Jellouli, M.
Osaka J. Math.
38 (2001), 619–647

ÉQUATION D'EULER SUR UN DOMAINE EXTÉRIEUR. EXISTENCE LOCALE ET APPARITION DE SINGULARITÉS

PAR MOHAMED JELLOULI

(Reçu le 21 mai, 1997)

Introduction

Dans ce travail, on étudie l'équation d'Euler pour un fluide parfait incompressible remplissant l'extérieur d'un borné de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on établit un résultat d'existence locale en temps (Théorème 2.1). Puis on prouve un critère d'explosion de la solution (Théorème 2.3).

L'existence locale a fait l'objet de nombreux travaux : C. Bardos et U. Frisch [3] pour un ouvert quelconque (borné ou non) avec des données hlderiennes, R. Temam [18] pour un ouvert borné avec des données Sobolev, et plus récemment J.Y. Chemin [9]. On pourra d'ailleurs consulter J.Y. Chemin [8] pour une bibliographie plus complète.

En 1986, K. Kikuchi [16], établit un résultat d'existence locale en temps, pour l'équation d'Euler, sur l'extérieur d'un ouvert borné. Il le fait dans $\mathcal{M}^p_{1,\delta}$ (voir définition au paragraphe 1) espace de Sobolev à poids, bien adapté à ce type de problème.

En utilisant la méthode des caractéristiques de J.Y. Chemin (qui profite complètement de la structure "champ de vecteurs" de l'équation), on établit le même résultat dans $\mathcal{M}^p_{s,\delta}(s \geq 2)$ et on complète ainsi le théorème de K. Kikuchi.

De manière presque parallèle, l'étude des solutions maximales de l'équation d'Euler, a été, pendant de longues années, l'objet de recherches actives. Nous citerons essentiellement J.T. Beale, T. Kato et A. Majda [4] et H. Bahouri et B. Dehman [2]. Ces auteurs montrent, dans leurs cadres respectifs, que c'est le tourbillon qui gouverne l'existence ou l'explosion de la solution (tout au moins dans l'espace de régularité considèré).

Nous établissons dans ce travail un résultat analogue. La preuve repose sur une étude précise des champs de vecteurs à coefficients dans $\mathcal{M}^p_{s,\delta}$.

1. Préliminaires

1.1. Notations Dans tout le travail nous utiliserons les notations suivantes. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le point courant de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on posera $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha$. De plus $\triangle$ désignera l'opérateur de Laplace