Koszul, J.L.
Osaka J. Math.
15 (1978), 547-551

VARIANTE D'UN THÉOREME DE H. OZEKI

JEAN LOUIS KOSZUL

(Received July 25, 1977)

On démontre dans ce qui suit le résultat suivant:

Théorème. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive sur un corps de caractéristique nulle. Si $\mathfrak{g}$ est somme directe de deux sous-algèbres $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ réductives dans $\mathfrak{g}$, alors g est somme directe de deux idéaux $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ tels que la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{b}_i$ induise un isomorphisme de $\mathfrak{a}_i$ sur $\mathfrak{b}_i$ $(i=1, 2)$.*

L'article de Ozeki cité ([3]) donne une démonstration de ce résultat dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie compacte sur R. Sa démonstration fait appel à des arguments de nature topologique. La démonstration donnée ici est algébrique.

Etant donnée une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{a}$, on notera $D\mathfrak{a}$ son idéal dérivé et $\rho(\mathfrak{a})$ le nombre des idéaux figurant dans les décompositions de $\mathfrak{a}$ en somme directe d'idéaux minimaux.

Lemme 1. *Les hypothèses étant celles du Théorème, on a*

$$D\mathfrak{g} = D\mathfrak{a}_1 + D\mathfrak{a}_2 \tag{1}$$

$$\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{a}_1) + \rho(\mathfrak{a}_2)\,. \tag{2}$$

Soit p la dimension de $\mathfrak{a}_1$ et soit $f_1, \cdots, f_p$ une base de l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ qui sont nulles sur $\mathfrak{a}_2$. La forme $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots f_p$ est une base de l'espace $C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$ des p-cochaines sur $\mathfrak{g}$ qui sont basiques par rapport à $\mathfrak{a}_2$. C'est un cocycle du complexe $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$ dont la classe engendre l'espace $H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$. En composant l'homomorphisme canonique $\varphi: H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2) \to H^*(\mathfrak{g})$ et l'homomorphisme $\chi: H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(\mathfrak{a}_1)$ défini par l'injection de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{g}$, on obtient un homomorphisme $\chi \circ \varphi: H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2) \to H^*(\mathfrak{a}_1)$. Puisque $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots f_p$ a pour restriction à $\mathfrak{a}_1$ une base de l'espace $C^p(\mathfrak{a}_1)$ des p-cochaines sur $\mathfrak{a}_1$, l'homomorphisme $\chi \circ \varphi$ applique $H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$ sur $H^p(\mathfrak{a}_1)$. Puisque $\mathfrak{a}_1$ est unimodulaire, $H^p(\mathfrak{a}_1)$ est de dimension 1. D'autre part, $\mathfrak{a}_2$ étant réductive dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ étant unimodulaire, tout idéal non nul de $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$ contient $H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2)$ (cf. [2], Th. 12.1). On voit donc que $\chi \circ \varphi$ est injectif. Puisque $\mathfrak{a}_1$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, l'image de φ est une sous-algèbre de $H^*(\mathfrak{g})$ engendrée par des éléments primitifs ([2] Th. 13.2). Or χ applique les éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{g})$ sur des éléments primitifs de