PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 94, No. 1, 1981

QUELQUES PROPPIETES DU COUPLE D'ESPACES VECTORIELS $(L^1m/H^{\infty\perp}, H^\infty)$

JACQUES CHAUMAT

Let H^∞ be a W^* closed subalgebra of $L^\infty(m)$ with identity. We generalize here some classical properties of the couple of linear vector spaces $(L^1(m), L^\infty(m))$ to the couple $(L^1(m)/H^{\infty\perp}, H^\infty)$. We obtain, for instance, a characterization of weakly relatively compact subsets of $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ analogous to the Dunford-Pettis theorem. To this end, we assume a legitimate hypothesis on the peak sets of H^∞.

1. Soit (S, Σ, m) un espace de probabilité et H^∞ une sous algèbre de $L^\infty(m) = L^\infty(S, \Sigma, m)$ fermée pour la topologie faible étoile [i.e., topologie $\sigma(L^\infty(m), L^1(m)]$ et contenant les constantes.

Notons $H^{\infty\perp}$ I'orthogonal de H^∞ dans $L^1(m)$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ les normes usuelles dans les espaces $L^1(m)$ et $L^\infty(m)$, et $\|\ \|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}}$ la norme quotient dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Pour une fonction g de H^∞ considérons l'élément Tg de $L^1(m)/H^{\infty\perp}$ défini par $\langle Tg, g'\rangle = \int \bar{g}g'dm$ pour toute fonction g' de H^∞. Remarquons que, si $\|g\|_\infty = 1$ alors $\|g\|_1^2 \leqq \|Tg\|_{L^1(m)/H^{\infty\perp}} \leqq \|g\|_1$. En conséquence, T est une application linéaire continue, injective et d'image dense de H^∞ dans $L^1(m)/H^{\infty\perp}$.

Notons M le spectre de Gelfand de l'algèbre uniforme $L^\infty(m)$, muni de la topologie de Gelfand. Alors, la transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de $L^\infty(m)$ sur l'algèbre $\mathscr{C}(M)$ des fonctions continues sur M à valeurs complexes; $\hat{f}$ désigne la transformée de Gelfand, d'une fonction f de $L^\infty(m)$. L'algèbre H^∞ s'identifie à une sous algèbre, $\hat{H}^\infty$, de $\mathscr{C}(M)$, fermée pour la norme de la convergence uniforme et contenant les constantes. Une forme linéaire l sur $L^\infty(m)$, continue, peut être représentée, de manière unique, par une mesure $\hat{l}$ borélienne, régulière, bornée sur M, vérifiant, pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, $\int \hat{f}d\hat{l} = \langle f, l\rangle$. En particulier, pour toute fonction h de $L^1(m)$, la mesure hm se représente sur M par la mesure $\widehat{hm}$, et on a, pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, $\int \hat{f}d\widehat{hm} = \int fhdm$; de plus, il est facile de voir que la mesure $\widehat{hm}$ est absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$; on écrira $\widehat{hm} = \hat{h}\hat{m}$; réciproquement une mesure sur M, absolument continue par rapport à la mesure $\hat{m}$, peut s'écrire $\widehat{hm}$ avec h dans $L^1(m)$. [voir [8] pages 17 – 19 et [7] pages 158-160].