ÜBER QUADRATISCHE CHARAKTERSUMMEN

TOMIO KUBOTA

Es gibt zwei verschiedene Arten von Summen, die gewöhnlich Gausssche Summen genannt werden. Die eine Summe wird von einer Zahl $\omega \neq 0$ eines algebraischen Zahlkörpers F bestimmt. Sei nämlich $\mathfrak{d}$ die Differente von F und sei $\omega\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ mit zueinander primen, ganzen Idealen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von F. Dann hat die Summe die Gestalt

$$C(\omega) = \sum_{\mu \bmod \mathfrak{a}} e(\omega\mu^2), \qquad (\mu\text{: ganz}), \tag{1}$$

wo

$$e(u) = e^{2\pi i S_{F/\mathbf{Q}} u} \qquad \text{für } u \in F$$

ist, und dabei $\mathbf{Q}$ bzw. S der rationale Zahlkörper bzw. die absolute Spur bedeutet. Eine grundlegende Forschung dieser Summen findet man etwa in Hecke [3].

Die andere Summe wird dagegen von einem Kongruenzcharakter χ der Idealgruppe von F bestimmt. Es sei $\mathfrak{f}$ der (endliche) Führer von χ und β eine totalpositive Zahl von F, für die die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}\mathfrak{f}_\chi} = (\beta), \qquad (\mathfrak{h}, \mathfrak{f}_\chi) = 1,$$

mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{h}$ von F besteht. Die in Rede stehende Summe ist dann

$$\tau(\chi) = \chi(\mathfrak{h}) \sum_{z \bmod \mathfrak{f}_\chi} \chi(z) e(\beta z), \qquad (z\text{: } \mathfrak{f}_\chi\text{-ganz, totalpositiv}), \tag{2}$$

wo $\chi(z)$ statt $\chi((z))$ steht und $\chi(z) = 0$ für $(z, \mathfrak{f}_\chi) \neq 1$ ist. Auch trat diese Summe in die Arbeiten Heckes bei der Funktionalgleichung der L-Reihen ein (vgl. Hasse [1]). Nach Hasse [2] bekommt die Summe (2) eine andere Form

$$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod \mathfrak{d}^{-1}} \chi(\mathfrak{x})\, e(x), \tag{3}$$

wo x ein vollkommenes, totalpositives Restsystem von $(\mathfrak{d}\mathfrak{f}_\chi)^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}$ durchläuft

Received May 19, 1961.