PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 39, No. 3, 1971

STRUCTURES UNIFORMES FAIBLES SUR UNE CLASSE DE CÔNES ET D'ENSEMBLES CONVEXES

HICHAM FAKHOURY

On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un cone saillant C recouvert par une famille dénombrable et filtrante croissante de convexes compacts $(K_n)_{n \in IN}$ soit complet pour la plus fine des structures uniformes faibles compatibles avec la topologie des compacts $(K_n)_{n \in N}$. Il en est ainsi lorsque pour tout entier n, le convexe est un chapeau de C. On en déduit que tout convexe *fermé* recouvert par une famille analogue de chapeaux peut etre muni d'une structure uniforme faiblement complète. Dans la dernière partie on compare diverses structures uniformes faibles sur le cone C, ce qui permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour que la topologie induite par la plus fine des structures uniformes faibles compatibles avec la topologie des convexes compacts coincide avec la topologie de C.

I. Représentatiôn d'un cone convexe. Soient E un espace localement convexe séparé (e.l.c.) et C un cône convexe *saillant* qui engendre E. On appelle *chapeau* de C tout convexe compact $K \subset C$ dont le complémentaire est convexe; un tel chapeau est *universel* s'il engendre C. Un cône est *bien coiffé* s'il est réunion de ses chapeaux. Dans la suite, on considérera la famille des convexes compacts de C; on peut donc, sans diminuer la généralité, supposer E muni de la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$. Si F est un espace vectoriel en dualité séparante avec E on notera $\sigma(C, F)$ *la structure uniforme* induite sur C par $\sigma(E, F)$.

Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de convexes compacts admettant l'origine comme point extrémal et recouvrant C; on note A l'espace des formes linéaires sur E dont la restriction à chaque convexe K_i est continue. Cet espace sera muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout convexe K_i. L'espace A dépend en général de la famille $(K_i)_{i \in I}$ considérée (voir toutefois le corollaire 11). Si $f|_{K_i}$ désigne la restriction de f à K_i, il existe un système fondamental de voisinage de 0 dans A formé par les intersections finies des ensembles:

$$V_{i\,\varepsilon} = \{f \in A;\ \|f|_{K_i}\| \leqslant \varepsilon\}.$$

On supposera l'espace A ordonné par le cône A_+ des fonctions de A positives sur C. Ce cône est saillant car C engendre E. Le dual A' de l'espace A sera toujours muni de la topologie faible $\sigma(A', A)$ et de l'ordre dual de celui de A, son cône positif sera noté A'_+.