Osaka Mathematical Jounal
Vol. 1, No. 2. July, 1949.

Zur Arithmetik in Schiefringen. I.

Von Keizo ASANO.

In einer früheren Arbeit) habe ich die arithmetische Idealtheorie in Schiefringen untersucht. Dort habe ich die Idealtheorie in hyperkomplexen Systemen von SPEISER, BRANDT, ARTIN und HASSE [2]) axiomatisch begründet. Die vorliegende Arbeit besteht aus den Ergänzungen und den weiteren Untersuchungen der früheren Arbeit.

S sei ein Schiefring mit Einselement. Wir nennen die Einheiten von S reguläre Elemente. Ein Teilring $\mathfrak{o}$ von S heisst eine Ordnung, wenn $\mathfrak{o}$ 1 enthält und wenn es für jedes $x \in S$ reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $x\alpha \in \mathfrak{o}$ und $\beta x \in \mathfrak{o}$ ist. Ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ist definiert als ein reguläre Elemente enthaltender $\mathfrak{o}$-Linksmodul ($\mathfrak{o}$-Rechtsmodul) $\mathfrak{a}$ aus S, so dass $\mathfrak{a}\lambda \subseteq \mathfrak{o}$ ($\lambda\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$) für ein reguläres λ ist. Zwei Ordnungen $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}'$ von S heissen einander äquivalent, wenn es reguläre Elemente λ, μ, λ', μ' gibt, so dass $\lambda\mathfrak{o}'\mu \subseteq \mathfrak{o}$ und $\lambda'\mathfrak{o}\mu' \subseteq \mathfrak{o}'$ ist. Eine Maximalordnung ist eine Ordnung, die unter den einander äquivalenten Ordnungen maximal ist. Ist $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S, so gibt es nicht immer ein beliebiges Element $x \in S$ enthaltendes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Wenn dies immer der Fall ist, d. h. wenn es für jedes $x \in S$ reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $x\mathfrak{o}\alpha \subseteq \mathfrak{o}$ und $\beta\mathfrak{o}x \subseteq \mathfrak{o}$ ist, so heisst $\mathfrak{o}$ eine reguläre Ordnung. Nach einigen Vorbereitungen in § 1 über Ordnungen und Ideale werden wir in § 2 zweiseitige Ideale bezüglich einer Maximalordnung $\mathfrak{o}$ untersuchen. Zwei zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heissen quasigleich, wenn $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ ist. Die Klassen quasigleicher Ideale bilden eine archimedische Verband-geordnete Gruppe. Sie ist also als eine Gruppe abelsch und als ein Verband distributiv. Der Artinsche Verfeinerungssatz ist eine unmittelbare Folgerung des Jordan-Hölder-Schreierschen Satzes in Verbandtheorie. Die Hen-

---

[1]) K. ASANO, Arithmetische Idealthorie in nichtkommutativen Ringen, Japan. Journ. Math. **16** (1939), S. 1-36. Vgl. auch N. JACOBSON, Theory of rings (1943).

[2]) Vgl. M. DEURING, Algebren, Ergebnisse d. Math. (1935)