Koszul, J. L.
Osaka J. Math.
2 (1965), 285-290

VARIÉTÉS LOCALEMENT PLATES ET CONVEXITÉ

JEAN LOUIS KOSZUL

(Reçu le 20 Août, 1965)

Soient E un espace affine réel de dimension n et x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ des coordonnées linéaires sur E. Soit Ω un ouvert homogène de E, c'est à dire un ouvert sur lequel un sous-groupe G du groupe de transformations bijectives affines de E opère transitivement. Si il existe sur Ω une forme différentielle fermée $\alpha=\sum_i a_i dx_i$ invariante par G et telle que la forme $\sum_{i,j} \frac{da_i}{dx_j} dx_i dx_j$ soit définie positive en tout point de Ω alors Ω est un convexe de E ne contenant pas de droite. La démonstration de ce résultat utilise essentiellement le fait qu'une primitive de α tend vers $+\infty$ aux points frontières de Ω. Cette propriété de α est démontrée dans [2] en observant que, par suite de l'invariance de α par G, les coefficients a_i sont des fractions rationnelles en les x_i. On se propose dans cet article de montrer que le comportment des primitives de α aux points frontière de Ω peut s'étudier avec des hypotèses beaucoup moins restrictives qui sont vérifiées par exemple lorsque, Ω n'étant plus homogène, un sous-groupe G' du groupe des transformations affines de E opère dans Ω de telle sorte que $G'\backslash\Omega$ soit quasi-compact. Il existe des rapports étroits entre cette étude et certains résultats de Kobayashi sur le volume de Bergmann der variétes complexes [1]. On obtient ainsi une généralisation du théorème cité plus haut et on en déduit une caractérisation des variétés munies d'une connexion linéaire de courbure et de torsion nulles dont le revêtement universel est isomorphe à un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans un espace affine.

1. Soit M une variété différentiable connexe munie d'une connexion linéaire de torsion nulle. On notera D la dérivation covariante définie par cette connexion. Soient TM la variété des vecteurs de M et $\mathcal{E}$ l'ouvert de TM domaine de définition de l'application exponentielle. Pour tout $y\in TM$ soit $\lambda(y)$ la borne supérieure, finie ou infinie, des $t\in \mathrm{R}$ tels que $ty\in\mathcal{E}$. On notera $I(y)$ l'intervalle ouvert $]-\lambda(-y), \lambda(y)[$ de $\boldsymbol{R}$. On désignera par P le champ de vecteurs canonique sur $\boldsymbol{R}$, c'est à