

ANWENDUNG JACOBISCHER THETAFUNKTIONEN AUF DIE POTENZRESTE

TOMIO KUBOTA

Eisenstein führte in seiner Abhandlung [1] einen durchsichtigen, analytischen Beweis des Reziprozitätsgesetzes der Potenzreste im rationalen und Gaußschen Zahlkörper. Zur kurzen Fassung seiner Methode im rationalen Fall, seien m und n positive ganzrationale Zahlen und sei

$$f(z) = e^{2\pi iz} - e^{-2\pi iz}.$$

Dann ist ersichtlich $f(-z) = -f(z)$ und zudem gilt die folgende Multiplikationsformel

$$f(nz) = f(z) f\left(z + \frac{1}{n}\right) \cdots f\left(z + \frac{n-1}{n}\right).$$

Ist andererseits M eine Menge ganzrationaler Zahlen, für die die Vereinigung $\{0, M, -M\}$ ¹⁾ ein vollkommenes Restsystem mod. m bildet, so ergibt sich nach dem Gaußschen Lemma²⁾

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_{a \in M} \frac{f\left(\frac{na}{m}\right)}{f\left(\frac{a}{m}\right)}.$$

Wenn wir wie die Menge M eine gleichbedeutende Menge N in bezug auf n auswählen, so gilt auch

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{b \in N} \frac{f\left(\frac{mb}{n}\right)}{f\left(\frac{b}{n}\right)}.$$

Wegen der obigen Multiplikationsformel ist nun

Received May 19, 1961.

¹⁾ Allgemein bedeutet aM die Menge aller am mit $m \in M$. Insbesondere ist $-M = (-1)M$.

²⁾ In dieser Hinsicht siehe Reichardt [4].