SUR UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME

PAR

GUSTAV CASSEL
à STOCKHOLM.

Les auteurs qui se sont occupés du problème de la représentation conforme d'une aire plane sur l'intérieur d'un cercle n'ont jusqu'ici, que je sache, traité que des cas où l'aire considérée est limitée par un nombre fini d'arcs réguliers de lignes analytiques. Cette circonstance donnera peut-être quelque intérêt aux pages suivantes où je m'occuperai de la représentation conforme d'une aire dont le contour est formé par une infinité d'arcs de cercle.

Dans une note intitulée *Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen,*[1] M. H. Weber a traité le problème d'exprimer par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire deux variables remplissant une équation algébrique de forme hyperelliptique. A cet effet il commence par résoudre le problème de représenter conformément sur un demi-plan une aire U définie de la manière suivante. Imaginons une aire U_0 limitée par un nombre fini de circonférences ayant leurs centres sur l'axe réel et ne possédant pas de points communs. Soit U l'ensemble des points de U_0, dont la deuxième coordonnée est positive.

Il est facile d'étendre l'étude de M. Weber au cas où les circonférences données sont en nombre infini, du moins sous une supposition que nous allons préciser tout à l'heure.

---

[1] Nachrichten d. Ges. d. W. zu Göttingen, 1886.

Nous pouvons représenter les divers cercles par les symboles C_μ, μ parcourant toute la série des nombres entiers positifs.

Soit c_μ le centre du cercle C_μ et soient a_μ, b_μ les deux points où ce cercle coupe l'axe réel; soit $b_\mu > a_\mu$. Désignons par $C_{\mu(+1)}$ et par $C_{\mu(-1)}$ les cercles voisins du cercle C_μ, à droite et à gauche. Désignons de plus par $a_{\mu(+1)}$ et $b_{\mu(+1)}$, respectivement par $a_{\mu(-1)}$ et $b_{\mu(-1)}$ les deux points où les cercles $C_{\mu(+1)}$ et $C_{\mu(-1)}$ coupent l'axe réel. Si aucun cercle ne se trouve le plus prochain du cercle C_μ du côté positif nous conviendrons de désigner par $a_{\mu(+1)}$ le point le plus prochain situé de ce côté qui est pour les cercles un point limite. Il n'y aura pas lieu de considérer le symbole $b_{\mu(+1)}$ dans ce cas. Nous ferons des conventions analogues à sujet des symboles $a_{\mu(-1)}$ et $b_{\mu(-1)}$, de manière que si aucun cercle n'est le plus prochain du cercle C_μ du côté négatif, le symbole $b_{\mu(-1)}$ désignera le point limite le plus prochain, tandis que $a_{\mu(-1)}$ n'aura aucun sens. Dans le cas où il existe deux cercles entre lesquels se trouvent tous les autres, nous convenons de considérer ces deux cercles comme voisins.

Nous pouvons supposer, sans que cela implique de restriction à la généralité, que toutes les circonférences données se trouvent dans un domaine fini. En effet il est toujours possible de satisfaire à cette condition par un changement linéaire de variable.

Supposons enfin que le rapport *anharmonique*

$$\frac{b_{\mu(-1)} - b_\mu}{b_{\mu(-1)} - a_\mu} \cdot \frac{a_{\mu(+1)} - a_\mu}{a_{\mu(+1)} - b_\mu}$$

ait une limite supérieure finie quand μ parcourt la série de tous les nombres entiers positifs.

Nous nous proposons de trouver la représentation conforme du domaine U sur la moitié d'un plan.

Pour résoudre ce problème, nous n'aurons qu'à suivre une voie tout à fait analogue à celle qu'a adoptée M. Phragmén pour exposer les résultats de M. Weber, dans un cours professé à l'université de Stockholm en 1889. J'ai présenté cette solution à la Conférence de mathématiques de la même université, où elle donna lieu à une discussion à laquelle je dois certaines simplifications de détails.

Voici comment on peut opérer:

Faisons correspondre à chacun des cercles C_μ une substitution linéaire $A_\mu(u)$ résultant de deux inversions successives par rapport au cercle C_μ et à l'axe réel.[1]

Désignons par U_μ le domaine transformé du domaine U_0 par la substitution linéaire $A_\mu(u)$. Ce domaine se trouve tout entier à l'intérieur de C_μ.

Soient a_λ^μ, c_λ^μ, b_λ^μ les points transformés de a_λ, c_λ, b_λ à l'aide de la substitution $A_\mu(u)$. J'emploie pour les substitutions d'ordre supérieur la notation suivante:

$$A_\mu(A_\nu u) = A_{\nu\mu}(u),$$

$$A_{\nu\mu}(A_\rho u) = A_{\rho\nu\mu}(u),$$

et ainsi de suite. Par la substitution $A_{\nu\mu}$ les points a_λ, c_λ, b_λ se transforment donc respectivement en les points $a_\lambda^{\nu\mu}$, $c_\lambda^{\nu\mu}$, $b_\lambda^{\nu\mu}$, et ainsi de suite.

Je désignerai par

$$U_{\nu_1\ldots\nu_k}$$

le domaine transformé de U_0 par la substitution

$$A_{\nu_1\ldots\nu_k}.$$

On a

$$A_{\mu\mu}(u) = u,$$

de manière que la substitution inverse de $A_\mu(u)$ est la substitution $A_\mu(u)$ elle-même. Par conséquent, l'inverse de la substitution

$$A_{\nu_1\ldots\nu_k}(u)$$

est la substitution

$$A_{\nu_k\ldots\nu_1}(u).$$

Etudions maintenant le produit

$$\prod_{\nu_1 \neq \mu}\left(\frac{u - a_\mu^{\nu_1\ldots\nu_k}}{u - b_\mu^{\nu_1\ldots\nu_k}}\right) = \prod_{\nu_1 \neq \mu}\left\{1 + \frac{b_\mu^{\nu_1\ldots\nu_k} - a_\mu^{\nu_1\ldots\nu_k}}{u - b_\mu^{\nu_1\ldots\nu_k}}\right\}$$

où μ doit parcourir toute la série des nombres entiers à partir de l'unité, et l'indice $\nu_1 \ldots \nu_k$ toutes les combinaisons et les arrangements

[1] Voir: POINCARÉ, *Mémoire sur les groupes kleinéens.* Acta mathematica, T. 3, p. 51.

d'entiers positifs, à l'exception de ceux où deux nombres égaux se suivent et de ceux dont le premier nombre est égal à μ.

Si nous envisageons un domaine qui n'est pas coupé par une infinité des cercles C_μ ou leurs transformés par les substitutions $A_{\nu_1 \ldots \nu_k}$, nous savons qu'il ne se trouve dans ce domaine qu'un nombre fini des points a_μ et b_μ, dans lesquels l'un des facteurs de notre produit est nul ou infini.

Si nous laissons de côté ces facteurs, le produit converge d'une manière absolue et uniforme dans tout le domaine considéré, pourvu que la série

$$\sum |b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}|$$

soit convergente.

C'est en effet ce qui a lieu dans tous les cas où nos conditions sont remplies.

Il est clair que deux quelconques des domaines $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ n'ont jamais de parties communes. Donc, la somme des parties de l'axe réel qui se trouvent dans l'un quelconque des domaines $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$, à l'exception du domaine U_0, est nécessairement plus petite que la somme des diamètres des cercles C_μ originairement données. En vertu de ce que nous avons supposé, cette somme est finie.

Par conséquent, si nous désignons par $D_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ la somme des parties de l'axe réel intérieures à $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$, la série

$$\sum{}' D_{\nu_1 \ldots \nu_k}$$

est convergente. Le signe (′) près du symbole de sommation signifiera que le D qui correspond au domaine U_0, est supprimé.

Le domaine $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ est comme nous l'avons vu le transformé de U_0 par la substitution $A_{\nu_1 \ldots \nu_k}$. Ecrivons cette substitution linéaire sous la forme

$$u' = p + \frac{m}{u - q}.$$

Par la substitution $A_{\nu_k \ldots \nu_1}$ u' se transforme en u. Si nous attribuons à u' la valeur ∞, u prendra la valeur q. Donc, q est intérieur au cercle C_{ν_1}. D'ailleurs q est réel comme il est aisé de s'en assurer.

Désignons, pour abréger, par

$$a_1' b_1', \; a_2' b_2', \; , \ldots$$

les transformés par la substitution $A_{\nu_1\ldots\nu_k}$ des points

$$a_1 b_1\,,\; a_2 b_2\,,\; \ldots\,.$$

Nous aurons:

$$\pm D_{\nu_1\ldots\nu_k} = \sum_{\mu} (a'_{\mu(+1)} - b'_{\mu}),$$

où μ doit parcourir toute la série des nombres entiers positifs.

D'ailleurs:

$$a'_{\mu(+1)} = p + \frac{m}{a_{\mu(+1)} - q}$$

et

$$b'_{\mu} = p + \frac{m}{b_{\mu} - q}.$$

Donc

$$\pm D_{\nu_1\ldots\nu_k} = m \sum \frac{a_{\mu(+1)} - b_{\mu}}{(a_{\mu(+1)} - q)(b_{\mu} - q)}.$$

Puisque q est situé en dedans du cercle ν_1, tous les termes de cette série ont le même signe.

Si l'on observe que

$$b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1} = \frac{m(b_{\nu_1} - a_{\nu_1})}{(b_{\nu_1} - q)(q - a_{\nu_1})},$$

on pourra éliminer m et l'on aura

$$\text{(A)} \qquad \pm D_{\nu_1\ldots\nu_k} = (b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1}) \left[\frac{(b_{\nu_1} - q)(q - a_{\nu_1})}{(b_{\nu_1} - a_{\nu_1})} \sum \frac{a_{\mu(+1)} - b_{\mu}}{(a_{\mu(+1)} - q)(b_{\mu} - q)} \right].$$

Dans l'expression entre [ ] du deuxième membre de l'équation (A) chaque terme est positif et différent de zéro.

Si nous considérons des substitutions différentes $A_{\nu_1\ldots}$ dont l'indice commence par ν_1, q prendra des valeurs différentes dans l'intervalle $a_{\nu_1} \ldots b_{\nu_1}$. De plus, nous pouvons choisir à volonté l'indice ν_1. Je dis que, quand nous envisageons toutes les combinaisons des substitutions originairement données, la limite inférieure de l'expression entre [ ] est différente de zéro. Lorsque nous n'avons en vue que cela, il nous suffira d'étudier l'expression

$$f(q) = \frac{(b_{\nu_1} - q)(q - a_{\nu_1})}{b_{\nu_1} - a_{\nu_1}} \left\{ \frac{a_{\nu_1} - b_{\nu_1(-1)}}{(q - b_{\nu_1(-1)})(q - a_{\nu_1})} + \frac{a_{\nu_1(+1)} - b_{\nu_1}}{(q - b_{\nu_1})(q - a_{\nu_1(+1)})} \right\}$$

qui est, en effet, dans tous les cas plus petite que l'expression qui se trouve entre [] au second membre de l'équation (A).

Posons, pour abréger

$$a_{\nu_1(+1)} - b_{\nu_1} = \alpha,$$
$$b_{\nu_1} - a_{\nu_1} = \gamma,$$
$$a_{\nu_1} - b_{\nu_1(-1)} = \beta.$$

On voit que les quantités α, γ, β sont *positives* et que l'on aura:

$$f(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{b_{\nu_1} - q}{q - b_{\nu_1(-1)}}\cdot\beta + \frac{q - a_{\nu_1}}{a_{\nu_1(+1)} - q}\cdot\alpha\right\}.$$

Différentiant par rapport à q nous aurons

$$f'(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\alpha + \gamma}{(a_{\nu_1(+1)} - q)^2}\cdot\alpha - \frac{\beta + \gamma}{(q - b_{\nu_1(-1)})^2}\cdot\beta\right\}.$$

Pour les valeurs $q = a_{\nu_1}$ et $q = b_{\nu_1}$ $f(q)$ prend la valeur 1, comme il est aisé de s'en assurer. Donc $f'(q)$ prend la valeur 0 pour une valeur de q entre b_{ν_1} et a_{ν_1}. Pour $q = a_{\nu_1}$ on a

$$f'(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} - \frac{\beta + \gamma}{\beta}\right\},$$

c'est à dire négatif.

Au contraire, pour $q = b_{\nu_1}$ on a

$$f'(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\alpha + \gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\beta + \gamma}\right\},$$

ce qui est une valeur positive. Il résulte de là que $f(q)$ prend une valeur *minimum* dans l'intervalle $a_{\nu_1} \ldots b_{\nu_1}$.

La valeur $\bar{q}$ pour laquelle $f(q)$ prend cette valeur *minimum* est donnée par l'équation

$$\frac{a_{\nu_1(+1)} - \bar{q}}{\bar{q} - b_{\nu_1(-1)}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{\sqrt{\alpha + \gamma}}{\sqrt{\beta + \gamma}},$$

où toutes les racines doivent être prises dans le sens positif.

Posons:

$$a_{\nu_1(+1)} - \bar{q} = \lambda\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha+\gamma},$$

$$\bar{q} - b_{\nu_1(-1)} = \lambda\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\beta+\gamma};$$

on aura:

$$\lambda = \frac{a_{\nu_1(+1)} - b_{\nu_1(-1)}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}},$$

et

$$f(\bar{q}) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\lambda\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}-\alpha}{\lambda\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}}\cdot\beta + \frac{\lambda\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}-\beta}{\lambda\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}}\cdot\alpha\right\}.$$

Il est facile de voir que cette expression a une limite inférieure différente de zéro.

En effet on obtient après quelques reductions:

$$f(\bar{q}) = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}}+1}.$$

Or nous avons supposé que

$$\frac{b_{\mu(-1)} - b_\mu}{b_{\mu(-1)} - a_\mu}\cdot\frac{a_{\mu(+1)} - a_\mu}{a_{\mu(+1)} - b_\mu}$$

reste toujours inférieur à une certaine quantité g. Donc on a

$$\frac{\beta+\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta} < g,$$

par conséquent

$$\frac{\gamma}{\beta} < g, \ \frac{\gamma}{\alpha} < g,$$

et enfin:

$$f(\bar{q}) > \frac{2}{2+g^2}.$$

On a donc l'inégalité:

$$|b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1}| < \left(1+\frac{1}{2}g^2\right)\cdot D_{\nu_1\ldots\nu_k}$$

d'où il suit que la série

$$\Sigma_{\nu_1}\Sigma\,|b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1}|$$

ou, ce qui est la même chose, la série

$$\sum_{\nu_1 \neq \mu} | b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} |$$

est convergente.

Or on sait que cela suffit pour conclure que le produit

$$\prod_{\nu_1 \neq \mu} \left(\frac{u - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}} \right)$$

est uniformément convergent dans tout domaine qui ne renferme pas une infinité des points $a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}$ et $b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}$ ou de leurs points limites. Donc ce produit représente une fonction analytique uniforme.

Nous avons formé le produit dont nous venons de démontrer la convergence en faisant parcourir à μ tous les entiers positifs. Considérons maintenant les produits partiels formés par tous les facteurs de ce produit dont l'indice μ est égal à un nombre donné λ, et désignons par $P_\lambda(u)$ ces produits partiels.

Nous aurons donc:

$$P_\lambda(u) = \prod_{\nu_1 \neq \lambda} \frac{u - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}. \tag{B}$$

Voici maintenant comment il est possible de résoudre, à l'aide de cette fonction $P_\lambda(u)$, le problème que nous nous sommes proposé.

Il est aisé de voir que

$$\frac{A_\mu(u) - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{A_\mu(u) - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}} = \frac{u - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k \mu}}{u - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k \mu}} \cdot \frac{c_\mu - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{c_\mu - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}.$$

Nous avons par conséquent:

$$P_\lambda[A_\mu(u)] = P_\lambda(c_\mu) . P_\lambda(u).$$

En effet, comme il est facile de s'en assurer, le point c_μ est toujours un point régulier de la fonction $P_\lambda(u)$.

Si nous remplaçons encore une fois u par $A_\mu(u)$, nous aurons:

$$P_\lambda(u) = P_\lambda(c_\mu) . P_\lambda[A_\mu(u)] = [P_\lambda(c_\mu)]^2 P_\lambda(u),$$

d'où

$$P_\lambda(c_\mu) = \pm 1.$$

Quand μ diffère de λ, $P_\lambda(c_\mu)$ est positif et par conséquent égal à l'unité. Si, au contraire, $\mu = \lambda$, un facteur de $P_\lambda(c_\mu)$ est négatif, tandis que tous les autres sont positifs. Donc, dans ce cas $P_\lambda(c_\mu)$ est négatif et a la valeur -1. Dans tous les cas la fonction $[P_\lambda(u)]^2$ se trouve inaltérée par toutes les substitutions $A_{\nu_1 \dots \nu_k}$.

De ce fait il est aisé de conclure que la fonction $[P_\lambda(u)]^2$ a une valeur réelle sur la circonférence de chaque cercle C_μ. En effet, les valeurs qu'elle prend dans les points symétriques par rapport à l'axe réel doivent être à la fois égales et conjuguées. En outre cette fonction est réelle sur l'axe réel.

Donc la fonction $P_\lambda^2(u)$ est réelle sur tout le contour du domaine U. Sur ce contour elle ne devient infinie que dans le point b_λ. Or il suit de tout cela que la partie imaginaire de notre fonction ne peut s'annuler à l'intérieur de U; car dans ce cas il existerait toujours un domaine tel que cette partie imaginaire aurait une limite supérieure finie à son intérieur et s'annulerait sur son contour.

Donc la fonction $P_\lambda^2(u)$ réalise la représentation conforme du domaine U sur un demi-plan.

En représentant conformément un plan sur lui-même, on peut, comme on le sait, disposer à volonté de trois points. Ainsi notre problème n'est entièrement déterminé qu'après qu'on a fixé les trois points du plan de u qui doivent correspondre à trois points déterminés du plan de la fonction.

Si nous convenons, par exemple, de faire correspondre aux points $u = a_\lambda$ et $u = b_\lambda$ les points $x = \alpha_\lambda$ et $x = \beta_\lambda$ et au point $u = \infty$ le point $x = \infty$, on voit immédiatement que la fonction qui réalise la représentation conforme ainsi définie est donnée par l'équation

$$\frac{x - \alpha_\lambda}{x - \beta_\lambda} = P_\lambda^2(u).$$

Nous sommes donc arrivés à la solution définitive de notre problème.

Mais, avant de finir, je voudrais ajouter quelques mots sur certains problèmes auquels on est amené par l'étude de la fonction $P_\lambda^2(u)$.

L'équation ci-dessus pourrait tout aussi bien s'écrire sous la forme

$$\frac{x - \alpha_\mu}{x - \beta_\mu} = P_\mu^2(u),$$

si on convient de désigner généralement par α_μ, β_μ les points correspondant à a_μ, b_μ. Puisque le point $u = \infty$ est intérieur au domaine U_0, il est aisé de voir que la somme infinie

$$\Sigma |\alpha_\nu - \beta_\nu|$$

a une valeur finie, et que, par conséquent, le produit infini

$$\prod_\nu \frac{x - \alpha_\nu}{x - \beta_\nu}$$

converge uniformément dans le voisinage de tout point à l'exception des points α_ν, β_ν et de leurs points limites.

Nous savons déjà que le produit

$$y = \Pi_\nu P_\nu(u)$$

est uniformément convergent dans un domaine dont il n'est pas nécessaire de répéter ici la définition.

D'ailleurs nous avons entre les deux fonctions x et y la relation suivante

$$\text{(C)} \qquad y^2 = \Big[\prod_\nu P_\nu(u)\Big]^2 = \prod_\nu \frac{x - \alpha_\nu}{x - \beta_\nu}.$$

Ainsi nous sommes conduits à une équation transcendante de forme hyperelliptique, où nous pouvons représenter les deux variables comme des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire. Ces fonctions se trouvent inaltérées par une infinité de substitutions linéaires, qui ne peuvent pas être dérivées d'un nombre fini de substitutions fondamentales, mais toutefois d'un système fondamental de substitutions linéaires en nombre infini.

En effet, il est aisé de voir que la fonction y reste inaltérée par chacune des substitutions

$$A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1n}, \ldots,$$

où n doit parcourir toute la série des nombres entiers, sauf l'unité. La fonction y admet donc le groupe dérivé de ces substitutions fondamentales.

Voyons maintenant quelles sont les propriétés essentielles de la représentation des variables x et y par la variable u. A une valeur arbitraire de x correspond en général une valeur et une seule de u dans le domaine U_0. Dans le domaine U_1, il se trouve une valeur transformée de cette valeur-là par la substitution A_1. A une valeur arbitraire de x correspondent donc en général deux valeurs différentes de u dans le domaine $U_0 + U_1$ formé par l'ensemble de tous les points appartenant soit au domaine U_0, soit au domaine U_1. Pour ces deux valeurs de u, y prend en général des valeurs différentes, parce que les deux valeurs de y correspondant à une certaine valeur de x diffèrent en général pas leurs signes. Par conséquent, si l'on prend un point analytique (x, y) remplissant la relation analytique (C), il y correspondra en général une valeur de u entièrement déterminée dans le domaine $U_0 + U_1$.

Ainsi, la représentation que nous venons de trouver du point analytique (x, y) *à l'aide des fonctions uniformes* $P_\lambda^2(u)$ *et* $\Pi_\nu P_\nu(u)$ *satisfait partout aux conditions exigées par M. Weierstrass dans son cours sur les fonctions abéliennes, à l'exception seulement du voisinage des points essentiellement singuliers de la relation analytique* (C).

Tout comme dans le cas où les substitutions fondamentales sont en nombre fini, on est conduit, dans le cas que nous traitons, à une équation linéaire de second ordre qui peut s'intégrer à l'aide de la fonction $P_\lambda^2(u)$. Seulement, dans notre cas, les coefficients de cette équation sont transcendantes, ce dont on s'assure sans difficulté.

Il nous reste encore une question très importante, qui toutefois me semble présenter des difficultés considérables.

Etant donnée une série de paramètres réels α_ν, β_ν, il s'agit de trouver les conditions nécessaires pour que l'on puisse choisir les paramètres a_ν, b_ν, de manière que la fonction x prenne les valeurs α_ν, β_ν dans les points a_ν, b_ν; ou en d'autres termes:

de trouver les conditions nécessaires pour que deux variables x et

y, liées entre elles par une équation de la forme (C), puissent s'exprimer à l'aide des fonctions

$$P_\lambda^2(u) \quad \text{et} \quad \Pi_\nu P_\nu(u);$$

ou encore:

de trouver toutes les équations linéaires de la forme

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \varphi(x)z = 0,$$

qui peuvent s'intégrer à l'aide d'une fonction $P_\lambda^2(u)$, $\varphi(x)$ étant une fonction transcendante à coefficients réels.

Ce qui rend cette question si difficile, c'est que les paramètres α_ν, β_ν et a_ν, b_ν, qui sont liés par des relations d'une nature fort transcendante, se trouvent en nombre infini. On ne peut donc pas avoir recours aux méthodes qu'emploie M. POINCARÉ dans le cas où les paramètres sont en nombre fini.[1]

---

[1] Voir POINCARÉ, *Sur les groupes des équations linéaires.* Acta mathematica, T. 4.