PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 85, No. 1, 1979

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GLEASON-KAHANE-ŻELAZKO POUR LES ALGÈBRES DE BANACH

BERNARD AUPETIT

Let A and B be complex Banach algebras with identity and suppose that B has a separating family of finite dimensional irreducible representations. If T is a linear mapping from A onto B such that x invertible in A implies Tx invertible in B then we have $Tx=(T1)Sx$, for every x in A, where S is a Jordan morphism.

1. **Introduction.** Presque simultanément A. Gleason [7] et J.-P. Kahane et W. Żelazko [10] démontrèrent le théorème suivant: soient A et B deux algèbres de Banach complexes, commutatives, avec unité, supposons que B est sans radical et que T est une application linéaire de A dans B telle que x inversible dans A implique Tx inversible dans B et telle que $T1 = 1$, alors T est un morphisme d'algèbre. W. Żelazko [16] a montré que l'hypothèse de commutativité sur A est inutile, cela résulte en fait très facilement du lemme de Herstein qui suit ou bien d'une petite remarque de A.M. Sinclair ([5], p. 79) ou bien du Lemme 5 de [3]. Pour une démonstration de ce théorème à l'aide du théorème de Liouville réel voir [6], p. 51-53.

Dans [11], page 12, I. Kaplansky s'est posé le problème plus général suivant: soient A et B deux algèbres de Banach complexes avec unité, T une application linéaire de A dans B telle que $T1 = 1$ et T envoie tout élément inversible en un élément inversible, alors T est-il un morphisme de Jordan, c'est-à-dire tel que $Tx^2 = (Tx)^2$ pour tout $x \in A$? Ce problème est partiellement justifié par le théorème de M. Marcus et R. Purves [12]: si T est une application linéaire de $M_n(K)$ sur lui-même, où K est un corps commutatif algébriquement clos, telle que det $Tx =$ det x, pour $x \in M_n(K)$, alors il existe un morphisme de Jordan S de la forme $S(x) = uxu^1$ ou $S(x) = ut_xu^{-1}$(où ${}^tx$ est la transposée de x) tel que $Tx = (T1)S(x)$, pour tout $x \in M_n(K)$. La partie délicate de la démonstration de ce théorème est de prouver que S est un morphisme de Jordan, le reste vient du théorème de Noether-Skolem ([8], p. 99) ou bien dans le cas de $M_n(C)$ de la démonstration analytique donnée dans [13], Théorème 2.5.19. Malheureusement le problème de I. Kaplansky est trop général pour être vrai, l'exemple suivant le prouve. On prend A la sous-algèbre de $M_4(C)$ formée par les matrices$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, où a, b, $c \in M_2(C)$