UN THÉORÈME DE RÉALISATION DE GROUPES RÉTICULÉS

P. RIBENBOIM

En 1939, Lorenzen [4] a demontré que tout groupe réticulé est isomorphe à un sous-groupe sous-réticulé d'un produit direct de groupes totalement ordonnés. Pour le faire, il a utilisé la théorie des systèmes d'idéaux, introduite auparavant par Krull [2] dans l'arithmétique des anneaux d'intégrité commutatifs.

Dans cette note, nous démontrons ce même théorème par une methode distincte, qui utilise la notion de filet de Jaffard [1]. Notre démonstration semble plus transparente et met en relief certains aspects d'intérêt qui ne sont pas du tout apparents dans le travail de Lorenzen: (1) la réalisation qui nous obtenons est complètement régulière, de Hausdorff et fidèle (ces termes sont définis ci-dessous); (2) il y a une relation entre les ultrafiltres de l'ensemble des filets du groupe donné et les pré-ordres totaux plus fins, laquelle est utile pour exprimer l'ordre donné comme la conjonction d'ordres totaux plus fins (cf. Krull [3], Ribenboim [5, 6]).

1. Rappelons d'abord les définitions et résultats qui seront utilisés. Soit G un groupe (abélien additif) réticulé (selon l'ordre $\leqq$) et notons P l'ensemble des éléments positifs de G; G est un réticulé distributif. Si $f \in P$ soit $E(f) = \{g \in P \mid g \wedge f = 0\}$ l'ensemble des éléments de P étrangers à f. Posons $f \equiv g$ si et seulement si $E(f) = E(g)$. La classe d'équivalence $\bar{f}$ contenant l'élément $f \in P$ s'appelle le *filet* de f. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des filets du groupe G, determinés par les éléments $f \in P$. $\mathscr{F}$ est ordonné en posant $\bar{f} \leqq \bar{g}$ si et seulement si $E(f) \supseteq E(g)$; $\mathscr{F}$ possède un premier élément $\bar{0} = \{0\}$; si $f, g \in P, f \leqq g$ alors $\bar{f} \leqq \bar{g}$; $\mathscr{F}$ est un réticulé distributif:

$$\bar{f} \wedge \bar{g} = \overline{f \wedge g}, \bar{f} \vee \bar{g} = \overline{f \vee g} = \overline{f+g};$$

on a $\bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$ si et seulement si $f \wedge g = 0$; $\mathscr{F}$ est disjonctif: si $\bar{f}, \bar{g} \in \mathscr{F}$ $\bar{f}$ ne suit pas $\bar{g}$ dans $\mathscr{F}$, il existe $\bar{h} \in \mathscr{F}$ tel que $\bar{0} \neq \bar{h} \leqq \bar{g}, \bar{h} \wedge \bar{f} = \bar{0}$.

Si $f \in G$(mais non nécessairement $f \in P$) posons par définition: $\bar{f} = \bar{f_+} \vee \bar{f_-}$, donc $\bar{f} = \overline{|f|}$, où $|f| = f_+ + f_- \in P$.

Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes totalement ordonnés, $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ leur produit direct ordonné; un isomorphisme θ d'un groupe ordonné G dans $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ s'appelle une *réalisation* lorsque $pr_\iota \theta(G) = G_\iota$ quelque soit $\iota \in I$. Par un théoréme de Lorenzen-Dieudonné, un groupe ordonné G admet une réalisation si et seulement s'il vérifie la condition suivante: si $f \in G$

Received March 16, 1959.