Journal of Mathematics,
Osaka City University,
Vol. 13, No. 2

Sur un théorème du balayage

par Shirô OGAWA

(*Received Nov. 15, 1962*)

1. Introduction

Dans la théorie du potentiel d'ordre α, M. Riesz [5] a démontré à l'aide de la transformation de Kelvin que, étant donné un ensemble fermé F, on peut associer à toute masse ponctuelle une mesure balayée sur F. N. Ninomiya [3] a résolu le problème du balayage de la manière suivante: un noyau positive, continu et symétrique est balayable, pourvu qu'il satisfasse au principe de domination. Mais il n'a traité que le balayage pour un ensemble compact. Dans ce travail on va traiter le balayage pour un ensemble fermé (non compact) relatif aux potentiels pris par rapport au noyau positive, continu et symétrique s'annulant à l'infini et satisfaisant aux principes de domination et du maximum dilaté.

2. Préliminaires

Soit E un espace localement compact tel qu'il soit σ-compact. Par un noyau symétrique sur E on comprend une application $\Phi(x, y)$ de $E\times E$ dans $(0, +\infty)$, continue et symétrique en x et y, $\Phi(x, x)$ pouvant être $+\infty$. Le potentiel et l'énergie d'une mesure μ sur E pris par rapport au noyau Φ sont définis par

$$U^{\mu}(x) = \int \Phi(x, y)d\mu(y)$$

et

$$I(\mu) = \iint \Phi(x, y)d\mu(y)d\mu(x)$$

respectivement. Nous exigeons de Φ l'hypothèse suivante: il existe une mesure positive $\lambda\neq 0$ à support compact $S\lambda$, telle que le potentiel $U^{\lambda}(x)$ soit fini et continu dans E.

Nous considérons les ensembles suivants,

$$\mathscr{E}^{+}\equiv\{\mu\,;\,\mu\geqq 0 \text{ et } I(\mu)<+\infty\},$$

$$\mathscr{F}^{+}\equiv\{\lambda\,;\,\lambda\geqq 0,\ S\lambda \text{ compact et } U^{\lambda}(x) \text{ fini et continu }\}$$

et

$$\mathscr{G}^{+}\equiv\{\nu\,;\,\nu\geqq 0 \text{ et } U^{\nu}(x)\not\equiv +\infty\}.$$

Lorsqu'un noyau s'annule à l'infini, non seulement toute mesure de masse totale finie (naturellement, toute mesure à support compact) appartient à $\mathscr{G}^{+}$ mais encore il est possible que des mesures de masse totale infinie appartiennent à $\mathscr{G}^{+}$. On dira désormais qu'une propriété a lieu "à peu près partout (à p. p. p.)",