PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 78, No. 1, 1978

ALTERNIERENDE PRODUKTE IN FREIEN GRUPPEN

GERHARD ROSENBERGER

1. Einleitung. A. In [7] and [8] untersucht H. Zieschang das Problem, wann zwei alternierende Produkte in freien Gruppen verwandt sind. Bei Anwendungen und konkreten Problemen tritt aber oft die allgemeinere Frage auf:

Sei G freie Gruppe vom Rang $n \geqq 1$ mit den freien Erzeugenden $a_1, \cdots, a_n$ und

$$P(a_1, \cdots, a_n) = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] \in G$$

ein alternierendes Produkt in G. Sei X Untergruppe von G vom Rang $m \geqq 1$ und $P^\alpha(a_1, \cdots, a_n) \in X$ für ein $\alpha \geqq 1$. Wie läßt sich X durch $P(a_1, \cdots, a_n)$ beschreiben? Diese Frage wurde beispielsweise schon zum Teil beantwortet in [5] (der Fall $p = n$) und [7] (der Fall $p = 0$). Hier geben wir eine vollständige Antwort auf diese Frage.

Im zweiten Teil der Arbeit finden die Ergebnisse zu dieser Frage Anwendungen bei der Behandlung gewisser Untergruppenprobleme von freien Gruppen und bei der Beschreibung von Erzeugendensystemen einer Klasse von Gruppen. Insbesondere lösen wir für eine Klasse von Gruppen mit einer definierenden Relation das Isomorphieproblem in dem Sinn, daß wir in endlich vielen Schritten entscheiden können, ob eine beliebige Gruppe mit einer definierenden Relation zu einer Gruppe dieser Klasse isomorph ist oder nicht.

B. Diese Arbeit verwendet die Terminologie und Bezeichnungsweise von [4] und [9]. Es bedeute: $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ den Kommutator von $a, b \in G$ (G Gruppe). $\langle \cdots ; \cdots \rangle$ die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und Relationen. $(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ den größten gemeinsamen Teiler von $\beta_1, \cdots, \beta_k \in N$ ($k \geqq 1$).

2. Über Gleichungen in freien Gruppen. Sei $G = \langle a_1, \cdots, a_n ; \rangle$ ($n \geqq 1$) freie Gruppe vom Rang n mit den freien Erzeugenden $a_1, \cdots, a_n$ und

$$P(a_1, \cdots, a_n) = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p}[a_{p+1}, a_{p+2}] \cdots [a_{n-1}, a_n] \in G$$

ein alternierendes Produkt in G mit $0 \leqq p \leqq n$, $\alpha_i \geqq 1$ für $i = 1, \cdots, p$. Sei $\{x_1, \cdots, x_m\} \subset G$ ($m \geqq 1$) und X die von den $x_1, \cdots, x_m$ erzeugte Untergruppe von G. Sei $y^{-1}P^\alpha(a_1, \cdots, a_n)y \in X$ für ein $\alpha \neq 0$ und $y \in G$.