Lions J. L.
Osaka Math. J.
15 (1963), 131-142.

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

PAR

JACQUES LOUIS LIONS

Introduction

On considère l'équation (différentielle opérationnelle)

$$(*) \qquad \frac{du}{dt}(t)+A(t)u(t) = f(t)\,,$$

avec $u(0)$ donné, où les $A(t)$ forment une famille d'opérateurs *non bornés* dans un espace *H de Hilbert*.

Des résultats assez complets sont connus lorsque les domaines $D(A(t))$ des $A(t)$ sont *indépendants de t*, et cela même lorsque H est un espace de Banach; Cf. [1], [10], [11]. Si l'on fait des hypothèses sur les $A(t)$ impliquant que l'on peut, dans un sens ou dans un autre, définir les puissances $A(t)^\theta$ de $A(t)$, $0<\theta<1$, et si l'on suppose que *pour un θ convenable, les domaines $D(A(t)^\theta)$ des $A(t)^\theta$ sont indépendants de t*, alors la théorie est également dans un état assez satisfaisant; [9] pour le cas où H est un Hilbert, [2] pour le cas Banach-Pour le cas hilbertien, et $\theta=\frac{1}{2}$, cf. [3], [6], [7].

Lorsque les $A(t)$ sont des opérateurs différentiels, $D(A(t))$ étant défini par des conditions aux limites, on a montré dans [8]-avec $H=L^2(\Omega)$; le résultat est très probablement encore vrai, mais non démontré, si $H=L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, $p\neq 2$-que "souvent" $D(A(t)^\theta)$ est indépendant de t pour θ assez petit, mais on a également donné des exemples où $D(A(t)^\theta)$ dépend de t, quel que soit θ. Il est donc nécessaire de développer une théorie pour (*) lorsque $D(A(t))$ et $D(A(t)^\theta)$ quel que soit θ, $0<\theta<1$, *dépendent effectivement* de t.

C'est ce qui est fait dans [5], [6] chap. VII, lorsque H est un espace de Hilbert, en supposant que la "*partie principale*" *de $A(t)$ est auto-adjointe* et *dépend différentiablement de t* (dans un sens convenable).

Dans [4], M. M. Kato et Tanabe ont donné des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé, H étant un espace de Banach;