Kaplan, P., Williams, K.S. et Hardy, K.
Osaka J. Math.
23 (1986), 479–489

DIVISIBILITE PAR 16 DU NOMBRE DES CLASSES AU SENS STRICT DES CORPS QUADRATIQUES REELS DONT LE DEUX-GROUPE DES CLASSES EST CYCLIQUE

Pierre KAPLAN, Kenneth S. WILLIAMS(1)
et Kenneth HARDY(2)

(Received March 11, 1985)

1. Introduction

Soit $m>1$ un entier sans diviseur carré, tel que le deux-groupe $H_2(m)$ des classes d'idéaux au sens strict de $Q(\sqrt{m})$ soit cyclique d'ordre au moins 8; soit $h(m)\equiv 0 \pmod 8$ le nombre des classes d'idéaux au sens strict de $Q(\sqrt{m})$. Pour un tel nombre m il y a deux possibilités ([1] et [2]):

a) $m=pq$, p et q nombres premiers $\equiv 1 \pmod 4$ tels que

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)_4=\left(\frac{q}{p}\right)_4=1\,,$$

b) $m=2p$, p nombre premier $\equiv 1 \pmod{16}$ tel que $\left(\frac{2}{p}\right)_4=1$.

Rappelons que les facteurs principaux de $Q(\sqrt{m})$ sont les deux diviseurs sans diviseur carré du discriminant de $Q(\sqrt{m})$ représentés par la forme X^2-mY^2.

Nous obtenons les résultats nouveaux suivants:

Théorème 1. *Soit p et q deux nombres premiers tels que $h(pq)\equiv 0 \pmod 8$. Les équations*

$$Z^2=pX^2-qY^2\,,\quad Z'^2=qX'^2-pY'^2 \tag{1.1}$$

ont des solutions en entiers rationnels X, Y, Z, X', Y', Z' tels que

$$\begin{cases}(X,\,Y)=(X',\,Y')=1\,,\\ \left(\frac{Z}{p}\right)=\left(\frac{Z'}{p}\right)=\left(\frac{Z}{q}\right)=\left(\frac{Z'}{q}\right)=1\,,\qquad Z>0,\ Z'>0\,,\\ X\equiv\frac{p+1}{2}\pmod 4\,,\ X'\equiv\frac{q+1}{2}\pmod 4\,,\ Z\equiv Z'\equiv 1\pmod 2\,.\end{cases} \tag{1.2}$$

(1) Recherche effectuée avec le soutien du Natural Sciences and Engineering Research Council Canada Grant $n°$ A-7233.

(2) Recherche effectuée avec le soutien du Natural Sciences and Engineering Research Council Canada Grant $n°$ A-8049.