ÜBER ABBILDUNGEN VON MENGEN

MIROSLAV NOVOTNÝ

1. Einleitung. Im Jahre 1952 habe ich folgendes Problem gelöst: Gegeben sind die Mengen M, N und die Abbildung f der Menge M in sich und die Abbildung g der Menge N in sich. Es sind alle solchen Abbildungen F der Menge M in die Menge N zu konstruieren, dass $F[f(x)] = g[F(x)]$ für jedes $x \in M$ gilt. Dieses Ergebnis erschien in einer tschechisch geschriebenen Arbeit [4], welche daher den Mathematikern schwer verständlich war. Damit lässt sich erklären, dass indessen einige Arbeiten erschienen sind, welche Spezialfälle des obigen Problems behandeln ohne meine Lösung anzuwenden: So hat sich M. W. Weaver mit dem Falle beschäftigt, in welchem $M = N, M$ endlich und f eineindeutig war [5]; S. Prešić hat den Fall behandelt, in welchem f eine eineindeutige Abbildung der Menge M auf sich und g die identische Abbildung der Menge N auf sich war [3].

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist meine Lösung des Problems deutsch erscheinen zu lassen und zu zeigen, wie aus meiner Lösung die Lösung der Probleme von Weaver und von Prešić folgt. Ferner ergeben sich aus meinem Hauptsatz auch einige Resultate, die sich in Burnsides Buch [1] befinden. Ich will auch darauf hinweisen, dass aus meinem Hauptsatz die Konstruktion aller Homomorphismen einer gegebenen unären Algebra in eine gegebene unäre Algebra folgt, was ein Beitrag zu der in [2] von J. G. Marica und S. J. Bryant behandelten Problematik ist.

Übliche Begriffe und Symbolik der Mengenlehre werden als bekannt vorausgesetzt. $\varnothing$ ist die leere Menge, $\{x\}$ ist die Menge, die x als einziges Element enthält. Ist M eine Menge, f eine Abbildung dieser Menge, E eine Eigenschaft, welche die Elemente von M entweder haben oder nicht haben, so ist $\{f(x) \mid E(x)\}$ die Menge aller $f(x)$, für welche $E(x)$ richtig ist. Ist M eine Menge, so wird unter einer Zerlegung Z auf dieser Menge ein System von nicht leeren paarweise fremden Teilmengen von M verstanden, für welches $\bigcup_{T \in Z} T = M$ gilt.

Ist f eine Abbildung der Menge M in die Menge $N, y \in N$ ein beliebiges Element, so setzen wir $f_{-1}(y) = \{x \mid x \in M, f(x) = y\}$. Ist $T \subseteqq M$, $U \subseteqq N$, so wird $f(T) = \{f(x) \mid x \in T\}$, $f_{-1}(U) = \{x \mid x \in M, f(x) \in U\}$ gesetzt. Ist $P \subseteqq M$, so ist f_P eine solche Abbildung der Menge P, dass $f_P(x) = f(x)$ für jedes $x \in P$ gilt.

$\bar{P}$ ist die Mächtigkeit der Menge P, $\bar{\alpha}$ die Mächtigkeit der Ordinalzahl α. Mit ω bezeichnen wir die kleinste unendliche Ordinalzahl.

2. Hauptsatz über Abbildungen. In diesem Absatz bezeichnen