PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 171, No. 2, 1995

CALCUL DU NOMBRE DE CLASSES DES CORPS DE NOMBRES

STÉPHANE LOUBOUTIN

Soit K/k une extension de corps de nombres telle que le quotient ζ_K/ζ_k de la fonction zêta de Dedekind ζ_K de K par celle ζ_k de k soit holomorphe dans tout le plan complexe (ce qui est par exemple le cas lorsque l'extension K/k est galoisienne). Nous développons un moyen de calcul numérique de la valeur au point 1 de ce quotient ζ_K/ζ_k. Une application essentielle de cette évaluation est le calcul numérique du nombre de classes relatif d'un corps K à multiplication complexe, en choisissant pour k le sous-corps totalement réel maximal de K. En particulier, nous illustrons notre méthode sur l'exemple de corps à multiplication complexe, quartiques et non galoisiens.

1. Notations. Soit **N** un corps de nombres de degré $n = r_1 + 2r_2$, où r_1 désigne bien évidemment le nombre de plongements réels et $2r_2$ le nombre de plongements complexes deux à deux conjugués de **N**. Nous notons ζ_N sa fonction zêta de Dedekind, $d(N)$ la valeur absolue de son discriminant, $\mathrm{Reg}(N)$ son régulateur et posons

$$A_N = 2^{-r_2} d(N)^{1/2} \pi^{-\left(r_1+2r_2\right)/2},$$

$$\lambda_N = \frac{2^{r_1} h(N)\mathrm{Reg}(N)}{w(N)} \quad \text{où } w(N) \text{ est le nombre de racines de l'unité de } \mathbf{N},$$

$$F_N(s) = A_N^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_N(s),$$

de sorte que $F_N(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ de résidu λ_N.

Soit K/k une extension de corps de nombres. Nous ne nous plaçons que dans des situations pour lesquelles la fonction $\Phi_{K/k} \overset{\text{def}}{=} \zeta_K/\zeta_k$ est holomorphe dans tout le plan complexe. Nous voulons un moyen de calcul numérique de la valeur $\Phi_{K/k}(1)$. Les applications que nous visons étant alors :