PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 91, No. 2, 1980

COMPACTS DE ROSENTHAL

GILLES GODEFROY

We study in this work a class of compacts spaces which extends in a natural way the class of metrizable compact spaces. We clarify stability properties of this class under the usual operations, and some topological properties of these compacts spaces. Applications are given on property ($\mathscr{C}$) of Banach spaces, on sub-algebras of $\ell^\infty(N)$, on Boolean sub-algebras of $\mathscr{P}(N)$.

REMERCIEMENTS. Je remercie vivement Michel Talagrand pour ses nombreuses et précieuses indications qui m'ont permis de mener ce travail à bien; cet article, sans son aide, n'aurait pas vu le jour.

On appelle dans ce travail "compacts de Rosenthal" les espaces compacts qui sont homéomorphes à des compacts de fonctions de première classe de Baire sur un espace métrique complet séparable P, la topologie considérée étant la topologie de la convergence ponctuelle sur l'espace P.

Les compacts de Rosenthal furent introduits par H. P. Rosenthal afin de caractériser les espaces de Banach séparables qui contiennent un sous-espace isomorphe à $\ell^1(N)$ (voir par example [10], [8]). Ils ont été ensuite étudiés en détail par J. Bourgain, D. H. Fremlin et M. Talagrand ([3]). Tout compact métrisable K est un compact de Rosenthal; en effet K apparaît comme un compact de fonctions continues sur l'espace métrique complet séparable $\mathscr{C}(K)$. Il existe des compacts de Rosenthal séparables non métrisables; citons-en quatre exemples:

— Le "compact de Helly" des fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même.

— Le compact $[0, 1] \times \{0, 1\}$ muni de l'ordre lexicographique ("intervalle éclaté").

— Le compact $K = [f\colon [0, 1] \to R \mid f(0) = 0,\ V_0^1 f \leqq 1\}$

— La boule unité du bidual d'un espace de Banach séparable ne contenant pas $\ell^1(N)$ et à dual non séparable ([7]), munie de la topologie pré-faible w^*.

Les compacts de Rosenthal forment donc une classe de compacts qui étend naturellement la classes des compacts métrisables, et qui est distincte de la classe des compacts d'Eberlein. Nous allons maintenant étudier cette classe plus en détail.

Dans un premier paragraphe, on va donner des caractérisations topologiques des compacts de Rosenthal séparables (*Remarque*: il