r_n \left\{ 2n(\sigma - \varsigma) - p + \frac{3}{4}\beta_3 x^2 \right\}, \end{aligned}$$

ou bien:

$$\left\{ [2n(\sigma - \varsigma)]^2 + p\left(\frac{3}{2}\beta_3 x^2 - p\right) \right\} x_n = r_n \left( 2n(\sigma - \varsigma) - p + \frac{3}{4}\beta_3 x^2 \right).$$

De la même manière, on obtiendra aussi l'équation suivante:

$$\left\{ [2n(\sigma - \varsigma)]^2 + p\left(\frac{3}{2}\beta_3 x^2 - p\right) \right\} \lambda_n = -\frac{3}{4}\beta_3 x^2 r_n.$$

Pour rapprocher ces résultats de celui que nous avons donné dans l'équation (17), il suffit de se rappeler les relations

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \frac{1}{4}p\left(\frac{3}{2}\beta_3 x^2 - p\right); & k^2 &= \frac{1}{2}\beta_3 x^2; \\ \frac{\nu}{2ab} &= \frac{3}{4}k^2; & a^2 + b^2 &= 1; & a^2 - b^2 &= 1 - \frac{2}{3}\frac{p}{k^2}. \end{aligned}$$

6. Le coefficient  $\nu$  disparaît dans deux cas différents: premièrement si  $\vartheta$  s'évanouit; puis, si l'égalité

$$\vartheta = k^2$$

a lieu. Examinons en particulier les conséquences de ces deux hypothèses, en commençant par la première.

Donc, en faisant, dans l'équation (10),

$$\vartheta = 0; \quad \frac{x^2}{g^2} = 1,$$

nous aurons:

$$(18) \quad \frac{d^2 R}{du^2} - [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 - 1 - k^2] R = W.$$

En désignant par  $c_1$  et  $c_2$  les deux arbitraires introduites par l'intégration, la fonction  $R$  sera exprimée au moyen de la formule suivante:

$$(19) \quad R = c_1 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ + c_2 \left\{ \frac{\operatorname{sn} u}{k^2} - \frac{1 + k^2}{k^4} \frac{\theta_1'(u)}{\theta_1(u)} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \frac{(1 - k^2)K - (1 + k^2)E}{k^4 K} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right\} \\ - \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \int W \left[ \frac{\operatorname{sn} u}{k^2} - \frac{1 + k^2}{k^4} \frac{\theta_1'(u)}{\theta_1(u)} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right] du \\ + \left[ \frac{\operatorname{sn} u}{k^2} - \frac{1 + k^2}{k^4} \frac{\theta_1'(u)}{\theta_1(u)} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \right] \int W \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du \\ + \frac{(1 - k^2)K - (1 + k^2)E}{k^4 K} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \int du \int W \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du.$$

Si nous supposons le module tellement petit qu'on puisse le négliger auprès de l'unité, et que nous omettions les termes dépendant des constantes arbitraires, la formule précédente prend la forme:

$$R = - \cos u \int W \sin u du + \sin u \int W \cos u du \\ - \frac{3}{2} k^2 \cos u \int du \int W \cos u du,$$

d'où l'on tire, en supposant pour  $W$  la valeur

$$W = r_n \sin(u - mv),$$



le résultat suivant:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_n}{n(\sigma - \zeta)} \sin(u - nw) - \frac{3}{4} \frac{\gamma_n k^2}{n^2(\sigma - \zeta)^2} \cos u \sin nw \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\gamma_n}{n(\sigma - \zeta)} + \frac{3}{8} \frac{\gamma_n k^2}{n^2(\sigma - \zeta)^2} \right\} \cos(f - nw) - \frac{3}{8} \frac{\gamma_n k^2}{n^2(\sigma - \zeta)^2} \cos(f + nw), \end{aligned}$$

ce qui est parfaitement d'accord avec ce qu'on déduit de l'équation (17), en y mettant

$$b = \nu = 0; \quad \frac{\nu}{2ab} = \frac{3}{4} k^2.$$

Admettons encore que l'angle  $w$  soit égal à une constante, supposition qui correspond à l'hypothèse

$$\sigma = \zeta,$$

et cherchons ce qui en résultera.

On aura d'abord:

$$\begin{aligned} \rho_n &= -\frac{1}{2} \gamma_n \cos u \cos nw \cdot u - \frac{1}{2} \gamma_n \sin u \sin nw \cdot u \\ &\quad + \frac{3}{8} \gamma_n k^2 \cos u \sin nw \cdot u^2 + \text{termes périodiques;} \end{aligned}$$

mais un tel résultat ne pouvant pas généralement se concilier avec la solution absolue de l'équation proposée, à savoir:

$$\frac{d^2 \rho_n}{dv^2} + (1 - \beta_1) \rho_n - \beta_3 \rho_n^3 = \gamma_n \cos(f - nw),$$

l'hypothèse doit être rejetée. Seulement dans le cas où l'angle  $w$  a la valeur constante zéro, l'égalité entre  $\sigma$  et  $\zeta$  peut être admissible. Mais la solution en résultant n'est qu'une intégrale particulière, vu que la constante introduite par l'intégration doit satisfaire à une équation de condition. Et justement puisque le coefficient  $\sigma$  est indéterminé, l'intégrale ne contiendra qu'une seule constante arbitraire.

Supposons maintenant que  $\vartheta$  soit égal à  $k^2$ ; alors nous aurons de l'équation (10) la suivante:

$$(20) \quad \frac{d^2 R}{du^2} - [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 - 1 - 4k^2] R = W,$$

dont l'intégrale générale s'exprime au moyen de la formule:

$$(21) \quad R = c_1 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\ + c_2 \left\{ -\operatorname{cn} u - \frac{k'^2 - k^2}{k'^2} \frac{\theta_1'(u)}{\theta_1(u)} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + \frac{k'^2 K - (k'^2 - k^2) E}{k'^2 K} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \right\} \\ + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \int W \left\{ \operatorname{cn} u + \frac{k'^2 - k^2}{k'^2} \frac{\theta_1'(u)}{\theta_1(u)} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \right\} du \\ - \left\{ \operatorname{cn} u + \frac{k'^2 - k^2}{k'^2} \frac{\theta_1'(u)}{\theta_1(u)} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \right\} \int W \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u du \\ + \frac{k'^2 K - (k'^2 - k^2) E}{k'^2 K} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \int du \int W \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u du.$$

En ne retenant que les termes les plus importants, cette formule se change en celle-ci:

$$R = \sin u \int W \cos u du - \cos u \int W \sin u du \\ + \frac{3}{2} k^2 \sin u \int du \int W \sin u du.$$

Après avoir fait:

$$W = \gamma_n \sin(u - nw),$$

on en tire

$$\rho_n = \frac{1}{2} \frac{\gamma_n}{n(\sigma - \zeta)} \sin(u - nw) - \frac{3}{4} \frac{k^2 \gamma_n}{n^2(\sigma - \zeta)^2} \sin u \cos nw.$$

En faisant, dans la formule (17)

$$a = \nu = 0; \quad \frac{\nu}{2ab} = \frac{3}{4} k^2,$$

on retrouvera le résultat obtenu tout à l'heure.

Par ces recherches nous avons appris que la formule (17) n'offre aucune discontinuité dans les cas que nous venons d'examiner.

7. Passons maintenant à la formation de l'expression de la fonction  $W_1$  donnée par l'équation (15). Le résultat demandé s'exprimant par la formule

$$(22) \quad \begin{aligned} W_1 = & \qquad \qquad \qquad + \delta_1 \cos(f + w) \\ & + \gamma_2 \cos(f - 2w) + \delta_2 \cos(f + 2w) \\ & + \gamma_3 \cos(f - 3w) + \delta_3 \cos(f + 3w) \\ & + \dots \qquad \qquad \qquad + \dots, \end{aligned}$$

où les termes qui dépendent des arguments  $3f \pm nw$ ;  $5f \pm nw$ ; ... sont toujours supprimés, il s'agit de déterminer les coefficients  $\gamma_n$  et  $\delta_n$ , ou du moins de les examiner par rapport à leur convergence.

Dans ce but, nous allons d'abord établir quelques formules générales.

Soient  $\gamma_n$  et  $\delta_n$  deux coefficients connus, on calculera d'après les formules que nous venons de déduire, la partie correspondante de  $R$ , partie que nous désignerons par

$$(23) \quad \rho_n = x_n \cos(f - nw) + \lambda_n \cos(f + nw).$$

D'autre part, si les  $x_n$  et  $\lambda_n$  étaient donnés, on obtiendrait les  $\gamma_n$  et les  $\delta_n$  en introduisant, dans l'équation (15), les valeurs

$$\begin{aligned} \rho_0 &= x \cos f, \\ \rho_1 &= x_1 \cos(f - w) + \lambda_1 \cos(f + w), \end{aligned}$$

ainsi que toute la série

$$R_1 = \rho_2 + \rho_3 + \dots$$

Certes, du terme  $\delta_1 \cos(f + w)$  proviennent dans  $R_1$  deux termes dépendant des arguments  $w - f$  et  $w + f$ , mais on peut les réunir aux termes correspondants de la fonction  $\rho_1$ , de sorte qu'on peut se figurer la fonction  $R_1$  dépourvue de ces arguments.

En introduisant l'expression donnant  $R_1$  dans l'équation (15), on se rappellera les formules

$$(I) \quad R_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 + \dots \\ + 2\rho_2\rho_3 + 2\rho_2\rho_4 + \dots \\ + 2\rho_3\rho_4 + \dots \\ + \dots,$$

$$(II) \quad R_1^3 = \rho_2^3 + \rho_3^3 + \dots \\ + 3\rho_2(\rho_3^2 + \rho_4^2 + \dots) \\ + 3\rho_3(\rho_2^2 + \rho_4^2 + \dots) \\ + \dots \\ + 6\rho_2\rho_3\rho_4 + 6\rho_2\rho_3\rho_5 + 6\rho_2\rho_3\rho_6 + \dots \\ + 6\rho_3\rho_4\rho_5 + 6\rho_3\rho_4\rho_6 + \dots \\ + \dots \\ + 6\rho_3\rho_4\rho_5 + 6\rho_3\rho_4\rho_6 + 6\rho_3\rho_4\rho_7 + \dots \\ + 6\rho_3\rho_5\rho_6 + 6\rho_3\rho_5\rho_7 + \dots \\ + \dots \\ + \dots$$

Puis, en désignant par  $n$  et  $n'$  deux entiers, on aura:

$$(III) \quad \rho_n \rho_{n'} = \frac{1}{2}(x_n x_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) \cos(n - n')w + \frac{1}{2}(x_n \lambda_{n'} + x_{n'} \lambda_n) \cos(n + n')w \\ + \frac{1}{2}x_n x_{n'} \cos[2f - (n + n')w] + \frac{1}{2}\lambda_n \lambda_{n'} \cos[2f + (n + n')w] \\ + \frac{1}{2}x_n \lambda_{n'} \cos[2f - (n - n')w] + \frac{1}{2}x_{n'} \lambda_n \cos[2f + (n - n')w].$$

Faisant  $n = n'$ , la formule précédente se change en celle-ci:

$$(IV) \quad \rho_n^2 = \frac{1}{2}(x_n^2 + \lambda_n^2) + x_n \lambda_n \cos 2nw \\ + \frac{1}{2}x_n^2 \cos(2f - 2nw) + \frac{1}{2}\lambda_n^2 \cos(2f + 2nw) \\ + x_n \lambda_n \cos 2f.$$

En multipliant la formule (III) par

$$\rho_{n''} = x_{n''} \cos(f - n''w) + \lambda_{n''} \cos(f + n''w),$$

$n''$  étant un autre entier, il en résulte:

$$\begin{aligned} \text{(V)} \quad \rho_n \rho_{n'} \rho_{n''} = & \frac{1}{4} \{ x_{n''} (x_n \lambda_{n'} + x_{n'} \lambda_n) + x_n x_{n'} \lambda_{n''} \} \cos [f - (n + n' + n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ x_{n''} (x_n x_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + \lambda_n x_{n'} \lambda_{n''} \} \cos [f - (-n + n' + n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ x_{n''} (x_n x_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + x_n \lambda_{n'} \lambda_{n''} \} \cos [f - (n - n' + n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ \lambda_{n''} (x_n \lambda_{n'} + x_{n'} \lambda_n) + x_n x_{n'} x_{n''} \} \cos [f - (n + n' - n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ x_{n''} (x_n \lambda_{n'} + x_{n'} \lambda_n) + \lambda_n \lambda_{n'} \lambda_{n''} \} \cos [f + (n + n' - n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ \lambda_{n''} (x_n x_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + \lambda_n x_{n'} x_{n''} \} \cos [f + (n - n' + n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ \lambda_{n''} (x_n x_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + x_n \lambda_{n'} x_{n''} \} \cos [f + (-n + n' + n'')w] \\ & + \frac{1}{4} \{ \lambda_{n''} (x_n \lambda_{n'} + x_{n'} \lambda_n) + \lambda_n \lambda_{n'} x_{n''} \} \cos [f + (n + n' + n'')w]. \end{aligned}$$

On tire de là, si  $n$  est égal à  $n''$ :

$$\begin{aligned} \text{(VI)} \quad \rho_n^2 \rho_{n'} = & \frac{1}{2} [x_n (x_n^2 + \lambda_n^2) + \lambda_n x_n \lambda_n] \cos(f - n'w) \\ & + \frac{1}{4} (2\lambda_n x_n \lambda_n + x_n x_n^2) \cos [f - (2n - n')w] \\ & + \frac{1}{4} (2x_n x_n \lambda_n + \lambda_n x_n^2) \cos [f - (2n + n')w] \\ & + \frac{1}{4} (2x_n \lambda_n \lambda_n + x_n \lambda_n^2) \cos [f + (2n + n')w] \\ & + \frac{1}{4} (2x_n x_n \lambda_n + \lambda_n \lambda_n^2) \cos [f + (2n - n')w] \\ & + \frac{1}{2} [\lambda_n (x_n^2 + \lambda_n^2) + x_n x_n \lambda_n] \cos(f + n'w). \end{aligned}$$

Enfin, si l'on admet l'égalité entre les trois entiers  $n$ ,  $n'$  et  $n''$ , on aura la formule

$$\begin{aligned}
 \text{(VII)} \quad \rho_n^3 = & \left( \frac{3}{4} x_n^3 + \frac{3}{2} x_n \lambda_n^2 \right) \cos(f - nw) \\
 & + \frac{3}{4} \lambda_n x_n^2 \cos(f - 3nw) \\
 & + \frac{3}{4} x_n \lambda_n^2 \cos(f + 3nw) \\
 & + \left( \frac{3}{4} \lambda_n^3 + \frac{3}{2} \lambda_n x_n^2 \right) \cos(f + nw).
 \end{aligned}$$

Dans ces formules on a supprimé les termes dépendant de  $3f \pm nw$ , de  $5f \pm nw$ , etc., vu qu'ils ne peuvent produire aucune altération sensible dans les résultats.

Après ces préparations, revenons à l'examen de la nature des coefficients du développement (22).

8. Dans les cas les plus fréquents, le coefficient  $\nu$  est tellement petit qu'il peut être négligé par rapport à  $\sigma - \zeta = \bar{\zeta}$ ; surtout si  $\nu^2$  est positif, l'erreur commise par la simplification dont nous avons parlé, serait de peu d'importance dans les résultats suivants.

Cela posé, nous aurons par l'intégration de la première des équations (14), en faisant usage de la formule (17), le résultat approximatif que voici:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\bar{\zeta}}.$$

Puisque  $\bar{\zeta}$  contient le carré du coefficient  $x_1$ , nous avons, pour le déterminer, une équation du troisième degré, dans laquelle nous supposons  $\gamma$  tellement petit que  $x_1$  devient une quantité du même ordre que  $x$ . Pour mettre cette supposition en évidence, posons:

$$\gamma = \beta_3 \varepsilon^3,$$

$\varepsilon$  étant une quantité de l'ordre de  $x$ .

En regardant l'expression (15), on voit facilement que la partie principale du terme

$$\gamma_2 \cos(f - 2w)$$

provient du produit  $3\beta_3\rho_1^2\rho_0$ , et que la valeur du coefficient  $\gamma_2$ , relativement à la partie considérée, est donnée par la formule

$$\gamma_2 = \frac{3}{16} \frac{\beta_3 x \gamma^2}{\zeta^2} = \frac{3}{16} \frac{\beta_3^3 x \varepsilon^6}{\zeta^2}.$$

Partant de la formule (17), on obtiendra par l'intégration:

$$x_2 = \frac{3}{64} \frac{\beta_3^3 x \varepsilon^6}{\zeta^3}.$$

Ayant ainsi déterminé, approximativement, la fonction  $\rho_2$ , du moins quant à son terme principal, on aura la partie la plus importante du coefficient  $\gamma_3$  en développant le produit  $2 \cdot 3\beta_3\rho_0\rho_1\rho_2$ . Il en résulte, ce qui est facile à voir, en regardant la formule (V), la valeur

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{3}{2} \beta_3 x x_1 x_2 \\ &= -\frac{9}{256} \frac{\beta_3^5 x^2 \varepsilon^9}{\zeta^4}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, toujours en vertu de la formule (17),

$$x_3 = -\frac{3}{512} \frac{\beta_3^5 x^2 \varepsilon^9}{\zeta^5}.$$

En continuant ces opérations, on trouvera toujours des coefficients numériques tellement décroissants que non seulement la convergence de la série

$$x + x_1 + x_2 + \dots$$

paraîtra mise hors de doute, mais aussi que la méthode que nous venons de développer, se présentera bien propre aux applications numériques. Certes, nous avons omis les termes provenant des coefficients  $d_n$ , ce qui n'était nullement nécessaire, mais il m'a paru préférable de ne pas trop charger cette exposition de formules d'une application extrêmement rare.

Par les expressions que nous venons d'obtenir, on a mis en pleine lumière le fait important que, même si le diviseur  $\zeta$  était de l'ordre du produit  $\beta_3 x^2$ , la série obtenue serait pourtant convergente, bien que tous les coefficients fussent du premier ordre par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, et de l'ordre zéro par rapport aux masses troublantes.

9. Examinons encore le cas où l'on suppose la constante arbitraire très petite par rapport au coefficient  $x_1$ . Dans ce but, reprenons l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3 = -\gamma \cos(f - w),$$

et décomposons-la dans les deux suivantes:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d^2\rho_1}{dv^2} + (1 - \beta_1 + h)\rho_1 - \beta_3\rho_1^3 = 0, \\ \frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3\rho_1^2)\rho_0 = -\gamma \cos(f - w) + h\rho_1 \\ \qquad \qquad \qquad + 3\beta_3\rho_1\rho_0^2 + \beta_3\rho_0^3. \end{cases}$$

En intégrant la première d'elles, nous aurons:

$$\left(\frac{d\rho_1}{dv}\right)^2 = g^2 - (1 - \beta_1 + h)\rho_1^2 + \frac{1}{2}\beta_3\rho_1^4,$$

$g^2$  étant la constante d'intégration.

Maintenant, si nous posons, comme dans le n° 2:

$$\frac{g^2}{x_1^2}(1 + k^2) = 1 - \beta_1 + h,$$

$$\frac{g^2}{x_1^2}k^2 = \frac{1}{2}\beta_3,$$

$$g dv = x_1 dx,$$

il viendra:

$$\frac{1}{x_1^2} \left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\frac{\rho_1^2}{x_1^2} + k^2\frac{\rho_1^4}{x_1^4},$$

d'où l'on tire:

$$\rho_1 = x_1 \operatorname{sn} x,$$

la constante introduite par la seconde intégration étant comprise dans l'argument  $x$ .

Or, il s'agit de déterminer la constante  $g$ , qui, dans le cas présent, n'est plus arbitraire, mais bien surabondante. A cet égard, observons



que la période de la fonction  $\rho_1$  doit être celle de  $\cos(f - w)$ ; il en résulte la condition

$$1 - \sigma = \frac{g}{x_1} \frac{\pi}{2K} = \frac{\pi}{2K} \sqrt{\frac{1 - \beta_1 + h}{1 + k^2}},$$

d'où s'obtient le module  $k$ .

De la seconde des équations (24) on tire la valeur suffisamment approchée:

$$(25) \quad h = \frac{\gamma}{x_1} - \frac{3}{2} \beta_3 x^2,$$

$x$  étant une constante introduite par l'intégration de la dite équation. De là il résulte:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 + k^2) = \frac{1 - \beta_1 + \frac{\gamma}{x_1} - \frac{3}{2} \beta_3 x^2}{(1 - \sigma)^2}.$$

En ne retenant que les premières puissances de  $k^2$  et de  $\sigma$ , l'équation précédente se transforme en celle-ci:

$$\frac{3}{2} k^2 = 2\sigma - \beta_1 + \frac{\gamma}{x_1} - \frac{3}{2} \beta_3 x^2,$$

ou bien, si l'on admet l'expression approximative

$$k^2 = \frac{1}{2} \beta_3 x_1^2,$$

en la suivante:

$$(26) \quad \frac{3}{4} \beta_3 x_1^2 - 2\sigma + \beta_1 + \frac{3}{2} \beta_3 x^2 = \frac{\gamma}{x_1}.$$

Voilà l'équation connue du troisième degré qui sert à déterminer le coefficient  $x_1$ .

Après avoir introduit, dans la seconde des équations (24), la variable  $x$  au lieu de  $v$ , elle s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{x_1^2} \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \left\{ \frac{g^2}{x_1^2} (1 + k^2) - h - p - 2 \cdot 3k^2 \frac{g^2}{x_1^2} \rho_1^2 \right\} \rho_0 \\ = -\gamma \cos(f - w) + h\rho_1 + \beta_3 \rho_0^3 - p\rho_0 + 3\beta_3 \rho_0^2 \rho_1, \end{aligned}$$

où  $p$  est une constante encore à notre disposition.

Admettons la notation

$$3\vartheta = -(h + p) \frac{x_1^2}{g^2}$$

et négligeons, dans le second membre, le facteur  $\frac{x_1^2}{g^2}$  qui est sensiblement égal à l'unité, nous aurons, après avoir remplacé  $\rho_1^2$  par  $x_1^2 \sin x^2$ ,

$$(27) \quad \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} - [2 \cdot 3k^2 \sin x^2 - 1 - k^2 - 3\vartheta] \rho_0 = -\gamma \cos(f - w) + h\rho_1 \\ + \beta_3 \rho_0^3 - p\rho_0 + 3\beta_3 \rho_0^2 \rho_1.$$

L'intégrale de cette équation s'obtenant à l'aide des formules que nous avons alléguées dans le n° 4, il nous reste maintenant à examiner si le coefficient  $\nu$  est réel ou imaginaire: dans le premier cas, la fonction  $\rho_0$  peut croître hors de toutes limites, tandis que, dans le second, elle reste comprise entre des limites réelles et déterminées.

Supposé que  $\rho_0$  soit une fonction trigonométrique, du moins quant à son terme principal, on doit déterminer la constante  $p$  au moyen de la formule

$$p = \frac{3}{4} \beta_3 x^2.$$

En introduisant cette valeur, avec celle de  $h$ , dans l'expression précédente de  $\vartheta$ , nous aurons

$$\vartheta = -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{x_1} + \frac{1}{4} \beta_3 x^2.$$

Puis, en utilisant l'expression de  $\nu$  que nous avons obtenue dans le n° 4, à savoir

$$\nu = \frac{3}{2} \sqrt{\vartheta(k^2 - \vartheta)},$$

nous aurons dans le cas actuel:

$$\nu = \frac{3}{2} \sqrt{\vartheta \left( \frac{1}{2} \beta_3 x_1^2 - \vartheta \right)}.$$

Le plus souvent, on trouvera une valeur de  $\vartheta$ , du premier ordre par rapport aux masses troublantes, de sorte que  $\frac{1}{2} \beta_3 x_1^2$  devient une quantité très petite par rapport à  $\vartheta$ . Lorsqu'on est tombé sur un tel cas, la valeur

de  $\nu$  est nécessairement imaginaire, ce qui entraîne une fonction ne contenant que des termes périodiques comme expression de  $\rho_0$ . La valeur de  $\nu$  serait encore imaginaire, si  $\vartheta$  était une quantité négative; il nous reste donc à considérer le cas d'une petite valeur positive, tout au plus égale à  $\frac{1}{2}\beta_3 x_1^2$ .

Reprenons l'équation (26), qui s'écrit aussi de la manière suivante:

$$x_1^3 - 3 \left\{ \frac{4}{9} \frac{2\sigma - \beta_1}{\beta_3} - \frac{2}{3} x^2 \right\} x_1 = 2 \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\beta_3},$$

il est facile de voir que les plus grandes valeurs numériques de  $x_1$ , qu'on en peut tirer, compatibles avec la nature de notre problème, sont celles qui s'obtiennent dans le cas de deux racines égales. Cela admis, on aura:

$$x_1 = 2 \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{\gamma}{\beta_3}}$$

ou:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{\gamma}{\beta_3}}.$$

De ces valeurs extrêmes, on tire les relations suivantes:

$$\frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{16} \beta_3 x_1^2$$

et

$$\frac{\gamma}{x_1} = -\frac{3}{2} \beta_3 x_1^2.$$

Pour conserver plus de généralité, posons:

$$\text{a) } \frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{2z_0^3} \beta_3 x_1^2,$$

$$\text{b) } \frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{2z_1^3} \beta_3 x_1^2,$$

$z_0$  et  $z_1$  étant les racines de l'équation

$$z^3 - 3\omega z = 2,$$

qui, dans le cas de  $\omega = 1$ , admet:

$$z_0 = 2; \quad z_1 = -1.$$

En portant les deux valeurs que nous venons d'établir, dans l'expression de  $\vartheta$ , nous aurons les deux formules que voici:

$$\text{a) } \quad \vartheta = -\frac{1}{2z_0^3}\beta_3 x_1^2 + \frac{1}{4}\beta_3 x^2,$$

$$\text{b) } \quad \vartheta = -\frac{1}{2z_1^3}\beta_3 x_1^2 + \frac{1}{4}\beta_3 x^2.$$

Maintenant, en ayant égard à l'expression

$$\nu = \frac{2}{3}\sqrt{\vartheta\left(\frac{1}{2}\beta_3 x_1^2 - \vartheta\right)},$$

nous parviendrons aux résultats:

$$\text{a) } \quad \nu = \frac{1}{3}\beta_3 \sqrt{\left(-\frac{x_1^2}{z_0^3} + \frac{x^2}{2}\right)\left[\left(1 + \frac{1}{z_0^3}\right)x_1^2 - \frac{x^2}{2}\right]},$$

$$\text{b) } \quad \nu = \frac{1}{3}\beta_3 \sqrt{\left(-\frac{x_1^2}{z_1^3} + \frac{x^2}{2}\right)\left[\left(1 + \frac{1}{z_1^3}\right)x_1^2 - \frac{x^2}{2}\right]}.$$

La première inspection de ces formules nous montre que la seconde d'elles donne toujours à  $\nu$  une valeur imaginaire, vu que  $z_1$  est restreint entre les limites 0 et  $-1$ . Par contre, la première expression de  $\nu$  pourrait aboutir à des valeurs réelles de  $\nu$ . En effet, si la condition

$$2\left(1 + \frac{1}{z_0^3}\right)x_1^2 > x^2 > \frac{2x_1^2}{z_0^3}$$

est satisfaite, les deux facteurs du radical seront positifs, et en conséquence la valeur de  $\nu$  sera nécessairement réelle. Dans un tel cas (qui cependant est très peu probable, vu que la valeur de  $z_0$  est, le plus souvent, très petite) le mode d'approximation que nous avons entamé dans le présent numéro ne serait plus légitime. Mais on pourrait l'utiliser toutes les fois que la valeur de  $x^2$  resterait moindre que celle de  $\frac{1}{4}x_1^2$ .

Cela étant, faisons la remarque que si  $x^2$  est plus grand que  $\frac{2x_1^2}{z_0^3}$ , il est aussi plus grand que  $\frac{1}{4}x_1^2$ . D'autre part, toutes les fois que  $x^2$  est plus grand que  $\frac{1}{2}x_1^2$ , l'application de la méthode que nous avons exposée dans les numéros précédents, nous conduit nécessairement à des résultats exacts. Il y a donc des valeurs de  $z_0$ , à savoir celles comprises entre  $z_0 = 2$  et  $z_0 = \sqrt[3]{4}$ , qui peuvent rendre l'application des méthodes du paragraphe présent très difficile ou même douteuse, mais comme, dans ces cas, l'équation du troisième degré n'offre qu'une seule racine réelle, on peut recourir à la méthode du deuxième paragraphe, qui, justement dans le cas actuel, n'offre point de difficulté. En effet, la valeur de  $n$  étant réelle, les formules (26) (§ 2) donnent des résultats positifs relativement aux quantités  $B_0$  et  $B_2$ , de sorte que la valeur du module, calculée d'après la formule (32), sera tout au plus égale à  $\frac{1}{2}$ .

Il nous reste encore à faire une observation générale.

Dans le courant des approximations successives, on se heurtera quelquesfois contre des termes contenant l'argument variable hors des signes trigonométriques. Ces termes n'étant pas admissibles, on peut les détruire facilement, comme je l'ai fait voir dans le mémoire *Die intermediäre Bahn des Mondes*, Acta mathematica, T. 7, p. 157, auquel il suffit de renvoyer le lecteur.

(A suivre.)

---