

ÜBER EINE METHODE ZUM RÄUMLICHEN NEUMANNSCHEM PROBLEM MIT EINER ANWENDUNG FÜR TORUSARTIGE BERANDUNGEN⁽¹⁾

VON

ERICH MARTENSEN

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§1. Einleitung	76
<i>I. Zurückführung auf Integralgleichungen</i>	
§2. Räumliches Analogon zur Cauchyschen Integralformel	79
§3. Erweiterung auf mehrfache Berandungen	81
§4. Äquivalenz des Neumannschen Problems mit einem linearen Integralgleichungs- problem	82
§5. Einführung torusartiger Berandungen	96
<i>II. Das azimuthalunabhängige Randwertproblem</i>	
§6. Formeln zur numerischen Quadratur und Differentiation periodischer Funktionen	98
§7. Zerlegung der vollständigen elliptischen Integrale	102
§8. Integralgleichung für die Tangentialkomponente	103
§9. Einige Eigenschaften der Kerne $K_{ij}(\varphi, \psi)$ und $L_{ij}(\varphi, \psi)$	105
§10. Zerlegung der Kerne $K_{ii}(\varphi, \psi)$ und $L_{ii}(\varphi, \psi)$	112
§11. Linear abhängiges Gleichungssystem für die Tangentialkomponente	114
§12. Erstes numerisches Beispiel	117
<i>III. Das azimuthalabhängige Randwertproblem</i>	
§13. Zerlegung der elliptischen Integrale $G_m(k)$	121
§14. Integrodifferentialgleichung für die Potentialamplitude	122
§15. Zerlegung der Kerne $X_{ii}(\varphi, \psi)$, $Y_{ii}(\varphi, \psi)$ und $Z_{ii}(\varphi, \psi)$	127
§16. Linear unabhängiges Gleichungssystem für die Potentialamplitude	128
§17. Zweites numerisches Beispiel	129
Literatur	134

⁽¹⁾ Diese Arbeit befindet sich in wesentlichen Punkten in Übereinstimmung mit einer von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität angenommenen Habilitationsschrift.

§ 1. Einleitung

Unter dem Neumannschen Problem oder der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie versteht man die Bestimmung von Lösungen u der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u = 0,$$

deren Normalableitungen auf der Berandung eines bestimmten Gebietes vorgeschriebene Werte annehmen. Im dreidimensionalen Fall besteht die klassische Lösungsmethode des Problems in der Darstellung der gesuchten Funktion als Potential einer einfachen Belegung ϱ des Randes S :

$$u = \iint_S \frac{\varrho'}{r} df'; \quad (1)$$

dabei bedeutet

$$r = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

den Abstand zwischen dem Aufpunkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und dem Integrationspunkt $\mathbf{x}' = (\xi, \eta, \zeta)$ ⁽¹⁾. Läßt man die Normalableitung ⁽²⁾ des Potentials (1) gegen S streben, so ergibt sich, wenn das Definitionsgebiet B beispielsweise nur eine äußere Berandung S besitzt, in bekannter Weise für ϱ die Integralgleichung

$$\varrho + \frac{1}{2\pi} \iint_S \varrho' \frac{\partial(1/r)}{\partial n} df' = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (3)$$

die stets Lösungen besitzt, sofern die vorgeschriebenen Randwerte für $\partial u / \partial n$ im Mittel über S verschwinden [4].

Bei den Anwendungen in der mathematischen Physik gelangt man häufig folgendermaßen zu einem Neumannschen Problem: Gesucht ist ein in B harmonisches Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ mit auf S vorgegebener Normalkomponente (\mathbf{n}, \mathbf{v}) , also ein Feld, welches in B den partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

genügt ⁽³⁾. Durch den üblichen Ansatz

⁽¹⁾ Akzente sollen hier und im folgenden besagen, daß die betreffende Größe im Integrationspunkt \mathbf{x}' statt im Aufpunkt \mathbf{x} zu nehmen ist, sofern nichts Gegenteiliges gesagt wird.

⁽²⁾ Wir wollen in der vorliegenden Untersuchung unter $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ grundsätzlich die äußere Einheitsnormale einer geschlossenen Fläche S und unter der Normalableitung $\partial/\partial n$ die Differentiation auf S in Richtung von \mathbf{n} verstehen. Die Einheitsnormale ist also in das Lösungsgebiet hinein- bzw. aus demselben herausgerichtet, je nachdem S eine innere oder äußere Berandung darstellt.

⁽³⁾ Die Komponenten eines harmonischen Vektors sind stets harmonische Funktionen, aber nicht jeder Vektor ist ein harmonischer, dessen Komponenten harmonische Funktionen sind.

$$\mathbf{v} = -\text{grad } u \quad (4)$$

wird man auf ein Neumannsches Problem für u geführt, dessen negative Normalableitung auf S durch (\mathbf{n}, \mathbf{v}) gegeben ist. Sieht man davon ab, daß die Lösung des Neumannschen Problems im Falle ihrer Existenz nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, so darf die Bestimmung eines harmonischen Vektorfeldes aus seinen Normalkomponenten als ein Äquivalent zum Neumannschen Problem aufgefaßt werden.

Nun interessieren bei derartigen Problemen häufig gar nicht die Dichte ϱ auf S und das Potential u in B , sondern lediglich die Werte, die die Lösung u auf dem Rande S annimmt oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Tangentialkomponenten des zugehörigen harmonischen Vektorfeldes \mathbf{v} auf S ; diese können z. B. durch das Vektorprodukt $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ repräsentiert werden. Hier würde sich nun ein von dem eingangs beschriebenen klassischen Lösungsverfahren abweichendes sehr empfehlen, das auf einer unmittelbaren Verknüpfung der gegebenen Normalkomponente (\mathbf{n}, \mathbf{v}) mit den gesuchten Tangentialkomponenten $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ beruht und dabei die Berechnung von ϱ vollständig vermeidet. Eine derartige Methode, deren ebenes Analogon bereits untersucht wurde [10], wird in Abschnitt I der vorliegenden Arbeit entwickelt. Im Falle mehrfach zusammenhängender Gebiete B gewinnt man dabei den weiteren Vorteil, daß die von der Mehrwertigkeit der Lösung u in B herrührenden Schwierigkeiten umgangen werden, da der Gradient der Lösung und damit das Vektorfeld (4) stets einwertig sind. Dabei wird allerdings stillschweigend vorausgesetzt, daß nur einwertige Randwerte

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = -\frac{\partial u}{\partial n} \quad (5)$$

auf S vorgeschrieben werden.

Ein Beispiel der genannten Art tritt bei bestimmten Stabilitätsuntersuchungen in der Plasmaphysik auf, die im Zusammenhang mit den Bemühungen um eine kontrollierte Kernfusion stehen und gegenwärtig mit besonderem Interesse verfolgt werden [1]. Man veranstaltet dabei in einem Torus eine ringförmige Gasentladung, die unter gewissen Bedingungen zu einer Loslösung des Gases (Plasmas) von den materiellen Toruswänden führt, so daß sich zwischen der Plasmaoberfläche S_1 und der Innenwand des Torus' S_2 ein dreifach zusammenhängendes, von einem Magnetfeld erfülltes Vakuumgebiet B ausbildet. Hier erhebt sich die Frage, ob der kontrahierte Plasmaschlauch und die zugehörige Magnetfeldkonfiguration gegenüber kleinen Störungen stabil sind oder nicht. Dabei spielt die durch die Störung bedingte Änderung des Vakuummagnetfeldes eine wichtige Rolle. Sie ist, wie jedes Magnetfeld, divergenzfrei und, da im Vakuum

kein Strom fließt, rotationsfrei, also harmonisch in B ; außerdem beherrscht man die Normalkomponenten auf S_1 und S_2 infolge bestimmter Randbedingungen. Gesucht sind die Tangentialkomponenten bzw. das Potential der magnetischen Störung auf der Plasmaoberfläche S_1 . Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Neumannsche Problem eine Lösung besitzt, lautet in diesem Falle, daß der Fluß des magnetischen Störfeldes durch S_1 gleich dem durch S_2 sein muß; sie ist stets erfüllt, da die Normalkomponente auf S_1 eine in der Fläche zunehmende Divergenz darstellt und auf S_2 verschwindet [7].

Die numerische Behandlung eines solchen Neumannschen Problems für zwei torusartige Berandungen führt auf die Bestimmung einer „Randmatrix“, die, angewandt auf die Spaltenmatrix der (an diskreten Stellen genommenen) Normalkomponente, die Spaltenmatrix der Tangentialkomponenten bzw. des Potentials liefert. Auf Grund des dreifachen Zusammenhangs des Lösungsgebietes B ist die Lösung des Problems indessen nicht eindeutig. Die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems, die zusammen mit einer speziellen des inhomogenen Problems die allgemeine Lösung ergibt, stellt nämlich eine zweiparametrische Schar harmonischer Vektorfelder in B mit verschwindenden Normalkomponenten auf S_1 und S_2 dar [2, 7]. Diese homogenen Lösungen haben aus Symmetriegründen (B entsteht durch Rotation eines beliebigen ebenen Ringgebietes um eine außerhalb desselben gelegene Achse) die Eigenschaft, vom Azimutalwinkel α unabhängig zu sein. Daraus erkennt man, daß sich das „azimutalunabhängige“ Randwertproblem (die Normalkomponenten auf S_1 und S_2 hängen von α nicht ab und gehorchen der genannten Durchflußbedingung, die Lösung ist mehrdeutig) von dem „azimutalabhängigen“ (die Normalkomponenten auf S_1 und S_2 hängen von α in Form des gemeinsamen Faktors $e^{im\alpha}$, $m \geq 1$ und ganzzahlig, ab und genügen daher automatisch der Durchflußbedingung, die Lösung ist eindeutig) grundsätzlich unterscheidet.

Dieser Unterschied tritt auch bei der praktischen Behandlung des Problems zu Tage. Es werden daher numerische Verfahren für die beiden genannten Fälle in Abschnitt II und III dieser Arbeit getrennt entwickelt. Rechenzeit und Genauigkeit der Verfahren werden dabei im wesentlichen bestimmt durch die Anzahl der „Stützstellen“ $2N$ auf jedem Berandungsquerschnitt von S_1 und S_2 . Für $2N = 12$ werden numerische Beispiele mitgeteilt und die berechneten Randmatrizen an Hand exakt bekannter Lösungen des Neumannschen Problems geprüft. Dabei ergibt sich durchweg eine vier- bis fünfstellige Übereinstimmung mit den strengen Werten.

I. Zurückführung auf Integralgleichungen

§ 2. Räumliches Analogon zur Cauchyschen Integralformel

Ein ebenes harmonisches Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ ist in einem Gebiet B vollständig durch seine Werte auf der Randkurve C bestimmt. Da nämlich $v_x - iv_y$ eine analytische Funktion ist, liefert die Cauchysche Integralformel für alle in B gelegenen Punkte der $(x + iy)$ -Ebene

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(v'_x - iv'_y)(d\xi + id\eta)}{\xi + i\eta - x - iy}. \quad (6)$$

Durch Zerlegung von (6) in Real- und Imaginärteil überzeugt man sich leicht, daß für ebene harmonische Vektorfelder in B die Darstellung durch ihre Randwerte auf C

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} ds' \quad (7)$$

zustande kommt, die natürlich nur eine andere Interpretation der Cauchyschen Integralformel ist. Indessen werden wir sehen, daß (7) im Gegensatz zu (6) ein unmittelbares räumliches Analogon besitzt. Dieses wird uns bei den weiteren Betrachtungen den Schlüssel zu der Aufstellung von Integralgleichungen liefern, die die Komponenten der harmonischen Vektorfelder auf den Berandungen des betrachteten Gebietes in der gewünschten Weise miteinander verknüpfen.

SATZ 1. *Es sei B ein dreidimensionales Gebiet beliebigen Zusammenhanges mit genau einer stückweise glatten, doppelpunktfreien äußeren Berandung S . Dann gilt für ein in B und S stetiges und in B stetig differenzierbares und harmonisches Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ in B die Zerlegung*

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad (8)$$

wobei das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ in B durch die Randwerte von \mathbf{v} auf S bestimmt sind:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df', \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df'. \quad (10)$$

⁽¹⁾ $\mathbf{x} = (x, y)$ ist hier der ebene Ortsvektor und $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ die äußere Einheitsnormale von C .

Das skalare Potential und die Komponenten des Vektorpotentials sind somit in B einwertig beliebig oft stetig differenzierbar und harmonisch, so daß auch \mathbf{v} in B beliebig oft stetig differenzierbar ist. Das Vektorpotential genügt außerdem der Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (11)$$

Beweis. Der in B liegende Aufpunkt \mathbf{x} werde von einer hinreichend kleinen Kugel K umschlossen. Ferner sei S^* eine stückweise glatte, innere Nachbarfläche zu S . Dann gilt für alle in B^* , S^* , K , gelegenen Punkte \mathbf{x}' , ohne an dieser Stelle von der Differenzierbarkeitsvoraussetzung für \mathbf{v} Gebrauch machen zu müssen, die Identität

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{v}'}{r} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}'}{r} = \Delta \frac{\mathbf{v}'}{r} = \mathbf{v}' \Delta \frac{1}{r} = 0. \quad (12)$$

Mit Hilfe der aus (2) unmittelbar folgenden Beziehung

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}' \frac{1}{r} \quad (13)$$

erhalten wir unter nunmehriger Benutzung der Divergenz- und Rotationsfreiheit von \mathbf{v} in B die weiteren, in B^* , S^* , K gültigen Identitäten

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{v}'}{r} = \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r}, \mathbf{v}' \right) = - \left(\operatorname{grad}' \frac{1}{r}, \mathbf{v}' \right) = -\operatorname{div}' \frac{\mathbf{v}'}{r},$$

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{v}'}{r} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r}, \mathbf{v}' \right] = - \left[\operatorname{grad}' \frac{1}{r}, \mathbf{v}' \right] = -\operatorname{rot}' \frac{\mathbf{v}'}{r}.$$

Eingesetzt in (12):
$$-\operatorname{grad} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{v}'}{r} + \operatorname{rot} \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{v}'}{r} = 0.$$

Integration über B^* ergibt

$$-\operatorname{grad} \iiint_{B^*} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{v}'}{r} dg' + \operatorname{rot} \iiint_{B^*} \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{v}'}{r} dg' = 0$$

und anschließende partielle Integration

$$-\operatorname{grad} \iint_{S^*} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' + \operatorname{rot} \iint_{S^*} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' + \mathbf{R} = 0 \quad (14)$$

(¹) Differentialoperatoren mit Akzenten sollen besagen, daß die Differentiation auf die Koordinaten des Integrationspunktes \mathbf{x}' statt des Aufpunktes \mathbf{x} zu beziehen ist.

mit
$$\mathbf{R} = \text{grad} \iint_K \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' - \text{rot} \iint_K \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df'. \quad (15)$$

Beachtet man
$$\text{grad} \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{n}'}{r^2}$$

auf K , so wird (15) durch Ausführung der Differentiationen unter den Integralzeichen

$$\mathbf{R} = \iint_K \frac{\mathbf{n}'(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r^2} df' - \iint_K \frac{[\mathbf{n}'[\mathbf{n}', \mathbf{v}']]}{r^2} df' = \iint_K \frac{\mathbf{v}'}{r^2} df'.$$

Wegen
$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{R} = 4\pi \mathbf{v}$$

und des in (14) erlaubten Grenzüberganges $S^* \rightarrow S$ geht (14) in die Behauptung (8) bis (10) über. Daß ferner Φ, A_x, A_y, A_z einwertig, beliebig oft stetig differenzierbar und harmonisch sind, folgt unmittelbar aus (9) und (10). Zum Beweise der Divergenzfreiheit des Vektorpotentials erhalten wir unter Benutzung von (13) und der Rotationsfreiheit von \mathbf{v} in B für alle \mathbf{x}' auf einer den Aufpunkt \mathbf{x} umschließenden inneren Nachbarfläche S^* zu S

$$\text{div} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} = \left(\text{grad} \frac{1}{r}, [\mathbf{n}', \mathbf{v}'] \right) = \left(\mathbf{n}', \left[\text{grad}' \frac{1}{r}, \mathbf{v}' \right] \right) = \left(\mathbf{n}', \text{rot}' \frac{\mathbf{v}'}{r} \right).$$

Integration über S^* ergibt dann nach partieller Integration (Stokesscher Satz)

$$\text{div} \iint_{S^*} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' = 0.$$

Der nunmehr erlaubte Grenzübergang $S^* \rightarrow S$ liefert (11).

Zum dreidimensionalen Analogon zu (7) gelangen wir schließlich, indem wir die Potentiale (9) und (10) in (8) einsetzen, dort die Differentiationen unter den Integralzeichen ausführen und dabei

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{r^3} \quad (16)$$

einsetzen:
$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df'. \quad (17)$$

§ 3. Erweiterung auf mehrfache Berandungen

SATZ 2. *Das beliebig zusammenhängende dreidimensionale Gebiet B habe eine stückweise glatte, doppelpunktfreie innere Berandung S_1 und eine ebensolche äußere Berandung S_2 .*

Dann gilt für ein in B, S_1, S_2 stetiges und in B stetig differenzierbares und harmonisches Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ in B die Zerlegung (8) mit den (einwertigen) Potentialen

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' \right\}, \quad (18)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' - \iint_{S_2} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' \right\}, \quad (19)$$

wobei das Vektorpotential der Nebenbedingung (11) genügt⁽¹⁾.

Beweis. Durch Anbringen einer geeigneten Schnittfläche S_3 , die den jeweilige Aufpunkt \mathbf{x} in B nicht enthält, ist es möglich, Satz 1 auf das entstehende Gebie mit den Berandungsanteilen S_1, S_2, S_3 anzuwenden. Bei der Berechnung der Potential (9) und (10) fallen dann die Integrale über S_3 in der üblichen Weise heraus.

Die entsprechend erweiterte Formel (17) lautet jetzt

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' \right\}. \quad (20)$$

§ 4. Äquivalenz des Neumannschen Problems mit einem linearen Integralgleichungsproblem

Bei der Untersuchung der Grenzübergänge in Potentialen einfacher Belegungen und deren Ableitungen, bei denen der Aufpunkt gegen die Belegungsfläche strebt stößt man auf die sogenannten Sprungrelationen [4, 6]. Um diese Beziehungen anwenden zu können, verschärfen wir unsere Voraussetzungen über die Berandungskomponenten S_1, S_2 von B und über das Vektorfeld \mathbf{v} dahingehend, daß nunmehr, sofern nichts Gegenteiliges gesagt wird,

S_1, S_2 stetig gekrümmte, doppelpunktfreie, geschlossene Flächen mit einem durch B bestimmten Zusammenhang sind und

\mathbf{v} ein in B, S_1, S_2 stetiges und in B stetig differenzierbares und harmonisches Vektorfeld ist, dessen Komponenten auf den Berandungen S_1, S_2 jeweils gleichmäßig Hölder-stetig sind.

⁽¹⁾ Dieser Satz und alle weiteren Betrachtungen (einschließlich der numerischen Verfahren) lassen sich unmittelbar auf *mehrfache innere* Berandungen übertragen, indem nämlich unter S_1 die Gesamtheit aller inneren Berandungen von B zu verstehen ist. Ebenso ist der Fall enthalten, daß B *keine innere* Berandung besitzt; dann nämlich sind einfach alle Integrale (bzw. an späterer Stelle die entsprechenden Summen) über die innere Berandung fortzulassen. Im folgenden halten wir an *je einer inneren und äußeren* Berandung von B fest.

Für eine stetig gekrümmte, doppelpunktfreie, geschlossene Fläche S mit einer gleichmäßig Hölder-stetigen einfachen Belegung ϱ gilt, daß das Potential (1) beim Durchgang des Aufpunktes \mathbf{x} durch die Belegungsfläche S stetig bleibt; dagegen wird das Verhalten der Ableitungen des Potentials bei Annäherung des Aufpunktes \mathbf{x} von außen (oberes Vorzeichen) bzw. von innen (unteres Vorzeichen) an die Belegungsfläche S bestimmt durch die im Sinne gleichmäßiger Konvergenz existierenden Grenzwerte (Sprungrelationen)

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow S} \text{grad} \iint_S \frac{\varrho'}{r} df' = \iint_S \text{grad} \frac{\varrho'}{r} df' \mp 2\pi \mathbf{n} \varrho; \quad (21)$$

dabei ist das Integral auf der rechten Seite als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen.

LEMMA 1. Für die Divergenz und Rotation eines Vektorpotentials einer gleichmäßig Hölder-stetigen einfachen Belegung $\varrho = (\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z)$ existieren unter den genannten Voraussetzungen die Grenzwerte

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow S} \text{div} \iint_S \frac{\varrho'}{r} df' = \iint_S \text{div} \frac{\varrho'}{r} df' \mp 2\pi(\mathbf{n}, \varrho), \quad (22)$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow S} \text{rot} \iint_S \frac{\varrho'}{r} df' = \iint_S \text{rot} \frac{\varrho'}{r} df' \mp 2\pi[\mathbf{n}, \varrho] \quad (23)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, wobei die rechts stehenden Integrale als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen sind.

Beweis. Wendet man (21) auf die Belegungskomponente ϱ_x an, so lautet die x -Komponente dieser Gleichung

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow S} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\varrho'_x}{r} df' = \iint_S \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varrho'_x}{r} df' \mp 2\pi n_x \varrho_x;$$

addiert man hierzu die y - und die z -Komponente von (21), bzw. auf ϱ_y und ϱ_z angewandt, so entsteht (22). In gleicher Weise ergibt sich

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow S} \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\varrho'_z}{r} df' = \iint_S \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varrho'_z}{r} df' \mp 2\pi n_y \varrho_z,$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow S} \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{\varrho'_y}{r} df' = \iint_S \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varrho'_y}{r} df' \mp 2\pi n_z \varrho_y;$$

Subtraktion liefert die x -Komponente von (23):

$$\lim_{x \rightarrow S} \operatorname{rot}_x \iint_S \frac{\mathbf{Q}'}{r} df' = \iint_S \operatorname{rot}_x \frac{\mathbf{Q}'}{r} df' \mp 2\pi[\mathbf{n}, \mathbf{Q}]_x.$$

Entsprechend verifiziert man die y - und z -Komponente von (23).

LEMMA 2. *Es sei B ein beliebig zusammenhängendes Gebiet mit stetig gekrümmter doppelunktpunktfreier Berandung S . In B und S sei ein stetiges Vektorfeld \mathbf{v} erklärt, welche überdies in B stetig differenzierbar und harmonisch ist und auf S keine Tangentialkomponenten besitzt. Dann verschwindet \mathbf{v} identisch in B und S .*

Beweis. Wegen $[\mathbf{n}, \mathbf{v}] = 0$ auf S ist \mathbf{v} in B nach Satz 1 als negativer Gradient einer (unbeschadet des Zusammenhanges von B) einwertigen skalaren Potentials Φ darstellbar

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \Phi \quad (24)$$

mit

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df'.$$

Wegen der Stetigkeit von (\mathbf{n}, \mathbf{v}) auf S ist zunächst Φ stetig in B und S . Da auch \mathbf{v} in B einschließlich des Randes stetig ist, lassen sich gemäß (24) auch die Ableitungen von Φ nach S hinein stetig fortsetzen. Da nun \mathbf{v} und damit $\operatorname{grad} \Phi$ auf S in Richtung der Normalen fallen, ist

$$\Phi = \text{const} \quad (25)$$

auf S . Nach dem Satz vom Maximum und Minimum ist Φ dann in B und S gleich der durch (25) gegebenen Konstanten, so daß \mathbf{v} gemäß (24) in B und damit auf S verschwindet.

LEMMA 3. *Das beliebig zusammenhängende Gebiet B bestehe in der Menge aller Punkte außerhalb einer stetig gekrümmten, doppelunktpunktfreien, geschlossenen Fläche S . In B und S sei ein stetiges Vektorfeld \mathbf{v} erklärt, welches zudem in B stetig differenzierbar und harmonisch ist. Die Normalkomponente von \mathbf{v} auf S genüge der Bedingung*

$$\iint_S (\mathbf{n}, \mathbf{v}) df = 0, \quad (26)$$

die Tangentialkomponenten sollen identisch auf S verschwinden. Im Unendlichen konvergiere \mathbf{v} gleichmäßig gegen Null, d. h. die Grenzwerte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{v}(R \sin \theta \cos \Lambda, R \sin \theta \sin \Lambda, R \cos \theta) = 0 \quad (27)$$

existieren für alle $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Lambda \leq 2\pi$ im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Dann verschwindet \mathbf{v} identisch in B und S .

Beweis. Es sei K eine Kugel vom Radius $R > 0$ um den Aufpunkt \mathbf{x} in B , welche S ganz im Inneren enthält. Dann gilt nach Satz 2 in Verbindung mit (20) für den betrachteten Aufpunkt

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{4\pi} \iint_K \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{R^3} df' \quad (28)$$

mit einwertigem

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df'. \quad (29)$$

Setzt man die vektorielle Darstellung für K

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + R \mathbf{n}'$$

in (28) ein, so bekommt man

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi + \frac{1}{4\pi} \iint_K \frac{\mathbf{v}'}{R^2} df'$$

oder nach Einführung von Kugelkoordinaten

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(x + R \sin \theta \cos \Lambda, y + R \sin \theta \sin \Lambda, z + R \cos \theta) \sin \theta d\Lambda d\theta. \quad (30)$$

Auf Grund gleichmäßiger Konvergenz von (27) ist es nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ immer möglich, eine Kugel mit dem Radius $R_1 > 0$ um den Ursprung derart anzugeben, daß für alle $R \geq R_1$ und alle $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Lambda \leq 2\pi$

$$|v_x(R \sin \theta \cos \Lambda, R \sin \theta \sin \Lambda, R \cos \theta)| < \varepsilon$$

wird. Sei dann $R_2 > R_1$ der Radius einer Kugel um den Aufpunkt \mathbf{x} , welche erstere ganz im Inneren enthält, so gilt für alle $R \geq R_2$ und alle $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Lambda \leq 2\pi$

$$|v_x(x + R \sin \theta \cos \Lambda, y + R \sin \theta \sin \Lambda, z + R \cos \theta)| < \varepsilon.$$

Da das Entsprechende auch für v_y und v_z gilt, hat man die Grenzwerte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{v}(x + R \sin \theta \cos \Lambda, y + R \sin \theta \sin \Lambda, z + R \cos \theta) = 0$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz für alle $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Lambda \leq 2\pi$, und (30) gestattet die Durchführung des Grenzüberganges $R \rightarrow \infty$ unter Vertauschung von Limes und Integration:

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi. \quad (31)$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt (31) auch noch auf S , so daß Φ stetig differenzierbar nach S hinein fortsetzbar ist. Im Zusammenhang mit dem Verschwinden der Tangentialkomponenten von \mathbf{v} auf S folgt

$$\Phi = \text{const} \quad (32)$$

auf S .

Wir untersuchen jetzt das Verhalten des Potentials Φ im Unendlichen. Auf Grund der Stetigkeit von \mathbf{v} auf S gibt es eine Schranke $M > 0$ derart, daß auf S

$$|\mathbf{v}| = |(\mathbf{n}, \mathbf{v})| \leq \frac{4\pi M}{F}$$

wird, wenn $F > 0$ den Oberflächeninhalt von S bedeutet. Sei nun K_1 eine S ganz im Inneren enthaltende Kugel um den Ursprung vom Radius $R_1 > 0$ und K_2 eine K_1 umschließende Kugel um den Ursprung vom Radius $R_2 > R_1$, so besitzt (29) für alle auf K_2 gelegenen Punkte \mathbf{x} die Schranke

$$|\Phi| \leq \iint_S \frac{M}{F(R_2 - R_1)} df = \frac{M}{R_2 - R_1};$$

für den aus (16), (29) und (31) folgenden Ausdruck

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{n}, \text{grad } \Phi) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')(\mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df'$$

findet man entsprechend

$$|(\mathbf{n}, \mathbf{v})| \leq \iint_S \frac{M}{F(R_2 - R_1)^2} df' = \frac{M}{(R_2 - R_1)^2},$$

so daß sich

$$|\Phi| |(\mathbf{n}, \mathbf{v})| \leq \frac{M^2}{(R_2 - R_1)^3} \quad (33)$$

für alle \mathbf{x} auf K_2 ergibt. Es sei nun S^* eine ganz im Inneren von K_1 liegende, stückweise glatte, äußere Nachbarfläche zu S . Mit B_1^* als dem Gebiet zwischen S^* und K_2 wird dann mittels partieller Integration

$$\iiint_{B_1^*} \Phi \text{div } \mathbf{v} dg = \iint_{K_2} \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{v}) df - \iint_{S^*} \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{v}) df - \iiint_{B_1^*} (\text{grad } \Phi, \mathbf{v}) dg = 0.$$

Sei weiter B_1 das Gebiet zwischen S und K_2 , so liefert der Grenzübergang $S^* \rightarrow S$ wegen (26), (31) und (32)

$$\iiint_{B_1} \mathbf{v}^2 dg = - \iint_{K_1} \Phi(\mathbf{n}, \mathbf{v}) df. \quad (34)$$

Wir betrachten schließlich ein beliebiges im Endlichen gelegenes Teilgebiet B_2 von B . Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist es dann immer möglich, den Radius R_2 von K_2 so groß zu wählen, daß B_2 ganz im Inneren von K_2 liegt und gleichzeitig

$$\frac{M^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^3} < \frac{\varepsilon}{4\pi} \quad (35)$$

wird. Da nun B_2 Teilgebiet von B_1 ist, folgt aus (34)

$$\iiint_{B_2} \mathbf{v}^2 dg \leq \iiint_{B_1} \mathbf{v}^2 dg \leq \iint_{K_1} |\Phi| |(\mathbf{n}, \mathbf{v})| df;$$

Benutzung von (33) und (35) ergibt

$$\iiint_{B_2} \mathbf{v}^2 dg \leq \iint_{K_1} \frac{M^2}{(R_2 - R_1)^3} df = \frac{4\pi M^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^3} < \varepsilon$$

und damit $\mathbf{v} = 0$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von B und S .

SATZ 3. Für ein Gebiet B mit stetig gekrümmter, doppelstetiger, innerer und äußerer Berandung S_1 und S_2 sei das folgende Neumannsche Problem vorgelegt: Gesucht ist ein in B , S_1 , S_2 stetiges, in B stetig differenzierbares und harmonisches und auf S_1 und S_2 gleichmäßig Hölder-stetiges Vektorfeld \mathbf{v} , welches auf S_1 und S_2 die unter der Nebenbedingung

$$\iint_{S_1} (\mathbf{n}, \mathbf{v}) df = \iint_{S_2} (\mathbf{n}, \mathbf{v}) df \quad (36)$$

vorgegebene (gleichmäßig Hölder-stetige) Normalkomponente (\mathbf{n}, \mathbf{v}) annimmt. Dann genügen die auf S_1 und S_2 , genommenen (gleichmäßig Hölder-stetigen) Tangentialkomponenten $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ einer Lösung \mathbf{v} dem Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} & \left\{ [\mathbf{n}, \mathbf{v}] - \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{[\mathbf{n}, [(\mathbf{n}', \mathbf{v}'), \mathbf{x} - \mathbf{x}']]}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{[\mathbf{n}, [(\mathbf{n}', \mathbf{v}'), \mathbf{x} - \mathbf{x}']]}{r^3} df' \right\} \right. \\ & \left. = \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') [\mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') [\mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' \right\} \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Umgekehrt gehört zu jeder auf S_1 und S_2 gleichmäßig Hölder-stetigen Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ von (37) eine Lösung \mathbf{v} des vorgelegten Neumannschen Problems, die auf S_1 und S_2 die Tangential-

komponenten $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ annimmt; diese ist in B durch die Randkomponenten (\mathbf{n}, \mathbf{v}) und $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ vollständig bestimmt auf Grund von Satz 2. Die in (37) auftretenden Integrale sind gegebenenfalls als Cauchysche Hauptwerte zu verstehen.

Beweis. Ein harmonisches Vektorfeld \mathbf{v} in B mit den Randwerten (\mathbf{n}, \mathbf{v}) , $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ auf S_1 und S_2 wird nach Satz 2 durch

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{A} \quad (38)$$

mit den Potentialen (18) und (19) in B dargestellt. Auf Grund der gleichmäßigen Hölder-Stetigkeit der Randwerte sind Φ und \mathbf{A} stetig differenzierbar nach S_1 und S_2 fortsetzbar. Strebt der Aufpunkt \mathbf{x} in (38) gegen irgendeine der beiden Berandungen, so folgt mit Hilfe von (21) und (23)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \text{grad } \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' - \iint_{S_2} \text{grad } \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' - 2\pi \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \right\} \\ & + \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \text{rot } \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' - \iint_{S_2} \text{rot } \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' - 2\pi [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]] \right\}; \end{aligned}$$

Benutzung von (16) und $\mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) - [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]] = \mathbf{v} \quad (39)$

sowie anschließende vektorielle Multiplikation mit \mathbf{n} ergibt (37).

Ist umgekehrt $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ eine gleichmäßig Hölder-stetige Lösung von (37), so kann man damit durch (18) und (19) Potentiale Φ und \mathbf{A} sowohl in B als auch in dem innerhalb S_1 gelegenen Gebiet B_1 und dem außerhalb S_2 gelegenen Gebiet B_2 als beliebig oft stetig differenzierbare, einwertige Funktionen erklären. Wegen der gleichmäßigen Hölder-Stetigkeit der Randwerte (\mathbf{n}, \mathbf{v}) und $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ sind Φ und \mathbf{A} jeweils einseitig nach S_1 und S_2 hinein stetig differenzierbar fortsetzbar. Das in B, B_1, B_2 durch

$$\mathbf{v}^* = -\text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{A} \quad (40)$$

erklärte Vektorfeld ist infolgedessen jeweils einseitig nach S_1 und S_2 hinein stetig fortsetzbar. Wir führen jetzt den Beweis der Umkehrung, indem wir zeigen, daß \mathbf{v}^* ein in B harmonisches Vektorfeld ist, dessen Randkomponenten $(\mathbf{n}, \mathbf{v}^*)$, $[\mathbf{n}, \mathbf{v}^*]$ auf S_1 und S_2 bzw. mit (\mathbf{n}, \mathbf{v}) , $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ übereinstimmen. Im folgenden bedeutet der Index 1 bzw. 2 die Annäherung an S_1 bzw. S_2 ; der weitere Index a bzw. i gibt an, ob die Annäherung von außen bzw. innen her an die betreffende geschlossene Fläche erfolgt. Dann liefert die Anwendung der Grenzwerte (21) und (23) auf (18), (19) und (40) bei Annäherung an die Innenseite von S_1

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1i}^* = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \text{grad} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' - \iint_{S_2} \text{grad} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}')}{r} df' + 2\pi \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \right\} \\ & + \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \text{rot} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' - \iint_{S_2} \text{rot} \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r} df' + 2\pi [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]] \right\}; \end{aligned}$$

formal derselbe Ausdruck ergibt sich bei Annäherung an die Außenseite von S_2 für \mathbf{v}_{2a}^* .

Unter Benutzung von (16) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1i}^* = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' - 2\pi \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \right\} \\ & + \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{[[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{[[\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' + 2\pi [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]] \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

Nun hat jede Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ von (37) die Eigenschaft, zur Einheitsnormalen \mathbf{n} des betreffenden Randes orthogonal zu sein, denn durch skalare Multiplikation von (37) mit \mathbf{n} entsteht $(\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]) = 0$ ⁽¹⁾ und damit

$$[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]]] = -[\mathbf{n}, \mathbf{v}]. \quad (42)$$

Vektorielle Multiplikation von (41) mit \mathbf{n} ergibt dann unter Benutzung von (37) und (42)

$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}_{1i}^*] = 0, \quad (43)$$

und in analoger Weise wird

$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}_{2a}^*] = 0. \quad (44)$$

Die Grenzübergänge (21) und (23), angewandt auf (18), (19) und (40), liefern ferner die „Sprünge“

$$\mathbf{v}_{1a}^* - \mathbf{v}_{1i}^* = \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) - [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]] \quad \text{auf } S_1, \quad (45)$$

$$\mathbf{v}_{2a}^* - \mathbf{v}_{2i}^* = -\mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) + [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]] \quad \text{auf } S_2. \quad (46)$$

Vektorielle Multiplikation mit \mathbf{n} ergibt unter Benutzung von (42) bis (44)

$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}_{1a}^*] = [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \quad \text{auf } S_1, \quad (47)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}_{2i}^*] = [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \quad \text{auf } S_2. \quad (48)$$

Die erhaltenen Gleichungen (47) und (48) besagen, daß die Tangentialkomponenten

⁽¹⁾ Man beachte, daß es sich hier nicht um eine elementare Vektorbeziehung handelt, da an dieser Stelle nur (\mathbf{n}, \mathbf{v}) und $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$, nicht aber \mathbf{v} als definiert anzusehen ist.

$[\mathbf{n}, \mathbf{v}^*]$, von \mathbf{v}^* auf S_1 und S_2 identisch sind mit der Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ des Integralgleichungsproblems (37).

Wegen $\Delta\Phi=0$ und $\Delta\mathbf{A}=0$ und damit

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^* = -\Delta\Phi = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}^* = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}$$

in B, B_1, B_2 ist \mathbf{v}^* offenbar dann ein harmonischer Vektor, wenn wir noch die Divergenzfreiheit des Vektorpotentials \mathbf{A} nachweisen können. Zu diesem Zweck untersuchen wir die skalare Funktion

$$\sigma = \operatorname{div} \mathbf{A},$$

die in B, B_1, B_2 , beliebig oft stetig differenzierbar und, als Folge von

$$\operatorname{grad} \sigma = \operatorname{rot} \mathbf{v}^*, \quad (49)$$

harmonisch ist. Außerdem ist σ jeweils einseitig nach S_1 und S_2 hinein stetig fortsetzbar. Die Sprünge beim Durchgang durch S_1 und S_2 bestimmen sich folgendermaßen aus (19), (22) und der Eigenschaft einer Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ von (37), orthogonal zu \mathbf{n} zu sein:

$$\sigma_{1a} - \sigma_{1i} = -(\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]) = 0 \quad \text{auf } S_1,$$

$$\sigma_{2a} - \sigma_{2i} = (\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]) = 0 \quad \text{auf } S_2;$$

also ist σ im ganzen Raum stetig. Ziehen wir die Divergenz von (19) unter die Integralzeichen, so folgt mit Hilfe von (16)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}', [\mathbf{n}', \mathbf{v}'])}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}', [\mathbf{n}, \mathbf{v}])}{r^3} df' \right\} \quad (50)$$

in B, B_1, B_2 . Wir definieren nun eine Schranke $M > 0$ durch die Forderungen

$$\left. \begin{array}{l} |(\mathbf{n}, \mathbf{v})| \leq \frac{\pi M}{F_1}, \quad |[\mathbf{n}, \mathbf{v}]| \leq \frac{\pi M}{F_1} \quad \text{auf } S_1, \\ |(\mathbf{n}, \mathbf{v})| \leq \frac{\pi M}{F_2}, \quad |[\mathbf{n}, \mathbf{v}]| \leq \frac{\pi M}{F_2} \quad \text{auf } S_2, \end{array} \right\} \quad (51)$$

wo F_1 und F_2 die Oberflächeninhalte von S_1 und S_2 bedeuten. Ist dann K_1 eine Kugel vom Radius R_1 um den Ursprung, die S_2 ganz im Innern enthält, so gilt für alle außerhalb K_1 gelegenen Punkte mit dem Abstand $R > R_1$ vom Ursprung unter Benutzung von $r > R - R_1$ gemäß (50)

$$|R^2 \sigma| \leq \frac{R^2}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{\pi M}{F_1 r^2} df' + \iint_{S_2} \frac{\pi M}{F_2 r^2} df' \right\} \leq \frac{M R^2}{2(R-R_1)^2}.$$

Eine entsprechende Abschätzung leiten wir für den Gradienten her. Wegen

$$\left| \text{grad} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}', [\mathbf{n}', \mathbf{v}'])}{r^3} \right| = \left| \frac{[\mathbf{n}', \mathbf{v}']}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}', [\mathbf{n}', \mathbf{v}']) (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^5} \right| \leq 4 \frac{|[\mathbf{n}', \mathbf{v}']|}{r^3}$$

erhalten wir aus (50) und (51) für alle $R > R_1$

$$\left| R^3 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| \leq \frac{R^3}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{4\pi M}{F_1 r^3} df' + \iint_{S_2} \frac{4\pi M}{F_2 r^3} df' \right\} \leq \frac{2 M R^3}{(R-R_1)^3};$$

da das Entsprechende für die partiellen Ableitungen nach y und z gilt, wird

$$|R^3 \text{grad } \sigma| \leq \frac{6 M R^3}{(R-R_1)^3}$$

für alle $R > R_1$. Nach Wahl einer Zahl $R_2 > R_1$ bekommen wir schließlich für alle $R \geq R_2$

$$|R^2 \sigma| \leq \frac{M R_2^2}{2(R_2 - R_1)^2} = M_1,$$

$$|R^3 \text{grad } \sigma| \leq \frac{6 M R_2^3}{(R_2 - R_1)^3} = M_2,$$

d.h. σ ist im Unendlichen regulär und besitzt dort den Wert Null.

Jetzt benutzen wir zur Darstellung von σ in B_2 die bekannte, vom Greenschen Satz herrührende Integralformel [6]

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'}{\partial n'} - \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} \right) df' - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2^*} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'}{\partial n'} - \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} \right) df',$$

wo K eine Kugel vom Radius $R \geq R_2$ um den Ursprung darstellt, der außerdem den Aufpunkt im Innern enthält, und S_2^* eine den Aufpunkt von S_2 trennende, äußere Nachbarfläche zu S_2 ist. Da nun

$$\frac{R}{r} \leq \frac{R}{R-R_1} \leq \frac{R_2}{R_2-R_1} = M_3,$$

$$\left| R^2 \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} \right| = \left| R^2 \left(\mathbf{n}', \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{r^3} \right) \right| \leq \frac{R^2}{r^2} \leq \frac{R^2}{(R-R_1)^2} \leq \frac{R_2^2}{(R_2-R_1)^2} = M_4,$$

läßt sich das Integral über K durch

$$\left| \frac{1}{4\pi} \iint_K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'}{\partial n'} - \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} \right) df' \right| \leq R^2 \left(\frac{M_3}{R} \frac{M_2}{R^3} + \frac{M_1}{R^2} \frac{M_4}{R^2} \right)$$

abschätzen, also durch Wahl hinreichend großer R unter jede Schranke drücken. In gleicher Weise stellen wir σ in B_1 durch die Randwerte auf einer (den Aufpunkt von S_1 trennenden) inneren Nachbarfläche S_1^* zu S_1 dar und fassen dann beide Fälle zusammen in

$$\sigma = \mp \frac{1}{4\pi} \iint_{S^*} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'}{\partial n'} - \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} \right) df',$$

wo das obere (untere) Vorzeichen für B_2 (B_1) mit Integration über S_2^* (S_1^*) gilt. Mit Hilfe von (49) eliminieren wir jetzt

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'}{\partial n'} = \frac{(\mathbf{n}', \text{rot}' \mathbf{v}^{*'})}{r} = \left(\mathbf{n}', \text{rot}' \frac{\mathbf{v}^{*'}}{r} \right) - \left(\mathbf{n}', \left[\text{grad}' \frac{1}{r}, \mathbf{v}^{*'} \right] \right)$$

und erhalten nach einer partiellen Integration (Stokesscher Satz)

$$\sigma = \mp \frac{1}{4\pi} \iint_{S^*} \left\{ \left(\text{grad}' \frac{1}{r}, [\mathbf{n}', \mathbf{v}^{*'}] \right) - \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} \right\} df'.$$

Nunmehr können wir den Grenzübergang $S^* \rightarrow S$, d.h. $S_2^* \rightarrow S_2$ und $S_1^* \rightarrow S_1$ durchführen und erhalten auf Grund von (43) und (44)

$$\sigma = \pm \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} df'$$

in B_2 bzw. B_1 .

Beachten wir nun das bekannte Verhalten eines Potentials einer stetigen doppelten Belegung σ , wenn der Aufpunkt gegen die Belegungsfläche strebt, wenn also in unserem Fall der Aufpunkt \mathbf{x} aus B_2 (B_1) von außen (innen) gegen S_2 (S_1) strebt, so entstehen die von der Behandlung des homogenen inneren (äußeren) Dirichletschen Problems her wohlbekannten Integralgleichungen [6]

$$\sigma \mp \frac{1}{2\pi} \iint_S \sigma' \frac{\partial(1/r)}{\partial n'} df' = 0^{(1)}$$

mit der jeweils allgemeinen Lösung $\sigma=0$ auf S_2 und $\sigma=\text{const}$ auf S_1 . Da nun σ in B harmonisch und auf beiden Berandungen S_1 und S_2 gleich einer (möglicherweise noch verschiedenen) Konstanten ist, wird auf Grund des Satzes vom Maximum und

(1) Das Oberflächenintegral ist als uneigentliches Integral aufzufassen.

Minimum entweder das Maximum auf S_2 und das Minimum auf S_1 angenommen oder umgekehrt. Es genügt, wenn wir den zuerst genannten Fall diskutieren.

Wir betrachten hierzu eine Schar *äquidistanter* äußerer Nachbarflächen S_δ zu S_1 , die durch ihren Ortsvektor $\mathbf{x} + \delta \mathbf{n}$ als glatte, doppelpunktfreie, geschlossene Flächen definiert sind, sofern nur der Scharparameter δ dem Intervall $0 < \delta \leq \delta'$ mit hinreichend kleinem $\delta' > 0$ angehört (\mathbf{x} und \mathbf{n} sind bzw. Ortsvektor und Einheitsnormale von S_1). Geht man nun von irgendeinem Punkt P auf S_1 entlang der Normalen um ein Stück δ nach B hinein, so gibt es, da σ in P sein Minimum annimmt, immer eine Stelle $0 < \delta_P \leq \delta'$ auf der Normalen derart, daß σ für alle $0 < \delta \leq \delta_P$ monoton nicht fallend ist. Bedeutet nun $\delta^* > 0$ das Minimum aller δ_P , wenn P die Fläche S_1 durchläuft, und S_1^* die durch $\mathbf{x} + \delta^* \mathbf{n}$ beschriebene spezielle Nachbarfläche zu S_1 , so ist σ entlang einer beliebigen, von S_1 nach S_1^* verlaufenden Normalen monoton nicht fallend und genügt daher für alle $0 < \delta \leq \delta^*$ der Ungleichung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} \geq 0 \quad \text{auf } S_\delta.$$

Andererseits folgt für alle $0 < \delta \leq \delta^*$ aus (49) unter Benutzung des Stokesschen Satzes

$$\iint_{S_\delta} \frac{\partial \sigma}{\partial n} df = \iint_{S_\delta} (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{v}^*) df = 0,$$

so daß also nur

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } S_\delta$$

sein kann für alle $0 < \delta \leq \delta^*$. Daher gilt $\sigma = \text{const}$ für jede von S_1 nach S_1^* verlaufende Normale, zunächst mit Ausnahme des Punktes auf S_1 ; aus Stetigkeitsgründen besitzt jedoch σ im abgeschlossenen Gebiet zwischen S_1 und S_1^* den gleichen konstanten Wert wie auf S_1 . Denken wir uns eine entsprechende äquidistante innere Nachbarfläche S_2^* zu S_2 konstruiert, so liefert die Anwendung des Greenschen Satzes auf das von S_1^* und S_2^* berandete Gebiet B^*

$$\iiint_{B^*} \sigma \Delta \sigma dg = \iint_{S_2^*} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial n} df - \iint_{S_1^*} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial n} df - \iiint_{B^*} (\text{grad } \sigma)^2 dg = 0$$

und infolgedessen, da $\partial \sigma / \partial n$ auf S_1^* und S_2^* verschwindet, $\sigma = \text{const}$ in B^* , S_1^* , S_2^* . Wegen $\sigma = 0$ auf S_2 haben wir wiederum aus Stetigkeitsgründen $\sigma = 0$ auch in B und S_1 . Auf Grund des Satzes vom Maximum und Minimum verschwindet σ schließlich auch identisch in B_1 und, da σ im Unendlichen regulär verschwindet, desgleichen in B_2 .

Damit ist das Vektorpotential \mathbf{A} überall divergenzfrei und \mathbf{v}^* ein in B, B_1, B_2 harmonisches Vektorfeld.

Im Zusammenhang mit (43) liefert Lemma 2 dann identisches Verschwinden von \mathbf{v}^* in B_1 und S_1 , insbesondere also

$$\mathbf{v}_{1i}^* = 0. \quad (52)$$

Addieren wir nun die mit der jeweiligen Einheitsnormalen \mathbf{n} skalar multiplizierten und über S_1 bzw. S_2 integrierten Gleichungen (45) und (46), so erhalten wir wegen (36) und (52)

$$\iint_{S_1} (\mathbf{n}, \mathbf{v}_{1a}^*) df + \iint_{S_2} \{(\mathbf{n}, \mathbf{v}_{2a}^*) - (\mathbf{n}, \mathbf{v}_{2i}^*)\} df = 0;$$

da weiter \mathbf{v}^* in B divergenzfrei ist, folgt auf Grund des Gaußschen Satzes

$$\iint_{S_2} (\mathbf{n}, \mathbf{v}_{2a}^*) df = 0. \quad (53)$$

Wir untersuchen schließlich das Verhalten von $\mathbf{v}^* = (v_x^*, v_y^*, v_z^*)$ im Unendlichen. Durch Einsetzen der Potentiale (18) und (19) in (40) entsteht unter Benutzung von (16) für alle Aufpunkte aus B_2

$$\mathbf{v}^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [(\mathbf{n}', \mathbf{v}'), \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + [(\mathbf{n}', \mathbf{v}'), \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' \right\}. \quad (54)$$

Es sei wieder K_1 eine Kugel vom Radius R_1 um den Ursprung, die S_2 ganz im Inneren enthält. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ betrachten wir dann eine Kugel K_2 um den Ursprung vom Radius

$$R_2 = R_1 + \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}} > R_1, \quad (55)$$

wo $M > 0$ die durch (51) festgelegte Schranke bedeutet. Dann wird für alle auf und außerhalb K_2 gelegenen Aufpunkte mit dem Abstand $R \geq R_2$ vom Ursprung gemäß (51), (54) und (55)

$$|v_x^*| \leq \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{2\pi M}{F_1(R_2 - R_1)^2} df' + \iint_{S_2} \frac{2\pi M}{F_2(R_2 - R_1)^2} df' \right\} = \frac{M}{(R_2 - R_1)^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon;$$

da das Analoge für v_y^* und v_z^* gilt, existieren die Grenzwerte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{v}^*(R \sin \theta \cos \Lambda, R \sin \theta \sin \Lambda, R \cos \theta) = 0 \quad (56)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz für alle $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Lambda \leq 2\pi$. Damit sind für \mathbf{v}^* auf Grund von (44), (53) und (56) die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt, so daß \mathbf{v}^* ebenfalls in B_2 und S_2 identisch verschwindet, insbesondere also

$$\mathbf{v}_{2a}^* = 0 \quad (57)$$

ist. Durch skalare Multiplikation von (45) und (46) mit \mathbf{n} bekommen wir schließlich unter Benutzung von (52) und (57)

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \mathbf{v}_{1a}^*) &= (\mathbf{n}, \mathbf{v}) \quad \text{auf } S_1, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{v}_{2i}^*) &= (\mathbf{n}, \mathbf{v}) \quad \text{auf } S_2, \end{aligned}$$

d.h. auch die Normalkomponente $(\mathbf{n}, \mathbf{v}^*)$ von \mathbf{v}^* nimmt auf den Berandungen von B die vorgeschriebenen Werte (\mathbf{n}, \mathbf{v}) an.

Wir schließen noch eine Bemerkung über eine Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ von (37) an, deren Existenz vorausgesetzt. Einer Lösung v^* des Neumannschen Problems kann man in einem einfach zusammenhängenden Teilflächenstück \tilde{S} von S_1 oder S_2 und einer daran anschließenden, einfach zusammenhängenden, in B liegenden räumlichen Umgebung \tilde{B} mittels (4) immer ein *einwertiges* u zuordnen; u ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Auf \tilde{S} gilt dann die Komponentenzerlegung

$$\text{grad } u = \text{Grad } u + \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{n}^{(1)}$$

und somit wegen (4)
$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{n}, \text{Grad } u] \quad \text{auf } \tilde{S}. \quad (58)$$

Nach Satz 3 besitzt dann aber auch jede (gleichmäßig Hölder-stetige) Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ von (37) die Eigenschaft (58), geht also örtlich aus einem in der Fläche genommenen Gradienten durch Drehung um $-\frac{1}{2}\pi$ hervor. Eine etwas andere Formulierung desselben Sachverhalts ergibt sich durch vektorielle Multiplikation von (58) mit $-\mathbf{n}$:

$$\mathbf{V} = -\text{Grad } u \quad \text{auf } \tilde{S}; \quad (59)$$

hier ist \mathbf{V} die Projektion von \mathbf{v} in S_1 bzw. S_2 oder, damit gleichbedeutend, die um $-\frac{1}{2}\pi$ gedrehte Lösung $[\mathbf{n}, \mathbf{v}]$ des Integralgleichungsproblems (37).

(1) Grad bedeutet den in der Fläche genommenen Gradienten eines Flächenskalars.

§ 5. Einführung torusartiger Berandungen

Durch den Satz 3 wird das Neumannsche Problem in seiner ursprünglichen Formulierung durch ein Integralgleichungsproblem ersetzt. Dies hat den Vorteil, daß die in der mathematischen Physik häufig allein interessierenden Randwerte harmonische Vektorfelder unmittelbar miteinander verknüpft werden. Zum anderen können bekannt Existenz- und Eindeigkeitssätze über das Neumannsche Problem unmittelbar in Sätze über die Existenz und Eindeigkeit von Lösungen des Integralgleichungsproblem (37) überführt werden und umgekehrt. Die im folgenden benutzten Sätze dieser Art die sich insbesondere auf mehrfach zusammenhängende Gebiete B beziehen, sind von Blank, Friedrichs und Grad [2] angegeben worden⁽¹⁾.

Im folgenden interessiert uns im Hinblick auf die eingangs erwähnten Anwendungen in der Plasmaphysik allein der Fall eines dreifach zusammenhängenden Gebietes B mit je einer dreifach zusammenhängenden inneren und äußeren Berandung S_1 und S_2 . In diesem Fall ist die allgemeine Lösung des Neumannschen Problems unter der notwendigen und hinreichenden Voraussetzung (36) gegeben durch

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \mathbf{Y}_i + \mathbf{v}^*. \quad (60)$$

Hier bedeuten $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ harmonische Vektorfelder mit verschwindenden Normalkomponenten auf den Berandungen; diese werden durch die Normierungen

$$\int_{L_i} (\mathbf{Y}_k, d\mathbf{s}) = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2), \quad (61)$$

eindeutig festgelegt, sofern die mit geeignetem Umlaufungssinn versehenen, stückweise glatten, geschlossenen Kurven L_1 und L_2 folgende Eigenschaften besitzen:

L_1 läßt sich unter alleiniger Durchdringung von S_1 im Inneren von S_1 in einem Punkt zusammenziehen;

L_2 läßt sich unter alleiniger Durchdringung von S_2 im Äußeren von S_2 in einem Punkt zusammenziehen.

In (60) bedeutet ferner \mathbf{v}^* diejenige spezielle Lösung des inhomogenen Problems, die durch

$$\int_{L_i} (\mathbf{v}^*, d\mathbf{s}) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (62)$$

eindeutig festgelegt ist. Aus (60) bis (62) folgt außerdem

⁽¹⁾ Von diesen Autoren wird allerdings die Frage der gleichmäßigen Hölder-Stetigkeit der Randwerte nicht berührt; diese bleibt auch im weiteren Verlaufe der vorliegenden Untersuchung offen.

$$\int_{L_i} (\mathbf{v}, d\mathbf{s}) = \gamma_i \quad (i=1, 2). \quad (63)$$

Man nennt die willkürlichen Konstanten γ_1 und γ_2 die „Perioden“ des Problems, da sie wegen (4) und (63) die Änderungen des im allgemeinen mehrwertigen Potentials u bei vollständiger Umlaufung von L_1 und L_2 angeben.

Es sollen nun numerische Verfahren zur Auflösung des Integralgleichungssystems (37) entwickelt werden, bei denen torusartige Berandungen S_1 und S_2 zugrunde gelegt sind. Diese entstehen durch Rotation der in der rechten Halbebene gelegenen, stetig gekrümmten, doppelunktfreien, geschlossenen und die Berandung eines zweifach zusammenhängenden Ringgebietes bildenden Kurven C_1 und C_2 um die y -Achse. Der Azimutalwinkel $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ wächst, beginnend mit 0, beim Austritt aus der rechten Halbebene (Abb. 1).

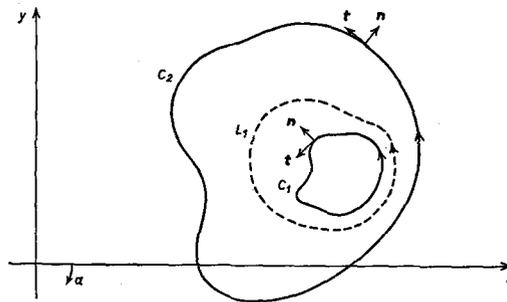


Abb. 1. Die Erzeugung der torusartigen Berandungen S_1 und S_2 .

Die Randkurven C_1 , C_2 mögen durch die zweimal stetig differenzierbaren und mit 2π periodischen Parameterdarstellungen

$$C_1: x_1(\varphi) > 0, y_1(\varphi), [\dot{x}_1(\varphi)]^2 + [\dot{y}_1(\varphi)]^2 \neq 0 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$C_2: x_2(\varphi) > 0, y_2(\varphi), [\dot{x}_2(\varphi)]^2 + [\dot{y}_2(\varphi)]^2 \neq 0 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

gegeben sein, wobei jeweils wachsendem φ die Umlaufung im Gegenuhrzeigersinn entspricht. Derselbe Umlaufungssinn werde für die Kurve L_1 festgesetzt, die wir der Einfachheit halber in die rechte (x, y) -Halbebene legen (Abb. 1). Schließlich werde der Umlaufssinn von L_2 wachsendem Azimutalwinkel α zugeordnet.

Seien jetzt (x, y, α) Zylinderkoordinaten, so lautet, wie unmittelbar einzusehen, die eine der beiden homogenen Lösungen

$$\mathbf{Y}_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2\pi x} \right). \quad (64)$$

Dagegen läßt sich die andere homogene Lösung \mathbf{Y}_1 im allgemeinen nicht geschlossen angeben; aus Symmetriegründen ist jedoch klar, daß \mathbf{Y}_1 wie \mathbf{Y}_2 nicht vom Azimut abhängt.

Wir unterscheiden im folgenden grundlegend zwischen dem azimutalunabhängigen Randwertproblem, bei dem die Normalkomponente und damit aus Symmetriegründen die Lösung nicht von α abhängt und dem azimutalabhängigen Randwertproblem, bei dem die Normalkomponente auf S_1 und S_2 in der Form

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = v_n(\varphi, \alpha) = V_n(\varphi) e^{im\alpha} \quad (m \geq 1, \text{ ganzzahlig})$$

vorgeschrieben ist. Da \mathbf{Y}_1 und \mathbf{Y}_2 nicht von α abhängen, ist die Lösung des azimutalunabhängigen Problems zweiparametrig, die des azimutalabhängigen jedoch eindeutig.

Da man irgendeine Normalkomponentenvorgabe $v_{n1}(\varphi, \alpha)$ auf S_1 und $v_{n2}(\varphi, \alpha)$ auf S_2 wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Hölder-Stetigkeit in eine Fouriersche Reihe

$$\left. \begin{aligned} v_{n1}(\varphi, \alpha) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{1m}(\varphi) \cos m\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} b_{1m}(\varphi) \sin m\alpha \quad \text{auf } S_1, \\ v_{n2}(\varphi, \alpha) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(\varphi) \cos m\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}(\varphi) \sin m\alpha \quad \text{auf } S_2, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

entwickeln kann, läßt sich die Lösung des allgemeinen Neumannschen Problems aus den Lösungen des azimutalunabhängigen und des azimutalabhängigen Problems superponieren. Auf diese Überlagerung und insbesondere auf die Frage der Konvergenz einer solchen für den Fall, daß die Reihen (65) nicht beide nach endlich vielen Gliedern abbrechen, soll in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht eingegangen werden.

II. Das azimutalunabhängige Randwertproblem

§ 6. Formeln zur numerischen Quadratur und Differentiation periodischer Funktionen

Nach Wahl einer positiven ganzen Zahl N betrachten wir eine mit 2π periodische Funktion $f(\varphi)$ an den $2N$ äquidistanten „Stützstellen“

$$\varphi_\mu = \frac{\mu\pi}{N} \quad (\mu = 0, \dots, 2N-1), \quad (66)$$

durch ihre numerischen Werte

$$f(\varphi_\mu) = f_\mu \quad (\mu = 0, \dots, 2N-1), \quad (67)$$

gegeben. Diese Funktionswerte lassen sich in bekannter Weise [11] durch genau ein Fourierpolynom von der Form

$$f(\varphi) = \sum_{\mu=0}^N a_{\mu} \cos \mu \varphi + \sum_{\mu=1}^{N-1} b_{\mu} \sin \mu \varphi \quad (68)$$

trigonometrisch interpolieren, damit (67) erfüllt ist; die Koeffizienten lauten in diesem Falle

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_{\nu}, \quad (69)$$

$$a_{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_{\nu} \cos \mu \varphi_{\nu} \quad (\mu = 1, \dots, N-1), \quad (70)$$

$$a_N = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} (-1)^{\nu} f_{\nu}, \quad (71)$$

$$b_{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_{\nu} \sin \mu \varphi_{\nu} \quad (\mu = 1, \dots, N-1). \quad (72)$$

Unter dem über eine volle Periode erstreckten Integral einer durch (67) diskret vorgegebenen periodischen Funktion verstehen wir den Wert des Integrals der interpolierenden Funktion (68):

$$\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi = 2\pi a_0 + \sum_{\mu=1}^N a_{\mu} \left(\int_0^{2\pi} \cos \mu \psi d\psi \right) + \sum_{\mu=1}^{N-1} b_{\mu} \left(\int_0^{2\pi} \sin \mu \psi d\psi \right);$$

wegen
$$\int_0^{2\pi} e^{i\mu\psi} d\psi = 0 \quad (\mu \geq 1, \text{ ganzzahlig}),$$

ergibt sich zusammen mit (69) die für periodische Funktionen bekanntlich sehr genaue „Rechteckformel“

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} f_{\nu}. \quad (73)$$

In ähnlicher Weise findet man Quadraturformeln für Integranden mit singulären Gewichtsfunktionen, die im folgenden u.a. bei der numerischen Berechnung Cauchyscher Hauptwerte von Bedeutung sind. Diese Formeln lauten

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi_{\mu}}{2} d\psi = \sum_{\nu=0}^{2N-1} C_{\nu-\mu} f_{\nu}, \quad (74)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi_\mu}{2} \right) d\psi = \sum_{\nu=0}^{2N-1} R_{\nu-\mu} f_\nu, \quad (75)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi_\mu}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi_\mu}{2} \right) d\psi = \sum_{\nu=0}^{2N-1} T_{\nu-\mu} f_\nu, \quad (76)$$

wobei φ_μ durch (66) gegeben ist und die Gewichte $C_\mu, R_\mu, T_\mu, \mu = -(2N-1), \dots, 2N-1$ durch die Forderung bestimmt werden sollen, daß $f(\varphi)$ wiederum das interpolierende Fourierpolynom (68) darstellt. Offenbar sind nun (74) bis (76) für $\mu = 1, \dots, (2N-1)$ richtig, sofern dies für $\mu = 0$ der Fall ist und die Gewichte mit negativen Indizes durch $C_{-\mu} = C_{2N-\mu}$ etc. erklärt werden; man braucht hierzu in (74) bis (76) nur eine neue Integrationsvariable χ durch $\psi = \chi + \varphi_\mu$ einzuführen. Unter Benutzung der (gegebenenfalls im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes) elementar ausführbaren Quadraturen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu\psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\psi = \begin{cases} 0 & (\mu = 0), \\ (\mu \geq 1, \text{ ganzzahlig}), \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu\psi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi = \begin{cases} 0 & (\mu = 0), \\ -\frac{1}{\mu}, & (\mu \geq 1 \text{ ganzzahlig}), \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\mu\psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi = \begin{cases} 0 & (\mu = 0), \\ i \left(\frac{1}{\mu} - 2 \sum_{\varrho=1}^{\mu} \frac{1}{\varrho} \right) & (\mu \geq 1, \text{ ganzzahlig}) \end{cases}$$

erhält man aus (68)
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\psi = \sum_{\mu=1}^{N-1} b_\mu,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi = - \sum_{\mu=1}^N \frac{a_\mu}{\mu},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi = \sum_{\mu=1}^{N-1} \left(\frac{1}{\mu} - 2 \sum_{\varrho=1}^{\mu} \frac{1}{\varrho} \right) b_\mu.$$

Einsetzen von (70) bis (72) ergibt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\psi = \sum_{\nu=0}^{2N-1} C_\nu f_\nu,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi = \sum_{\nu=0}^{2N-1} R_\nu f_\nu,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) d\psi = \sum_{\nu=0}^{2N-1} T_\nu f_\nu,$$

und die gesuchten Gewichte lauten somit

$$C_\nu = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} \sin \mu \varphi_\nu = \begin{cases} 0 & (\nu=0), \\ \frac{1 - (-1)^\nu}{2N} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_\nu}{2} & (\nu=1, \dots, 2N-1) \end{cases} \quad (77)$$

$$R_\nu = -\frac{1}{N} \left\{ \frac{(-1)^\nu}{2N} + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{\cos \mu \varphi_\nu}{\mu} \right\} \quad (\nu=0, \dots, 2N-1), \quad (78)$$

$$T_\nu = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N-1} \left(\frac{1}{\mu} - 2 \sum_{\varrho=1}^{\mu} \frac{1}{\varrho} \right) \sin \mu \varphi_\nu \quad (\nu=0, \dots, 2N-1). \quad (79)$$

Unter der Ableitung $\dot{f}_\mu, \mu=0, \dots, (2N-1)$, einer durch (67) diskret gegebenen Funktion verstehen wir entsprechend die Ableitungen $\dot{f}(\varphi)$ der interpolierenden Funktion (68), genommen an den Stellen $\varphi_\mu, \mu=0, \dots, (2N-1)$. Es ergibt sich die numerische Differentiationsformel [8]

$$\dot{f}_\mu = \sum_{\nu=0}^{2N-1} D_{\nu-\mu} \dot{f}_\nu \quad (\mu=0, \dots, 2N-1), \quad (80)$$

mit
$$D_\nu = \begin{cases} 0, & \nu=0, \\ -\frac{(-1)^\nu}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_\nu}{2} & (\nu=1, \dots, 2N-1); \end{cases} \quad (81)$$

TABELLE 1. Gewichte zur numerischen Quadratur und Differentiation für $2N=12$.

μ	C_μ	R_μ	T_μ	D_μ
0	0,000000000	-0,394444444	0,000000000	0,000000000
1	0,6220084679	-0,1224144983	-1,9289438346	1,8660254038
2	0,000000000	0,0041666667	0,6904146969	-0,8660254038
3	0,1666666667	0,0555555556	-0,3388888889	0,500000000
4	0,000000000	0,0930555556	0,2814582562	-0,2886751346
5	0,0446581987	0,1085256094	-0,0766117210	0,1339745962
6	0,000000000	0,1166666667	0,000000000	0,000000000
7	-0,0446581987	0,1085256094	0,0766117210	-0,1339745962
8	0,000000000	0,0930555556	-0,2814582562	0,2886751346
9	-0,1666666667	0,0555555556	0,3388888889	-0,500000000
10	0,000000000	0,0041666667	-0,6904146969	0,8660254038
11	-0,6220084679	-0,1224144983	1,9289438346	-1,8660254038

(¹) Eine mit (74) und (77) gleichwertige Quadraturformel findet sich bei Garrick [3].

für negative Indizes sind die Koeffizienten wieder durch $D_{-\mu} = D_{2N-\mu}$ erklärt. Au Grund der Symmetrieeigenschaft $D_{2N-\mu} = -D_{\mu}$ besitzt die „numerische Ableitung (80) stets die Eigenschaft

$$\sum_{\mu=0}^{2N-1} f_{\mu} = 0. \quad (82)$$

In Tab. 1 sind die Werte der $C_{\mu}, R_{\mu}, T_{\mu}$ und D_{μ} für den Fall $2N=12$ angegeben

§ 7. Zerlegung der vollständigen elliptischen Integrale

Die praktische Behandlung unseres Problems erfordert eine genaue Kenntnis der Singularität, die das vollständige elliptische Normalintegral zweiter Gattung

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} d\psi \quad (83)$$

und das um $\mathbf{E}(k)$ verminderte vollständige elliptische Normalintegral erster Gattung $\mathbf{K}(k)$

$$\mathbf{G}(k) = k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \psi (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} d\psi \quad (84)$$

an der Stelle $k=1$ besitzen. Die Natur dieser Singularität entnimmt man den Zerlegungen [5]

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{E}^*(k) + \mathbf{E}^{**}(k) \ln [4(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}}], \quad (85)$$

$$\mathbf{G}(k) = \mathbf{G}^*(k) + \mathbf{G}^{**}(k) \ln [4(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}}] \quad (86)$$

mit bei $k=1$ regulär analytischen Funktionen $\mathbf{E}^*(k), \mathbf{E}^{**}(k), \mathbf{G}^*(k), \mathbf{G}^{**}(k)$. Es gelten die für alle $0 < k \leq 1$ konvergenten Entwicklungen

$$\mathbf{E}^*(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{\nu}^* (1 - k^2)^{\nu}, \quad (87)$$

$$\mathbf{E}^{**}(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{\nu}^{**} (1 - k^2)^{\nu}, \quad (88)$$

$$\mathbf{G}^*(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu}^* (1 - k^2)^{\nu}, \quad (89)$$

$$\mathbf{G}^{**}(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu}^{**} (1 - k^2)^{\nu}, \quad (90)$$

deren Koeffizienten durch die folgenden Rekursionsformeln [9] praktisch leicht ermittelt werden können:

$$\varepsilon_\nu^* = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{4\nu(\nu-1)} \varepsilon_{\nu-1}^* - \frac{4\nu^2-6\nu+3}{8\nu^2(\nu-1)^2} \varepsilon_{\nu-1}^{**}, \quad \nu \geq 2, \quad \varepsilon_0^* = 1, \quad \varepsilon_1^* = -\frac{1}{4}, \quad (91)$$

$$\varepsilon_\nu^{**} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{4\nu(\nu-1)} \varepsilon_{\nu-1}^{**}, \quad \nu \geq 2, \quad \varepsilon_0^{**} = 0, \quad \varepsilon_1^{**} = \frac{1}{2}, \quad (92)$$

$$\gamma_\nu^* = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{4\nu^2} \gamma_{\nu-1}^* - \frac{4\nu-3}{4\nu^3} \gamma_{\nu-1}^{**}, \quad \nu \geq 1, \quad \gamma_0^* = -1, \quad (93)$$

$$\gamma_\nu^{**} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{4\nu^2} \gamma_{\nu-1}^{**}, \quad \nu \geq 1, \quad \gamma_0^{**} = 1. \quad (94)$$

Tabellen für die Funktionen $\mathbf{E}^*(k)$, $\mathbf{E}^{**}(k)$, $\mathbf{G}^*(k)$, $\mathbf{G}^{**}(k)$, deren Berechnung mit Hilfe der hier angegebenen Potenzreihen erfolgte, findet man für $k^2 = 0,01, 0,02, \dots, 1,00$ ebenfalls in [9].

§ 8. Integralgleichung für die Tangentialkomponente

Auf S_1 und S_2 können wir die Flächennormale \mathbf{n} durch \mathbf{t} und \mathbf{e}_α zu einer orthogonalen Basis ergänzen. Dabei ist \mathbf{t} der an der Rotation von C_1 und C_2 um die y -Achse teilhabende Tangenteneinheitsvektor dieser Kurven (Abb. 1) und \mathbf{e}_α der Einheitsvektor in Richtung wachsenden Azimuts α . Da die Azimutalkomponente der Lösung \mathbf{v} aus Symmetriegründen proportional zu (64) ist und daher vollständig beherrscht wird, bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir im folgenden auf S_1 und S_2

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t} \quad (95)$$

setzen mit $v_n = (\mathbf{n}, \mathbf{v})$ und $v_t = (\mathbf{t}, \mathbf{v})$. Wegen

$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}] = v_t \mathbf{e}_\alpha \quad (96)$$

ergibt (37)

$$\begin{aligned} v_t \mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} v'_t \frac{[\mathbf{n}, [\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}']]}{r^3} df' - \iint_{S_2} v'_t \frac{[\mathbf{n}, [\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}']]}{r^3} df' \right\} \\ = \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} v'_n \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' - \iint_{S_2} v'_n \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{x}']}{r^3} df' \right\}. \end{aligned} \quad (97)$$

Durch skalare Multiplikation von (97) mit \mathbf{e}_α entsteht für die Tangentialkomponente v_t das Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
v_t - \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} v'_t \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' - \iint_{S_2} v'_t \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' \right\} \\
= \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} v'_n \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' - \iint_{S_2} v'_n \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' \right\}. \quad (98)
\end{aligned}$$

Seien (x, y, α) die Zylinderkoordinaten des festen und (ξ, η, α') die des laufenden Punktes, so ergibt sich in den Komponenten kartesischer Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (x \cos \alpha, y, x \sin \alpha), \\
\mathbf{x}' &= (\xi \cos \alpha', \eta, \xi \sin \alpha'), \\
\mathbf{t} &= (t_x \cos \alpha, t_y, t_x \sin \alpha), \\
\mathbf{e}'_\alpha &= (-\sin \alpha', 0, \cos \alpha'), \\
(\mathbf{t}, \mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}') &= [x \cos(\alpha - \alpha') - \xi] t_y - (y - \eta) \cos(\alpha - \alpha') t_x, \\
(\mathbf{t}, \mathbf{x} - \mathbf{x}') &= [x - \xi \cos(\alpha - \alpha')] t_x + (y - \eta) t_y, \\
r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= (x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Führen wir schließlich die in § 5 besprochenen Parameterdarstellungen für C_1 und C_2 ein sowie die Bezeichnungen v_{n1}, v_{t1} und v_{n2}, v_{t2} für die Werte von v_n, v_t bzw. auf S_1 und S_2 , so geht (98) über in das Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\omega_{it}(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} K_{i1}(\varphi, \psi) \omega_{i1}(\psi) d\psi - \int_0^{2\pi} K_{i2}(\varphi, \psi) \omega_{i2}(\psi) d\psi \right\} \\
= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} L_{i1}(\varphi, \psi) \omega_{n1}(\psi) d\psi - \int_0^{2\pi} L_{i2}(\varphi, \psi) \omega_{n2}(\psi) d\psi \right\} \quad (i=1, 2) \quad (99)
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \omega_{ni}(\varphi) = v_{ni}(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, 2), \quad (100)$$

$$\omega_{ti}(\varphi) = v_{ti}(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, 2) \quad (101)$$

und den von α nicht mehr abhängenden Kernen

$$\begin{aligned}
K_{ij}(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \frac{[x_i(\varphi) \cos(\alpha - \alpha') - x_j(\psi)] \dot{y}_i(\varphi) - [y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \cos(\alpha - \alpha') \dot{x}_i(\varphi)}{([\dot{x}_i(\varphi)]^2 - 2x_i(\varphi)x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha') + [x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\times x_j(\psi) d\alpha' \quad (i, j=1, 2), \quad (102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{ij}(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \frac{[x_i(\varphi) - x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha')] \dot{x}_i(\varphi) + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \dot{y}_i(\varphi)}{([\dot{x}_i(\varphi)]^2 - 2x_i(\varphi)x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha') + [x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\times x_j(\psi) d\alpha' \quad (i, j=1, 2). \quad (103)
\end{aligned}$$

Die Zurückführung auf die vollständigen elliptischen Integrale (83) und (84) geschieht durch

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha'}{(x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{(x\xi)^{\frac{1}{2}}} \frac{2\mathbf{E}(k)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \alpha') d\alpha'}{(x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{(x\xi)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{2\mathbf{E}(k)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{\mathbf{G}(k)}{x\xi} \right\}$$

mit dem Modul
$$k = 2 \left(\frac{x\xi}{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (104)$$

Somit folgt aus (102) und (103) für $i, j = 1, 2$

$$K_{ij}(\varphi, \psi) = k_{ij}(\varphi, \psi) \left\{ \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{K}_{ij}(\varphi, \psi) + \mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi) Q_{ij}(\varphi, \psi) \right\} \left(\frac{x_j(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (105)$$

$$L_{ij}(\varphi, \psi) = k_{ij}(\varphi, \psi) \left\{ \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{L}_{ij}(\varphi, \psi) + \mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi) \frac{\dot{x}_i(\varphi)}{x_i(\varphi)} \right\} \left(\frac{x_j(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (106)$$

mit
$$\overset{\infty}{K}_{ij}(\varphi, \psi) = 2 \frac{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)] \dot{y}_i(\varphi) - [y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \dot{x}_i(\varphi)}{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2}, \quad (107)$$

$$\overset{\infty}{L}_{ij}(\varphi, \psi) = 2 \frac{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)] \dot{x}_i(\varphi) + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \dot{x}_i(\varphi)}{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2}, \quad (108)$$

$$Q_{ij}(\varphi, \psi) = \frac{[y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \dot{x}_i(\varphi) - x_i(\varphi) \dot{y}_i(\varphi)}{x_i(\varphi) x_j(\psi)}, \quad (109)$$

$$k_{ij}(\varphi, \psi) = 2 \left(\frac{x_i(\varphi) x_j(\psi)}{[x_i(\varphi) + x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (110)$$

$$\mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) = \mathbf{E}(k_{ij}(\varphi, \psi)), \quad (111)$$

$$\mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi) = \mathbf{G}(k_{ij}(\varphi, \psi)). \quad (112)$$

§ 9. Einige Eigenschaften der Kerne $K_{ij}(\varphi, \psi)$ und $L_{ij}(\varphi, \psi)$

LEMMA 4. Sei (ξ, η) ein fester Punkt der rechten Halbebene und C^* eine in der rechten Halbebene verlaufende, den Punkt (ξ, η) nicht enthaltende, glatte Kurve, so ist das Integral

$$I = \int_{C^*} P dx + Q dy$$

mit
$$P(x, y) = \left\{ -\frac{2k\mathbf{E}(k)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{k\mathbf{G}(k)(y-\eta)}{x\xi} \right\} \sqrt{\frac{\xi}{x}}, \quad (113)$$

$$Q(x, y) = \left\{ \frac{2k\mathbf{E}(k)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \frac{k\mathbf{G}(k)}{\xi} \right\} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \quad (114)$$

und dem Modul (104) vom Wege unabhängig, sofern C^* in die deformierte Kurve ohne Berührung des Punktes (ξ, η) überführt werden kann.

Beweis. Unter Benutzung der für die elliptischen Integrale (83) und (84) gültiger Identitäten⁽¹⁾

$$\frac{d\mathbf{E}}{dk} = -\frac{1}{k}\mathbf{G},$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dk} = \frac{k}{1-k^2}\mathbf{E}$$

sowie der logarithmischen Ableitungen von (104)

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

erhält man
$$\frac{\partial(k\mathbf{E})}{\partial x} = \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} (k\mathbf{E} - k\mathbf{G}),$$

$$\frac{\partial(k\mathbf{E})}{\partial y} = -\frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} (k\mathbf{E} - k\mathbf{G}),$$

$$\frac{\partial(k\mathbf{G})}{\partial x} = \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\frac{k^3\mathbf{E}}{1-k^2} + k\mathbf{G} \right),$$

$$\frac{\partial(k\mathbf{G})}{\partial y} = -\frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \left(\frac{k^3\mathbf{E}}{1-k^2} + k\mathbf{G} \right),$$

$$\frac{k^2}{1-k^2} = \frac{4x\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Damit ergibt sich aus (113) und (114) für alle von (ξ, η) verschiedenen Punkte (x, y) der rechten Halbebene

⁽¹⁾ Für deren Herleitung benutze man etwa die bei Jahnke-Emde [5] angegebenen Formeln.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \right] + \frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right. \\
& - \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \frac{4x\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \right] \\
& - \frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\
& \left. + \frac{y-\eta}{x\xi} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \frac{4x\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\} k \mathbf{E} \\
& + \left\{ - \frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \right] - \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{1}{2x} \frac{\xi^2 - x^2 + (y-\eta)^2}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\
& + \frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y-\eta}{x\xi} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \right] + \frac{y-\eta}{x\xi} \sqrt{\frac{\xi}{x}} \frac{y-\eta}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\} k \mathbf{G};
\end{aligned}$$

durch elementare Rechnung sieht man leicht, daß der Inhalt jeder der beiden geschweiften Klammer identisch verschwindet, so daß damit die Behauptung aus

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

folgt.

SATZ 4. Die Kerne $K_{ij}(\varphi, \psi)$ besitzen die Eigenschaft

$$\int_0^{2\pi} K_{ij}(\varphi, \psi) d\varphi = 2\pi(i-j+1) \quad (i, j=1, 2), \quad (115)$$

wobei die Integrale für $i=j$ als uneigentliche Integrale bezüglich der Singularität bei $\varphi = \psi$ aufzufassen sind.

Beweis. Man überzeugt sich zunächst, daß die Singularität von $K_{ii}(\varphi, \psi)$ bei $\varphi = \psi$ schwach genug ist, damit die betreffenden uneigentlichen Integrale existieren.

Da $\overset{\infty}{K}_{ii}(\varphi, \psi)$ wegen der stetigen Krümmung von C_1 und C_2 und des aus (107) folgenden Grenzwertes

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi}^{\infty} K_{ii}(\varphi, \psi) = \frac{\dot{x}_i(\varphi)\ddot{y}_i(\varphi) - \dot{y}_i(\varphi)\ddot{x}_i(\varphi)}{[\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2} \quad (i = 1, 2) \quad (116)$$

überall stetig ist, desgleichen $Q_{ii}(\varphi, \psi)$, $k_{ii}(\varphi, \psi)$ $\mathbf{E}_{ii}(\varphi, \psi)$, so wird also die Singularität von $K_{ii}(\varphi, \psi)$ entsprechend (105) durch die Singularität von $\mathbf{G}_{ii}(\varphi, \psi)$ an der Stelle $\varphi = \psi$ bestimmt. Diese Singularität ist aber auf Grund von (86) und (110) durch das Verhalten des Ausdruckes

$$\ln [4(1 - [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2)^{-\frac{1}{2}}] = \ln \left\{ 4 \left(\frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (i = 1, 2)$$

an der Stelle $\varphi = \psi$ gegeben. Aus der Zerlegung

$$\begin{aligned} \ln [4(1 - [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2)^{-\frac{1}{2}}] &= \ln \left\{ 8 \left(\frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (117)$$

und dem Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\psi \rightarrow \varphi} \ln \left\{ 8 \left(\frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ = \ln \{ 8 x_i(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{-\frac{1}{2}} \} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (118)$$

erkennt man dann, daß die Singularität der $K_{ii}(\varphi, \psi)$ durch

$$\ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right|$$

bestimmt wird, so daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^{2\pi} K_{ii}(\varphi, \psi) d\varphi \quad (i = 1, 2)$$

existieren. Aus (105), (107) und (109) bis (114) folgt nun, daß (115) offenbar mit

$$\int_C P dx + Q dy = \begin{cases} 0, & \text{falls } (\xi, \eta) \text{ außerhalb } C, \\ 2\pi, & \text{falls } (\xi, \eta) \text{ auf } C, \\ 4\pi, & \text{falls } (\xi, \eta) \text{ innerhalb } C, \end{cases} \quad (119)$$

äquivalent ist, wenn C eine in der rechten Halbebene gelegene, stetig gekrümmte, doppelungspunktfreie, positiv umlaufene geschlossene Kurve ist. Liegt (ξ, η) außerhalb C , so

kann C auf Grund von Lemma 4 in einen Punkt zusammengezogen werden, ohne daß sich der Wert des Integrals (119) ändert. Dieser Wert ist infolgedessen Null. Liegt (ξ, η) im Inneren von C , so kann C wegen Lemma 4 in einen kleinen Kreis vom Radius $2\delta\xi > 0$ um den Punkt (ξ, η) deformiert werden. Dann folgt aus (104), (113) und (114)

$$P(\xi + 2\delta\xi \cos \varphi, \eta + 2\delta\xi \sin \varphi) = -\frac{\mathbf{E}(k) \sin \varphi - \frac{2\delta^2 \mathbf{G}(k) \sin \varphi}{1 + 2\delta \cos \varphi}}{\delta \xi (1 + 2\delta \cos \varphi + \delta^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Q(\xi + 2\delta\xi \cos \varphi, \eta + 2\delta\xi \sin \varphi) = \frac{\mathbf{E}(k) \cos \varphi - \delta \mathbf{G}(k)}{\delta \xi (1 + 2\delta \cos \varphi + \delta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$k = \left(\frac{1 + 2\delta \cos \varphi}{1 + 2\delta \cos \varphi + \delta^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

und das Integral (119) lautet

$$\int_C P dx + Q dy = 2 \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{E}(k) - \frac{2\delta + \cos \varphi}{1 + 2\delta \cos \varphi} \delta \mathbf{G}(k)}{(1 + 2\delta \cos \varphi + \delta^2)^{\frac{1}{2}}} d\varphi. \quad (120)$$

Unter Benutzung von (85) bis (94) folgt gleichmäßige Konvergenz von

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} k = 1,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{E}(k) = 1,$$

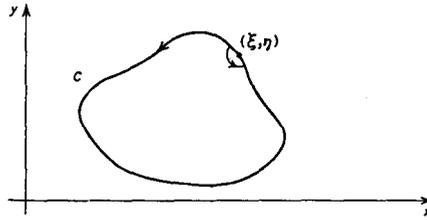
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta \mathbf{G}(k)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{\delta \ln [4(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}}]\} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \{\delta \ln [\delta(1 + 2\delta \cos \varphi + \delta^2)^{-\frac{1}{2}}]\} = 0$$

für alle $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, so daß der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ rechts in (120) mit der Integration vertauscht werden darf:

$$\int_C P dx + Q dy = 4\pi.$$

Liegt schließlich (ξ, η) auf C , so kann C gemäß Abb. 2 in einen Halbkreis um (ξ, η) deformiert werden. Nutzt man die Tatsache aus, daß (119) in diesem Falle als uneigentliches Integral existiert, so erhalten wir in direkter Abänderung von (120)

$$\int_C P dx + Q dy = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} \frac{\mathbf{E}(k) - \frac{2\delta + \cos \varphi}{1 + 2\delta \cos \varphi} \delta \mathbf{G}(k)}{(1 + 2\delta \cos \varphi + \delta^2)^{\frac{1}{2}}} d\varphi = 2\pi.$$

Abb. 2. Deformation des Integrationsweges C .

SATZ 5. Für die Kerne $L_{ij}(\varphi, \psi)$ gilt

$$\int_0^{2\pi} L_{ij}(\varphi, \psi) d\varphi = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (121)$$

wobei die Integrale für $i = j$ bezüglich der Singularität bei $\varphi = \psi$ als Cauchysche Hauptwerte zu verstehen sind.

Beweis. Aus Periodizitätsgründen gilt

$$\int_0^{2\pi} L_{ii}(\varphi, \psi) d\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} L_{ij}(\varphi, \psi) d\varphi \quad (i, j = 1, 2),$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Wir berechnen zunächst aus (103) für $0 < \delta < \pi$ und $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} L_{ij}(\varphi, \psi) d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} [x_j(\psi) ([x_i(\varphi)]^2 - 2x_i(\varphi)x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha') + [x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2)^{-\frac{1}{2}}]_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} d\alpha'. \end{aligned}$$

Während hier für $i \neq j$ aus Stetigkeitsgründen direkt $\delta = 0$ gesetzt werden darf und (121) somit unmittelbar folgt, führen wir die Integration über α' für $i = j$ auf das elliptische Integral erster Gattung $\mathbf{K}(k)$ zurück. Unter Benutzung von

$$\int_0^{2\pi} (x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{-\frac{1}{2}} d\alpha' = 4\mathbf{K}(k) ((x + \xi)^2 + (y - \eta)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

mit dem Modul (104) sowie der Periodizität von $x_i(\varphi), y_i(\varphi)$ ergibt sich

$$\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} L_{ii}(\varphi, \psi) d\varphi = \left[\frac{4x_i(\psi) \mathbf{K}(k_i(\varphi, \psi))}{([x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \quad (i = 1, 2), \quad (122)$$

wobei entsprechend (110)

$$k_{ii}(\varphi, \psi) = 2 \left(\frac{x_i(\varphi)x_i(\psi)}{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2) \quad (123)$$

$$\text{ist mit} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} k_{ii}(\psi \pm \delta, \psi) = 1 \quad (i = 1, 2). \quad (124)$$

Im Zusammenhang mit der Entwicklung [5]

$$\mathbf{K}(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \kappa_{\nu}^* (1 - k^2)^{\nu} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \kappa_{\nu}^{**} (1 - k^2)^{\nu} \right) \ln [4(1 - k^2)^{-\frac{1}{2}}],$$

$$\text{wobei} \quad \kappa_0^{**} = 1,$$

folgt aus (117) und (122) bis (124)

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\psi+\delta}^{\psi+2\pi-\delta} L_{ii}(\varphi, \psi) d\varphi \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{4x_i(\psi) \left\{ \ln \left[8 \frac{([x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2})^{\frac{1}{2}}}{([x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2})^{\frac{1}{2}}} \right\} - \frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{([x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\psi-\delta}^{\psi+\delta}; \end{aligned}$$

Benutzung des Grenzwertes (118) liefert

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\psi+\delta}^{\psi+2\pi-\delta} L_{ii}(\varphi, \psi) d\varphi &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{-2x_i(\psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right)}{([x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\psi-\delta}^{\psi+\delta} \\ &= 2x_i(\psi) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{([x_i(\psi - \delta) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\psi - \delta) - y_i(\psi)]^2)^{-\frac{1}{2}}}{([x_i(\psi + \delta) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\psi + \delta) - y_i(\psi)]^2)^{-\frac{1}{2}}} \ln \left(4 \sin^2 \frac{1}{2} \delta \right) \right\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe elementarer Methoden zeigt man nun leicht, daß dieser Grenzwert existiert und den Wert Null hat, so daß (121) für $i=j$ im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes bewiesen ist.

Die erhaltenen Identitäten (115) und (121) versetzen uns in die Lage, das Integralgleichungssystem (99) in der folgenden Weise umzuformen:

$$\begin{aligned} & 2\delta_{i2}[\omega_{i2}(\varphi) - \omega_{i1}(\varphi)] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K_{i1}(\psi, \varphi)\omega_{i1}(\varphi) - K_{i1}(\varphi, \psi)\omega_{i1}(\psi)] d\psi \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K_{i2}(\psi, \varphi)\omega_{i2}(\varphi) - K_{i2}(\varphi, \psi)\omega_{i2}(\psi)] d\psi \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L_{i1}(\psi, \varphi)\omega_{n1}(\varphi) - L_{i1}(\varphi, \psi)\omega_{n1}(\psi)] d\psi \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L_{i2}(\psi, \varphi)\omega_{n2}(\varphi) - L_{i2}(\varphi, \psi)\omega_{n2}(\psi)] d\psi \quad (i = 1, 2). \quad (125) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Umformung verfolgen wir das Ziel, anschließend bei der numerischen Auswertung der Integralgleichungen ein linear abhängiges Gleichungssystem zu erhalten, welches also gemeinsam mit dem Integralgleichungssystem (125) eine nichttriviale homogene Lösung besitzt. Diese homogene Lösung lautet auf Grund von (101) sowie der in § 5 besprochenen Existenzsätze für das betrachtete Neumannsche Problem

$$\Omega_{ii}(\varphi) = Y_{ii}(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2), \quad (126)$$

$$\text{wobei} \quad \left. \begin{array}{l} Y_{i1} = (\mathbf{t}, \mathbf{Y}_1) \quad \text{auf } S_1, \\ Y_{i2} = (\mathbf{t}, \mathbf{Y}_2) \quad \text{auf } S_2 \end{array} \right\} \quad (127)$$

gesetzt ist⁽¹⁾. Aus (61), (126) und Abb. 1 ergibt sich noch die Normierungsbedingung

$$\int_0^{2\pi} \Omega_{ii}(\varphi) d\varphi = 1, \quad (128)$$

wobei wegen der Wegunabhängigkeit über C_1 statt L_1 integriert werden konnte.

§ 10. Zerlegung der Kerne $K_{ii}(\varphi, \psi)$ und $L_{ii}(\varphi, \psi)$

Für $i = j$ läßt sich die Singularität der Kerne (105) und (106) an der Stelle $\varphi = \psi$ mit Hilfe von (85), (86) und (117) in der folgenden Weise abspalten:

$$K_{ii}(\varphi, \psi) = K_{ii}^*(\varphi, \psi) + K_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right) \quad (i = 1, 2), \quad (129)$$

$$\begin{aligned} L_{ii}(\varphi, \psi) &= H_{ii}^*(\varphi, \psi) + H_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right) \\ &\quad - \left[P_{ii}^*(\varphi, \psi) + P_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right) \right] \operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi}{2} \quad (i = 1, 2); \end{aligned} \quad (130)$$

dabei bedeuten für $i = 1, 2$

$$K_{ii}^*(\varphi, \psi) = k_{ii}(\varphi, \psi) \left\{ \tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{K}_{ii}(\varphi, \psi) + \tilde{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi) Q_{ii}(\varphi, \psi) \right\} \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (131)$$

$$K_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} k_{ii}(\varphi, \psi) \left\{ \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{K}_{ii}(\varphi, \psi) + \mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) Q_{ii}(\varphi, \psi) \right\} \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (132)$$

$$H_{ii}^*(\varphi, \psi) = k_{ii}(\varphi, \psi) \left\{ \tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{H}_{ii}(\varphi, \psi) + \tilde{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi) \frac{\dot{x}_i(\varphi)}{x_i(\varphi)} \right\} \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (133)$$

⁽¹⁾ Man beachte, daß \mathbf{Y}_1 aus Symmetriegründen und wegen (61) auf S_1 und S_2 in Richtung von \mathbf{t} fällt und daher auch in dem Ansatz (95) für ∇ mit berücksichtigt wurde.

$$H_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} k_{ii}(\varphi, \psi) \left\{ \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{H}_{ii}(\varphi, \psi) + \mathbf{G}_{ii}^{**} \frac{\dot{x}_i(\varphi)}{x_i(\varphi)} \right\} \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (134)$$

$$P_{ii}^*(\varphi, \psi) = k_{ii}(\varphi, \psi) \tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (135)$$

$$P_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} k_{ii}(\varphi, \psi) \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (136)$$

mit
$$\overset{\infty}{H}_{ii}(\varphi, \psi) = \overset{\infty}{L}_{ii}(\varphi, \psi) + \operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad (137)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) = \mathbf{E}_{ii}^*(\varphi, \psi) + \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left\{ 8 \left(\frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (138)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi) = \mathbf{G}_{ii}^*(\varphi, \psi) + \mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left\{ 8 \left(\frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (139)$$

und den abkürzenden Bezeichnungen

$$\mathbf{E}_{ii}^*(\varphi, \psi) = \mathbf{E}^*(k_{ii}(\varphi, \psi)), \quad (140)$$

$$\mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = \mathbf{E}^{**}(k_{ii}(\varphi, \psi)), \quad (141)$$

$$\mathbf{G}_{ii}^*(\varphi, \psi) = \mathbf{G}^*(k_{ii}(\varphi, \psi)), \quad (142)$$

$$\mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = \mathbf{G}^{**}(k_{ii}(\varphi, \psi)). \quad (143)$$

Aus (108) und (137) folgt ferner

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} \overset{\infty}{H}_{ii}(\varphi, \psi) = \frac{\dot{x}_i(\varphi) \ddot{x}_i(\varphi) + \dot{y}_i(\varphi) \ddot{y}_i(\varphi)}{[\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2} \quad (i = 1, 2), \quad (144)$$

und aus (87) bis (94), (110) und (118) ergeben sich für (138) und (139) die Grenzwerte

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} \tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) = 1, \quad (i = 1, 2), \quad (145)$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} \tilde{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi) = -1 + \ln \left\{ 8 x_i(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (i = 1, 2), \quad (146)$$

so daß $\overset{\infty}{H}_{ii}(\varphi, \psi)$, $\tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi)$, $\tilde{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi)$ und damit die Ausdrücke (131) bis (136) für alle Argumente φ, ψ stetig sind und insbesondere numerisch aus den Parameterdarstellungen für C_1 und C_2 berechnet werden können. Die dabei vorkommenden Ableitungen $\dot{x}_i(\varphi)$, $\ddot{x}_i(\varphi)$, $\dot{y}_i(\varphi)$, $\ddot{y}_i(\varphi)$ denken wir uns dabei durch das in § 6 angegebene Verfahren erklärt, sofern die Funktionen $x_i(\varphi)$, $y_i(\varphi)$ nur an den diskreten Stellen (66) bekannt sind.

§ 11. Linear abhängiges Gleichungssystem für die Tangentialkomponente

Denken wir uns die in (125) auftretenden Kernfunktionen $K_{ij}(\varphi, \psi)$ und $L_{ij}(\varphi, \psi)$ im Falle $i=j$ gemäß (129) und (130) zerlegt, so geht das Integralgleichungssystem genommen an den Stellen $\varphi = \varphi_\mu$, $\mu = 0, \dots, 2N-1$, mit Hilfe der Quadraturformeln (73) bis (76) in das folgende lineare Gleichungssystem über⁽¹⁾:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} \left\{ \left(\frac{1}{2N} K_{11\nu\mu}^* + R_{\mu-\nu} K_{11\nu\mu}^{**} \right) \omega_{t1\mu} - \left(\frac{1}{2N} K_{11\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} K_{11\mu\nu}^{**} \right) \omega_{t1\nu} \right\} \\
& - \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} (K_{12\nu\mu} \omega_{t2\mu} - K_{12\mu\nu} \omega_{t2\nu}) \\
& = - \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} \left\{ \left(\frac{1}{2N} H_{11\nu\mu}^* + R_{\mu-\nu} H_{11\nu\mu}^{**} - C_{\mu-\nu} P_{11\nu\mu}^* - T_{\mu-\nu} P_{11\nu\mu}^{**} \right) \omega_{n1\mu} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{1}{2N} H_{11\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} H_{11\mu\nu}^{**} - C_{\nu-\mu} P_{11\mu\nu}^* - T_{\nu-\mu} P_{11\mu\nu}^{**} \right) \omega_{n1\nu} \right\} \\
& + \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} (L_{12\nu\mu} \omega_{n2\mu} - L_{12\mu\nu} \omega_{n2\nu}) \quad (\mu = 0, \dots, 2N-1), \tag{147}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\omega_{t2\mu} - \omega_{t1\mu}) + \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} (K_{21\nu\mu} \omega_{t1\mu} - K_{21\mu\nu} \omega_{t1\nu}) \\
& - \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} \left\{ \left(\frac{1}{2N} K_{22\nu\mu}^* + R_{\mu-\nu} K_{22\nu\mu}^{**} \right) \omega_{t2\mu} - \left(\frac{1}{2N} K_{22\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} K_{22\mu\nu}^{**} \right) \omega_{t2\nu} \right\} \\
& = - \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} (L_{21\nu\mu} \omega_{n1\mu} - L_{21\mu\nu} \omega_{n1\nu}) \\
& + \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} \left\{ \left(\frac{1}{2N} H_{22\nu\mu}^* + R_{\mu-\nu} H_{22\nu\mu}^{**} - C_{\mu-\nu} P_{22\nu\mu}^* - T_{\mu-\nu} P_{22\nu\mu}^{**} \right) \omega_{n2\mu} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{1}{2N} H_{22\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} H_{22\mu\nu}^{**} - C_{\nu-\mu} P_{22\mu\nu}^* - T_{\nu-\mu} P_{22\mu\nu}^{**} \right) \omega_{n2\nu} \right\} \\
& \quad (\mu = 0, \dots, 2N-1). \tag{148}
\end{aligned}$$

Durch Addition aller $2N$ Gleichungen (147), wobei sich identisch Null ergibt, erkennt man die lineare Abhängigkeit des Systems. Es kann daher eine beliebige Gleichung in (147), etwa die für $\mu=0$ erhaltene, ohne Einschränkung der All-

⁽¹⁾ Griechische Indizes bedeuten, daß die betreffende Funktion an den Stützstellen (66) genommen ist.

gemeinheit unterdrückt werden. An die Stelle der fortgelassenen Gleichung tritt dann im Falle der Auflösung des *homogenen Systems* (in (147) in (148) ist $\omega_{ti\mu} = \Omega_{ti\mu}$, $\omega_{ni\mu} = 0$, $i = 1, 2$, gesetzt) die aus (73) und (128) folgende Nebenbedingung

$$\frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \Omega_{t1\mu} = \frac{1}{2\pi}. \quad (149)$$

Handelt es sich um die Bestimmung der Tangentialkomponente der durch (62) festgelegten speziellen Lösung des *inhomogenen Systems* \mathbf{v}^* , so definieren wir zunächst entsprechend (101)

$$\omega_{ii}^*(\varphi) = v_{ii}^*(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2) \quad (150)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} v_{i1}^* &= (\mathbf{t}, \mathbf{v}^*) \quad \text{auf } S_1, \\ v_{i2}^* &= (\mathbf{t}, \mathbf{v}^*) \quad \text{auf } S_2. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Das Gleichungssystem für $\omega_{ii\mu}^*$ geht aus dem inhomogenen System (147) und (148) hervor, indem man dort $\omega_{ti\mu} = \omega_{ii\mu}^*$, $i = 1, 2$, setzt und an die Stelle der unterdrückten Gleichung in (147) die aus (62), (150), Abb. 1 und damit

$$\int_0^{2\pi} \omega_{i1}^*(\varphi) d\varphi = 0 \quad (152)$$

folgende Nebenbedingung

$$\frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \omega_{t1\mu}^* = 0 \quad (153)$$

treten läßt.

Durch Summation aller $2N$ Gleichungen (148) entsteht

$$\frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \omega_{t1\mu} = \frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \omega_{t2\mu}.$$

Diese Gleichung besagt, daß jede Lösung von (147) und (148) die aus der Rotationsfreiheit für \mathbf{v} in B folgende Identität

$$\int_{C_1} (\mathbf{v}, d\mathbf{s}) = \int_{C_2} (\mathbf{v}, d\mathbf{s})$$

im Sinne der Rechteckformel numerisch exakt enthält. Insbesondere bedeutet es damit keine Auszeichnung, daß den Nebenbedingungen (149) und (153) der Integrationsweg C_1 und nicht C_2 zu Grunde gelegt wurde.

Wir bemerken noch, daß es bei den in (147) und (148) auftretenden Summationen über ν keine Einschränkung bedeutet, den jeweiligen Summationsindex $\nu = \mu$ auszu-

schließen, da alle auftretenden Summanden in μ und ν schiefsymmetrisch sind. Die hat übrigens zur Folge, daß die Diagonalelemente $K_{ii\mu\mu}^*$ etc., die auf den Grenzwerte (116) und (144) bis (146) beruhen, numerisch nicht berechnet zu werden brauchen. Damit entfällt auch grundsätzlich die praktische Berechnung des zweiten Ableitungen $\ddot{x}_i(\varphi)$, $\ddot{y}_i(\varphi)$, $i = 1, 2$.

Da man sich im allgemeinen nicht auf eine spezielle Vorgabe der Normalkomponente v_{ni} , $i = 1, 2$, festlegen möchte, empfiehlt es sich, die spezielle Lösung v_{ti}^* , $i = 1, 2$ des inhomogenen Problems mit Hilfe einer „Randmatrix“, die allein durch die Informationen $x_i(\varphi)$, $y_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, bestimmt ist, in der folgenden Weise numerisch darzustellen. Wir definieren zunächst die Spaltenmatrizen (je $4N$ Elemente)

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} v_{n10} \\ \vdots \\ v_{n1, 2N-1} \\ v_{n20} \\ \vdots \\ v_{n2, 2N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_t^* = \begin{pmatrix} v_{t10}^* \\ \vdots \\ v_{t1, 2N-1}^* \\ v_{t20}^* \\ \vdots \\ v_{t2, 2N-1}^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_{t10} \\ \vdots \\ Y_{t1, 2N-1} \\ Y_{t20} \\ \vdots \\ Y_{t2, 2N-1} \end{pmatrix}, \quad (154)$$

Lösen wir dann das System (147) und (148) nacheinander für

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (155)$$

jeweils unter der Nebenbedingung (153) auf und seien die Lösungen bzw.

$$\mathbf{v}_t^* = \begin{pmatrix} M_{00} \\ M_{10} \\ \vdots \\ M_{4N-1, 0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_t^* = \begin{pmatrix} M_{01} \\ M_{11} \\ \vdots \\ M_{4N-1, 1} \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{v}_t^* = \begin{pmatrix} M_{0, 4N-1} \\ M_{1, 4N-1} \\ \vdots \\ M_{4N-1, 4N-1} \end{pmatrix}, \quad (156)$$

so erklären wir

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0, 4N-1} \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1, 4N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{4N-1, 0} & M_{4N-1, 1} & \dots & M_{4N-1, 4N-1} \end{pmatrix} \quad (157)$$

als „Randmatrix“. Zu einer beliebig vorgegebenen Normalkomponente \mathbf{v}_n , die natürlich im Sinne einer geeigneten Quadraturformel der Durchflußbedingung (36) genügen muß, lautet dann die gesuchte Lösung des inhomogenen Systems wegen (154) bis (157)

$$\mathbf{v}_t^* = \mathbf{M} \mathbf{v}_n. \quad (158)$$

Die Randmatrix verbindet also unmittelbar die gegebene Normalkomponente mit der gesuchten (speziellen) Tangentialkomponente. Zur Beherrschung der allgemeinen Lösung des Problems, also zur Bestimmung der durch (61) normierten homogenen Lösung Y_t und der Randmatrix M , hat man somit insgesamt ein lineares Gleichungssystem mit $4N$ Unbekannten und $4N+1$ rechten Seiten zu lösen.

§ 12. Erstes numerisches Beispiel⁽¹⁾

Wir wählen als Beispiel für C_1 eine Ellipse und für C_2 einen die Ellipse exzentrisch einschließenden Kreis (Abb. 3):

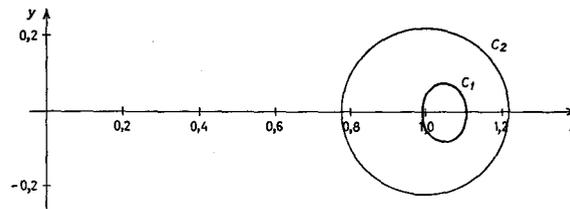


Abb. 3. Die für das numerische Beispiel gewählten Berandungen.

$$\left. \begin{aligned} x_1(\varphi) &= 1,05 + 0,06 \cos \varphi, \\ x_2(\varphi) &= 1 + 0,22 \cos \varphi, \\ y_1(\varphi) &= 0,08 \sin \varphi, \\ y_2(\varphi) &= 0,22 \sin \varphi, \end{aligned} \right\} 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (159)$$

TABELLE 2. Koordinaten und homogene Lösung für C_1 und C_2 ($2N = 12$).

μ	$x_{1\mu}$	$x_{2\mu}$	$y_{1\mu}$	$y_{2\mu}$	$Y_{t1\mu}$	$Y_{t2\mu}$
0	1,110000	1,220000	0,000000	0,000000	2,108576	1,006577
1	1,101962	1,190526	0,040000	0,110000	2,212149	0,979229
2	1,080000	1,110000	0,069282	0,190526	2,482913	0,857908
3	1,050000	1,000000	0,080000	0,220000	2,631299	0,687474
4	1,020000	0,890000	0,069282	0,190526	2,351649	0,565659
5	0,998038	0,809474	0,040000	0,110000	2,020811	0,504031
6	0,990000	0,780000	0,000000	0,000000	1,902595	0,486001
7	0,998038	0,809474	-0,040000	-0,110000	2,020811	0,504031
8	1,020000	0,890000	-0,069282	-0,190526	2,351649	0,565659
9	1,050000	1,000000	-0,080000	-0,220000	2,631299	0,687474
10	1,080000	1,110000	-0,069282	-0,190526	2,482913	0,857908
11	1,101962	1,190526	-0,040000	-0,110000	2,212149	0,979230

⁽¹⁾ Die numerischen Rechnungen wurden mit einer elektronischen Rechenmaschine vom Typ Siemens 2002 durchgeführt.

Mit je $2N = 12$ Stützstellen auf C_1 und C_2 sind die Koordinaten $x_{1\mu}, x_{2\mu}, y_{1\mu}, y_{2\mu}, \mu = 0, \dots, 2N-1$, in Tab. 2 aufgeführt. Ausschließlich mit diesen Informationen wurden entsprechend dem in § 11 beschriebenen Verfahren die homogene Lösung Y_t (Spalten 6 und 7 in Tab. 2) und die Randmatrix M (Tab. 3) berechnet.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der erhaltenen Randmatrix betrachten wir das auf S_1 und S_2 induzierte harmonische Vektorfeld einer im Ursprung befindlicher Einheitsquelle:

TABELLE 3. Randmatrix M für $2N = 12$ Stützstellen.

σ	$M_{\sigma 0}$	$M_{\sigma 1}$	$M_{\sigma 2}$	$M_{\sigma 3}$	$M_{\sigma 4}$	$M_{\sigma 5}$
0	0,000000	-0,611089	-0,039016	-0,156254	-0,027922	-0,056826
1	0,675550	-0,018053	-0,570028	-0,045249	-0,187350	-0,044566
2	0,029627	0,725064	-0,032868	-0,606846	-0,061736	-0,254592
3	0,254772	0,020813	0,685270	-0,038851	-0,729409	-0,077825
4	0,011911	0,223308	0,016136	0,577373	-0,034575	-0,768574
5	0,054213	0,019475	0,175927	0,018850	0,556912	-0,020345
6	0,000000	0,063057	0,027267	0,160038	0,029629	0,616569
7	-0,054213	0,015823	0,070075	0,036257	0,192602	0,048491
8	-0,011911	-0,045809	0,025786	0,080409	0,052833	0,259291
9	-0,254772	-0,009431	-0,039366	0,027598	0,095748	0,068549
10	-0,029627	-0,223118	-0,012467	-0,036238	0,022390	0,093995
11	-0,675550	-0,035716	-0,173872	-0,017691	-0,042077	0,012500
12	0,000000	-0,063897	-0,060264	-0,043119	-0,030670	-0,017430
13	0,069977	0,020855	-0,042394	-0,055238	-0,052223	-0,044293
14	0,052446	0,056334	0,025402	-0,021825	-0,049050	-0,055108
15	0,025795	0,036718	0,035514	0,017207	-0,015857	-0,043034
16	0,008997	0,019970	0,024904	0,023083	0,009620	-0,018985
17	0,001773	0,012135	0,018571	0,021404	0,020219	0,003984
18	0,000000	0,010201	0,016991	0,021398	0,025668	0,021673
19	-0,001773	0,008956	0,016397	0,021788	0,028944	0,033332
20	-0,008997	0,003396	0,012855	0,019833	0,029082	0,038894
21	-0,025795	-0,009901	0,003602	0,013661	0,024947	0,038791
22	-0,052446	-0,033338	-0,013377	0,001013	0,014608	0,030957
23	-0,069977	-0,061430	-0,038200	-0,019206	-0,005288	0,011219

σ	$M_{\sigma 6}$	$M_{\sigma 7}$	$M_{\sigma 8}$	$M_{\sigma 9}$	$M_{\sigma 10}$	$M_{\sigma 11}$
0	0,000000	0,056826	0,027922	0,156254	0,039016	0,611089
1	-0,076315	-0,012500	0,042077	0,017691	0,173872	0,035716
2	-0,062850	-0,093995	-0,022390	0,036238	0,012467	0,223118
3	-0,299356	-0,068549	-0,095748	-0,027598	0,039366	0,009431
4	-0,070012	-0,259291	-0,052833	-0,080409	-0,025786	0,045809
5	-0,702432	-0,048491	-0,192602	-0,036257	-0,070075	-0,015823

Tab. 3 (Forts.)

σ	$M_{\sigma 6}$	$M_{\sigma 7}$	$M_{\sigma 8}$	$M_{\sigma 9}$	$M_{\sigma 10}$	$M_{\sigma 11}$
6	0,000000	-0,616569	-0,029629	-0,160038	-0,027267	-0,063057
7	0,702432	0,020345	-0,556912	-0,018850	-0,175927	-0,019475
8	0,070012	0,768574	0,034575	-0,577373	-0,016136	-0,223308
9	0,299356	0,077825	0,729409	0,038851	-0,685270	-0,020813
10	0,062850	0,254592	0,061736	0,606846	0,032868	-0,725064
11	0,076315	0,044566	0,187350	0,045250	0,570028	0,018053
12	0,000000	0,017430	0,030670	0,043119	0,060264	0,063897
13	-0,029339	-0,011219	0,005288	0,019206	0,038200	0,061430
14	-0,047018	-0,030957	-0,014608	-0,001013	0,013377	0,033338
15	-0,048220	-0,038791	-0,024947	-0,013661	-0,003602	0,009901
16	-0,039089	-0,038894	-0,029082	-0,019833	-0,012855	-0,003396
17	-0,022145	-0,033332	-0,028944	-0,021788	-0,016397	-0,008956
18	0,000000	-0,021673	-0,025668	-0,021398	-0,016991	-0,010201
19	0,022145	-0,003984	-0,020219	-0,021404	-0,018571	-0,012135
20	0,039089	0,018985	-0,009620	-0,023083	-0,024904	-0,019970
21	0,048220	0,043034	0,015857	-0,017207	-0,035514	-0,036718
22	0,047018	0,055108	0,049050	0,021825	-0,025402	-0,056334
23	0,029339	0,044293	0,052223	0,055238	0,042394	-0,020855

σ	$M_{\sigma 12}$	$M_{\sigma 13}$	$M_{\sigma 14}$	$M_{\sigma 15}$	$M_{\sigma 16}$	$M_{\sigma 17}$
0	0,000000	0,472226	0,387072	0,253964	0,136753	0,062323
1	-0,420345	0,180821	0,495177	0,384913	0,277286	0,179610
2	-0,514967	-0,315153	0,317684	0,501170	0,416542	0,324456
3	-0,393497	-0,516806	-0,175711	0,327530	0,453106	0,421442
4	-0,217784	-0,395224	-0,400892	-0,102980	0,208537	0,331362
5	-0,086369	-0,255031	-0,355709	-0,304745	-0,112443	0,089176
6	0,000000	-0,164077	-0,287162	-0,328166	-0,275998	-0,154512
7	0,086369	-0,090681	-0,233826	-0,313020	-0,328500	-0,296729
8	0,217784	0,010438	-0,166316	-0,278534	-0,332928	-0,352882
9	0,393497	0,172112	-0,040334	-0,181238	-0,265943	-0,317763
10	0,514967	0,324203	0,127813	-0,029247	-0,122080	-0,190570
11	0,420345	0,438649	0,265897	0,116693	0,014746	-0,054362
12	0,000000	0,689047	0,064209	0,202774	0,022707	0,049726
13	-0,678846	0,036955	0,692015	0,080074	0,219934	0,053247
14	-0,019978	-0,651205	0,072755	0,681958	0,076938	0,221808
15	-0,176225	0,011250	-0,621034	0,087154	0,658639	0,059054
16	0,031767	-0,178912	0,026786	-0,609254	0,074769	0,636677
17	-0,034881	0,011622	-0,192172	0,019782	-0,610510	0,042778
18	0,000000	-0,072328	-0,017904	-0,208402	-0,000121	-0,615382
19	0,034881	-0,038617	-0,103530	-0,043585	-0,216673	-0,021461
20	-0,031767	0,005425	-0,063761	-0,117515	-0,057844	-0,216328
21	0,176225	-0,038308	-0,010205	-0,071554	-0,117022	-0,064050
22	0,019978	0,179670	-0,033508	-0,009320	-0,063979	-0,107743
23	0,678846	0,045402	0,186349	-0,012112	0,013161	-0,038325

Tab. 3 (Forts.)

σ	$M_{\sigma 18}$	$M_{\sigma 19}$	$M_{\sigma 20}$	$M_{\sigma 21}$	$M_{\sigma 22}$	$M_{\sigma 23}$
0	0,000000	-0,062323	-0,136753	-0,253964	-0,387072	-0,472226
1	0,116733	0,054362	-0,014746	-0,116693	-0,265897	-0,438649
2	0,247689	0,190570	0,122080	0,029247	-0,127813	-0,324203
3	0,364589	0,317763	0,265943	0,181238	0,040334	-0,172112
4	0,357882	0,352882	0,332928	0,278534	0,166316	-0,010438
5	0,222502	0,296729	0,328500	0,313020	0,233826	0,090681
6	0,000000	0,154512	0,275998	0,328166	0,287162	0,164077
7	-0,222502	-0,089176	0,112443	0,304745	0,355709	0,255031
8	-0,357882	-0,331362	-0,208537	0,102980	0,400892	0,395224
9	-0,364589	-0,421442	-0,453106	-0,327530	0,175711	0,516806
10	-0,247689	-0,324456	-0,416542	-0,501170	-0,317684	0,315153
11	-0,116733	-0,179610	-0,277286	-0,384913	-0,495177	-0,180821
12	0,000000	-0,049726	-0,022707	-0,202774	-0,064209	-0,689047
13	0,085100	0,038325	-0,013161	0,012112	-0,186349	-0,045402
14	0,065571	0,107743	0,063979	0,009320	0,033508	-0,179670
15	0,216376	0,064050	0,117022	0,071554	0,010205	0,038308
16	0,040354	0,216328	0,057844	0,117515	0,063761	-0,005425
17	0,622672	0,021461	0,216673	0,043585	0,103530	0,038617
18	0,000000	0,615382	0,000121	0,208402	0,017904	0,072328
19	-0,622672	-0,042778	0,610510	-0,019782	0,192172	-0,011622
20	-0,040354	-0,636677	-0,074769	0,609254	-0,026786	0,178912
21	-0,216376	-0,059054	-0,658639	-0,087154	0,621034	-0,011250
22	-0,065571	-0,221808	-0,076938	-0,681958	-0,072755	0,651205
23	-0,085100	-0,053247	-0,219934	-0,080074	-0,692015	-0,036955

$$\left. \begin{aligned}
 v_{n1}(\varphi) &= \frac{0,08 \cos \varphi (1,05 + 0,06 \cos \varphi) + 0,0048 \sin^2 \varphi}{((0,06 \sin \varphi)^2 + (0,08 \cos \varphi)^2)^{\frac{1}{2}} ((1,05 + 0,06 \cos \varphi)^2 + (0,08 \sin \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 v_{n2}(\varphi) &= \frac{\cos \varphi (1 + 0,22 \cos \varphi) + 0,22 \sin^2 \varphi}{((1 + 0,22 \cos \varphi)^2 + (0,22 \sin \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}},
 \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

$$\left. \begin{aligned}
 v_{t1}(\varphi) &= \frac{-0,06 \sin \varphi (1,05 + 0,06 \cos \varphi) + 0,0064 \sin \varphi \cos \varphi}{((0,06 \sin \varphi)^2 + (0,08 \cos \varphi)^2)^{\frac{1}{2}} ((1,05 + 0,06 \cos \varphi)^2 + (0,08 \sin \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 v_{t2}(\varphi) &= \frac{-\sin \varphi (1 + 0,22 \cos \varphi) + 0,22 \sin \varphi \cos \varphi}{((1 + 0,22 \cos \varphi)^2 + (0,22 \sin \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Die numerischen Werte dieser Funktionen sind in Spalten 2, 3, 4 und 6 von Tab. 4 angegeben.

Um die Tangentialkomponente (161) numerisch aus der gegebenen Normalkomponente (160) zu gewinnen, beachten wir zuvor, daß die Perioden (63) dieses speziellen

TABELLE 4. Randkomponenten von \mathbf{v} auf S_1 und S_2 für $2N = 12$.

μ	$v_{n1\mu}$	$v_{n2\mu}$	$v_{t1\mu}$		$v_{t2\mu}$	
			exakt	Näherung	exakt	Näherung
0	0,811622	0,671862	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,766065	0,635457	-0,2992	-0,2989	-0,2926	-0,2929
2	0,563073	0,504020	-0,6418	-0,6419	-0,6062	-0,6058
3	0,068510	0,204943	-0,8992	-0,8992	-0,9316	-0,9322
4	-0,530896	-0,371362	-0,7959	-0,7959	-1,1486	-1,1478
5	-0,903108	-1,185005	-0,4348	-0,4348	-0,9172	-0,9177
6	-1,020304	-1,643655	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	-0,903108	-1,185005	0,4348	0,4348	0,9172	0,9177
8	-0,530896	-0,371362	0,7959	0,7959	1,1486	1,1478
9	0,068510	0,204943	0,8992	0,8992	0,9316	0,9322
10	0,563073	0,504020	0,6418	0,6419	0,6062	0,6058
11	0,766065	0,635457	0,2992	0,2989	0,2926	0,2929

Neumannschen Problems auf Grund der Struktur des Quellfeldes verschwinden. Damit ist aber v_{ti} , $i = 1, 2$, identisch mit der speziellen Lösung v_{ti}^* , $i = 1, 2$, des inhomogenen Systems, so daß wir die Randmatrix gemäß (158) direkt auf die zu (160) gehörige Spaltenmatrix anwenden können. Das so erhaltene Ergebnis befindet sich in Spalten 5 und 7 von Tab. 4. Der Vergleich mit den zugehörigen exakten Werten (Spalten 4 und 6 in Tab. 4) zeigt eine am Aufwand gemessene hohe numerische Genauigkeit des Verfahrens.

Eine ähnliche Genauigkeit werden wir auch für die homogene Lösung Y_{ti} , $i = 1, 2$, (Tab. 2) erwarten dürfen. Da man die exakte Lösung hier jedoch nicht in geschlossener Form kennt, ist man zur Bestimmung des Fehlers auf die wiederholte Durchführung des Verfahrens mit höherer, z. B. doppelter Stützstellenzahl angewiesen.

III. Das azimutalabhängige Randwertproblem

§ 13. Zerlegung der elliptischen Integrale $G_m(k)$

Unter $G_m(k)$ versteht man üblicherweise die auf vollständige elliptische Normalintegrale erster und zweiter Gattung zurückführbaren Funktionen

$$G_m(k) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\psi d\psi}{\left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = (-1)^m \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2m\psi d\psi}{(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (m \geq 0). \quad (162)$$

Für den Index m sollen nur ganzzahlige Werte in Betracht kommen. Der Zusammenhang mit den elliptischen Integralen $\mathbf{E}(k)$ und $\mathbf{G}(k)$ ist gegeben durch die bekannte Rekursionsformel

$$(2m-1)G_{m+1}(k) - 4m \frac{2-k^2}{k^2} G_m(k) + (2m+1)G_{m-1}(k) = 0 \quad (m \geq 1) \quad (163)$$

und

$$G_0(k) = \frac{\mathbf{E}(k)}{1-k^2}, \quad (164)$$

$$G_1(k) = \frac{\mathbf{E}(k)}{1-k^2} - 2 \frac{\mathbf{G}(k)}{k^2}. \quad (165)$$

Man übersieht unmittelbar, daß $G_m(k)$ als Linearform in $\mathbf{E}(k)$ und $\mathbf{G}(k)$ darstellbar ist. Mit dem Ziel, die Singularität der Koeffizienten dieser Linearform an der Stelle $k=1$ zu beherrschen, betrachten wir die Zerlegung

$$G_m(k) = \left[\frac{1}{1-k^2} + p_m(k) \right] \mathbf{E}(k) + q_m(k) \mathbf{G}(k) \quad (m \geq 0). \quad (166)$$

Die rekursive Bestimmung der $p_m(k)$ und $q_m(k)$ geschieht dann infolge (163) bis (166) durch

$$\left. \begin{aligned} (2m-1)p_{m+1}(k) - 4m \frac{2-k^2}{k^2} p_m(k) + (2m+1)p_{m-1}(k) &= \frac{8m}{k^2} \quad (m \geq 1), \\ p_0(k) = 0, \quad p_1(k) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

$$\left. \begin{aligned} (2m-1)q_{m+1}(k) - 4m \frac{2-k^2}{k^2} q_m(k) + (2m+1)q_{m-1}(k) &= 0 \quad (m \geq 1), \\ q_0(k) = 0, \quad q_1(k) &= -\frac{2}{k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Die $p_m(k)$, $q_m(k)$, $m \geq 0$, sind also für alle $0 < k \leq 1$ regulär analytische Funktionen.

§ 14. Integrodifferentialgleichung für die Potentialamplitude

Benutzen wir (siehe Abb. 1)

$$[\mathbf{t}, \mathbf{n}] = -\mathbf{e}_\alpha, \quad (169)$$

so entsteht aus der Integralgleichung (37) durch skalare Multiplikation mit \mathbf{t} zunächst

$$\begin{aligned}
(\mathbf{t}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{e}_\alpha, [\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{e}_\alpha, [\mathbf{n}', \mathbf{v}'], \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' \right\} \\
= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' - \iint_{S_2} \frac{(\mathbf{n}', \mathbf{v}') (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} df' \right\}. \quad (170)
\end{aligned}$$

Nun besitzt die Lösung des azimutalabhängigen Randwertproblems aus eingangs erwähnten Gründen ein einwertiges Potential, und dieses ist für ein bestimmtes $m \geq 1$ von der Form

$$u = U e^{im\alpha} \quad (171)$$

mit von α unabhängigem U . Es folgt auf S_1 und S_2

$$\text{Grad } u = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \mathbf{t} + \frac{im}{x} U \mathbf{e}_\alpha \right) e^{im\alpha} \quad (172)$$

Wir nennen die reelle Größe U die „Potentialamplitude“ des Problems. Daß wir damit dem Potential u komplexe Werte unterstellen, hat seine Bewandnis lediglich darin, daß wir die Glieder mit $\cos m\alpha$ und $\sin m\alpha$, $m \geq 1$, in der Fourierreihe (65) auf diese Weise sehr leicht gemeinsam berücksichtigen können. Aus (58), (172) und Abb. 1 folgt weiter

$$[\mathbf{n}, \mathbf{v}] = - \left(\frac{\partial U}{\partial t} \mathbf{e}_\alpha - \frac{im}{x} U \mathbf{t} \right) e^{im\alpha}, \quad (173)$$

$$(\mathbf{t}, [\mathbf{n}, \mathbf{v}]) = \frac{im}{x} U e^{im\alpha}. \quad (174)$$

Nimmt man die in der Form

$$v_n = V_n e^{im\alpha} \quad (175)$$

vorgegebene Normalkomponente (V_n hängt wiederum nicht von α ab) hinzu, so ergibt sich durch Einsetzen von (173) bis (175) in (170) und anschließende Multiplikation mit

$$-\frac{ix}{m} e^{-im\alpha}$$

die folgende Integrodifferentialgleichung für die Potentialamplitude U auf S_1 und S_2 :

(1) Die willkürliche additive Konstante des Potentials u wird im folgenden stillschweigend durch die Forderung festgelegt, daß das über einem azimutalen Kreis genommene Mittel von u verschwindet.

(2) $\partial/\partial t$ bedeutet die auf S_1 und S_2 genommene Differentiation in Richtung von \mathbf{t} .

$$\begin{aligned}
U &+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \iint_{S_1} U' \frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{t}', \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} \frac{x}{\xi} e^{-im(\alpha - \alpha')} df' - \iint_{S_2} U' \frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{t}', \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} \frac{x}{\xi} e^{-im(\alpha - \alpha')} df' \right\} \\
&+ \frac{i}{2\pi m} \left\{ \iint_{S_1} \frac{\partial U'}{\partial t'} \frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} x e^{-im(\alpha - \alpha')} df' - \iint_{S_2} \frac{\partial U'}{\partial t'} \frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} x e^{-im(\alpha - \alpha')} df' \right\} \\
&= \frac{i}{2\pi m} \left\{ \iint_{S_1} V'_n \frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} x e^{-im(\alpha - \alpha')} df' - \iint_{S_2} V'_n \frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} x e^{-im(\alpha - \alpha')} df' \right\}. \quad (176)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (x \cos \alpha, \quad y, \quad x \sin \alpha), \\
\mathbf{x}' &= (\xi \cos \alpha', \quad \eta, \quad \xi \sin \alpha'), \\
\mathbf{t}' &= (t'_x \cos \alpha', \quad t'_y, \quad t'_x \sin \alpha'), \\
\mathbf{e}_\alpha &= (-\sin \alpha, \quad 0, \quad \cos \alpha), \\
\mathbf{e}'_{\alpha'} &= (-\sin \alpha', \quad 0, \quad \cos \alpha')
\end{aligned}$$

zeigt sich, daß

$$\frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{t}', \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} = - \frac{[x - \xi \cos(\alpha - \alpha')] t'_y - (y - \eta) \cos(\alpha - \alpha') t'_x}{((x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (177)$$

eine gerade Funktion ist und

$$\frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}'_{\alpha'}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} = \frac{(y - \eta) \sin(\alpha - \alpha')}{((x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (178)$$

$$\frac{(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{x} - \mathbf{x}')}{r^3} = \frac{\xi \sin(\alpha - \alpha')}{((x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (179)$$

ungerade Funktionen sind hinsichtlich $\alpha - \alpha'$. Damit verschwindet aber der Imaginärteil von (176) aus Symmetriegründen identisch, so daß eine *reelle* Integrodifferentialgleichung, nämlich der Realteil von (176), zur Bestimmung der Potentialamplitude U zu lösen übrig bleibt.

Durch Transformation auf den in § 5 eingeführten Kurvenparameter φ ergibt sich aus (176) bis (179)

$$\begin{aligned}
U_i(\varphi) &+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} X_{i1}(\varphi, \psi) U_1(\psi) d\psi - \int_0^{2\pi} X_{i2}(\varphi, \psi) U_2(\psi) d\psi \right\} \\
&+ \frac{i}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} Y_{i1}(\varphi, \psi) \dot{U}_1(\psi) d\psi - \int_0^{2\pi} Y_{i2}(\varphi, \psi) \dot{U}_2(\psi) d\psi \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} Z_{i1}(\varphi, \psi) ([\dot{x}_1(\psi)]^2 + [\dot{y}_1(\psi)]^2)^{\frac{1}{2}} V_{n1}(\psi) d\psi \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} Z_{i2}(\varphi, \psi) ([\dot{x}_2(\psi)]^2 + [\dot{y}_2(\psi)]^2)^{\frac{1}{2}} V_{n2}(\psi) d\psi \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (180)
\end{aligned}$$

mit den von α unabhängigen Kernen

$$X_{ij}(\varphi, \psi) = - \int_0^{2\pi} \frac{[x_i(\varphi) - x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha')] \dot{y}_j(\psi) - [y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \cos(\alpha - \alpha') \dot{x}_j(\psi)}{([x_i(\varphi)]^2 - 2x_i(\varphi)x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha') + [x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \times x_i(\varphi) \cos[m(\alpha - \alpha')] d\alpha' \quad (i, j = 1, 2), \quad (181)$$

$$Y_{ij}(\varphi, \psi) = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \frac{[y_i(\varphi) - y_j(\psi)] x_j(\psi) \sin(\alpha - \alpha')}{([x_i(\varphi)]^2 - 2x_i(\varphi)x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha') + [x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \times x_i(\varphi) \sin[m(\alpha - \alpha')] d\alpha' \quad (i, j = 1, 2), \quad (182)$$

$$Z_{ij}(\varphi, \psi) = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \frac{[x_j(\psi)]^2 \sin(\alpha - \alpha')}{([x_i(\varphi)]^2 - 2x_i(\varphi)x_j(\psi) \cos(\alpha - \alpha') + [x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \times x_i(\varphi) \sin[m(\alpha - \alpha')] d\alpha' \quad (i, j = 1, 2). \quad (183)$$

Um die erhaltenen Quadraturen auf elliptische Normalintegrale zurückzuführen, bilden wir mit (162) zunächst

$$G_{m\mp 1}(k) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \cos m\psi \pm \sin \psi \sin m\psi}{\left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} d\psi \quad (m \geq 1)$$

und erhalten damit

$$G_{m-1}(k) + G_{m+1}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \cos m\psi d\psi}{\left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (m \geq 1), \quad (184)$$

$$G_{m-1}(k) - G_{m+1}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi \sin m\psi d\psi}{\left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (m \geq 1). \quad (185)$$

In einer verallgemeinerten Form lauten (162), (184) und (185)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[m(\alpha - \alpha')] d\alpha'}{(x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{k^3}{2(x\xi)^{\frac{3}{2}}} G_m(k), \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \alpha') \cos[m(\alpha - \alpha')] d\alpha'}{(x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{k^3}{4(x\xi)^{\frac{3}{2}}} [G_{m-1}(k) - G_{m+1}(k)], \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha - \alpha') \sin[m(\alpha - \alpha')] d\alpha'}{(x^2 - 2x\xi \cos(\alpha - \alpha') + \xi^2 + (y - \eta)^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{k^3}{4(x\xi)^{\frac{3}{2}}} [G_{m-1}(k) - G_{m+1}(k)] \end{aligned} \right\} (m \geq 1),$$

wobei der Modul k wieder durch (104) gegeben ist. Denken wir uns in diesen Formeln $G_m(k)$ und $G_{m\mp 1}(k)$ gemäß (166) zerlegt, so folgt aus (181) bis (183) für $m \geq 1$ und $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
X_{ij}(\varphi, \psi) = & k_{ij}(\varphi, \psi) \left\{ \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) \overset{\infty}{K}_{ji}(\psi, \varphi) - [k_{ij}(\varphi, \psi)]^2 \right. \\
& \times \frac{p_{ij}(\varphi, \psi) \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) + q_{ij}(\varphi, \psi) \mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi)}{2} \frac{y_j(\psi)}{x_j(\psi)} \\
& - [k_{ij}(\varphi, \psi)]^2 \frac{[p_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) + p_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) + [q_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) + q_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi)}{4} \\
& \left. \times Q_{ji}(\psi, \varphi) \right\} \left(\frac{x_i(\varphi)}{x_j(\psi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (186)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{ij}(\varphi, \psi) = & [k_{ij}(\varphi, \psi)]^3 \frac{[p_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) - p_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) + [q_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) - q_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi)}{4m} \\
& \times \frac{y_i(\varphi) - y_j(\psi)}{(x_i(\varphi) x_j(\psi))^{\frac{1}{2}}}, \quad (187)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{ij}(\varphi, \psi) = & [k_{ij}(\varphi, \psi)]^3 \frac{[p_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) - p_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{E}_{ij}(\varphi, \psi) + [q_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) - q_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{G}_{ij}(\varphi, \psi)}{4m} \\
& \times \left(\frac{x_j(\psi)}{x_i(\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (188)
\end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen aus § 8 und den Abkürzungen

$$p_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) = p_{m-1}(k_{ij}(\varphi, \psi)), \quad q_{ij}^{(-)}(\varphi, \psi) = q_{m-1}(k_{ij}(\varphi, \psi)), \quad (189)$$

$$p_{ij}(\varphi, \psi) = p_m(k_{ij}(\varphi, \psi)), \quad q_{ij}(\varphi, \psi) = q_m(k_{ij}(\varphi, \psi)), \quad (190)$$

$$p_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi) = p_{m+1}(k_{ij}(\varphi, \psi)), \quad q_{ij}^{(+)}(\varphi, \psi) = q_{m+1}(k_{ij}(\varphi, \psi)). \quad (191)$$

Mit der Potentialamplitude $U_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, beherrscht man unmittelbar die Tangentialkomponenten von \mathbf{v} auf den Berandungen S_1 und S_2

$$v_{ij} = V_{ij} e^{im\alpha} \quad (j = 1, 2), \quad (192)$$

$$v_{\alpha j} = i V_{\alpha j} e^{im\alpha} \quad (j = 1, 2); \quad (193)$$

dabei ist $v_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{v})$ gesetzt, und die (reellen) Amplituden der Tangentialkomponenten sind wegen (4) und (172) durch

$$V_{ij}(\varphi) = -\dot{U}_j(\varphi) ([\dot{x}_j(\varphi)]^2 + [\dot{y}_j(\varphi)]^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2), \quad (194)$$

$$V_{\alpha j}(\varphi) = -\frac{m U_j(\varphi)}{x_j(\varphi)} \quad (j = 1, 2) \quad (195)$$

gegeben.

§ 15. Zerlegung der Kerne $X_{ii}(\varphi, \psi)$, $Y_{ii}(\varphi, \psi)$ und $Z_{ii}(\varphi, \psi)$

Zur Behandlung der Singularität der Kerne (186) bis (188) im Falle $i=j$ an der Stelle $\varphi = \psi$ zerspalten wir diese Ausdrücke für $i=1, 2$ entsprechend § 10 in

$$X_{ii}(\varphi, \psi) = X_{ii}^*(\varphi, \psi) + X_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right), \quad (196)$$

$$Y_{ii}(\varphi, \psi) = Y_{ii}^*(\varphi, \psi) + Y_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right), \quad (197)$$

$$Z_{ii}(\varphi, \psi) = Z_{ii}^*(\varphi, \psi) + Z_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left(4 \sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} \right) \quad (198)$$

mit den stetigen Anteilen

$$\begin{aligned} X_{ii}^*(\varphi, \psi) = & k_{ii}(\varphi, \psi) \left\{ \bar{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) \bar{K}_{ii}(\psi, \varphi) - [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2 \right. \\ & \times \frac{p_{ii}(\varphi, \psi) \bar{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) + q_{ii}(\varphi, \psi) \bar{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi)}{2} \frac{y_i(\psi)}{x_i(\psi)} \\ & \left. - [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2 \frac{[p_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) + p_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \bar{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) + [q_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) + q_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \bar{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi)}{4} Q_{ii}(\psi, \varphi) \right\} \\ & \times \left(\frac{x_i(\varphi)}{x_i(\psi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (199) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = & -\frac{1}{2} k_{ii}(\varphi, \psi) \left\{ \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \bar{K}_{ii}(\psi, \varphi) - [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2 \right. \\ & \times \frac{p_{ii}(\varphi, \psi) \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) + q_{ii}(\varphi, \psi) \mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi)}{2} \frac{y_i(\psi)}{x_i(\psi)} \\ & \left. - [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2 \frac{[p_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) + p_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) + [q_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) + q_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi)}{4} \right. \\ & \left. \times Q_{ii}(\psi, \varphi) \right\} \left(\frac{x_i(\varphi)}{x_i(\psi)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (200) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{ii}^*(\varphi, \psi) = & [k_{ii}(\varphi, \psi)]^2 \frac{[p_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - p_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \bar{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) + [q_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - q_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \bar{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi)}{4m} \\ & \times \frac{y_i(\varphi) - y_i(\psi)}{(x_i(\varphi) x_i(\psi))^{\frac{1}{2}}}, \quad (201) \end{aligned}$$

$$Y_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} [k_{ii}(\varphi, \psi)]^3 \\ \times \frac{[p_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - p_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) + [q_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - q_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \frac{y_i(\varphi) - y_i(\psi)}{(x_i(\varphi)x_i(\psi))^{\frac{1}{2}}}}{4m}, \quad (202)$$

$$Z_{ii}^*(\varphi, \psi) = [k_{ii}(\varphi, \psi)]^3 \\ \times \frac{[p_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - p_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \tilde{\mathbf{E}}_{ii}(\varphi, \psi) + [q_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - q_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \tilde{\mathbf{G}}_{ii}(\varphi, \psi) \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)}\right)^{\frac{1}{2}}}{4m}, \quad (203)$$

$$Z_{ii}^{**}(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} [k_{ii}(\varphi, \psi)]^3 \\ \times \frac{[p_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - p_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{E}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) + [q_{ii}^{(-)}(\varphi, \psi) - q_{ii}^{(+)}(\varphi, \psi)] \mathbf{G}_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \left(\frac{x_i(\psi)}{x_i(\varphi)}\right)^{\frac{1}{2}}}{4m}. \quad (204)$$

Für $\varphi = \psi$ sind hierin die Grenzwerte (116), (145) und (146) einzusetzen.

§ 16. Linear unabhängiges Gleichungssystem für die Potentialamplitude

Seien die Kerne (181) bis (183) des Integrodifferentialgleichungssystems (180) im Falle $i=j$ gemäß (196) bis (198) zerlegt, so erhalten wir auf Grund der bereits benutzten Quadraturformeln sowie der Formel (80) zur numerischen Differentiation

$$\dot{U}_{i\varrho} = \sum_{\nu=0}^{2N-1} D_{\nu-\varrho} U_{i\nu} \quad (i=1, 2, \varrho=0, \dots, 2N-1)$$

für die Potentialamplitude das linear unabhängige Gleichungssystem

$$U_{1\mu} + \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left(\frac{1}{2N} X_{11\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} X_{11\mu\nu}^{**} \right) U_{1\nu} - \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} X_{12\mu\nu} U_{2\nu} \\ + \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{2N-1} \left(\frac{1}{2N} Y_{11\mu\varrho}^* + R_{\varrho-\mu} Y_{11\mu\varrho}^{**} \right) D_{\nu-\varrho} \right\} U_{1\nu} - \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left(\sum_{\varrho=0}^{2N-1} Y_{12\mu\varrho} D_{\nu-\varrho} \right) U_{2\nu} \\ = \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left(\frac{1}{2N} Z_{11\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} Z_{11\mu\nu}^{**} \right) (x_{1\nu}^2 + y_{1\nu}^2)^{\frac{1}{2}} V_{n1\nu} - \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} Z_{12\mu\nu} (x_{2\nu}^2 + y_{2\nu}^2)^{\frac{1}{2}} V_{n2\nu} \\ (\mu = 0, \dots, 2N-1), \quad (205)$$

$$U_{2\mu} + \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} X_{21\mu\nu} U_{1\nu} - \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left(\frac{1}{2N} X_{22\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} X_{22\mu\nu}^{**} \right) U_{2\nu} \\ + \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left(\sum_{\varrho=0}^{2N-1} Y_{21\mu\varrho} D_{\nu-\varrho} \right) U_{1\nu} - \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{2N-1} \left(\frac{1}{2N} Y_{22\mu\varrho}^* + R_{\varrho-\mu} Y_{22\mu\varrho}^{**} \right) D_{\nu-\varrho} \right\} U_{2\nu} \\ = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} Z_{21\mu\nu} (x_{1\nu}^2 + y_{1\nu}^2)^{\frac{1}{2}} V_{n1\nu} - \sum_{\nu=0}^{2N-1} \left(\frac{1}{2N} Z_{22\mu\nu}^* + R_{\nu-\mu} Z_{22\mu\nu}^{**} \right) (x_{2\nu}^2 + y_{2\nu}^2)^{\frac{1}{2}} V_{n2\nu} \\ (\mu = 0, \dots, 2N-1). \quad (206)$$

Definieren wir die Spaltenmatrizen

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{10} \\ \vdots \\ U_{1,2N-1} \\ U_{20} \\ \vdots \\ U_{2,2N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} V_{n10} \\ \vdots \\ V_{n1,2N-1} \\ V_{n20} \\ \vdots \\ V_{n2,2N-1} \end{pmatrix}, \quad (207)$$

so ist die allgemeine Lösung von (205) und (206) offenbar wieder mit Hilfe einer Randmatrix

$$\mathbf{M}^{(m)} = \begin{pmatrix} M_{00}^{(m)} & M_{01}^{(m)} & \cdots & M_{0,4N-1}^{(m)} \\ M_{10}^{(m)} & M_{11}^{(m)} & \cdots & M_{1,4N-1}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{4N-1,0}^{(m)} & M_{4N-1,1}^{(m)} & \cdots & M_{4N-1,4N-1}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (208)$$

in der Form

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{(m)} \mathbf{V}_n \quad (209)$$

darstellbar. Die einzelnen Spalten der Randmatrix (208) sind dabei erklärt als die Lösungen von (205) und (206), wenn man nacheinander die Normalkomponentenamplituden

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (210)$$

vorschreibt. Praktisch bedeutet dieses die Auflösung eines linearen Gleichungssystems mit $4N$ Unbekannten und $4N$ rechten Seiten.

Im Gegensatz zum azimutalunabhängigen Randwertproblem hat man hier bei der numerischen Berechnung der Kernmatrizen nicht den Effekt, daß die Diagonalelemente herausfallen. Demzufolge müssen die Grenzwerte (116), (145) und (146) und damit die zweiten Ableitungen $\ddot{x}_i(\varphi)$, $\ddot{y}_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, zur Bestimmung der betreffenden Diagonalelemente herangezogen werden.

§ 17. Zweites numerisches Beispiel

Wir legen wieder die durch (159) erzeugten torusartigen Berandungen zugrunde. Die gemäß § 16 berechnete Randmatrix $\mathbf{M}^{(m)}$ ist für $m = 3$ in Tab. 5 angegeben (Stützstellenzahl $2N = 12$ auf C_1 und C_2).

Zur Prüfung der Genauigkeit betrachten wir die mit einer ganzen Zahl $m \geq 1$ in B, S_1, S_2 erklärte harmonische Funktion

$$u = \frac{e^{imz}}{x^m}. \quad (211)$$

TABELLE 5. *Randmatrix* $M^{(3)}$ für $2N = 12$ Stützstellen.

σ	$M_{\sigma 0}^{(3)}$	$M_{\sigma 1}^{(3)}$	$M_{\sigma 2}^{(3)}$	$M_{\sigma 3}^{(3)}$	$M_{\sigma 4}^{(3)}$	$M_{\sigma 5}^{(3)}$
0	0,082425	0,056255	0,038196	0,029084	0,026626	0,027308
1	0,060018	0,076809	0,047012	0,032842	0,029588	0,028792
2	0,047863	0,055227	0,064460	0,040390	0,033106	0,031617
3	0,040999	0,043359	0,045421	0,056110	0,040965	0,035168
4	0,035311	0,036826	0,035045	0,038590	0,058061	0,044078
5	0,032204	0,031762	0,029742	0,029390	0,039132	0,664029
6	0,030806	0,029504	0,025992	0,025196	0,029731	0,042807
7	0,032204	0,028978	0,024771	0,022500	0,025970	0,032872
8	0,035311	0,030902	0,024868	0,021916	0,023665	0,029250
9	0,040999	0,034090	0,026716	0,022217	0,023263	0,026927
10	0,047863	0,039286	0,029338	0,023755	0,023497	0,026330
11	0,060018	0,045359	0,033436	0,025820	0,024823	0,026270
12	0,057550	0,050528	0,037404	0,028548	0,026407	0,026946
13	0,051735	0,052356	0,042635	0,033024	0,029806	0,029103
14	0,042447	0,044755	0,041105	0,035524	0,033175	0,031902
15	0,035418	0,036802	0,034707	0,032888	0,033927	0,034013
16	0,030894	0,031259	0,029149	0,028311	0,031508	0,034271
17	0,028330	0,027812	0,025359	0,024501	0,028127	0,032867
18	0,027498	0,026115	0,023150	0,021964	0,025297	0,030825
19	0,028330	0,026014	0,022326	0,020623	0,023437	0,028959
20	0,030894	0,027401	0,022670	0,020288	0,022469	0,027531
21	0,035418	0,030371	0,024219	0,020809	0,022217	0,026493
22	0,042447	0,035298	0,027070	0,022246	0,022659	0,025849
23	0,051735	0,042479	0,031530	0,024807	0,023998	0,025886

σ	$M_{\sigma 6}^{(3)}$	$M_{\sigma 7}^{(3)}$	$M_{\sigma 8}^{(3)}$	$M_{\sigma 9}^{(3)}$	$M_{\sigma 10}^{(3)}$	$M_{\sigma 11}^{(3)}$
0	0,027518	0,027308	0,026626	0,029084	0,038196	0,056255
1	0,028055	0,026270	0,024823	0,025820	0,033436	0,045359
2	0,029088	0,026330	0,023497	0,023755	0,029338	0,039286
3	0,031659	0,026927	0,023262	0,022217	0,026716	0,034090
4	0,035214	0,029250	0,023665	0,021916	0,024868	0,030902
5	0,044992	0,032872	0,025970	0,022500	0,024771	0,028978
6	0,066739	0,042807	0,029731	0,025196	0,025992	0,029504
7	0,044992	0,064029	0,039132	0,029390	0,029742	0,031762
8	0,035214	0,044078	0,058061	0,038590	0,035045	0,036826
9	0,031659	0,035168	0,040965	0,056110	0,045421	0,043359
10	0,029088	0,031617	0,033106	0,040390	0,064460	0,055227
11	0,028055	0,028792	0,029588	0,032842	0,047012	0,076809
12	0,027305	0,026946	0,026407	0,028548	0,037404	0,050528
13	0,027869	0,025886	0,023998	0,024807	0,031530	0,042479
14	0,029347	0,025849	0,022659	0,022246	0,027070	0,035298
15	0,031076	0,026493	0,022217	0,020809	0,024219	0,030371
16	0,032458	0,027531	0,022469	0,020288	0,022700	0,027401

Tab. 5 (Forts.)

σ	$M_{\sigma 6}^{(3)}$	$M_{\sigma 7}^{(3)}$	$M_{\sigma 8}^{(3)}$	$M_{\sigma 9}^{(3)}$	$M_{\sigma 10}^{(3)}$	$M_{\sigma 11}^{(3)}$
17	0,033285	0,028959	0,023437	0,020623	0,022326	0,026014
18	0,003553	0,030825	0,025297	0,021964	0,023150	0,026115
19	0,033285	0,032867	0,028127	0,024501	0,025359	0,027812
20	0,032458	0,034271	0,031508	0,028311	0,029149	0,031259
21	0,031076	0,034013	0,033927	0,032888	0,034707	0,036802
22	0,029347	0,031902	0,033175	0,035524	0,041105	0,044755
23	0,027869	0,029103	0,029806	0,033024	0,042635	0,052356
σ	$M_{\sigma 12}^{(3)}$	$M_{\sigma 13}^{(3)}$	$M_{\sigma 14}^{(3)}$	$M_{\sigma 15}^{(3)}$	$M_{\sigma 16}^{(3)}$	$M_{\sigma 17}^{(3)}$
0	-0,174005	-0,152672	-0,116743	-0,087805	-0,068120	-0,056859
1	-0,162963	-0,164818	-0,131384	-0,097309	-0,073573	-0,059522
2	-0,141767	-0,157630	-0,141711	-0,107779	-0,080592	-0,063741
3	-0,121609	-0,137304	-0,137721	-0,114857	-0,087991	-0,069268
4	-0,105957	-0,116725	-0,121114	-0,111596	-0,092232	-0,074890
5	-0,095978	-0,101160	-0,103393	-0,099309	-0,089054	-0,077678
6	-0,092525	-0,092164	-0,090485	-0,086322	-0,080243	-0,074843
7	-0,095978	-0,089976	-0,083774	-0,077352	-0,071541	-0,068443
8	-0,105957	-0,093974	-0,082728	-0,073077	-0,065773	-0,062402
9	-0,121609	-0,103150	-0,086225	-0,072679	-0,063050	-0,058307
10	-0,141767	-0,116574	-0,093343	-0,075215	-0,062761	-0,056121
11	-0,162963	-0,133698	-0,103612	-0,080283	-0,064499	-0,055666
12	-0,230406	-0,161522	-0,115473	-0,087666	-0,067022	-0,056706
13	-0,165499	-0,222627	-0,145830	-0,099947	-0,075664	-0,059558
14	-0,126971	-0,156360	-0,204193	-0,126398	-0,085292	-0,066792
15	-0,106806	-0,119114	-0,140231	-0,133467	-0,109062	-0,074602
16	-0,092112	-0,100984	-0,106548	-0,122451	-0,165172	-0,096970
17	-0,085111	-0,087924	-0,091323	-0,092340	-0,106536	-0,152451
18	-0,082034	-0,082317	-0,080714	-0,080138	-0,079797	-0,095686
19	-0,085111	-0,080560	-0,076873	-0,072024	-0,070244	-0,071738
20	-0,092112	-0,084526	-0,075999	-0,069549	-0,063839	-0,063959
21	-0,106806	-0,091866	-0,079922	-0,068800	-0,061974	-0,058163
22	-0,126971	-0,106744	-0,086411	-0,072063	-0,060805	-0,056248
23	-0,165499	-0,126229	-0,099570	-0,077062	-0,063356	-0,054555
σ	$M_{\sigma 18}^{(3)}$	$M_{\sigma 19}^{(3)}$	$M_{\sigma 20}^{(3)}$	$M_{\sigma 21}^{(3)}$	$M_{\sigma 22}^{(3)}$	$M_{\sigma 23}^{(3)}$
0	-0,053131	-0,056859	-0,068120	-0,087805	-0,116743	-0,152672
1	-0,053874	-0,055666	-0,064499	-0,080283	-0,103612	-0,133698
2	-0,056098	-0,056121	-0,062761	-0,075215	-0,093343	-0,116574
3	-0,059823	-0,058307	-0,063050	-0,072679	-0,086225	-0,103150
4	-0,064898	-0,062402	-0,065773	-0,073077	-0,082728	-0,093974

Tab 5. (Forts.)

σ	$M_{\sigma 18}^{(3)}$	$M_{\sigma 19}^{(3)}$	$M_{\sigma 20}^{(3)}$	$M_{\sigma 21}^{(3)}$	$M_{\sigma 22}^{(3)}$	$M_{\sigma 23}^{(3)}$
5	-0,070200	-0,068443	-0,071541	-0,077352	-0,083774	-0,089976
6	-0,072698	-0,074843	-0,080243	-0,086322	-0,090485	-0,092164
7	-0,070200	-0,077678	-0,089054	-0,099309	-0,103393	-0,101160
8	-0,064898	-0,074890	-0,092232	-0,111596	-0,121114	-0,116725
9	-0,059823	-0,069268	-0,087991	-0,114857	-0,137721	-0,137304
10	-0,056098	-0,063741	-0,080592	-0,107779	-0,141711	-0,157630
11	-0,053874	-0,059522	-0,073573	-0,097309	-0,131384	-0,164818
12	-0,052201	-0,056706	-0,067022	-0,087666	-0,115473	-0,161522
13	-0,054175	-0,054555	-0,063356	-0,077062	-0,099570	-0,126229
14	-0,056504	-0,056248	-0,060805	-0,072063	-0,086411	-0,106744
15	-0,062674	-0,058163	-0,061974	-0,068800	-0,079922	-0,091866
16	-0,069835	-0,063959	-0,063839	-0,069549	-0,075999	-0,084526
17	-0,092232	-0,071738	-0,070244	-0,072024	-0,076873	-0,080560
18	-0,147868	-0,095686	-0,079797	-0,080138	-0,080714	-0,082317
19	-0,092232	-0,152451	-0,106536	-0,092340	-0,091323	-0,087924
20	-0,069835	-0,096970	-0,165172	-0,122451	-0,106548	-0,100984
21	-0,062674	-0,074602	-0,109062	-0,183467	-0,140231	-0,119114
22	-0,056504	-0,066792	-0,085292	-0,126398	-0,204193	-0,156360
23	-0,054175	-0,059558	-0,075664	-0,099947	-0,145830	-0,222627

Die Komponenten des zugehörigen harmonischen Vektorfeldes (4) sind dann auf S_1 und S_2 gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} v_{n1} &= \frac{0,08 m \cos \varphi e^{im\alpha}}{(1,05 + 0,06 \cos \varphi)^{m+1} ((0,06 \sin \varphi)^2 + (0,08 \cos \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}} = V_{n1}(\varphi) e^{im\alpha}, \\ v_{n2} &= \frac{m \cos \varphi e^{im\alpha}}{(1 + 0,22 \cos \varphi)^{m+1}} = V_{n2}(\varphi) e^{im\alpha}, \end{aligned} \right\} (212)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{t1} &= -\frac{0,06 m \sin \varphi e^{im\alpha}}{(1,05 + 0,06 \cos \varphi)^{m+1} ((0,06 \sin \varphi)^2 + (0,08 \cos \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}} = V_{t1}(\varphi) e^{im\alpha}, \\ v_{t2} &= -\frac{m \sin \varphi e^{im\alpha}}{(1 + 0,22 \cos \varphi)^{m+1}} = V_{t2}(\varphi) e^{im\alpha}, \end{aligned} \right\} (213)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{\alpha 1} &= -\frac{i m e^{im\alpha}}{(1,05 + 0,06 \cos \varphi)^{m+1}} = i V_{\alpha 1}(\varphi) e^{im\alpha}, \\ v_{\alpha 2} &= -\frac{i m e^{im\alpha}}{(1 + 0,22 \cos \varphi)^{m+1}} = i V_{\alpha 2}(\varphi) e^{im\alpha}. \end{aligned} \right\} (214)$$

TABELLE 6. *Normalkomponenten- und Potentialamplitude auf S_1 und S_2 für $2N = 12, m = 3$.*

μ	$V_{n1\mu}$	$V_{n2\mu}$	$U_{1\mu}$		$U_{2\mu}$	
			exakt	Näherung	exakt	Näherung
0	1,976193	1,354197	0,73119	0,73141	0,55071	0,55073
1	1,866976	1,293293	0,74731	0,74731	0,59263	0,59266
2	1,345092	0,988096	0,79383	0,79371	0,73119	0,73116
3	0,000000	0,000000	0,86384	0,86388	1,00000	1,00002
4	-1,690621	-2,390734	0,94232	0,94232	1,41850	1,41849
5	-2,774695	-6,051170	1,00591	1,00591	1,88534	1,88536
6	-3,123061	-8,104810	1,03061	1,03061	2,10725	2,10724
7	-2,774695	-6,051170	1,00591	1,00591	1,88534	1,88536
8	-1,690621	-2,390734	0,94232	0,94232	1,41850	1,41849
9	0,000000	0,000000	0,86384	0,86388	1,00000	1,00002
10	1,345092	0,988096	0,79383	0,79371	0,73119	0,73116
11	1,866976	1,293293	0,74731	0,74731	0,59263	0,59266

TABELLE 7. *Tangentialkomponentenamplituden auf S_1 und S_2 für $2N = 12, m = 3$.*

μ	$V_{t1\mu}$		$V_{t2\mu}$		$V_{\alpha 1\mu}$		$V_{\alpha 2\mu}$	
	exakt	Näherung	exakt	Näherung	exakt	Näherung	exakt	Näherung
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,9762	-1,9768	-1,3542	-1,3543
1	-0,8084	-0,8006	-0,7467	-0,7467	-2,0345	-2,0345	-1,4934	-1,4934
2	-1,7473	-1,7508	-1,7114	-1,7107	-2,2051	-2,2047	-1,9762	-1,9761
3	-2,4681	-2,4705	-3,0000	-3,0010	-2,4681	-2,4682	-3,0000	-3,0001
4	-2,1962	-2,1943	-4,1409	-4,1398	-2,7715	-2,7715	-4,7815	-4,7814
5	-1,2015	-1,2020	-3,4936	-3,4944	-3,0237	-3,0237	-6,9873	-6,9873
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-3,1231	-3,1231	-8,1048	-8,1048
7	1,2015	1,2020	3,4936	3,4944	-3,0237	-3,0237	-6,9873	-6,9873
8	2,1962	2,1943	4,1409	4,1398	-2,7715	-2,7715	-4,7815	-4,7814
9	2,4681	2,4705	3,0000	3,0010	-2,4681	-2,4682	-3,0000	-3,0001
10	1,7473	1,7508	1,7114	1,7107	-2,2051	-2,2047	-1,9762	-1,9761
11	0,8084	0,8006	0,7467	0,7467	-2,0345	-2,0345	-1,4934	-1,4934

Entsprechend bekommen wir für das Potential (211) auf den Berandungen

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{e^{im\alpha}}{(1,05 + 0,06 \cos \varphi)^m} = U_1(\varphi) e^{im\alpha}, \\ u_2 &= \frac{e^{im\alpha}}{(1 + 0,22 \cos \varphi)^m} = U_2(\varphi) e^{im\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

Für $m=3$ finden sich die exakten Werte der Amplituden von (212) und (215) bzw. in den Spalten 2, 3, 4 und 6 von Tab. 6. Die gemäß (209) mit Hilfe der Randmatrix $M^{(3)}$ berechneten Näherungswerte der Potentialamplitude sind in den Spalten 5 und 7 von Tab. 6 aufgeführt. Tab. 7 enthält die exakten Werte der Amplituden von (213) und (214) und die entsprechenden, aus (80), (194), (195) und Tab. 6 (Spalten 5 und 7) numerisch berechneten Näherungen.

Die numerisch berechnete Potentialamplitude (Tab. 6) besitzt eine fast fünfstellige numerische Genauigkeit. Allein der Wert U_{10} enthält eine geringe Abweichung in der vierten Stelle. Da sich die Fehler bei der numerischen Differentiation naturgemäß sehr stark fortpflanzen, bekommt man für den Wert V_{t11} in Tab. 7 einen verhältnismäßig großen Fehler, der jedoch die von der Anwendung her gestellten Genauigkeitsanforderungen keinesfalls überschreiten dürfte. Alle anderen Näherungswerte in Tab. 7 enthalten durchweg eine beträchtlich größere Genauigkeit.

Grundsätzlich kann man durch Vergrößerung der Anzahl der Stützstellen jede gewünschte Genauigkeit erreichen, wenn man von dem Einfluß der Rundungsfehler absieht. Weitere Beispielrechnungen, die hier nicht aufgeführt werden können, haben gezeigt, daß mit der Verdoppelung der Stützstellenzahl im allgemeinen mehrere richtige Dezimalstellen dazu gewonnen werden.

Literatur

- [1]. BERNSTEIN, I. B., FRIEMAN, E. A., KRUSKAL, M. D. & KULSRUD, R. M., An energy principle for hydromagnetic stability problems. *Proc. Royal Soc. A*, 244 (1958), 17–40.
- [2]. BLANK, A. A., FRIEDRICH, K. O. & GRAD, H., Theory of Maxwell's equations without displacement current. Theory on Magneto-Hydrodynamics V. *AEC Research and Development Report NYO-6486*, Institute of Mathematical Sciences, New York University (1957).
- [3]. GARRICK, I. E., *Conformal Mapping in Aerodynamics, with Emphasis on the Method of Successive Conjugates*. Proceedings of a Symposium: Construction and Application of Conformal Maps. Washington 1952.
- [4]. GOURSAT, É., *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III. Paris: Gauthier-Villars 1942.
- [5]. JAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*. Leipzig: Teubner 1948.
- [6]. KELLOGG, O. D., *Foundations of Potential Theory*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. XXXI. Berlin: Springer 1929.
- [7]. LÜST, R. & MARTENSEN, E., Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas. *Z. Naturforsch.*, 15 a (1960), 706–713.
- [8]. MARTENSEN, E., Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1959), 235–270.

- [9]. —, *Numerische Auflösung der Integralgleichung des Robinschen Problems für eine torusartige Berandung*. Symposium on the numerical treatment of ordinary differential equations, integral and integro-differential equations, 129–150. Basel: Birkhäuser 1960.
- [10]. MARTENSEN, E. & v. SENGBUSCH, K., *Über die Randkomponenten ebener harmonischer Vektorfelder*. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 5 (1960), 46–75.
- [11]. WILLERS, F. A., *Methoden der praktischen Analysis*. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950.

Eingegangen am 3. Mai 1961.