Nomizu, K.
Osaka Math. J.
**14** (1962), 45-51.

# SUR LES ALGÈBRES DE LIE DE GÉNÉRATEURS DE KILLING ET L'HOMOGÉNÉITÉ D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE*

Dédié à Monsieur le professeur K. Shoda à l'occasion
de son soixantième anniversaire de naissance

PAR

KATSUMI NOMIZU

Le présent mémoire est essentiellement une suite du travail [2] dans lequel on a introduit la notion de générateur de Killing en chaque point d'une variété riemannienne. On démontre d'abord que l'ensemble des générateurs de Killing $\mathfrak{k}(x)$ forme une algèbre de Lie et étudie la structure de cette algèbre de Lie.

Ensuite, après avoir discuté des variétés riemanniennes localement homogènes, on obtiendra des résultats qui généralisent un théorème de [2] ainsi qu'un résultat de I. M. Singer [3] concernant l'homogénéité des variétés riemanniennes. On y utilisera un lemme de A. Nijenhuis [1].

Toutes les notations de [2] seront réservées.

**1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}(x)$.** Soit $M$ une variété différentiable munie d'une métrique riemannienne définie-positive $g$. Pour chaque point $x$ de $M$, $T(x)$ et $E(x)$ désignent l'espace tangent en $x$ et l'algèbre de Lie des endomorphismes antisymétriques de $T(x)$ muni de produit scalaire $g_x$ respectivement. Un générateur de Killing en $x$ est un élément $(X, A)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}(x)=T(x)+E(x)$ (somme directe) qui satisfait à la condition

$$(1)\qquad (\nabla_X+A)\cdot(\nabla^m R)=0 \qquad \text{pour tout} \quad m=0,1,2,\cdots,$$

où $\nabla^m R$ est la différentielle covariante d'ordre $m$ du champ de tenseurs de courbure $R$ de $M$. L'ensemble de tous les générateurs de Killing en $x$ se note $\mathfrak{k}(x)$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}(x)$ admet une opération de crochet définie par

$$(2)\qquad [(X, A), (Y, B)]=(AY-BX,\ -R(X, Y)+[A, B]),$$

* Ce travail a été financié partiellement par NSF. Grant No. 14032. L'énoncé des résultats a été présenté à Amer. Math. Soc. le 7 novembre, 1961.