

Entropie geometrique des feuilletages

par

E. GHYS, R. LANGEVIN et P. WALCZAK

*Université des Sciences et Techniques de Lille I
Villeneuve d'Ascq, France*

*Université de Dijon
Dijon Cedex, France*

*University of Lodz
Lodz, Poland*

1. Introduction

Par bien des aspects, la théorie des feuilletages s'apparente à celle des systèmes dynamiques. Des notions telles que celles d'ensembles limites, points errants, récurrents . . . , s'étendent sans difficulté aux feuilletages. Nous nous proposons ici de définir et d'étudier l'entropie géométrique d'un feuilletage généralisant directement l'entropie topologique d'un flot. Comme cette entropie topologique dépend essentiellement du paramétrage des orbites, nous sommes naturellement conduits à « paramétrer » les feuilles d'un feuilletage par une métrique riemannienne.

Dans un premier temps (paragraphe 2), nous définissons l'entropie d'un pseudo-groupe d'homéomorphismes locaux relativement à un système fini de générateurs. Cette définition est immédiatement appliquée aux divers pseudogroupes d'holonomie d'un feuilletage correspondants aux divers recouvrements de la variété ambiante par des ouverts distingués. Au paragraphe 3, nous définissons l'entropie géométrique d'un feuilletage; il s'agit d'un nombre qui mesure essentiellement la rapidité moyenne avec laquelle deux feuilles s'écartent l'une de l'autre. Après s'être assuré que notre définition généralise l'entropie topologique d'un flot (théorème 3.2), nous montrons que cette entropie géométrique peut s'exprimer à l'aide des entropies de ses divers pseudogroupes d'holonomie (théorème 3.4). Ceci permet en particulier d'obtenir diverses estimations, supérieures ou inférieures, de l'entropie géométrique.

Le paragraphe 4 est consacré à quelques exemples qui montrent les phénomènes nouveaux qui interviennent lorsque la dimension des feuilles est strictement supérieure à 1. Au paragraphe 5, nous établissons une forte condition nécessaire à l'annulation de l'entropie géométrique : l'existence d'une mesure transverse invariante au sens de J. Plante (théorème 5.1). Le cas particulier des feuilletages de codimension 1 est traité au paragraphe 6. Le résultat principal de ce paragraphe est le fait que l'entropie géométri-

que d'un feuilletage de codimension 1 est nulle si et seulement si ce feuilletage ne possède pas de « feuille ressort » (théorème 6.1). Ceci permet de relier l'entropie à la croissance des feuilles. Comme corollaire d'un théorème de G. Duminy, on obtient alors que l'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage d'entropie nulle est nécessairement trivial. Enfin, nous signalons au paragraphe 7 un certain nombre de questions et remarques.

L'élaboration de cet article a été facilitée par un séjour du second auteur à Lodz invité par l'Académie des Sciences Polonaise. De même, des séjours du troisième auteur à l'Université de Dijon ont été utiles. Les auteurs remercient par ailleurs L. Martignon, H. Rosenberg et R. Roussarie pour des conversations fructueuses et F. Laudénbach pour ses remarques constructives sur la première version de ce travail.

2. Entropie d'un pseudo-groupe et d'un bon recouvrement

Soit (X, d) un espace métrique et \mathcal{H}_1 une collection finie d'homéomorphismes entre des ouverts de X . On supposera que \mathcal{H}_1 contient id_X et que si $f \in \mathcal{H}_1$ alors $f^{-1} \in \mathcal{H}_1$. Soit \mathcal{H} le pseudo-groupe d'homéomorphismes locaux engendré par \mathcal{H}_1 . Dans cette section, nous définissons l'entropie de \mathcal{H} par rapport au système de générateurs \mathcal{H}_1 .

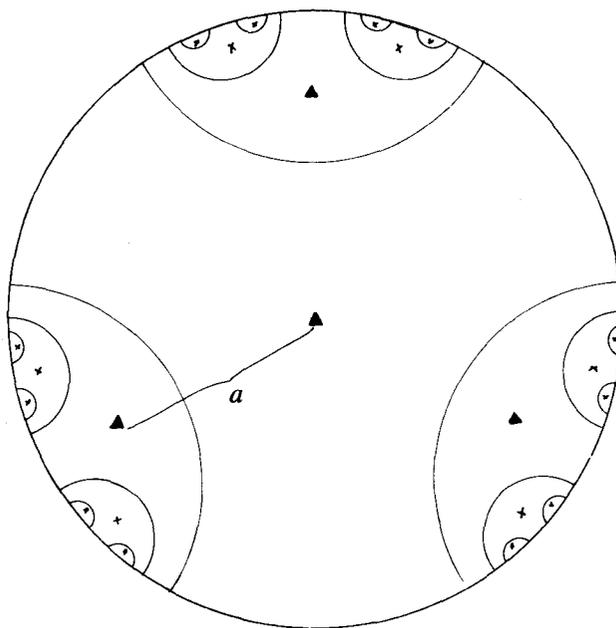
Si f et g sont dans \mathcal{H}_1 , on n'a pas nécessairement $\text{Image}(g) \subset \text{Domaine}(f)$ mais nous conviendrons d'appeler composé de f et de g l'application $f \circ g$ définie sur $g^{-1}(\text{Domaine}(f))$ (éventuellement vide). Notons \mathcal{H}_n la collection des composés d'au plus n éléments de \mathcal{H}_1 ($n \in \mathbb{N}$). Si ε est un réel strictement positif et si x, x' sont deux points de X , on dira que x et x' sont (n, ε) -séparés s'il existe un élément f de \mathcal{H}_n dont le domaine contient x et x' et tel que $d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$. Une partie A de X est dite (n, ε) -séparée si ses éléments sont (n, ε) -séparés deux à deux. Notons $N(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon)$ le cardinal maximum (éventuellement $+\infty$) des parties A qui sont (n, ε) -séparées. On pose alors :

$$h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log } N(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon)$$

$$h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \varepsilon).$$

Définition 2.1. Le réel $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ est appelé entropie de \mathcal{H} par rapport au système de générateurs \mathcal{H}_1 .

Exemple 2.2. Si $\mathcal{H}_1 = \{\text{id}, f, f^{-1}\}$ où f est un homéomorphisme global d'un espace compact (X, d) , il n'est pas difficile de vérifier que l'entropie ainsi définie coïncide avec



- ▲ ensemble $(1, a)$ séparé
- ▲ $\cup x$ ensemble $(3, a)$ séparé

Fig. 1.

le double de l'entropie topologique de f (ou de f^{-1}) telle qu'elle est définie par R. Bowen [Bo]. Le facteur 2 provient du fait que dans notre définition de la (n, ε) -séparation, nous utilisons les itérés f^i avec $-n \leq i \leq n$ alors que R. Bowen n'utilise que les itérés f^i avec $0 \leq i \leq n$ (voir théorème 3.2 pour un argument similaire). Si X n'est pas compact, notre définition est différente de celle de R. Bowen. Il ne serait pas difficile, cependant, d'adapter notre définition à ce cas pour que les deux notions coïncident. Nous ne le ferons pas car nous n'aurons à traiter que le cas où X est compact, ou tout au moins précompact.

Exemple 2.3. Si (X, d) est un espace métrique précompact et si \mathcal{H}_1 est formé d'isométries locales, alors $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1) = 0$. En effet, $N(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon)$ est alors fini et ne dépend pas de n .

Exemple 2.4. Soit (X, d) le disque unité fermé de \mathbf{R}^2 muni de la métrique euclidienne et c_1, c_2, c_3 trois cercles disjoints orthogonaux au cercle unité. On considère les

trois inversions i_1, i_2 et i_3 par rapport à c_1, c_2, c_3 (qui préservent X) et on pose $\mathcal{H}_1 = \{\text{id}, i_1, i_2, i_3\}$. La figure 1 montre clairement que l'entropie $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ est strictement positive.

Remarque 2.5. Dans [Gr], M. Gromov introduit une notion d'entropie pour un « graphe » $\Gamma \subset X \times X$. On pourrait être tenté d'appliquer cette notion au graphe associé à \mathcal{H}_1 formé des couples $(x, f(x))$ avec $f \in \mathcal{H}_1$. La notion d'entropie que l'on obtiendrait serait différente de celle que nous utilisons. Par exemple, l'entropie de M. Gromov d'un groupe d'isométries d'un espace compact peut être non nulle (si le groupe a une croissance exponentielle).

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 2.6. *L'entropie $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ ne dépend que de la structure uniforme induite par d sur X . En d'autres termes, si deux métriques d et d' sur X sont uniformément continues l'une par rapport à l'autre, alors $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ calculée avec d coïncide avec $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ calculée avec d' . \square*

Pour des pseudo-groupes « raisonnables », l'entropie n'est pas infinie comme le montre la proposition élémentaire suivante :

PROPOSITION 2.7. *Soit X un ouvert relativement compact de \mathbf{R}^q (muni de la métrique euclidienne). Soit \mathcal{H}_1 un ensemble fini (contenant id_X et symétrique) d'homéomorphismes Lipschitziens entre ouverts de X . Soit a la borne supérieure des constantes de Lipschitz des éléments de \mathcal{H}_1 . Alors :*

$$h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1) \leq q \text{Log } a.$$

Démonstration. Il est clair que la distance entre deux points (n, ε) -séparés est au moins $\varepsilon_1 = \varepsilon a^{-n}$. Comme X est un ouvert relativement compact de \mathbf{R}^q , un ensemble de points de X dont les distances mutuelles sont supérieures à ε_1 contient au plus $C \varepsilon_1^{-q}$ éléments (C ne dépend que de X). Par conséquent :

$$N(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon) \leq C(\varepsilon a^{-n})^{-q}.$$

On obtient le résultat en passant deux fois à la limite. \square

Appliquons ces notions aux différents pseudo-groupes d'holonomie d'un feuille-

tage. Soit \mathcal{F} un feuilletage de classe C^1 sur une variété compacte M . ($p = \dim \mathcal{F}$, $q = \text{codim } \mathcal{F}$, $m = p + q = \dim M$.)

Si U est un ouvert de M , une carte distinguée pour U est un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow D^p(1) \times D^q(1)$ (on note $D^p(r) = \{x \in \mathbb{R}^p, \|x\| < r\}$) tel que $P = \varphi^{-1}(D^p(1) \times \{*\})$ est contenu dans une feuille de \mathcal{F} . Cet ensemble P est alors appelé plaque de U .

Un recouvrement distingué pour \mathcal{F} sera une collection $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ d'ouverts de M munis de cartes distinguées $\varphi_i : U_i \rightarrow D^p(1) \times D^q(1)$ telle que :

- (i) les U_i recouvrent M ,
- (ii) si $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$, alors $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et $U_i \cap U_j$ est connexe.

On dira que \mathcal{U} est un « bon recouvrement » si, de plus, les φ_i se prolongent en des difféomorphismes, encore notés φ_i , d'un ouvert $V_i \supset U_i$ sur $D^p(2) \times D^q(2)$ tels que :

(iii) $\varphi_i^{-1}(D^p(2) \times \{*\})$ est contenu dans une feuille de \mathcal{F} . Un tel ensemble est une « \mathcal{V} -plaque » ou « plaque de V_i ».

- (iv) Chaque plaque de V_i coupe au plus une plaque de V_j .

Fixons un tel bon recouvrement \mathcal{U} (il en existe toujours [H-H]). Si M est équipée d'une métrique riemannienne, l'ensemble X_i des plaques P de U_i peut être muni de la distance de Hausdorff d_i provenant de la métrique riemannienne de M . Notons X la réunion disjointe des X_i équipée d'une distance d induisant d_i sur chaque X_i (le choix de d importe peu; on supposera seulement que $d(X_i, X_j) > 0$ pour $i \neq j$). L'espace X est naturellement muni d'une famille $\mathcal{H}_1(\mathcal{U})$ d'homéomorphismes locaux f_{ij} . Si $P_i \in X_i$ et $P_j \in X_j$, on pose $f_{ij}(P_i) = P_j$ si $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Le pseudo-groupe $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ engendré par $\mathcal{H}_1(\mathcal{U})$ est le pseudo-groupe d'holonomie associé au bon recouvrement \mathcal{U} . L'entropie de ce pseudo-groupe sera notée $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$. Il résulte de la proposition 2.6 que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne sur M et de la proposition 2.7 que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ n'est pas infini (\mathcal{F} est de classe C^1 et donc transversalement Lipschitzien).

Pour terminer ce paragraphe de définition, nous explicitons la signification géométrique de la (n, ε) -séparation pour $\mathcal{H}_1(\mathcal{U})$. Si x est un point de M , une suite $u = (U^0, U^1, \dots, U^n)$ d'éléments de \mathcal{U} est une n -chaîne pour x s'il existe des \mathcal{U} -plaques P^0, P^1, \dots, P^n telles que $x \in P^0$, $P^i \subset U^i$ et $P^i \cap P^{i+1} \neq \emptyset$ pour $i = 0, \dots, n-1$. La chaîne de plaques P^i est complètement déterminée par $u = (U^0, \dots, U^n)$ et x ; on la notera $(u_x^0, u_x^1, \dots, u_x^n)$. Remarquons qu'étant donnée une n -chaîne $u = (U^0, \dots, U^n)$, l'ensemble des x tels que u est une n -chaîne pour x est ouvert dans M .

Deux points x et y de M sont alors $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ -séparés si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) Il n'existe pas de $U_i \in \mathcal{U}$ tel que $\{x, y\} \subset U_i$.

(ii) Il existe une n -chaîne $u = (U^0, U^1, \dots, U^n)$ pour x et y telle que $d(u_x^n, u_y^n) \geq \varepsilon$.

Remarquons que n n'est pas nécessairement la longueur minimale d'une telle chaîne u : toute p -chaîne avec $p \leq n$ permet en effet de construire une n -chaîne en répétant U^0 un certain nombre de fois.

Il est facile de voir que cette définition de la $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ -séparation coïncide essentiellement avec celle de $(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ -séparation si ε est suffisamment petit. Le cardinal maximum des ensembles $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$ -séparés sera noté $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon)$.

3. Entropie géométrique d'un feuilletage

Soit (M, \mathcal{F}, g) une variété riemannienne compacte feuilletée. Nous nous proposons dans ce paragraphe de définir l'entropie géométrique de \mathcal{F} et de la mettre en rapport avec l'entropie $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ associée aux bons recouvrements.

Pour simplifier l'exposé, nous supposons dans la suite de ce travail que tous les objets considérés sont de classe C^∞ .

Si $x \in M$, on note $\exp^{\mathcal{F}} : T_x L_x \rightarrow L_x$ l'application exponentielle de la feuille L_x passant par x . On note $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(0_x, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $T_x L_x$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r dans L_x . Si $y \in L_x$, on note $d_{\mathcal{F}}(x, y)$ la distance entre x et y dans L_x alors que $d_M(x, z)$ désigne la distance dans M entre deux points x et z .

Les boules fermées sont notées $\bar{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(0_x, r)$, $\bar{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(x, r)$, ...

Si x et y sont deux points de M , on note $\Omega(x, y, r)$ l'ensemble des applications continues de $\bar{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(0_x, r)$ dans L_y , envoyant 0_x sur y . Si $f \in \Omega(x, y, r)$, on pose :

$$\delta(f) = \sup \{d_M(\exp^{\mathcal{F}} v, f(v)); v \in \bar{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(0_x, r)\}$$

$$\delta_r(x, y) = \inf \{\delta(f); f \in \Omega(x, y, r)\} + \inf \{\delta(f); f \in \Omega(y, x, r)\}.$$

Un ensemble $A \subset M$ est dit $(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)$ -séparé ($r > 0, \varepsilon > 0$) si $\delta_r(x, y) \geq \varepsilon$ pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de A . De façon analogue au cas des bons recouvrements, on pose :

$$N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon) = \max \{\#A; A \text{ est } (\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)\text{-séparé}\}$$

$$h(\mathcal{F}, g, \varepsilon) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \text{Log } N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon)$$

$$h(\mathcal{F}, g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h(\mathcal{F}, g, \varepsilon).$$

Définition 3.1. Le nombre $h(\mathcal{F}, g)$ est appelé entropie géométrique de \mathcal{F} relativement à la métrique g .

Cette notion généralise l'entropie topologique d'un flot non singulier.

THÉORÈME 3.2. *Si \mathcal{F} est un feuilletage orienté de dimension 1, alors $h(\mathcal{F}, g)$ coïncide avec le double de l'entropie topologique de φ_1 où φ_t désigne le flot unitaire tangent à \mathcal{F} .*

Démonstration. Posons :

$$\Delta_r(x, y) = \sup_{|i| \leq r} \{d(\varphi_i(x), \varphi_i(y))\} \quad (t \in \mathbf{R})$$

$$\Delta'_n(x, y) = \sup_{|i| \leq n} \{d(\varphi_i(x), \varphi_i(y))\} \quad (i \in \mathbf{Z})$$

$$\Delta_r^+(x, y) = \sup_{0 \leq i \leq r} \{d(\varphi_i(x), \varphi_i(y))\} \quad (t \in \mathbf{R}^+)$$

$$\Delta_n'^+(x, y) = \sup_{0 \leq i \leq n} \{d(\varphi_i(x), \varphi_i(y))\} \quad (i \in \mathbf{N}).$$

L'équicontinuité uniforme de $\{\varphi_t, t \in [0, 1]\}$ montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que, pour tout n, r , on a :

$$\Delta_n'^+(x, y) \leq \varepsilon' \Rightarrow \Delta_n^+(x, y) \leq \varepsilon$$

$$\Delta_r(x, y) \leq \varepsilon' \Rightarrow \Delta_r^+(x, y) \leq \varepsilon.$$

Si S désigne l'un des symboles $\delta, \Delta, \Delta', \Delta^+, \Delta'^+$, on dira que deux points x, y sont (S, r, ε) -séparés si $S_r(x, y) \geq \varepsilon$. Le cardinal maximal d'un ensemble (S, r, ε) -séparé sera noté $N(S, r, \varepsilon)$. La définition de l'entropie topologique de φ_1 utilise la $(\Delta'^+, n, \varepsilon)$ -séparation. D'après ce qui précède, il suffit donc de considérer la $(\Delta^+, n, \varepsilon)$ -séparation. On remarque alors que $A \subset M$ est (Δ, n, ε) -séparé si et seulement si $\varphi_{-n}(A)$ est $(\Delta^+, 2n, \varepsilon)$ -séparé. Puisque, par ailleurs, on a évidemment :

$$\delta_r(x, y) \leq 2\Delta_r(x, y),$$

on a donc :

$$N(\delta, n, \varepsilon) \leq N(\Delta, n, \varepsilon/2) = N(\Delta^+, 2n, \varepsilon/2).$$

En passant à la limite, on obtient donc :

$$h(\mathcal{F}, g) \leq 2h_{\text{top}}(\varphi_1).$$

La difficulté pour démontrer l'inégalité inverse provient du fait suivant; si $\delta_r(x, y) \leq \varepsilon$, alors le « morceau d'orbite » $\varphi_t(x)$ ($|t| \leq r$) reste dans un ε -voisinage de l'orbite de y mais un phénomène de « glissement » le long des orbites pourrait faire que $\delta_r(x, y)$ ne reste pas de l'ordre de $\Delta_r(x, y)$. Nous remercions F. Laudenbach de nous avoir signalé cette difficulté.

Fixons $\varepsilon > 0$ petit, $0 < \tau < 1$ (qui sera proche de 1) et $\eta > 0$ (que l'on supposera plus loin petit par rapport à ε). Considérons le fibré $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ formé des disques de rayon η dans le fibré vectoriel orthogonal à \mathcal{F} . Si $x \in M$, on considère l'immersion isométrique de \mathbf{R} dans M donné par $i(t) = \varphi_t(x)$. L'image réciproque de π par i est un fibré en disques au-dessus de \mathbf{R} , noté $\text{Tub}_\eta(x)$. On note encore $\pi : \text{Tub}_\eta(x) \rightarrow \mathbf{R}$ la projection. Si η est suffisamment petit, l'application exponentielle de M permet d'immerger naturellement $\text{Tub}_\eta(x)$ dans M . On note encore i cette immersion et on équipe $\text{Tub}_\eta(x)$ de la métrique image réciproque de g par i . Le champ de vecteurs associé à φ_t donne un champ de vecteurs sur $\text{Tub}_\eta(x)$ qui produit un flot local $\bar{\varphi}_t$ sur $\text{Tub}_\eta(x)$. Le caractère local de $\bar{\varphi}_t$ provient du fait que certaines orbites « sortent du tube ».

La famille de disques $\eta^{-1}(s)$ n'est pas invariante par $\bar{\varphi}_t$ (« glissement des orbites »). Cependant, τ étant fixé; on peut trouver η (indépendamment de x) tel que la propriété suivante soit réalisée. Si $y \in \pi^{-1}(0)$ et si $\bar{\varphi}_t(y)$ est défini et vérifie $\pi(\bar{\varphi}_t(y)) = 1$ (resp. -1), on a : $t \geq \tau$ (resp. $t \leq -\tau$). On en déduit que si $\bar{\varphi}_t(y)$ est défini et vérifie $\pi(\bar{\varphi}_t(y)) = n \geq 0$ (resp. $-n$), on a : $t \geq n\tau$ (resp. $t \leq -n\tau$).

On exploite encore cette « presque invariance » des disques $\pi^{-1}(s)$ de la façon suivante. Considérons la partition de $\text{Tub}_\eta(x)$ par les « cylindres » $C_n(x) = \pi^{-1}([(2n-1)\varepsilon, (2n+1)\varepsilon])$. Si ε est fixé, il existe η (indépendant de x) tel que $\bar{\varphi}_1(C_0(x))$ et $\bar{\varphi}_{-1}(C_0(x))$ coupent chacun au plus trois cylindres du type $C_n(x)$. Si $x \in C_0(x)$, son itinéraire est la suite des entiers n_i tels que $\bar{\varphi}_i(x) \in C_{n_i}(x)$ en convenant que $n_i = \infty$ si $\bar{\varphi}_i(x)$ n'est pas défini. De l'énumération des itinéraires possibles et de la propriété précédente, on déduit qu'il existe une partition de $C_0(x)$ en au plus 3^{2n+2} ensembles $K_1(x), \dots, K_\alpha(x), \dots$, telle que si y et z sont dans $K_\alpha(x)$ et si $\bar{\varphi}_i(y)$ et $\bar{\varphi}_i(z)$ sont définis avec $|i| \leq n$, alors $\bar{\varphi}_i(y)$ et $\bar{\varphi}_i(z)$ sont dans le même cylindre $C_{n(i)}(x)$.

Considérons alors un ensemble $A = \{x_1, \dots, x_\beta, \dots\} \subset M$ qui est $(\delta, n, \eta/3)$ -séparé et

de cardinal maximal, c'est-à-dire $N(\delta, n, \eta/3)$. Pour chaque x_β de A , considérons l'ensemble A_β formé des points y tels que $\delta_n(y, x_\beta) \leq \eta/3$. Ces ensembles A_β recouvrent M et sont de diamètre inférieur à $2\eta/3$; ils sont donc contenus dans $i(C_0(x_\beta))$ (η étant supposé petit par rapport à ε , la boule de centre x et de rayon $2\eta/3$ est contenue dans $i(C_0(x_\beta))$). On considère alors la partition $K_1(x_\beta), \dots, K_\alpha(x_\beta)$ que nous avons construite plus haut. On choisit un point $x_{\beta, \alpha}$ dans chaque $A_\beta \cap i(K_\alpha(x_\beta))$ non vide. Ceci produit un ensemble B dont le cardinal est inférieur à $3^{2n+2}N(\delta, n, \eta/3)$.

Nous affirmons que B est un ensemble $(\Delta', [\tau n], 2\varepsilon + 2\eta)$ -générateur. En d'autres termes pour tout y de M , il existe z dans B tel que $\Delta'_{[\tau n]}(y, z) \leq 2\varepsilon + 2\eta$. Pour s'en assurer, considérons un point y de M . Il existe alors un ensemble du type $A_\beta \cap i(K_\alpha(x_\beta))$ qui contient y . Par abus de notation, on peut considérer que $y, x_{\beta, \alpha}, x_\beta$ sont des points de $C_0(x_\beta)$. Comme $y \in A_\beta$, on a $\delta_n(x_\beta, y) \leq \eta/3$. Ceci signifie qu'il existe une fonction $f : [-n, +n] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$, $\bar{\varphi}_i(y)$ est défini sur $f([-n, +n])$ et $d(\bar{\varphi}_i(x_\beta), \bar{\varphi}_{f(i)}(y)) \leq \eta/3$. D'après ce que nous avons vu, ceci montre que $\bar{\varphi}_i(y)$ est défini au moins sur $[-\tau n, +\tau n]$. Comme, par ailleurs, $x_{\beta, \alpha}$ et y appartiennent tous les deux à $K_\alpha(x_\beta)$, on en déduit que, pour $|i| \leq [\tau n]$, $\bar{\varphi}_i(y)$ et $\bar{\varphi}_i(x_{\beta, \alpha})$ sont dans le même cylindre $C_{n(i)}(x_\beta)$. Puisque le diamètre des cylindres $C_n(x)$ est inférieur à $2\varepsilon + 2\eta$, nous avons bien montré que B est $(\Delta', [\tau n], 2\varepsilon + 2\eta)$ -générateur.

Soit $C \subset M$ un ensemble $(\Delta', [\tau n], 4\varepsilon + 4\eta)$ -séparé. Alors, si $y, y' \in C$, il existe $z, z' \in B$ tel que $\Delta_{[\tau n]}(y, z) \leq 2\varepsilon + 2\eta$ et $\Delta_{[\tau n]}(y', z') \leq 2\varepsilon + 2\eta$. Si $y \neq y'$, alors $z \neq z'$ car sinon on aurait $\Delta_{[\tau n]}(y, y') \leq 4\varepsilon + 4\eta$. Ceci montre que le cardinal de C est majoré par celui de B . Nous avons donc montré que :

$$N(\Delta', [\tau n], 4\varepsilon + 4\eta) \leq 3^{2n+2}N(\delta, n, \eta/3)$$

$$N(\Delta'^+, 2[\tau n], 4\varepsilon + 4\eta) \leq 3^{2n+2}N(\delta, n, \eta/3)$$

$$h_{\text{top}}(\varphi_1, 4\varepsilon + 4\eta) \leq \frac{1}{2\tau} [2\text{Log } 3 + h(\mathcal{F}, g, \eta/3)].$$

En faisant tendre τ vers 1 et ε vers 0 (et donc η vers 0), on obtient :

$$h_{\text{top}}(\varphi_1) \leq \text{Log } 3 + \frac{1}{2} h(\mathcal{F}, g).$$

Pour terminer, on considère le même feuilletage \mathcal{F} sur M mais on multiplie la métrique g par une constante $\lambda > 0$. Le nouveau flot unitaire associé à \mathcal{F} est alors $\psi_t = \varphi_{t\lambda}$ dont

l'entropie est $(1/\lambda)h_{\text{top}}(\varphi_1)$. La définition même de $h(\mathcal{F}, g)$ montre par ailleurs que $h(\mathcal{F}, \lambda g) = (1/\lambda)h(\mathcal{F}, g)$. En appliquant la formule précédente à $(\mathcal{F}, \lambda g)$, on a donc

$$(1/\lambda)h_{\text{top}}(\varphi_1) \leq [2\text{Log } 3 + (1/\lambda)h(\mathcal{F}, g)].$$

En faisant tendre λ vers 0, on obtient finalement l'inégalité cherchée :

$$h_{\text{top}}(\varphi_1) \leq \frac{1}{2}h(\mathcal{F}, g). \quad \square$$

PROPOSITION 3.3. *Si (M, \mathcal{F}, g) et (M', \mathcal{F}', g') sont deux variétés riemanniennes compactes feuilletées et si $\varphi: M \rightarrow M'$ est un homéomorphisme envoyant isométriquement les feuilles de \mathcal{F} sur celles de \mathcal{F}' , alors $h(\mathcal{F}, g) = h(\mathcal{F}', g')$.*

Démonstration. Elle résulte de l'uniforme continuité de φ . □

Le résultat principal de ce paragraphe consiste à relier l'entropie géométrique à celle des bons recouvrements.

THÉORÈME 3.4. *Soit \mathcal{F} un feuilletage sur la variété riemannienne compacte (M, g) . Alors :*

$$h(\mathcal{F}, g) = \sup_{\mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{\text{diam}(\mathcal{U})} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \right\}$$

où \mathcal{U} décrit tous les bons recouvrements de (M, \mathcal{F}) et $\text{diam}(\mathcal{U})$ désigne la borne supérieure des diamètres des plaques de \mathcal{U} mesurés à l'aide de $d_{\mathcal{F}}$.

Avant de démontrer le théorème 3.4, nous en donnons deux corollaires immédiats.

COROLLAIRE 3.5. *Soient g et g' deux métriques riemanniennes sur (M, \mathcal{F}) et C_1 et C_2 des constantes telles que, pour tout vecteur v tangent à \mathcal{F} , on a*

$$C_1^2 \cdot g(v) \leq g'(v) \leq C_2^2 \cdot g(v)$$

($g(v)$ désigne le carré de la g -longueur de v). Alors :

$$C_2^{-1} \cdot h(\mathcal{F}, g) \leq h(\mathcal{F}, g') \leq C_1^{-1} \cdot h(\mathcal{F}, g).$$

Démonstration. Ceci résulte de l'estimation analogue des diamètres des plaques de \mathcal{U} . □

Remarquons que ce corollaire montre en particulier que la propriété d'avoir une entropie nulle ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne g .

COROLLAIRE 3.6. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension q sur la variété riemannienne compacte (M, g) . Soit $a \geq 1$ un réel vérifiant la propriété suivante : pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ contenue dans une feuille et de longueur inférieure à r , la partie linéaire $dH_\gamma : (T_{\gamma(0)}L_{\gamma(0)})^\perp \rightarrow (T_{\gamma(1)}L_{\gamma(1)})^\perp$ de l'holonomie de γ vérifie $\|dH_\gamma\| \leq \exp(ar)$. Alors $h(\mathcal{F}, g) \leq 2q \cdot a$.*

Démonstration. En effet, les éléments de $\mathcal{H}_1(\mathcal{U})$ sont alors Lipschitziens de rapport $\exp(2 \text{diam}(\mathcal{U})a)$ par rapport à une métrique transverse bien choisie. On obtient le corollaire en combinant le théorème 3.4 et la proposition 2.7. \square

Nous abordons maintenant la démonstration du théorème 3.4.

Pour démontrer que $N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, \varepsilon) \leq N(\mathcal{F}, g, n \text{diam}(\mathcal{U}), \varepsilon)$, nous allons « raccourcir » les chaînes en utilisant les géodésiques dans les feuilles.

LEMME 3.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que la propriété suivante est réalisée. Soit $\varepsilon > 0$ un réel suffisamment petit, n un entier et $r = n \text{diam}(\mathcal{U})$. Alors, si deux points x et y sont tels que $\delta_r(x, y) < \varepsilon$, ils ne sont pas $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, C\varepsilon)$ -séparés.*

Démonstration. Il existe une application continue f de $B(0_x, r)$ dans L_y telle que $\delta(f) < \varepsilon$ et $f(0) = y$. Soit $u = (U^0, U^1, \dots, U^n)$ une n -chaîne quelconque pour x et y . Puisque $r = n \text{diam}(\mathcal{U})$, il existe une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow L_x$ de longueur inférieure à r , telle que $\gamma(0) = x$; $\gamma(1) = z \in u_x^n$ et telle que u est une chaîne le long de γ .

La courbe γ est homotope, à extrémités fixes, à une géodésique $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow L_x$ de longueur l inférieure à r . Soit $v = \tilde{\gamma}'(0)$.

Soit λ le nombre de Lebesgue du recouvrement de M par les U_i . Si ε est choisi tel que $3\varepsilon < \lambda$, alors la condition $\delta(f) < \varepsilon$ montre que, pour tout intervalle $I \subset [0, l]$ de longueur inférieure à ε , la réunion des deux courbes

$$I \ni t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \exp_x^{\mathcal{F}}(tv)$$

$$I \ni t \mapsto f(tv)$$

a un diamètre inférieur à λ . Cette réunion est donc contenue dans un U_i . On peut alors trouver des réels t_0, t_1, \dots, t_k tels que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = l$ et une k -chaîne $\tilde{u} = (\tilde{U}^0, \tilde{U}^1, \dots, \tilde{U}^k)$ telle que :

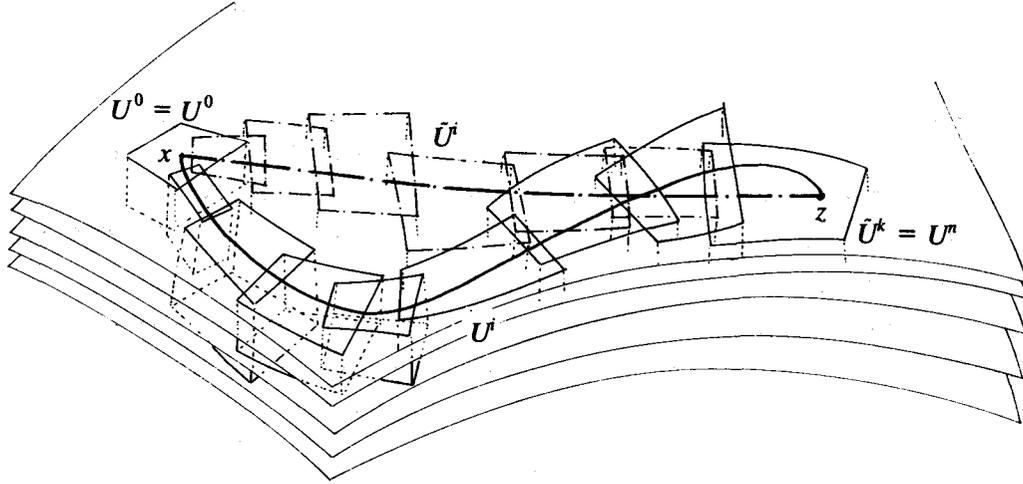


Fig. 2.

$$\tilde{\gamma}(t) \in \tilde{U}^i$$

$$f(t) \in \tilde{U}^i$$

pour $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1, 2, \dots, k$. La chaîne \tilde{u} est donc une chaîne pour $x=\tilde{\gamma}(0)$ et $y=f(0)$, le long de $\tilde{\gamma}$.

Puisque γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes, on a :

$$\tilde{u}_x^k = u_x^n \quad \text{et} \quad \tilde{u}_y^k = u_y^n$$

Finalement :

$$d(u_x^n, u_y^n) = d(\tilde{u}_x^k, \tilde{u}_y^k) \leq C d_M(\tilde{\gamma}(l), f(l)) \leq C \varepsilon$$

où C est une constante qui ne dépend que de \mathcal{U} et qui est telle que

$$d(P, P') \leq C d_M(x, x')$$

pour toute paire de plaques P, P' d'un U_i et toute paire de points x, x' appartenant à P et P' . \square

Nous pouvons déjà démontrer une moitié du théorème 3.4.

COROLLAIRE 3.8. *Pour tout bon recouvrement \mathcal{U} , on a :*

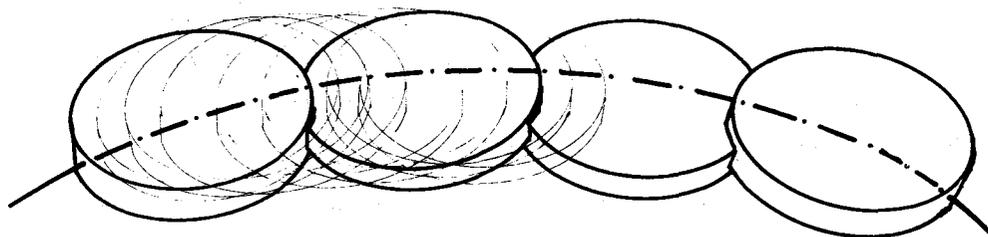


Fig. 3.

$$\frac{1}{\text{diam}(\mathcal{U})} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \leq h(\mathcal{F}, g).$$

Démonstration. Le lemme précédent montre en effet que :

$$N(\mathcal{F}, \mathcal{U}, n, C\varepsilon) \leq N(\mathcal{F}, g, n \text{ diam}(\mathcal{U}), \varepsilon).$$

Le résultat est obtenu en passant deux fois à la limite. □

Pour démontrer l'inégalité inverse, construisons de bons recouvrements à l'aide de « pièces de monnaie » que l'on peut imaginer de taille transverse négligeable par rapport au diamètre de leurs plaques. Ces recouvrements devront être très riches pour que toute géodésique puisse embrocher des pièces de monnaie se recouvrant peu.

Soit Δ_0 un réel positif tel que $\exp^{\mathcal{F}}$ envoie toutes les boules $B_{\mathcal{F}}(0_x, 4\Delta_0)$ difféomorphiquement sur des ouverts strictement convexes de la feuille L_x . Soit $\Delta < \Delta_0$. Choisissons une épaisseur ϱ et posons :

$$T'_x = \exp B_{\mathcal{F}^\perp}(0_x, 2\varrho)$$

où $B_{\mathcal{F}^\perp}(0_x, r)$ est la boule de centre 0_x et de rayon r dans l'orthogonal de $T_x L_x$ dans $T_x M$.

Posons

$$V_x = \bigcup_{y \in T'_x} B_{\mathcal{F}}(y, 2\Delta).$$

Pour Δ et ϱ assez petits, V_x est un ouvert distingué quel que soit $x \in M$. Nous supposons de plus que $\varrho < \Delta/20$.

Posons de même :

$$T_x = \exp(B_{\mathcal{F}^\perp}(0_x, \varrho))$$

$$U_x = \bigcup_{y \in T_x} B_{\mathcal{F}}(y, \Delta).$$

Alors U_x est a fortiori un ouvert distingué et la boule (dans M) de centre x et de rayon $\varrho/4$ est contenue dans U_x quelque soit $x \in M$ (tout au moins si Δ est suffisamment petit).

Soit α un réel positif tel que $\alpha < \varrho/60$. Les deux lemmes techniques suivants sont élémentaires; nous en laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 3.9. *Si Δ, ϱ et α sont fixés (suffisamment petits), il existe $\beta_1 > 0$ tel que la propriété suivante soit réalisée. Soient x_1 et x_2 deux points de la même feuille L tels que $d_{\mathcal{F}}(x_1, x_2) = 2\Delta - \alpha$. Si y_1 et y_2 sont deux points des transversales T_{x_1} et T_{x_2} vérifiant $d_M(y_1, x_1) < \beta_1$ et $d_M(y_2, x_2) < \beta_1$ contenus dans la même plaque de rayon $4\Delta_0$, alors $d_{\mathcal{F}}(y_1, y_2) \leq 2\Delta - \alpha/2$. \square*

LEMME 3.10. *Soit $\mathcal{X} = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ un ensemble β -dense où $\beta = \beta_1/10$. Soient x_1 et x_2 deux points d'une feuille L tels que $d_{\mathcal{F}}(x_1, x_2) = 2\Delta - \alpha$. Soit ζ (resp. ζ') un point de \mathcal{X} β -proche de x_1 (resp. x_2). Alors, les ouverts U_{ζ} et $U_{\zeta'}$ vérifient la propriété suivante. Si ξ_1 et ξ_2 sont deux points des transversales T_{ζ} et $T_{\zeta'}$ contenus dans la même plaque de rayon $4\Delta_0$, et vérifiant $d_M(\xi_1, x_1) < \beta$ et $d_M(\xi_2, x_2) < \beta$, alors la géodésique (minimale) de la feuille $L_{\xi_1} = L_{\xi_2}$ joignant ξ_1 à ξ_2 est contenue dans la réunion des boules $B_{\mathcal{F}}(\xi_1, \Delta)$ et $B_{\mathcal{F}}(\xi_2, \Delta)$. \square*

On pose alors :

$$\mathcal{U}_{\Delta} = \{U_{z_1}, \dots, U_{z_N}\}, \quad \mathcal{V}_{\Delta} = \{V_{z_1}, \dots, V_{z_N}\}.$$

Pour un choix générique de \mathcal{X} , \mathcal{U}_{Δ} est un bon recouvrement. La seule difficulté est en effet de s'assurer que si \tilde{U}_{z_i} et \tilde{U}_{z_j} se rencontrent, leurs intérieurs se rencontrent également.

LEMME 3.11. *Si ε est suffisamment petit, la propriété suivante est réalisée. Pour tout couple de points x, y de M qui ne sont pas $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_{\Delta}, n, \varepsilon)$ -séparés et tels que $d_M(x, y) < \varepsilon$ et pour toute géodésique γ dans L_x de longueur $r \leq 2(1-\alpha)n\Delta$ telle que $\gamma(0) = x$, il existe une chaîne $u = (U_{z_{i(0)}}, \dots, U_{z_{i(n)}})$ le long de γ qui est une chaîne à la fois pour x et y .*

Démonstration. Posons $t_j = (j/n)r$ ($j=0, \dots, n$). Pour chaque j , il existe $i(j) \in \{1, \dots, N\}$ tel que $d_M(\gamma(t_j), z_{i(j)}) < \beta$. Pour β assez petit, il existe donc un point $z'_{i(j)}$ de $T_{z_{i(j)}}$ situé sur la même plaque que $\gamma(t_j)$. Le lemme 3.10 appliqué au cas simple où ξ_1 (resp. ξ_2)

est l'intersection de la plaque de $x_1=\gamma(t_j)$ (resp. $x_2=\gamma(t_{j+1})$) avec la transversale $T_{z_{i(j)}}$ (resp. $T_{z_{i(j+1)}}$) montre que $u=(U_{z_{i(0)}}, \dots, U_{z_{i(m)}})$ est une chaîne pour x le long de γ .

Soit ε suffisamment petit pour que la propriété suivante soit réalisée : si la distance de Hausdorff entre deux plaques P et P' d'un même U_z est inférieure à ε , alors la distance dans M entre $P \cap T_z$ et $P' \cap T_z$ est inférieure à $\beta/2$.

Montrons par récurrence que u est aussi une chaîne pour y . Puisque $d_M(x, y) < \varepsilon < \beta$, le point y est dans $U_{z_{i(0)}}$. Supposons que $u'=(U_{z_{i(0)}}, \dots, U_{z_{i(m)}})$ est une chaîne pour y ($m < n-1$). Par l'hypothèse du lemme, la distance de Hausdorff entre les plaques u'_x et u'_y est inférieure à ε . Soit ξ_1 l'intersection de u'_y avec $T_{z_{i(m)}}$ et ξ_2 l'intersection de $B(\xi_1, 4\Delta)$ avec $T_{z_{i(m+1)}}$. Le lemme 3.10 montre alors que les plaques de ξ_1 dans $U_{z_{i(m)}}$ et ξ_2 dans $U_{z_{i(m+1)}}$ se coupent. Par conséquent, $u''=(U_{z_{i(0)}}, \dots, U_{z_{i(m+1)}})$ est aussi une chaîne pour y . □

Le lemme suivant est élémentaire.

LEMME 3.12. Soient Δ et ε suffisamment petits, $U \in \mathcal{U}_\Delta$, P et Q deux plaques de U telles que $d(P, Q) < \varepsilon$. Soit $\mathcal{V}_\Delta = \{V_{z_1}, \dots, V_{z_k}\}$ le recouvrement ouvert de M que nous avons construit précédemment et Q' la \mathcal{V} -plaque contenant Q . Alors, l'application $\pi_{PQ} : P \rightarrow Q'$ qui envoie chaque z de P sur le point d'intersection de Q' et de $\exp(B_{\mathcal{F}}(0_z, C\varepsilon))$ est bien définie et continue (C est une constante qui ne dépend que de \mathcal{U}, \mathcal{V}). Les applications π_{P_1, Q_1} et π_{P_2, Q_2} sont compatibles si P_1, P_2 et Q_1, Q_2 se chevauchent. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 3.4. Soient x et y deux points qui ne sont pas $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -séparés et tels que $d_M(x, y) < \varepsilon$ (où ε vérifie les lemmes précédents). Considérons l'application $\pi : B_{\mathcal{F}}(0_x, 2(1-a)n\Delta) \rightarrow L_y$ donnée par :

$$\pi(v) = \pi_{PQ}(\exp^{\mathcal{F}}(v))$$

où $P=u_x^n$ et où $P=u_y^n$ et u est une n -chaîne le long de la géodésique $t \rightarrow \exp^{\mathcal{F}}(tv)$ construite à l'aide du lemme 3.11. D'après les lemmes 3.11 et 3.12, π est bien définie, continue, et vérifie :

$$\sup_{\|v\| < 2(1-a)n\Delta} d_M(\exp^{\mathcal{F}}(v), \pi(v)) \leq C\varepsilon.$$

Le point $\pi(0)$ ne coïncide pas nécessairement avec y mais une modification locale de π (dans la boule $B_{\mathcal{F}}(0_x, \Delta)$ par exemple) permet de construire $\pi' \in \Omega(x, y, 2(1-\alpha)n\Delta)$ tel que $\delta(\pi') \leq C'\varepsilon$ (où C' est une autre constante qui ne dépend que de \mathcal{U}_Δ). En renversant les rôles de x et y , on a alors :

$$\delta_{2(1-\alpha)n}(x, y) \leq 2C'\varepsilon.$$

En d'autres termes, nous avons montré que si $\delta_{2(1-\alpha)n\Delta}(x, y) > 2C'\varepsilon$ alors x et y sont $(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon)$ -séparés ou $d_M(x, y) \geq \varepsilon$. En considérant un recouvrement de M par des boules de rayon $\varepsilon/2$ en nombre $N(\varepsilon)$, on a donc l'inégalité :

$$N(\mathcal{F}, g, 2(1-\alpha)n\Delta, 2C'\varepsilon) \leq N(\varepsilon) N(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta, n, \varepsilon).$$

Par passage à la limite

$$h(\mathcal{F}, g) \leq \frac{1}{2(1-\alpha)\Delta} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\text{diam } \mathcal{U}_\Delta} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}_\Delta).$$

Puisque α peut être arbitrairement proche de 0, nous avons donc bien montré que :

$$h(\mathcal{F}, g) = \sup \frac{1}{\text{diam}(\mathcal{U})} h(\mathcal{F}, \mathcal{U}).$$

4. Quelques exemples

Dans ce paragraphe, nous décrivons quelques exemples significatifs ainsi que quelques estimations élémentaires de l'entropie géométrique.

Exemple 4.1. L'entropie géométrique du feuilletage de Reeb sur le tore solide $\bar{D}^q \times S^1$ est nulle. (A strictement parler, nous n'avons pas défini l'entropie géométrique des feuilletages sur les variétés à bord, mais la définition se généralise sans difficulté.)

Lorsque $q=1$, c'est-à-dire lorsque le feuilletage de Reeb considéré est de dimension 1, ceci résulte du théorème 3.2 et du fait que l'entropie topologique d'un flot sur une surface est nulle. On peut aussi estimer directement le cardinal des ensembles (n, ε) -séparés.

Lorsque $q > 1$, la proposition 3.3 et le corollaire 3.5 montrent que l'on peut toujours supposer que la composante de Reeb étudiée est invariante par les difféomorphismes du type

$$\bar{D}^q \times S^1 \ni (x, \theta) \mapsto (R(x), \theta + \alpha) \in \bar{D}^q \times S^1 \quad (R \in SO(q), \alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}).$$

En comparant les feuilles en n'utilisant que des applications invariantes par rotations, on ne peut que faire croître la fonction δ_r et donc le cardinal des ensembles (r, ε) -séparés. Soient D_1, D_2, \dots, D_k un nombre fini de diamètres de la boule \bar{D}^q dont les extrémités forment un ensemble ε -dense sur S^{q-1} . Une « projection » d'un ensemble (r, ε) -séparé de $\bar{D}^q \times S^1$ sur les anneaux $D_i \times S^1$ fournit un ensemble $(r, \varepsilon/4)$ -séparé. On a donc :

$$N(\mathcal{F}, g, r, \varepsilon) \leq kN\left(\mathcal{F}|_{\text{anneau}}, g|_{\text{anneau}}, r, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

La nullité de $h(\mathcal{F}, g)$ en résulte car k peut être évidemment choisi inférieur à $C(1/\varepsilon)^{q-1}$ où C ne dépend que de q .

De la même façon, si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte M et si \mathcal{F}' est obtenu à partir de \mathcal{F} par « tourbillonnement », alors les entropies de \mathcal{F} et de \mathcal{F}' s'annulent simultanément.

Exemple 4.2. Le feuilletage de M. Hirsch a une entropie non nulle. Rappelons que ce feuilletage est construit de la façon suivante. Considérons un tore solide $T = \bar{D}^2 \times S^1 = \{z_1 \in \mathbb{C}, |z_1| \leq 1\} \times \{z_2 \in \mathbb{C}, |z_2| = 1\}$ et le plongement i de T dans T donné par :

$$i(\varrho e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\varphi}) = \left(\frac{1}{2} e^{2i\pi\varphi} + \frac{1}{4} \varrho e^{2i\pi\theta}, e^{4i\pi\varphi} \right).$$

La variété compacte à bord $T - \overset{\circ}{i}(T)$ est naturellement feuilletée, de manière transverse au bord, par les surfaces d'équation $z_2 = Cst$. On identifie alors les deux composantes ∂T et $i(\partial T)$ de $\partial(T - \overset{\circ}{i}(T))$ par $i|_{\partial T}$. On obtient ainsi un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété compacte sans bord M^3 . Pour un choix convenable d'un bon recouvrement \mathcal{U} , le pseudogroupe d'holonomie associé à \mathcal{U} n'est autre que le pseudogroupe d'homéomorphismes locaux de S^1 engendré par les restrictions de l'application $z \mapsto z^2$ à des ouverts où elle est un difféomorphisme sur son image. Puisque l'entropie topologique de l'application $z \mapsto z^2$ est $\text{Log } 2$, il est clair que l'entropie de \mathcal{F} ne peut être nulle.

Exemple 4.3. Soit \mathcal{F} un feuilletage transverse aux fibres d'un fibré localement trivial $F \rightarrow M \rightarrow B$ où M, B, F sont compacts. Le groupe $G = \pi_1(B)$ opère sur F par l'holonomie globale de \mathcal{F} . Soit G_1 un système fini de générateurs de G . Si l'on munit B d'une métrique riemannienne g_B , le fibré tangent à \mathcal{F} est naturellement muni d'une

métrique g provenant de g_B . Soit a (resp b) le maximum (resp. minimum) des longueurs des classes d'homotopie libres de G_1 . Dans ces conditions, on a :

$$\frac{1}{a} h(G, G_1) \leq h(\mathcal{F}, g) \leq \frac{1}{b} h(G, G_1).$$

Si $f \in G_1$, on a évidemment $h(G, G_1) \geq h(f)$ où $h(f)$ est l'entropie topologique de f . Par conséquent,

$$h(\mathcal{F}, g) \geq \frac{1}{a} \max \{h(f), f \in G_1\}.$$

Cette dernière inégalité n'est certainement pas la meilleure possible. par exemple, les deux « twists de Dehn »

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de T^2 ont une entropie nulle alors que leur composé

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a une entropie non nulle. Le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a donc une entropie non nulle bien que l'entropie de ses générateurs soit nulle.

Exemple 4.4. L'entropie géométrique d'un feuilletage riemannien est nulle. Nous avons en effet déjà remarqué que l'entropie d'un pseudo-groupe d'isométries est nulle. Il est facile de construire des exemples de feuilletages riemanniens dont toutes les feuilles sont à croissance exponentielle, par exemple la suspension d'un sous-groupe libre de $SO(3)$ opérant sur S^2 . Ceci montre que, dans le cas général, la nullité de l'entropie géométrique n'entraîne pas la non existence d'une feuille à croissance exponentielle ni même l'existence d'une feuille à croissance sous-exponentielle.

Un feuilletage dont toutes les feuilles sont compactes et à holonomie finie est riemannien; son entropie est donc nulle. Nous conjecturons qu'un feuilletage (non riemannien) dont toutes les feuilles sont compactes a nécessairement une entropie géométrique nulle.

Nous construisons maintenant des exemples de nature différente. Soit \mathcal{F} un

feuilletage sur la variété riemannienne compacte (M, g) . Nous dirons que \mathcal{F} admet un automorphisme expansif s'il existe un difféomorphisme φ de M qui respecte \mathcal{F} et une constante $C > 1$ telle que les vecteurs tangents à \mathcal{F} sont g -dilatés par φ par un facteur supérieur à C . Les exemples standards d'une telle situation sont fournis par les feuilletages stables (resp. fortement stables) des difféomorphismes (resp. flots) d'Anosov. De tels feuilletages ont une croissance sous-exponentielle.

PROPOSITION 4.5. *Si (M, g, \mathcal{F}) admet un automorphisme expansif, alors $h(\mathcal{F}, g) = 0$.*

Démonstration. Puisque φ préserve \mathcal{F} , on a évidemment :

$$h(\mathcal{F}, g) = h(\mathcal{F}, \varphi_*(g)).$$

Comme, par ailleurs $\varphi_*(g)(v) \geq C^2 \cdot g(v)$ si v est tangent à \mathcal{F} , le corollaire 3.5 montre que :

$$h(\mathcal{F}, g) = h(\mathcal{F}, \varphi_*(g)) \leq \frac{1}{C} h(\mathcal{F}, g).$$

On en déduit le résultat. □

Nous étudions enfin le comportement de l'entropie par image réciproque.

PROPOSITION 4.6. *Soit $f: M' \rightarrow M$ une immersion transverse au feuilletage \mathcal{F} de M . Soit g une métrique riemannienne sur M . On considère le feuilletage $\mathcal{F}' = f^*\mathcal{F}$ et la métrique $g' = f^*g$. On a alors :*

$$h(\mathcal{F}', g') \leq h(\mathcal{F}, g).$$

Démonstration. Considérons un bon recouvrement \mathcal{U}'_Δ de \mathcal{F}' du type que nous avons considéré dans la démonstration du théorème 3.4. Nous avons vu qu'il est possible de choisir \mathcal{U}'_Δ de sorte que $(1/\text{diam}(\mathcal{U}'_\Delta)) h(\mathcal{F}', \mathcal{U}'_\Delta)$ soit arbitrairement proche de $h(\mathcal{F}', g')$. On peut alors construire un bon recouvrement \mathcal{U} de M de telle sorte que :

- (i) pour tout \mathcal{U}' de \mathcal{U}'_Δ , $f(\mathcal{U}')$ est contenu dans un élément de \mathcal{U} ,
- (ii) $\text{diam}(\mathcal{U})/\text{diam}(\mathcal{U}'_\Delta)$ est arbitrairement proche de 1 pourvu que Δ soit suffisamment petit.

On a évidemment $h(\mathcal{F}', \mathcal{U}'_\Delta) \leq h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$. La conclusion résulte alors du théorème 3.4. Remarquons que l'égalité $h(\mathcal{F}', g') = h(\mathcal{F}, g)$ n'est pas vraie en général, mais un raisonnement analogue au précédent montre qu'elle est valable si f est un revêtement fini. □

5. Entropie et mesure transverse

Il est clair que, dans le cas général, il est impossible de donner une caractérisation simple des feuilletages d'entropie nulle. Nous nous proposons cependant d'établir une forte condition nécessaire à la nullité de l'entropie.

THÉORÈME 5.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une variété riemannienne compacte (M, g) . Alors, si $h(\mathcal{F}, g)=0$, le feuilletage \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante au sens de J. Plante [Pl].*

Remarque 5.2. Dans le cas classique, c'est-à-dire lorsque \mathcal{F} est de dimension 1, ce théorème n'apporte bien entendu aucune information nouvelle. En effet, un feuilletage de dimension 1 étant à croissance polynomiale (en fait linéaire), il possède toujours une mesure transverse invariante et ceci quelle que soit son entropie. En particulier, l'existence d'une mesure transverse invariante ne suffit pas à annuler l'entropie. Insistons cependant sur le fait que, en dimension supérieure à 1, l'existence d'une mesure transverse invariante est un phénomène extrêmement rare.

Pour construire cette mesure, nous allons étudier la répartition asymptotique des ensembles (n, ε) -séparés lorsque n tend vers l'infini et ε vers 0. La démonstration est organisée en une suite de lemmes.

Fixons un bon recouvrement \mathcal{U} et considérons le pseudo-groupe $(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}))$ associé à \mathcal{U} . Ce pseudo-groupe opère sur un espace X qui est une réunion disjointe d'un nombre fini de boules ouvertes de \mathbf{R}^q . Soit \bar{X} la réunion disjointe des boules fermées correspondantes ($\bar{X}-X$ correspond aux plaques contenues dans les bords des U_i).

Supposons que $h(\mathcal{F}, g)=0$. Nous savons alors que $h(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}))=0$ et nous allons construire une mesure sur X invariante par $\mathcal{H}(\mathcal{U})$.

Soit $\mathcal{C}_+(\bar{X})$ l'espace des fonctions continues positives ou nulles sur \bar{X} . Si n est un entier et ε un réel strictement positif, nous définissons une fonctionnelle (non linéaire) $\Lambda_{n, \varepsilon}$ sur $\mathcal{C}_+(\bar{X})$ par la formule suivante :

$$\Lambda_{n, \varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{N(n, \varepsilon)} \sup \left\{ \sum_{x \in A} \varphi(x) : A \subset X \text{ est } (n, \varepsilon)\text{-séparé} \right\}.$$

Bien entendu, $N(n, \varepsilon)$ désigne $N(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ et la (n, ε) -séparation est relative à $(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}))$. Ces opérateurs, bien que non linéaires, vérifient certaines propriétés utiles.

LEMME 5.3. (a) $\Lambda_{n,\varepsilon}$ est homogène, i.e. $\Lambda_{n,\varepsilon}(\alpha\varphi) = \alpha\Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi)$ pour $\alpha \geq 0$.

(b) $\Lambda_{n,\varepsilon}$ est sous-additif, i.e. $\Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_1) + \Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_2)$.

(c) $\Lambda_{n,\varepsilon}$ est monotone, i.e. si $\varphi_1 \leq \varphi_2$, alors $\Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_1) \leq \Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_2)$.

(d) $\Lambda_{n,\varepsilon}(1) = 1$ et $\Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi) \leq \sup_{x \in \bar{X}} \{\varphi(x)\}$.

(e) Si la distance entre les supports de φ_1 et φ_2 est strictement supérieure à ε alors $\Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_1 + \varphi_2) = \Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_1) + \Lambda_{n,\varepsilon}(\varphi_2)$.

Démonstration. Seul le point (e) mérite un éclaircissement. Il résulte du fait que si $A_1 \subset \text{Supp } \varphi_1$ et $A_2 \subset \text{Supp } \varphi_2$ sont (n, ε) -séparés, alors $A_1 \cup A_2$ est (n, ε) -séparé dès que la distance entre les supports de φ_1 et φ_2 est strictement supérieure à ε . □

Nous étudions maintenant les limites des $\Lambda_{n,\varepsilon}$.

LEMME 5.4. Il existe une suite d'entiers $n(k, p)$ à deux indices ($p \geq 1, k \geq 1$) telle que:

(i) pour tout p , on a $\lim_{k \rightarrow \infty} n(k, p) = +\infty$

(ii) La limite

$$a_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(n(k, p) + 1, 1/p)}{N(n(k, p), 1/p)}$$

existe et on a $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p = 1$.

Démonstration. Il est en effet facile de voir que la nullité de $h(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}))$ c'est-à-dire de :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } N(n, \varepsilon)$$

implique que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n+1, 1/p)}{N(n, 1/p)} \right) = 1.$$

Le lemme en résulte facilement. □

LEMME 5.5. (i) On peut choisir la suite $n(k, p)$ du lemme précédent de telle sorte que, pour tout $p > 0$ et tout φ de $\mathcal{C}_+(\bar{X})$, les limites suivantes existent :

$$\Lambda_{1/p}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Lambda_{n(k, p), 1/p}(\varphi)$$

$$\bar{\Lambda}_{1/p}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Lambda_{n(k, p) + 1, 1/p}(\varphi)$$

(ii) Il existe une suite $p(l)$ tendant vers l'infini lorsque l tend vers l'infini et telle que les limites suivantes existent pour tout φ de $\mathcal{C}_+(\bar{X})$:

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \Lambda_{1/p(l)}(\varphi)$$

$$\bar{\Lambda}(\varphi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\Lambda}_{1/p(l)}(\varphi).$$

Démonstration. Les propriétés (c) et (d) du lemme 5.3 montrent qu'il suffit d'établir ces limites sur un ensemble dénombrable dense E de $\mathcal{C}_+(\bar{X})$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Partant d'une suite double $n(k, p)$ fournie par le lemme 5.4, on peut alors, par un procédé diagonal, extraire pour chaque p , une sous-suite $n'(k, p)$ de la suite $k \rightarrow n(k, p)$ telle que les limites de (i) existent pour tout φ dans E . Un deuxième procédé diagonal fournit la suite $p(l)$ telle que les limites de (ii) existent. \square

LEMME 5.6. *Les opérateurs Λ et $\bar{\Lambda}$ sont homogènes, sous-additifs, monotones et vérifient $\Lambda(1) = \bar{\Lambda}(1) = 1$. De plus, si φ_1 et φ_2 sont à supports disjoints, on a :*

$$\Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) = \Lambda(\varphi_1) + \Lambda(\varphi_2).$$

$$\bar{\Lambda}(\varphi_1 + \varphi_2) = \bar{\Lambda}(\varphi_1) + \bar{\Lambda}(\varphi_2). \quad \square$$

Si Λ et $\bar{\Lambda}$ étaient linéaires, le théorème de représentation de Riesz montrerait qu'ils proviennent d'une mesure sur \bar{X} . On a cependant le résultat plus faible suivant :

LEMME 5.7. *Si K est un compact de \bar{X} , on pose :*

$$\mu(K) = \inf \{ \Lambda(\varphi); \varphi \in \mathcal{C}_+(\bar{X}), \varphi \leq 1 \text{ et } \varphi|_K = 1 \}$$

$$\bar{\mu}(K) = \inf \{ \bar{\Lambda}(\varphi); \varphi \in \mathcal{C}_+(\bar{X}), \varphi \leq 1 \text{ et } \varphi|_K = 1 \}.$$

Alors μ et $\bar{\mu}$ se prolongent en des mesures de probabilité σ -additives et régulières sur la tribu des boréliens de \bar{X} .

Démonstration. Il suffit de suivre la démonstration du théorème de Riesz telle qu'elle est donnée dans [Ru] pages 42 à 49. Les « Steps » I, II, III et V à IX n'utilisent pas la linéarité de Λ mais seulement les propriétés de positivité, homogénéité, sous-additivité, monotonie. La démonstration du « Step » IV n'utilise que l'additivité de Λ pour des fonctions à supports disjoints. Quant au « Step » X, qui consiste à montrer

que μ « représente » Λ , il ne s'étend pas mais nous ne l'utilisons pas. Le fait que μ et $\bar{\mu}$ sont des probabilités provient du fait que \bar{X} est compact et que $\Lambda(1)=\bar{\Lambda}(1)=1$. \square

LEMME 5.8. *Les deux mesures μ et $\bar{\mu}$ sont égales.*

Démonstration. Si $A \subset X$ est (n, ε) -séparé, il est nécessairement $(n+1, \varepsilon)$ -séparé. On a donc, pour tout φ de $\mathcal{C}_+(\bar{X})$:

$$N(n, \varepsilon) \Lambda_{n, \varepsilon}(\varphi) \leq N(n+1, \varepsilon) \Lambda_{n+1, \varepsilon}(\varphi).$$

En particulier :

$$\Lambda_{n(k, p(l)), 1/p(l)}(\varphi) \leq \frac{N(n(k, p(l)+1, 1/p(l))}{N(n(k, p(l)), 1/p(l))} \Lambda_{n(k, p(l)+1, 1/p(l)}(\varphi).$$

En passant à la limite lorsque k tend vers l'infini, puis lorsque l tend vers l'infini, on obtient :

$$\Lambda(\varphi) \leq \bar{\Lambda}(\varphi).$$

Pour tout compact K , on a donc :

$$\mu(K) \leq \bar{\mu}(K).$$

La même inégalité est donc vérifiée pour tout borélien B de X :

$$\mu(B) \leq \bar{\mu}(B)$$

Comme $\mu(\bar{X}-B)=1-\mu(B)$, l'inégalité précédente appliquée à $\bar{X}-B$ donne finalement :

$$\mu(B) = \bar{\mu}(B). \quad \square$$

LEMME 5.9. *La mesure μ_0 induite sur X par μ est invariante par $\mathcal{H}(\mathcal{U})$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}_1$ et φ une fonction continue positive sur X , à support compact dans X . Supposons que $\text{Supp } \varphi \subset \text{Image}(f)$. On notera, par abus de langage, $\varphi \circ f$, la fonction égale à $\varphi \circ f$ sur $\text{Domaine}(f)$ et nulle ailleurs.

Si $A \subset \text{Domaine}(f)$ est (n, ε) -séparé, alors $f(A)$ est évidemment $(n+1, \varepsilon)$ -séparé. Par conséquent :

$$\Lambda_{n, \varepsilon}(\varphi \circ f) \leq \frac{N(n+1, \varepsilon)}{N(n, \varepsilon)} \Lambda_{n+1, \varepsilon}(\varphi)$$

En passant deux fois à la limite sur des sous-suites convenables, on obtient :

$$\Lambda(\varphi \circ f) \leq \bar{\Lambda}(\varphi).$$

Utilisant le fait que $\mu = \bar{\mu}$, on obtient alors que, pour tout borélien B contenu dans l'image de f , on a :

$$\mu(f^{-1}(B)) \leq \mu(B).$$

En remplaçant f par f^{-1} et B par $f^{-1}(B)$, on obtient alors :

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

La restriction de μ à X est donc invariante par le pseudo-groupe $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ opérant sur X . \square

Pour terminer la démonstration du théorème 5.1, il reste donc à montrer que la restriction de μ à X est non triviale. Soit $x \in \bar{X}$ un point du support de μ . Si $x \in X$, notre problème est résolu. Si $x \in \bar{X} - X$, le point x correspond à une « plaque de \mathcal{U} » qui est contenue dans le bord d'un U_i . Cette plaque rencontre nécessairement l'intérieur d'un U_j . Il existe donc un élément f de \mathcal{H}_1 , un point x' de X et une boule fermée $B \subset \mathbf{R}^q$ de centre x tels que :

- (i) f est défini sur $B \cap X$
- (ii) f s'étend en un difféomorphisme \tilde{f} de $B \cap \bar{X}$ sur $\tilde{f}(B \cap \bar{X}) \subset X$
- (iii) $\tilde{f}(x) = x'$.

LEMME 5.10. *Le point x' est dans le support de μ .*

Démonstration. Considérons une petite boule compacte $D \subset X$ de centre x' . Soit φ' une fonction continue positive définie sur X et égale à 1 sur D . Si D et le support de φ' sont suffisamment petits, alors la fonction φ définie sur \bar{X} de la façon suivante est continue :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi'(\tilde{f}(x)) \quad \text{si } x \in B \cap \bar{X} \\ \varphi(x) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si $A \subset B \cap X$ est (n, ε) -séparé, alors $\tilde{f}(A)$ est $(n+1, \varepsilon)$ -séparé. Par conséquent :

$$N(n+1, \varepsilon) \Lambda_{n+1, \varepsilon}(\varphi') \geq N'(n, \varepsilon) \Lambda_{n, \varepsilon}(\varphi).$$

Ici encore, en passant convenablement à la limite, on obtient :

$$\Lambda(\varphi) \leq \bar{\Lambda}(\varphi').$$

Puisque φ est égal à 1 sur $f^{-1}(D)$, on a

$$\mu(f^{-1}(D)) \leq \Lambda(\varphi) \leq \bar{\Lambda}(\varphi').$$

En prenant la borne inférieure de $\bar{\Lambda}(\varphi')$ sur les fonctions égales à 1 sur D , on obtient

$$\mu(f^{-1}(D)) \leq \mu(D)$$

Mais $\mu(f^{-1}(D))$ est strictement positif car $f^{-1}(D)$ contient un voisinage dans \bar{X} de x qui est dans le support de μ . On conclut donc que toute boule D de centre x' a une mesure strictement positive, c'est-à-dire que x' est dans le support de μ . \square

Ceci achève la démonstration du théorème 5.1 car la restriction de μ à X est une mesure non triviale invariante par $\mathcal{H}(\mathcal{U})$.

6. Entropie géométrique des feuilletages de codimension 1

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il est possible de caractériser les feuilletages de codimension 1 d'entropie non nulle. Rappelons qu'une feuille L d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 est appelée « ressort » (voir [La]) s'il existe un lacet γ de L et un arc T transverse à \mathcal{F} contenant $\gamma(0)$, tels que :

(i) Il existe un point x de $L \cap T$ différent de $\gamma(0)$ qui appartient au domaine de définition de l'holonomie $H(\gamma)$ de γ en $\gamma(0)$.

(ii) $H^n(\gamma)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma(0)$.

En termes imagés, la feuille L « spirale sur elle-même » (voir Figure 4).

THÉORÈME 6.1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sur une variété riemannienne compacte (M, g) . Alors, l'entropie géométrique $h(\mathcal{F}, g)$ est nulle si et seulement si \mathcal{F} ne contient pas de feuille ressort.*

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, nous en donnons deux corollaires.

COROLLAIRE 6.2. *Si toutes les feuilles de \mathcal{F} sont à croissance sous-exponentielle, l'entropie géométrique de \mathcal{F} est nulle.*

Démonstration. Une feuille ressort est en effet à croissance exponentielle (voir,

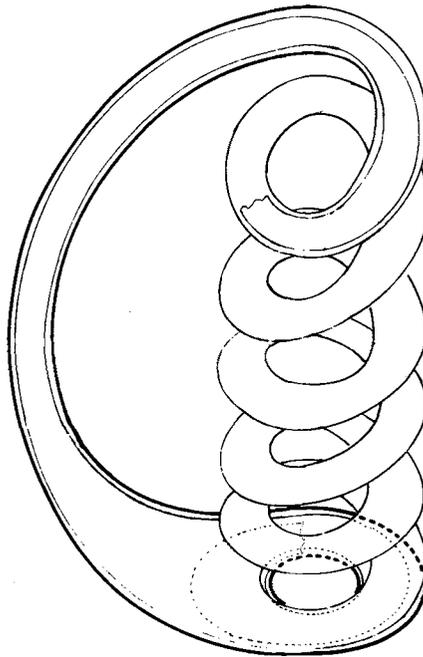


Fig. 4. Feuille ressort.

par exemple [H-H]). En fait, nous aurons à démontrer directement ce corollaire avant le théorème. \square

COROLLAIRE 6.3. *Si l'entropie d'un feuilletage de codimension 1 est nulle, son invariant de Godbillon-Vey est aussi nul.*

Démonstration. C'est un effet le cas si \mathcal{F} n'a pas de feuille ressort (voir [Du]). \square

Pour résumer la situation, nous considérons les propriétés suivantes qui peuvent être satisfaites par un feuilletage de codimension 1 \mathcal{F} sur la variété compacte M .

- (e) l'entropie de \mathcal{F} est nulle
- (c) la croissance des feuilles de \mathcal{F} est sous-exponentielle
- (m) il existe une mesure transverse invariante
- (r) \mathcal{F} n'a pas de feuille ressort
- (g) l'invariant de Godbillon-Vey est nul.

On a alors le diagramme d'implications suivant :

$$(c) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (r) \begin{array}{l} \Rightarrow (g) \\ \Rightarrow (m) \end{array}$$

Aucune autre implication n'est valide en général.

Partant d'un feuilletage d'entropie non nulle, nous avons vu que le feuilletage tourbillonné a lui aussi une entropie non nulle (Exemple 4.1). Ce feuilletage tourbillonné possède une mesure transverse invariante concentrée sur la feuille torique qui a été introduite. Ceci montre que (m) n'entraîne pas (e).

Nous verrons plus loin qu'il existe des feuilletages d'entropie nulle qui possèdent des feuilles à croissance exponentielle, de sorte que (e) n'entraîne pas (c). Cependant la description faite plus bas des feuilletages sans feuille ressort montrera qu'un tel feuilletage a nécessairement une feuille compacte ou est un feuilletage sans holonomie (à croissance polynomiale). Une réciproque partielle de l'implication (c) \Rightarrow (e) est donc vérifiée.

La réciproque de l'implication (e) \Rightarrow (g) est elle aussi fautive. Considérons en effet une surjection π du groupe fondamental $\pi_1(\Sigma)$ d'une surface compacte orientable de genre 2 sur le groupe libre $L(a, b)$ à deux générateurs. Pour chaque représentation H de $L(a, b)$ dans le groupe $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$, la représentation $H \circ \pi$ fournit un feuilletage suspendu sur le fibré en cercles au-dessus de Σ associé à $H \circ \pi$. L'invariant de Gobillon-Vey de ces feuilletages est toujours nul car le second groupe de cohomologie de $L(a, b)$ est trivial. Il est par ailleurs très facile de construire de telles représentations H possédant des orbites ressort et donc, d'entropie non nulle.

Remarquons enfin que si \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante qui charge tous les ouverts, alors \mathcal{F} est nécessairement un feuilletage sans holonomie à croissance polynomiale, et les propriétés (e), (c), (m), (r), (g) sont toutes vérifiées.

Donnons un exemple typique d'action de pseudo-groupe ayant de l'entropie.

Soit $X=[a, b]$ un intervalle compact de \mathbf{R} et I_1, I_2 deux intervalles ouverts, d'adhérences disjointes, contenus dans $I=]a, b[$. Soit f_1 (resp. f_2) un homéomorphisme de I sur I_1 (resp. I_2). Soit $\mathcal{H}_1=\{\text{id}, f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}\}$ et \mathcal{H} le pseudo-groupe de X engendré par \mathcal{H}_1 .

LEMME 6.4. $h(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1) \geq \text{Log } 2$.

Démonstration. Si i_1, i_2, \dots, i_n est une suite d'entiers égaux à 1 ou 2, on pose :

$$I_{i_1, i_2, \dots, i_n} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_n}(I).$$

Choisissons un point c de I et notons

$$x(i_1, i_2, \dots, i_n) = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_n}(c).$$

Nous affirmons que l'ensemble des 2^n points $x(i_1, i_2, \dots, i_n)$ est $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon)$ -séparé pour tout $\varepsilon < d(I_1, I_2)$. Considérons en effet deux points distincts de cet ensemble, écrits sous la forme :

$$x = x(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n)$$

$$x' = x(i_1, i_2, \dots, i_k, j_{k+1}, \dots, j_n)$$

avec $0 \leq k < n$ et $j_{k+1} \neq i_{k+1}$. Alors l'élément $\varphi = f_{i_k}^{-1} \circ f_{i_{k-1}}^{-1} \circ \dots \circ f_{i_1}^{-1}$ de \mathcal{H}_n est défini sur l'intervalle I_{i_1, i_2, \dots, i_k} . Cet intervalle contient les points x et x' et on a :

$$\varphi(x) \in I_{i_{k+1}}$$

$$\varphi(x') \in I_{j_{k+1}}.$$

Par suite :

$$d(\varphi(x), \varphi(x')) > d(I_1, I_2) > \varepsilon.$$

Les points x et x' sont donc $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon)$ -séparés. On a donc finalement :

$$N(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, n, \varepsilon) \geq 2^n.$$

On obtient alors le lemme en passant deux fois à la limite. □

(6.5) *Démonstration de la condition nécessaire* dans la théorème 6.1. Nous montrons que si $h(\mathcal{F}, g) = 0$, alors \mathcal{F} ne possède pas de feuilles ressort. Nous pouvons supposer que \mathcal{F} est transversalement orientable puisque l'existence d'une feuille ressort et la nullité de l'entropie sont invariantes par revêtement fini (voir la proposition 4.6).

Supposons que \mathcal{F} possède une feuille ressort. Pour montrer que $h(\mathcal{F}, g) \neq 0$, il suffit, d'après le théorème 3.4, de trouver un bon recouvrement \mathcal{U} dont le pseudo-groupe d'holonomie $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ contient un sous-pseudo-groupe isomorphe à celui du lemme précédent.

Il est clair que si \mathcal{F} possède une feuille ressort, pour un recouvrement \mathcal{U} convena-

ble, $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ contient deux homéomorphismes locaux f, g de \mathbf{R} tels que, pour un certain point x_0 de \mathbf{R} , on a :

$$x_0 \in \text{Domaine}(f), \quad f(x_0) > x_0$$

$$[x_0, f(x_0)] \subset \text{Domaine}(g)$$

$$g^n(f(x_0)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0.$$

(On a supposé ici que le ressort est « à droite ».) On a donc :

$$g(t) < t \quad \text{pour } t \in]x, f(x)].$$

Soit I un intervalle du type $]x_0, y[$. Si y est suffisamment proche de x_0 et si n est suffisamment grand, $g^n \circ f = f_1$ est défini sur I et vérifie $I_1 = f_1(I) \subset I$. De même, si p est suffisamment grand, $f_2 = g^p$ est défini sur I , vérifie $I_2 = f_2(I) \subset I$ et I_1 et I_2 ont leurs adhérences disjointes. Nous avons donc trouvé un sous-pseudo-groupe de $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ isomorphe à celui du lemme 6.4. \square

Il est clair que la démonstration que nous venons de donner montre non seulement que $h(\mathcal{F}, g)$ est non nul en présence de feuille ressort mais donne une borne inférieure pour $h(\mathcal{F}, g)$ qui dépend en quelque sorte de la « force » du ressort. Il ne serait pas difficile de formaliser cette notion.

Avant de commencer la démonstration de la condition suffisante dans le théorème 6.1, il nous faut rappeler quelques résultats fondamentaux de la « théorie des niveaux ». Nous référons à [C-C-1-2] et [He] pour plus de détails.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte M et Ω un ouvert saturé. Un minimal local de Ω est un fermé (dans Ω) qui est non vide, saturé et minimal pour ces propriétés. Un tel minimal local ne peut être que de trois types :

- (1) une feuille propre
- (2) une composante connexe Ω_0 de Ω lorsque toutes les feuilles de Ω_0 sont denses dans Ω_0 .

- (3) un minimal local de type « exceptionnel ».

Le réunion des minimaux locaux de Ω est le centre de Ω , noté $\mathcal{Z}(\Omega)$. Si \mathcal{F} est de classe C^2 , $\mathcal{Z}(\Omega)$ n'est jamais vide; c'est un fermé dans Ω . On définit alors une suite de fermés saturés M_p dans M ($p \in \mathbf{N}$) par :

$$M_0 = \mathcal{L}(M)$$

$$M_p - M_{p-1} = \mathcal{L}(M - M_{p-1}).$$

Les feuilles de $M_p - M_{p-1}$ sont dites de niveau p . Si \mathcal{F} est de classe C^2 la réunion des M_p est dense dans M .

Supposons maintenant que \mathcal{F} ne possède pas de feuille ressort. Une extension du théorème de R. Sacksteder ([Sa]) montre qu'un minimal local ne peut être de type exceptionnel. Quant aux minimaux de type (2), ils sont nécessairement sans holonomie car sinon la densité des feuilles dans Ω_0 permettrait de construire un ressort. En résumé un minimal local ne peut être que de l'un des deux types suivants :

- (1) une feuille propre
- (2) un ouvert saturé sans holonomie.

Les feuilles propres (de niveau fini) sont alors à croissance exactement polynomiale (de degré éventuellement non borné). Les feuilles de niveau infini ainsi que les feuilles contenues dans les ouverts de type (2) peuvent avoir une croissance exponentielle (voir [C-C-2]). On obtient ainsi des feuilletages de codimension 1 dont l'entropie est nulle mais qui possèdent des feuilles à croissance exponentielle.

La structure des ouverts de type (2) est décrite de la façon suivante : il existe un flot topologique φ_t sur M dont le support est précisément $\bar{\Omega}$ et qui permute les feuilles de \mathcal{F} . L'ensemble des réels t tels que φ_t préserve chaque feuille de \mathcal{F} est un sous-groupe de \mathbf{R} , appelé groupe des périodes de Ω . Celui-ci n'est pas nécessairement de génération finie. Enfin, si Ω est de niveau p , la frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$ est constituée de feuilles propres de niveau strictement inférieur.

Nous abordons maintenant la démonstration du fait que si \mathcal{F} n'a pas de feuille ressort, alors $h(\mathcal{F}, g) = 0$. Fixons un bon recouvrement \mathcal{U} . Nous devons montrer que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) = 0$. Le pseudo-groupe d'holonomie $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ associé à \mathcal{U} opère sur un espace X qui est une réunion disjointe d'un nombre fini d'intervalles relativement compacts de \mathbf{R} .

Soit $P \subset X$ la réunion des orbites à croissance polynomiale et K l'adhérence de P .

LEMME 6.6. *Soit Ω une composante connexe de $X - K$. Alors, les points de Ω sont dans une composante de type (2) et la frontière de Ω dans X (qui contient 0, 1 ou 2 points) est dans P .*

Démonstration. Puisque la réunion des M_p est dense dans M , il existe un point x de Ω de niveau fini. Puisque x n'est pas dans P , c'est donc que x est dans une composante de type (2). Cette composante correspond à un ouvert de X qui contient x . Soit $I \subset X$ la

composante connexe de cet ouvert qui contient x . D'après ce que nous avons vu plus haut, les orbites passant par les points frontières de I sont propres et à croissance polynomiale, c'est-à-dire dans P . On a donc $\Omega=I$ et le lemme est démontré. \square

Soit $A \subset X$ un ensemble $(\mathcal{H}(\mathcal{U}), \mathcal{H}_1(\mathcal{U}), n, \varepsilon)$ -séparé de cardinal maximal. Considérons les intervalles I contenus dans X qui sont des composantes connexes de $X-A$ et dont les extrémités sont dans A . La différence entre le cardinal de A et le nombre des ces intervalles I est majorée par le nombre de composantes connexes de X . Pour étudier $h(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \varepsilon)$, il suffit donc d'étudier la croissance de ce nombre de composantes connexes lorsque n tend vers l'infini.

Un intervalle I du genre considéré précédemment sera dit de type (a) s'il rencontre K et de type (b) sinon. D'après le lemme précédent, tout intervalle de type (b) est contenu dans un ouvert saturé sans holonomie. Soit $N_a(n, \varepsilon)$ (resp. $N_b(n, \varepsilon)$) le nombre d'intervalles de type (a) (resp. (b)). La démonstration du théorème 6.1 se fera en deux temps, où nous montrerons successivement que $N_a(n, \varepsilon)$ et $N_b(n, \varepsilon)$ croissent polynomialement en n si ε est suffisamment petit. Ceci impliquera évidemment que $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})=0$.

LEMME 6.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $N_a(n, \varepsilon)$ croît au plus polynomialement en n .*

Démonstration. Considérons un ensemble fini $Z \subset P$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) Z est $\varepsilon/3$ -dense dans K .

(ii) pour toute composante connexe de $X-K$ de longueur supérieure à $\varepsilon/3$, les extrémités (ou l'extrémité) de cette composante contenues dans K sont dans Z . (Il n'y a qu'un nombre fini de telles composantes.) Notons que, d'après ce que nous avons vu, le bord des composantes de $X-K$ est contenu dans P .

Posons $Z_n = \mathcal{H}_n(Z)$. Considérons alors un intervalle I de type (a). Par hypothèse, il existe un élément h de \mathcal{H}_n tel que la longueur de $h(I)$ soit supérieure à ε . Par ailleurs I rencontre K et il en est de même pour $h(I)$. Les conditions (i) et (ii) montrent alors que $h(I)$ contient nécessairement un point de Z . L'intervalle I contient alors un élément de $h^{-1}(Z) \subset Z_n$. Le nombre $N_a(n, \varepsilon)$ de ces intervalles est alors majoré par le cardinal de Z_n . Mais, puisque $Z \subset P$, le cardinal de Z_n croît au plus polynomialement. Ceci démontre le lemme. \square

Remarquons qu'une simple adaptation de la démonstration du lemme précédent démontre le corollaire 6.2. Si \mathcal{F} est à croissance sous-exponentielle, on choisit Z ε -dense dans X et le cardinal de Z_n croît sous-exponentiellement. On a donc $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})=0$.

Pour démontrer que $N_b(n, \varepsilon)$ croît lui-aussi polynomialement en n , nous aurons besoin de quelques lemmes.

LEMME 6.8. *Fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Alors, le nombre de composantes connexes de $X-K$ qui contiennent un intervalle I de type (b) croît au plus polynomialement en n .*

Démonstration. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux composantes connexes de $X-K$, nous appellerons distance entre Ω_1 et Ω_2 la borne inférieure (éventuellement $+\infty$) de l'ensemble des espace entiers n tels qu'il existe $h \in \mathcal{H}_n$ et $x \in \text{Domaine}(h) \cap \Omega_1$ vérifiant $h(x) \in \Omega_2$.

Soit Ω une composante connexe fixe de $X-K$ et $\tilde{\Omega}$ le saturé de Ω par \mathcal{H} . Il résulte de ce que nous avons rappelé précédemment que la réunion des extrémités des composantes de $\tilde{\Omega}$ est une réunion d'orbites de \mathcal{H} , propres et à croissance polynomiale. Celles-ci sont en nombre fini d'après la structure des ouverts saturés des feuilletages de codimension 1 (voir [H-H] Chapter V, Corollary 3.2.4). Il s'en suit que le nombre de composantes connexes de $X-K$ situées à une distance inférieure à n de Ω croît au plus polynomialement en n .

La démonstration du lemme est alors une conséquence de deux observations. La première est que si Ω contient un intervalle de type (b), alors Ω est à une distance inférieure à n d'une composante Ω' de $X-K$ de longueur supérieure à ε . La seconde est qu'il n'existe qu'un nombre fini de composantes de $X-K$ de longueur supérieure à ε . \square

Ce dernier lemme nous montre donc que, pour étudier la croissance de $N_b(n, \varepsilon)$, il suffit d'étudier la croissance du nombre $N_b(n, \varepsilon, \Omega)$ des intervalles de type (b) contenus dans une composante fixée de $X-K$. Pour y parvenir, nous démontrons tout d'abord deux lemmes généraux.

Soit Ω_1 une (autre) composante de $X-K$. Considérons l'ensemble $\mathcal{H}_n(\Omega_1)$ des éléments h de \mathcal{H}_n tels qu'il existe x de $\text{Domaine}(h) \cap \Omega_1$ pour lequel $h(x) \in \Omega_1$. D'après la structure des ouverts saturés sans holonomie, il existe un « flot local » φ_t qui permute les orbites de \mathcal{H} . (Le caractère local de φ_t provient du fait qu'une (ou deux) extrémité de Ω_1 peut aussi être une extrémité d'une composante de X .) Si $h \in \mathcal{H}_n(\Omega_1)$, alors h coïncide sur $\Omega_1 \cap \text{Domaine}(h)$ avec $\varphi_{\tau(h)}$ où $\tau(h)$ est la « période de h ».

LEMME 6.9. Pour toute composante Ω_1 de $X-K$, il existe une constante $C>0$ telle que si $h \in \mathcal{H}_n(\Omega_1)$, alors $|\tau(h)| \leq C \cdot n$.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{H}_n(\Omega_1)$ et $x \in \text{Domaine}(h) \cap \Omega_1$ tel que $h(x) \in \Omega_1$. Alors h peut s'écrire sous la forme

$$h = h_i \circ \dots \circ h_1 \tag{*}$$

avec $h_j \in \mathcal{H}_1$. Une telle écriture détermine une suite de composantes $\Omega_{i_0}, \Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_n}$ de $X-K$ définies par :

- (i) $\Omega_{i_0} = \Omega_{i_n} = \Omega_1$
- (ii) Ω_{i_j} est la composante de $X-K$ contenant $h_j \circ \dots \circ h_1(x)$ ($j=1, \dots, n$).

En suivant [C-C-1], on dira que (*) détermine un « lacet basique » si cette suite de composantes est du type :

$$\Omega_1, \Omega_{a_1}, \Omega_{a_2}, \dots, \Omega_{a_l}, \Omega_{b_1}, \Omega_{b_2}, \dots, \Omega_{b_m}, \Omega_{a_l}, \Omega_{a_{l-1}}, \dots, \Omega_{a_1}, \Omega_1$$

où toutes les composantes $\Omega_1, \Omega_{a_1}, \dots, \Omega_{a_l}, \Omega_{b_1}, \dots, \Omega_{b_m}$ sont différentes.

Le théorème 2.4 de [C-C-1] montre qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout lacet basique (*), on a $|\tau(h)| \leq C$. Le lemme résulte alors du fait que tout élément de $\mathcal{H}_n(\Omega_1)$ est le produit d'au plus n lacets basiques. □

LEMME 6.10. Soit Ω_1 une composante de $X-K$. Il existe une constante $C'(\varepsilon)>0$ vérifiant la condition suivante : si $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ sont des points de Ω_1 et h_1, h_2, \dots, h_{k-1} des éléments de \mathcal{H}_n tels que :

- (i) $h_i([y_i, y_{i+1}[) \subset \Omega_1$
- (ii) $h_i([y_i, y_{i+1}[)$ est de longueur supérieure à ε ,

alors $k \leq C'(\varepsilon) \cdot n$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, h_i coïncide sur $[y_i, y_{i+1}[$ avec $\varphi_\tau(h_i)$ et $|\tau(h_i)| \leq C \cdot n$. Soit ε' un réel positif vérifiant la condition suivante; si $\varphi_t(I) \subset \bar{\Omega}_1$ est défini, de longueur supérieure à ε et $|t| \leq 1$, alors la longueur de I est supérieure à ε' . Soit alors $Z \subset \Omega_1$ un ensemble fini qui est ε' dense. Soit l_i l'entier défini par $l_i = [\tau(h_i)]$ si $\tau(h_i) \geq 0$ et $l_i = [\tau(h_i)] + 1$ si $\tau(h_i) < 0$ où $[\]$ désigne la partie entière. Il est alors clair que φ_{l_i} est défini sur $[y_i, y_{i+1}[$ et que $\varphi_{l_i}([y_i, y_{i+1}[)$ est de longueur supérieure à ε' . L'intervalle $[y_i, y_{i+1}[$

contient donc un point de $\varphi_{-l}(Z)$. Il en résulte que le nombre d'intervalles du type $]y_i, y_{i+1}[$ est majoré par le cardinal de l'ensemble $\bigcup_{i=-[Cn]}^{[Cn]} \varphi_i(Z)$. Ce dernier cardinal croît évidemment linéairement en n . Ceci montre donc le lemme. \square

LEMME 6.11. *Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une constante $C''(\varepsilon)$ telle que, pour toute composante Ω de $X-K$, on a $N_b(n, \varepsilon, \Omega) \leq C''(\varepsilon) \cdot n$.*

Démonstration. Nous nous fixons donc une composante Ω de $X-K$ et nous nous proposons de majorer le nombre d'intervalles de type (b) contenus dans Ω . Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ les points de $A \cap \Omega$. Les intervalles de type (b) que nous considérons sont alors $]x_1, x_2[, \dots,]x_{k-1}, x_k[$. par hypothèse, il existe des éléments h_1, h_2, \dots, h_k de \mathcal{H}_n tels que les intervalles $h_1(]x_1, x_2[), \dots, h_k(]x_{k-1}, x_k[)$ sont de longueur supérieure à ε .

Pour simplifier l'exposition de la démonstration, nous traiterons tout d'abord le cas plus simple où X est le cercle S^1 et où \mathcal{H} est un groupe de difféomorphismes globaux de S^1 , engendré par \mathcal{H}_1 .

Soient $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ les composantes connexes de $X-K$ qui sont dans l'orbite de Ω par \mathcal{H} et qui sont de longueur supérieure à ε . Pour chaque $i=2, \dots, m$, on choisit un élément f_i de \mathcal{H} tel que $f_i(\Omega_i) = \Omega_1$. Soit l la longueur maximale des f_i (par rapport à \mathcal{H}_1) et δ le maximum des constantes de Lipschitz des f_i .

Soit g un élément de \mathcal{H} tel que $g(\Omega) = \Omega_1$. Nous avons déjà vu que si Ω contient un intervalle de type (b), alors la longueur de g peut être choisie inférieure à n , quitte à changer la numérotation des Ω_i .

En composant éventuellement les h_i par des f_j , on peut alors construire des éléments $h'_1, h'_2, \dots, h'_{k-1}$ de \mathcal{H}_{n+l} tels que $h'_1(]x_1, x_2[), \dots, h'_{k-1}(]x_{k-1}, x_k[)$ soient tous contenus dans Ω_1 et de longueur supérieure à $\varepsilon' = \varepsilon/\delta$. On considère alors les points $y_1 = g(x_1), \dots, y_k = g(x_k)$. En composant h'_i avec g^{-1} , on obtient alors des éléments $h''_1, h''_2, \dots, h''_{k-1}$ de \mathcal{H}_{2n+l} tels que :

- (i) $h''_i(\Omega_1) = \Omega_1$
- (ii) $h''_i(]y_i, y_{i+1}[)$ a une longueur supérieure à ε' .

D'après le lemme 6.10, on obtient donc :

$$k \leq C'(\varepsilon')(2n+l) \leq C''(\varepsilon)n.$$

Ceci démontre le lemme lorsque X est le cercle et \mathcal{H} un groupe global.

Pour démontrer le lemme dans le cas général, on utilise la même méthode en prenant garde aux domaines de définition des éléments de \mathcal{H} utilisés. Pour cela, on note δ_1 le maximum des constantes de Lipschitz des éléments de \mathcal{H}_1 . On peut toujours supposer que les intervalles $h_1(]x_1, x_2[), \dots, h_{k-1}(]x_k, x_{k-1}[)$ sont de longueur supérieure à ε mais inférieure à $\delta_1 \cdot \varepsilon$. Les éléments f_2, \dots, f_m que nous avons utilisés précédemment sont alors remplacés par une collection finie d'éléments de \mathcal{H} , dont les domaines recouvrent $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots \cup \Omega_m$, tels que $f_i(\Omega_i \cap \text{Domaine}(f_i)) \subset \Omega_1 (i=2, \dots, m)$. De plus, si ε est suffisamment petit, on peut supposer que tout intervalle contenu dans $\Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m$, de longueur inférieure à $\delta_1 \cdot \varepsilon$, est contenu dans le domaine de définition de l'un des éléments de cette collection. De la même façon, l'élément g précédent qui envoyait Ω dans Ω_1 doit être remplacé par une collection finie d'éléments de \mathcal{H} . Précisément, on vérifie qu'il existe deux entiers p, q tels que pour toute composante Ω de $X-K$ située à une distance inférieure à n de Ω_1 , il existe p éléments g_1, g_2, \dots, g_p de \mathcal{H}_{n+q} dont les domaines recouvrent Ω et tels que $g_i(\Omega \cap \text{Domaine}(g_i)) \subset \Omega_1$. Une fois ces précautions prises, la démonstration du lemme dans le cas général est exactement la même que celle que nous avons donnée dans le cas où \mathcal{H} est un groupe de difféomorphismes du cercle. \square

La démonstration que nous venons de donner du théorème 6.1 utilise la différentiabilité transverse de \mathcal{F} , en particulier par le lemme 6.9. Nous nous proposons maintenant de montrer l'importance de cette hypothèse en construisant un contre-exemple au théorème 6.1 en classe C^0 .

Exemple 6.12. Soit f un homéomorphisme de $[0, 1]$ tel que $f(x) < x$ pour $x \in]0, 1[$. Soit $[a, b] \subset]0, 1[$ un intervalle tel que $f(b) = a$. Considérons un flot φ_t sur $[a, b]$ tel que $\varphi_t(x) > x$ pour $t > 0$ et $x \in]a, b[$. On définit alors un homéomorphisme g de $[0, 1]$ par :

$$g(1) = 1, \quad g(0) = 0$$

$$g|_{f^n((a, b))} = f^n \circ \varphi_{2^n} \circ f^{-n}|_{f^n((a, b))} \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Remarquons tout d'abord que f et g ne peuvent être simultanément Lipschitziens. Soit $G_1 = \{f, f^{-1}, g, g^{-1}, \text{id}\}$ et G le groupe engendré par G_1 . Ce groupe G opère sur $[0, 1]$ sans orbite ressort. En effet, les seuls points fixes de G sont $0, 1$ et les points $f^n(a)$ et il est clair que ces points ne s'accroissent pas sur eux même.

L'entropie $h(G, G_1)$ est cependant non nulle. Pour le vérifier, considérons un point

c de $]a, b[$ et l'ensemble A formé des points $\varphi_i(c)$ avec $i=0, 1, 2, \dots, 2^n-1$. Nous allons montrer que A est $(3n-2, \varepsilon)$ -séparé avec $\varepsilon=|\varphi_1(c)-c|$. Cette affirmation implique évidemment que $h(G, G_1)>0$.

La définition même de g montre que φ_{2^k} ($k \geq 0$) est la restriction à $[a, b]$ d'un élément de G de longueur inférieure à $2k+1$ (par rapport à G_1). Plus généralement, soit i un entier tel que $1 \leq i \leq 2^n-1$, écrit sous la forme :

$$i = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_l}; \quad 0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq n-1.$$

Dans ces conditions, φ_i est la restriction à $[a, b]$ de :

$$\begin{aligned} & (f^{-k_1} \circ g \circ f^{k_1}) \circ (f^{-k_2} \circ g \circ f^{k_2}) \circ \dots \circ (f^{-k_l} \circ g \circ f^{k_l}) \\ & = (f^{k_1} \circ g \circ f^{k_1-k_2}) \circ g \circ \dots \circ f^{k_{l-1}-k_l} \circ g \circ f^{k_l}. \end{aligned}$$

La longueur de cet élément de G est inférieure à

$$k_1 + (k_2 - k_1) + \dots + (k_l - k_{l-1}) + k_l + l = 2k_l + l \leq 2(n-1) + n = 3n-2.$$

L'ensemble A est alors $(3n-2, \varepsilon)$ -séparé puisque :

$$|\varphi_i^{-1}(\varphi_{i+1}(c)) - \varphi_i^{-1}(\varphi_i(c))| = |\varphi_1(c) - c| = \varepsilon. \quad \square$$

Nous terminerons ce paragraphe par une remarque. Soit L une feuille de la variété riemannienne feuilletée (M, \mathcal{F}, g) .

On notera :

$$\text{Croiss}(L) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \text{Log Vol } B_{\mathcal{F}}(x, R) \quad \text{où } x \in L.$$

La démonstration du lemme 6.7 montrait en fait plus que ce que nous avons utilisé. En fait, cette même démonstration conduit à la majoration suivante de l'entropie, valable en codimension 1.

PROPOSITION 6.13. *Soit $a > 0$ un réel vérifiant la condition suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $Z \subset M$ qui est ε -dense et tel que les feuilles L passant par Z vérifient $\text{Croiss}(L) \leq a$. Alors $h(\mathcal{F}, g) \leq a$.* □

Par exemple, si L est une feuille dense, on peut choisir $a = \text{Croiss}(L)$. En général, on peut toujours choisir pour a la borne supérieure de $\text{Croiss}(L)$ où L est une feuille de

\mathcal{F} . Voici une illustration de ce phénomène. Soit (B, g) une variété riemannienne compacte. Pour tout morphisme $\varphi: \pi_1(B) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$, le fibré tangent du feuilletage suspendu \mathcal{F}_φ peut être muni d'une métrique riemannienne canonique, provenant de la base (B, g) . Alors, l'entropie de \mathcal{F}_φ , pour cette métrique, est bornée indépendamment de φ , par la croissance du revêtement universel de B .

7. Questions et remarques

Plusieurs travaux récents étudient le rapport entre la dynamique d'un feuilletage et ses classes caractéristiques secondaires. Citons par exemple le résultat de S. Hurder : l'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage de codimension quelconque à croissance sous-exponentielle est nul [Hu]. D'après ce que nous vu pour les feuilletages de codimension 1, il est naturel d'espérer que la nullité de l'entropie géométrique implique la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey en codimension quelconque. En fait, nous conjecturons que *toutes* les classes caractéristiques secondaires d'un feuilletage d'entropie nulle sont nulles.

En suivant la théorie des systèmes dynamiques, nous dirons qu'un point x d'une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) est errant s'il existe une carte distinguée U contenant x et telle que toute feuille de \mathcal{F} rencontre U sur au plus une plaque. Les points errants forment évidemment un ouvert saturé. Les feuilles passant par les points errants sont propres et leur holonomie est triviale.

Soit Ω le fermé des points non errants. Si M est compact, alors Ω est vide si et seulement si toutes les feuilles de Ω sont compactes et sans holonomie. Dans ce cas, l'entropie géométrique de \mathcal{F} s'annule. Comme dans le cas des systèmes dynamiques usuels, il est naturel de conjecturer que l'entropie géométrique de \mathcal{F} ne dépend que de sa restriction à Ω . La restriction de \mathcal{F} à Ω n'est pas un feuilletage car Ω n'est pas une variété; elle définit cependant une « lamination de Ω ». Comme la définition de l'entropie géométrique se généralise aisément à une lamination, nous sommes conduits à conjecturer que $h(\mathcal{F}, g) = h(\mathcal{F}|_\Omega, g|_\Omega)$. Une réponse positive à cette question permettrait de montrer que l'entropie géométrique d'un feuilletage compact est nulle.

Dans [GLW], nous avons observé que si T est une transformation préservant une probabilité μ , alors l'entropie « mesurée » $h(T, \mu)$ peut être calculée en considérant des partitions de l'unité à la place des partitions usuelles de l'espace ambiant. Il semble que cette méthode de définition de l'entropie puisse s'appliquer à d'autres opérateurs opérant sur l'espace des fonctions; par exemple à des opérateurs de diffusion reliés à

des opérateurs elliptiques. Si \mathcal{F} est un feuilletage de (M, g) , on peut considérer le Laplacien feuilleté $\Delta_{\mathcal{F}}$ (voir [Ga]) et la famille à 1-paramètre $D'_{\mathcal{F}}$ d'opérateurs de diffusion associés à $\Delta_{\mathcal{F}}$. Les opérateurs $D'_{\mathcal{F}}$ préservent des mesures de probabilité sur M . Celles-ci sont appelées « mesures harmoniques » et sont caractérisées par l'annulation des intégrales de $\Delta_{\mathcal{F}}(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$. De telles mesures existent toujours [Ga, Theorem 1]. Nous espérons que l'entropie géométrique que nous venons d'introduire pourrait être considérée comme la borne supérieure d'entropies mesurées, raisonnablement définies, associées aux diverses mesures harmoniques. Une telle interprétation permettrait en particulier de montrer que l'entropie géométrique est concentrée sur l'ensemble non errant car l'ouvert errant a une mesure nulle pour toute mesure harmonique [Ga, Corollary 6].

Bibliographie

- [Bo] BOWEN, R., Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. 153 (1971), 401–414.
- [C-C-1] CANTWELL, J. & CONLON, L., Poincaré-Bendixson theory for leaves of codimension one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265 (1981), 181–209.
- [C-C-2] — Nonexponential leaves at finite level. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 269 (1982), 637–651.
- [Du] DUMINY, G., L'invariant de Godbillon-Vey se localise sur les feuilles ressort. Preprint Lille.
- [Ga] GARNETT, L., Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion. *J. Funct. Anal.*, 51 (1983), 285–311.
- [Gr] GROMOV, M., Entropy of holomorphic maps. Preprint.
- [GLW] GHYS, E., LANGEVIN, R. & WALCZAK, P., Entropie et partitions de l'unité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 303 (1986), 251–254.
- [He] HECTOR, G., Architecture des feuilletages de classes C^2 . *Astérisque*, 107–108 (1983), 243–258.
- [H-H] HECTOR, G. & HIRSCH, U., *Geometric theory of foliations*. Vieweg 1983.
- [Hu] HURDER, S., The Godbillon measure of amenable foliations. *J. Differential Geom.*, 23 (1986), 347–365.
- [La] LAMOUREUX, C., Sur quelques phénomènes de captage. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 23 (1973), 229–243.
- [Pl] PLANTE, J., Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. of Math.*, 102 (1975), 327–361.
- [Ru] RUDIN, W., *Real and complex analysis*. McGraw Hill, 2nd edition, 1974.
- [Sa] SACKSTEDER, R., Foliations ans pseudo-groups. *Amer. J. Math.*, 87 (1965), 79–102.

Received May 26, 1986

Received in revised form March 1, 1987