

Über Hauptidealringe mit Kettensatz

Von Keizo ASANO

Es sei $\mathfrak{o}$ ein halbprimärer Ring mit Einselement, dessen Radikal $\mathfrak{N}$ nilpotent ist; der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{N}$ ist also ein halbeinfacher Ring. Nach G. Köthe¹⁾ heisst $\mathfrak{o}$ einreihig, wenn $\mathfrak{o}$ die folgenden Eigenschaften hat:

- 1) Es gilt der Doppelkettensatz für Linksideale.
- 1)' Es gilt der Doppelkettensatz für Rechtsideale.
- 2) $\mathfrak{o}$ ist die direkte Summe von primären Ringen.
- 3) Jedes vom primitiven Idempotent e erzeugte Linksideal $\mathfrak{o}e$ besitzt (als $\mathfrak{o}$ -Modul) nur eine einzige Kompositionsreihe.
- 3)' Jedes vom primitiven Idempotent e erzeugte Rechtsideal $e\mathfrak{o}$ besitzt nur eine einzige Kompositionsreihe.

Wenn $\mathfrak{o}$ nur die Eigenschaften 1), 2), 3) hat, so heisst $\mathfrak{o}$ linksseitig einreihig.

In der vorliegenden Note bemerken wir, dass $\mathfrak{o}$ dann und nur dann linksseitig einreihig ist, wenn jedes Linksideal von $\mathfrak{o}$ ein Hauptlinksideal ist. Wir werden ferner einige Charakterisierungen des einreihigen Rings angeben.

§ 1 Einige Hilfssätze

Zunächst seien einige Hilfssätze vorausgeschickt. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Schieferring mit Einselement, und $\mathfrak{N}$ sei das maximale zweiseitige Nilideal, das aus der Vereinigungsmenge aller zweiseitigen Nilideale von $\mathfrak{o}$ besteht. Gilt für die $\mathfrak{N}$ enthaltenden Linksideale der Vielfachenkettensatz, so ist $\mathfrak{o}$ halbprimär, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{N}$ ist halbeinfach und $\mathfrak{N}$ ist das Radikal von $\mathfrak{o}$. Gilt ferner der Vielfachenkettensatz für Linksideale

¹⁾ G. Köthe, Verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit hyperkomplexem Operatorenring. Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 31-44. Vgl. auch K. Asano, Über verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit hyperkomplexem Operatorenring und ihre Anwendungen, Japan. Math. **15** (1939).